ISSN 1991-8615 (print)
ISSN 2310-7081 (online)

ВЕСТНИК
САМАРСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ТЕХНИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

Серия «Физико-математические науки»

Т. 27, № 2 – 2023

Journal of Samara State Technical University
Ser. Physical and Mathematical Sciences

Вестник Самарского государственного технического университета

ISSN 1991–8615 (print)

ISSN 2310–7081 (online)

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ

Издаётся с 1996 г.

Выходит 4 раза в год

Июнь — 2023

Серия
«ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ» (Т. 27, № 2/71 – 2023)

Главный редактор В. П. Радченко — д.ф.-м.н., проф. (Самара, Россия)
Заместитель главного редактора А. И. Жданов — д.ф.-м.н., проф. (Самара, Россия)
Отв. секретарь М. Н. Саушкин — к.ф.-м.н., доц. (Самара, Россия)
Отв. секретарь Е. В. Мурашкин — к.ф.-м.н. (Москва, Россия)
Секретарь Е. А. Козлова — к.ф.-м.н. (Самара, Россия)

Редакционный совет:
- С. А. Авдонин — д.ф.-м.н., проф. (Фэрбенкс, Аляска, США)
- Б. Д. Аннин — акад. РАН, д.ф.-м.н., проф. (Новосибирск, Россия)
- А. А. Буренин — чл. кор. РАН, д.ф.-м.н., проф. (Комсомольск-на-Амуре, Россия)
- Р. Вельмураган — доктор наук (Ченнай, Индия)
- С. П. Верёвкин — д.х.н., проф. (Росток, Германия)
- Ш. Иматани — доктор наук (Киото, Япония)
- О. И. Маричев — д.ф.-м.н., проф. (Ларами, Вайоминг, США)
- В. П. Матвеенко — акад. РАН, д.т.н., проф. (Пермь, Россия)
- П. В. Севастьянов — д.т.н., проф. (Ченстохова, Польша)

Редакционная коллегия:
- В. Н. Акопян — д.ф.-м.н., проф. (Ереван, Армения)
- А. П. Амосов — д.ф.-м.н., проф. (Самара, Россия)
- А. В. Боровских — д.ф.-м.н., проф. (Москва, Россия)
- Л. А. Игумнов — д.ф.-м.н., проф. (Нижний Новгород, Россия)
- Ф. дель Изола — д. н., проф. (Рим, Италия)
- В. А. Ковалёв — д.ф.-м.н., проф. (Москва, Россия)
- А. И. Кожанов — д.ф.-м.н., проф. (Новосибирск, Россия)
- В. А. Кудинов — д.ф.-м.н., проф. (Самара, Россия)
- Д. С. Лисовенко — д.ф.-м.н. (Москва, Россия)
- А. Н. Миронов — д.ф.-м.н., проф. (Елабуга, Россия)
- Е. Ю. Просвиряков — д.ф.-м.н., (Екатеринбург, Россия)
- Л. С. Пулькина — д.ф.-м.н., проф. (Самара, Россия)
- Ю. Н. Радаев — д.ф.-м.н., проф. ((Москва, Россия)
- Е. В. Радкевич — д.ф.-м.н., проф. (Москва, Россия)
- А. В. Саакян — д.ф.-м.н., проф. (Ереван, Армения)
- К. Б. Сабитов — д.ф.-м.н., проф. (Стерлитамак, Россия)
- Л. А. Сараев — д.ф.-м.н., проф. (Самара, Россия)
- А. П. Солдатов — д.ф.-м.н., проф. (Москва, Россия)
- В. В. Стружанов — д.ф.-м.н., проф. (Екатеринбург, Россия)
- А. И. Хромов — д.ф.-м.н., проф. (Комсомольск-на-Амуре, Россия)

НАУЧНОЕ ИЗДАНИЕ

Вестник Самарского государственного технического университета.
Серия «Физико-математические науки» (Т. 27, № 2/71 – 2023)

Учредитель — ФГБОУ ВО «Самарский государственный технический университет» 443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244

Редактор Е. С. Захарова

Выпускающий редактор Е. В. Абрамова

Компьютерная вёрстка М. Н. Саушкин, О. С. Афанасьева, Е. Ю. Арланова

Адрес редакции и издателя:
ФГБОУ ВО «СамГТУ»,
443100, г. Самара,
ул. Молодогвардейская, 244

Тел.: +7 (846) 337 04 43
Факс: +7 (846) 278 44 00

E-mail: vsgtu@samgtu.ru
URL: http://www.mathnet.ru/vsgtu

Оригинал-макет изготовлен
на кафедре прикладной математики
и информатики СамГТУ

Свидетельство о регистрации
ПИ № ФС 77–66685 от 27.07.2016.
Федеральная служба по надзору
в сфере связи информационных
технологий и массовых коммуникаций

Подписано в печать 30 июня 2023 г.
Дата выхода в свет 17 июля 2023 г.
Формат 70×108 $^1/_{16}$.
Усл. печ. л. 15.85. Уч.-изд. л. 15.82.
Тираж 500 экз. Рег. № 143/23.
Заказ № 244.

Отпечатано в типографии
Самарского государственного
технического университета

443100, г. Самара,
ул. Молодогвардейская, 244.

Журнал индексируется в Web of Science Core Collection (Emerging Sources Citation Index), Scopus, Russian Science Citation Index, Zentralblatt MATH, DOAJ и входит в ядро Российского индекса научного цитирования.

Журнал включен в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук, по научным специальностям и соответствующим им отраслям науки:
• 1.1.2 – Дифференциальные уравнения и математическая физика (физико-математические науки);
• 1.1.8 – Механика деформируемого твердого тела (физико-математические науки);
• 1.2.2 – Математическое моделирование численные методы и комплексы программ (физико-математические науки).

Полнотекстовый доступ к статьям журнала осуществляется на Общероссийском математическом портале (http://www.mathnet.ru), портале научных журналов «Эко-Вектор» (https://journals.eco-vector.com), сайтах научных электронных библиотек eLibrary.ru (http://elibrary.ru) и КиберЛенинка (http://cyberleninka.ru).

© Коллектив авторов, 2023
© СамГТУ, 2023 (составление, дизайн, макет)

Контент публикуется на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru)

Подписной индекс в каталоге «Пресса России» 18108 Цена свободная

Journal of Samara State Technical University

ISSN 1991–8615 (print)
ISSN 2310–7081 (online)
SCIENTIFIC JOURNAL
Published since 1996
4 issues per year
June — 2023

Ser. Physical & Mathematical Sciences, 2023, vol. 27, no. 2

Founder — Samara State Technical University, Samara, 443100, Russian Federation

Editor-in-Chief V. P. Radchenko (Samara, Russian Federation)
Deputy Editor-in-Chief A. I. Zhdanov (Samara, Russian Federation)
Executive Secretary M. N. Saushkin (Samara, Russian Federation)
Executive Secretary E. V. Murashkin (Moscow, Russian Federation)
Secretary E. A. Kozlova (Samara, Russian Federation)

Editorial Council:
- B. D. Annin (Novosibirsk, Russian Federation)
- S. A. Avdonin (Fairbanks, Alaska, USA)
- A. A. Burenin (Komsomolsk-on-Amur, Russian Federation)
- Shõji Imatani (Kyoto, Japan)
- O. I. Marichev (Laramie, Wyoming, USA)
- V. P. Matveenko (Perm, Russian Federation)
- P. V. Sevastiyanov (Częstochowa, Poland)
- Ramachandran Velmurugan (Chennai, India)
- S. P. Verevkin (Rostock, Germany)

Editorial Board:
- A. P. Amosov (Samara, Russian Federation)
- A. V.Borovskikh (Moscow, Russian Federation)
- F. dell'Isola (Rome, Italy)
- V. N. Hakobyan (Yerevan, Armenia)
- L. A. Igumnov (N. Novgorod, Russian Federation)
- A. I. Khromov (Komsomolsk-on-Amur, Russian Federation)
- V. A. Kovalev (Moscow, Russian Federation)
- A. I. Kozhanov (Novosibirsk, Russian Federation)
- V. A. Kudinov (Samara, Russian Federation)
- D. S. Lisovenko (Moscow, Russian Federation)
- A. N. Mironov (Elabuga, Russian Federation)
- E. Yu. Prosviryakov (Ekaterinburg, Russian Federation)
- L. S. Pulkina (Samara, Russian Federation)
- Yu. N. Radayev (Moscow, Russian Federation)
- E. V. Radkevich (Moscow, Russian Federation)
- K. B. Sabitov (Sterlitamak, Russian Federation)
- A. V. Sahakyan (Yerevan, Armenia)
- L. A. Saraev (Samara, Russian Federation)
- A. P. Soldatov (Moscow, Russian Federation)
- V. V. Struzhanov (Ekaterinburg, Russian Federation)

Edited by E. S. Zakharova, E. V. Abramova
Compiled and typeset by M. N. Saushkin, O. S. Afanas'eva,
E. Yu. Arlanova

The Editorial Board Address:

Dept. of Applied Mathematics and Computer Science,
Samara State Technical University,
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russian Federation

Phone: +7 (846) 337 04 43
Phax: +7 (846) 278 44 00
E-mail: vsgtu@samgtu.ru
URL: http://www.mathnet.ru/eng/vsgtu

Printed at the Printing-office of Mikhail Fursov,
14A-M, Zastavskay st., Saint Petersburg, 196084, Russian Federation
Phone: +7 (812) 646 33 77

The journal covered in Web of Science Core Collection (Emerging Sources Citation Index), Zentralblatt MATH, Scopus, Russian Science Citation Index, and DOAJ.

The full-text electronic version of journal is hosted by the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru (http://www.mathnet.ru), the Eco-Vector Journals Portal (https://journals.eco-vector.com), and by the web-sites of scientific electronic libraries eLibrary.ru (http://elibrary.ru) and CyberLeninka (http://cyberleninka.ru).

© Authors, 2023
© Samara State Technical University, 2023 (Compilation, Design, and Layout)

The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License (http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)

Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2023. Т. 27, № 2
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu/v227/i2

Содержание

Радченко В. П., Саушкин М. Н. “К 70-летию профессора Леонида Александровича Сараева” . . . 207

Дифференциальные уравнения и математическая физика

Liaqat M. I., Akgül A., Prosviryakov E. Yu. “Эффективный метод аналитического исследования линейных и нелинейных дробно-временных уравнений в частных производных с переменными коэффициентами” . . . 214

Touail Y., Jaid A., El Moutawakil D. “Замечание об общих теоремах о неподвижной точке в ограниченном метрическом пространстве” . . . 241

Башкиров Е. К. “Динамика точно решаемой нелинейной модели квантовой электродинамики резонаторов” . . . 250

Рапопорт Э. Я. “Метод равномерной оптимизации нелинейных управляемых систем с распределенными параметрами” . . . 270

Механика деформируемого твёрдого тела

Радченко В. П., Афанасьева Е. А., Саушкин М. Н. “Прогнозирование высокотемпературной реологической деформации и длительной прочности вязкопластического материала по образцу-лидеру” . . . 292

Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

Колегов К. С. “Подавление пилообразных осцилляций при использовании разностной схемы для моделирования массопереноса в высыхающей на подложке капле в приближении тонкого слоя” . . . 309

Понькин Е. И. “Построение автомодельного решения системы уравнений газовой динамики, описывающей истечение политропного газа в вакуум с косой стенки в несогласованном случае” . . . 336

Рогалев А. А. “Оценивание множеств решений линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений с возмущениями на основе оператора Коши” . . . 357

Краткие сообщения

Созонтова Е. А. “Условия существования и единственности решения задачи Гурса для системы уравнений с доминирующими частными производными” . 375

Седнев В. А., Копнышев С. Л., Седнев А. В. “Оценка поля скоростей в сплошной упругопластической среде при камуфлетном взрыве” . . . 384

Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2023, vol. 27, no. 2
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu/v227/i2

Contents

Radchenko V. P., Saushkin M. N. "To the 70th Anniversary of Professor Leonid A. Saraev" . . . 207

Differential Equations and Mathematical Physics

Liaqat M. I., Akgül A., Prosviryakov E. Yu. "An efficient method for the analytical study of linear and nonlinear time-fractional partial differential equations with variable coefficients" . . . 214

Touail Y., Jaid A., El Moutawakil D. "A note on common fixed point theorems in a bounded metric space" . . . 241

Bashkirov E. K. "Dynamics of an exactly solvable model of cavity quantum electrodynamics" . . . 250

Rapoport E. Ya. "Uniform optimization method for nonlinear control systems with distributed parameters" . . . 270

Mechanics of Solids

Radchenko V. P., Afanaseva E. A., Saushkin M. N. "Predicting high-temperature rheological deformation and long-term strength of a viscoplastic material using a leader sample" . . . 292

Mathematical Modeling, Numerical Methods and Software Complexes

Kolegov K. S. "Suppression of sawtooth oscillations when using a finite-difference scheme for mass transport simulation in a drying droplet on a substrate in the thin layer approximation" . . . 309

Pon'kin E. I. "Construction of a self-similar solution to the system of gas dynamics equations describing the outflow of polytropic gas into vacuum from an inclined wall in the inconsistent case" . . . 336

Rogalev A. A. "The estimation of solutions sets of linear systems of ordinary differential equations with perturbations based on the Cauchy operator" . . . 357

Short Communications

Sozontova E. A. "Conditions for the existence and uniqueness of the solution of the Goursat problem for a system of equations with dominant partial derivatives" . 375

Sednev V. A., Kopnyshev S. L., Sednev A. V. "Estimation of the velocity field in a continuous elastoplastic medium during a camouflet explosion" . . . 384

Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2023. Т. 27, № 2. С. 207–213
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu2020
EDN: YWEIWC

70-летию профессора Леонида Александровича Сараева

В. П. Радченко, М. Н. Саушкин

Самарский государственный технический университет,
Россия, 443100, Самара, ул. Молодогвардейская, 244.

25 марта 2023 г. исполнилось 70 лет известному российскому ученому, почетному работнику высшего и профессионального образования РФ, педагогу, администратору, организатору науки и высшего образования в России доктору физико-математических наук, профессору Леониду Александровичу Сараеву.

В статье приведены ключевые библиографические данные Л. А. Сараева, представлены главные научные направления и результаты научной деятельности по фундаментальным проблемам прогнозирования нелинейных свойств композиционных материалов и разработке математических и стохастических методов и моделей анализа экономики.

Публикация онлайн: 5 июня 2023 г.

Леонид Александрович Сараев родился 25 марта 1953 г. в г. Куйбышеве (ныне г. Самара) в семье педагогов. В 1970 г. он окончил среднюю школу № 123 г. Куйбышева и поступил на первый курс механико-математического факультета Куйбышевского государственного университета.

В 1975 г. Л. А. Сараев закончил университет и, получив квалификацию «механик», поступил в очную аспирантуру механико-математического факультета по специальности 01.02.04 – «Механика деформируемого твердого

Personalia

© Коллектив авторов, 2023
© СамГТУ, 2023 (составление, дизайн, макет)
Контент публикуется на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru)

Образец для цитирования
Радченко В. П., Саушкин М. Н. К 70-летию профессора Леонида Александровича Сараева // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2023. Т. 27, № 2. С. 207–213. EDN: YWEIWC. DOI: 10.14498/vsgtu2020.

Сведения об авторах

Владимир Павлович Радченко https://orcid.org/0000-0003-4168-9660
доктор физико-математических наук, профессор; заведующий кафедрой; каф. прикладной математики и информатики; e-mail: radchenko.vp@samgtu.ru

Михаил Николаевич Саушкин https://orcid.org/0000-0002-8260-2069
кандидат физико-математических наук, доцент; доцент; каф. прикладной математики и информатики; e-mail: saushkin.mn@samgtu.ru

тела». Его научным руководителем был доктор физико-математических наук, профессор Станислав Иванович Мешков.

В 1979 г. Л. А. Сараев успешно защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук «Модели упругопластического деформирования композитных сред» по специальности 01.02.04 – «Механика деформируемого твердого тела».

С 1978 по 1980 гг. он работал младшим научным сотрудником, а затем — старшим научным сотрудником кафедры механики деформируемого твердого тела Куйбышевского государственного университета.

С 1980 по 1994 гг. он занимал должности ассистента, старшего преподавателя, доцента, профессора кафедры высшей и прикладной математики Куйбышевского политехнического института (ныне Самарский государственный технический университет).

В 1989 г. Л. А. Сараеву было присвоено ученое звание доцента кафедры высшей математики.

В 1990 г. Л. А. Сараев успешно защитил диссертацию на соискание ученой степени доктора физико-математических наук «Прогнозирование макроскопических пластических свойств многокомпонентных композиционных материалов» по специальности 01.02.04 – «Механика деформируемого твердого тела».

В 1992 г. Л. А. Сараеву было присвоено ученое звание профессора кафедры высшей и прикладной математики.

В 1994 г. Л. А. Сараев вернулся в Самарский государственный университет на должность профессора кафедры механики сплошных сред.

В 1996 г. он был избран на должность заведующего кафедрой высшей математики и информатики, которая впоследствии была переименована в кафедру математики и бизнес-информатики.

В 2007 г. Леонид Александрович был избран на должность декана факультета экономики и управления Самарского государственного университета.

Здесь в полной мере проявился организаторский талант Л. А. Сараева, его способность четко определять цели и добиваться их достижения. За время его работы во главе факультета было открыто несколько новых основных образовательных программ бакалавриата и магистратуры по государственному и муниципальному управлению, менеджменту, экономике, бизнес-информатике и управлению персоналом.

Был существенно увеличен контингент студентов, организованы новые кафедры и учебные лаборатории, созданы центр экономического образования и управленческих технологий и научно-образовательный центр современных проблем менеджмента.

Был осуществлен набор программ дополнительного образования и программ послевузовского профессионального образования и подготовки специалистов высшей квалификации в аспирантуре.

Научные исследования Л. А. Сараева в области механики деформируемого твердого тела связаны с развитием методов построения математических моделей нелинейного деформирования хаотически армированных композиционных материалов и упрочнения микронеоднородных нестабильных материалов.

Л. А. Сараевым был разработан метод статистического усреднения уравнений равновесия жесткопластических, вязкопластических и упругопластических композиционных материалов, упрочненных дисперсными частицами и волокнами. С помощью этого метода им был построен ряд моделей нелинейного макроскопического деформирования композитов, разработаны модели эффективных модулей упругости микронеоднородных сред, учитывающие стохастические изменения связности составляющих компонентов и модели фазовых превращений и сверхупругого упрочнения нестабильных материалов [1–3].

В рамках научного направления «Математические, статистические и инструментальные методы экономики» им были разработаны методики прогнозирования и оценки показателей нелинейной динамики и предельного состояния развития многофакторных производственных предприятий.

На основе этих методик средствами теории стохастических дифференциальных уравнений Л. А. Сараевым был создан ряд детерминированных и стохастических экономико-математических моделей динамики развития предприятий за счет запаздывающих внутренних и внешних инвестиций. В этих моделях были применены производственные функции, учитывающие изменение эластичностей выпуска по производственным ресурсам. Исследовано влияние транзакционных издержек предприятия на формирование оптимальной прибыли.

Разработаны модели капитализации прибыли многофакторного производственного предприятия, модели трансформации производственного предприятия, учитывающие динамику его инновационного потенциала, модели взаимодействия связанных экономических систем, стохастические модели диффузии инноваций, учитывающие изменения общего объема рынка и сезонные периодические колебания числа потребителей. Изучена динамика формирования экономических показателей производственных предприятий, внедряющих инновационные технологии и находящихся в условиях цифровой трансформации. Построена математическая модель перехода производственного предприятия к циркулярной экономике [4–24].

Л. А. Сараевым опубликовано более двухсот работ в рецензируемых изданиях, индексируемых в российских и международных наукометрических базах данных.

Л. А. Сараев активно участвовал в работе ряда диссертационных советов по защите диссертаций на соискание ученой степени доктора наук по специальностям 01.02.04 – «Механика деформируемого твердого тела», 01.24.41 – «Лазерная физика», 05.13.18 – «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ» при Самарском государственном университете.

В настоящее время Леонид Александрович является членом диссертационного совета Д 212.215.11 по защите диссертаций на соискание ученой степени кандидата и доктора наук по специальности 5.2.2 – «Математические, статистические и инструментальные методы экономики» (экономические науки).

Л. А. Сараев является заместителем директора по образовательной деятельности научно-образовательного консорциума «Цифровая экономика» Самарского университета, заместителем главного редактора журнала «Вестник

Самарского государственного университета. Экономика и управление», членом редакционной коллегии журнала «Вестник Самарского государственного технического университета. Сер. Физико-математические науки», заместителем главного редактора журнала «Вестник Новороссийского филиала Белгородского государственного технологического университета им. В.Г. Шухова. Сер. Механика и математика».

В 2009 г. Л. А. Сараеву было присвоено звание почетного работника высшего и профессионального образования Российской Федерации.

Много лет подряд Л. А. Сараев является председателем ГЭК в Самарском государственном техническом университете по специальности «Прикладная математика и информатика» на кафедре прикладной математики и информатики.

Стремление к преодолению новых вершин в профессиональной деятельности, блестящий талант организатора, конструктивное мышление, внимательное отношение к людям – отличительные качества профессора Леонида Александрович Сараева.

Редакционная коллегия журнала «Вестник Самарского государственного технического университета. Сер. Физико-математические науки» поздравляет Леонида Александровича с юбилеем и желает ему здоровья и творческих успехов в научной и педагогической деятельности.

Используемые материалы. Фотография была любезно предоставлена юбиляром.

Избранные публикации Л. А. Сараева за последние 5 лет

1. Сараев Л. А. *Математическое моделирование упругопластических свойств многокомпонентных композиционных материалов*. Самара: СНЦ РАН, 2017. 222 с. EDN: SHDNIT.
2. Сараев Л. А. К теории упругости микронеоднородных сред, учитывающей стохастические изменения связности составляющих компонентов // *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика*, 2021. № 2. С. 132–143. EDN: OYVQLK. DOI: https://doi.org/10.15593/perm.mech/2021.2.12.
3. Ильина Е. А., Сараев Л. А. Моделирование фазовых превращений и сверхупругого упрочнения нестабильных материалов // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2018. Т. 22, № 3. С. 407–429. EDN: YOYJOH. DOI: https://doi.org/10.14498/vsgtu1626.
4. Ильина Е. А., Сараев Л. А. К теории производственных функций, учитывающей изменение эластичностей выпуска по производственным ресурсам // *Экономика и предпринимательство*, 2018. № 10(99). С. 145–150. EDN: SADNEF.
5. Сараев А. Л., Сараев Л. А. Показатели нелинейной динамики и предельное состояние производственного предприятия // *Экономика и предпринимательство*, 2018. № 11(100). С. 1237–1241. EDN: YPFJHN.
6. Сараев А. Л., Сараев Л. А. Математические модели стохастической динамики развития предприятий // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2020. Т. 24, № 2. С. 343–364. EDN: MLTMBA. DOI: https://doi.org/10.14498/vsgtu1700.
7. Сараев А. Л., Сараев Л. А. Трехфакторная математическая модель развития предприятия за счет внутренних и внешних инвестиций // *Вестник Алтайской академии экономики и права*, 2020. № 2. С. 77–85. EDN: JDATYN. DOI: https://doi.org/10.17513/vaael.1002.
8. Сараев Л. А., Тюкавкин Н. М., Леонов С. А. Оценка параметров эффективности производственно-экономической системы, внедряющей инновационные технологии // *Дизайн и технологии*, 2020. № 78(120). С. 106–113. EDN: KLDKPP.

9. Ильина Е. А., Сараев Л. А. Динамика формирования экономических показателей производственного предприятия в условиях цифровой трансформации // *Вестник Самарского университета. Экономика и управление*, 2020. Т. 11, № 2. С. 115–124. EDN: BZDHMX. DOI: https://doi.org/10.18287/2542-0461-2020-11-2-115-124.
10. Сараев А. Л., Сараев Л. А. Многофакторная математическая модель развития производственного предприятия за счет внутренних и внешних инвестиций // *Вестник Самарского университета. Экономика и управление*, 2020. Т. 11, № 2. С. 157–165. EDN: WDBMKV. DOI: https://doi.org/10.18287/2542-0461-2020-11-2-157-165.
11. Ильина Е. А., Парфенова А. Ю., Сараев Л. А. К теории диффузии инноваций, учитывающей сезонные периодические колебания числа потребителей // *Вестник Самарского университета. Экономика и управление*, 2020. Т. 11, № 3. С. 184–189. EDN: YGNABG. DOI: https://doi.org/10.18287/2542-0461-2020-11-3-184-189.
12. Ilyina E.A., Saraev L. A. Predicting the dynamics of the maximum and optimal profits of innovative enterprises // *J. Phys.: Conf. Ser.*, 2021. vol. 1784, 012002. EDN: XWXLTX. DOI: https://doi.org/10.1088/1742-6596/1784/1/012002.
13. Saraev A. L., Saraev L. A. Mathematical models of the development of industrial enterprises, with the effect of lagging internal and external investments // *J. Phys.: Conf. Ser.*, 2021. vol. 1784, 012010. EDN: QVNRZQ. DOI: https://doi.org/10.1088/1742-6596/1784/1/012010.
14. Сараев А. Л., Сараев Л. А. Модели стохастической динамики развития производственных предприятий с запаздывающими внутренними и внешними инвестициями // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2021. Т. 25, № 4. С. 738–762. EDN: ADIBNI. DOI: https://doi.org/10.14498/vsgtu1862.
15. Сараев Л. А., Таликина М. Е., Математическая модель перехода производственного предприятия к циркулярной экономике // *Вестник Самарского университета. Экономика и управление*, 2021. Т. 12, № 1. С. 144–156. EDN: DLUYTJ. DOI: https://doi.org/10.18287/2542-0461-2021-12-1-144-156.
16. Saraev A. L., Saraev L. A. Equations of nonlinear dynamics of development of industrial enterprises, taking into account the amount of its maximum profit // *Vestnik of Samara University. Economics and Management*, 2021. vol. 12, no. 2. pp. 154–170. EDN: NRPPJC. DOI: https://doi.org/10.18287/2542-0461-2021-12-2-154-170.
17. Ilyina E.A., Saraev L. A. On the theory of optimization of transaction costs of multifactor manufacturing enterprises // *Vestnik of Samara University. Economics and Management*, 2021. vol. 12, no. 4. pp. 182–194. EDN: PCKLFW. DOI: https://doi.org/10.18287/2542-0461-2021-12-4-182-194.
18. Parphenova A. Yu., Saraev L. A. Stochastic model of innovation diffusion that takes into account the changes in the total market volume // *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2022. vol. 22, no. 2. pp. 152–158. EDN: ISFCVE. DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-2-152-158.
19. Ilyina E.A., Saraev L. A. On the calculation of the effective capitalization ratio for a one-factor manufacturing enterprise // *Vestnik of Samara University. Economics and Management*, 2022. vol. 13, no. 1. pp. 103–119. EDN: RPDLCA. DOI: https://doi.org/10.18287/2542-0461-2022-13-1-103-119.
20. Ильина Е. А., Сараев Л. А. Оптимальная прибыль и транзакционные издержки для производственной функции с переменной эластичностью выпуска по ресурсам // *Вестник Самарского университета. Экономика и управление*, 2022. Т. 13, № 2. С. 159–171. EDN: OWYWCL. DOI: https://doi.org/10.18287/2542-0461-2022-13-2-159-171.
21. Ильина Е. А., Сараев Л. А. К теории взаимодействия связанных экономических систем // *Вестник Самарского университета. Экономика и управление*, 2022. Т. 13, № 3. С. 138–147. EDN: UMIHTK. DOI: https://doi.org/10.18287/2542-0461-2022-13-3-138-147.
22. Аксинин В. И., Сараев Л. А. Экономико-математические модели трансформации производственного предприятия, учитывающие динамику его инновационного потенциа-

ла // *Экономика и управление*, 2023. Т. 14, № 1. С. 157–171. EDN: JVQPFP. DOI: https://doi.org/10.18287/2542-0461-2023-14-1-157-171.

23. Ильина Е. А., Сараев Л. А. К теории капитализации прибыли многофакторного производственного предприятия // *Вестник Самарского университета. Экономика и управление*, 2023. Т. 14, № 1. С. 172–191. EDN: ITGRUA. DOI: https://doi.org/10.18287/2542-0461-2023-14-1-172-191.
24. Ильина Е. А., Сараев Л. А. Стохастические модели динамики максимальной и оптимальной прибыли производственного предприятия, внедряющего технологические инновации // *Вестник Самарского университета. Экономика и управление*, 2023. Т. 14, № 2 (в печати).

Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2023, vol. 27, no. 2, pp. 207–213
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu2020

To the 70th Anniversary of Professor Leonid A. Saraev

V. P. Radchenko, M. N. Saushkin

Samara State Technical University,
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russian Federation.

March 25, 2023 marks the 70th anniversary of the famous Russian scientist, honorary worker of higher and professional education of the Russian Federation, teacher, administrator, organizer of science and higher education in Russia, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor Leonid Alexandrovich Saraev.

The article presents the key bibliographic data of Leonid A. Saraev, presents the main scientific directions and results of scientific activity on the fundamental problems of predicting the nonlinear properties of composite materials and the development of mathematical and stochastic methods and models for economic analysis.

First online: 5th June, 2023

Personalia

© Authors, 2023
© Samara State Technical University, 2023 (Compilation, Design, and Layout)
The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License (http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)

Please cite this article in press as:
Radchenko V. P., Saushkin M. N. To the 70th Anniversary of Professor Leonid A. Saraev, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2023, vol. 27, no. 2, pp. 207–213. EDN: YWEIWC. DOI: 10.14498/vsgtu2020 (In Russian).

Authors' Details:

Vladimir P. Radchenko https://orcid.org/0000-0003-4168-9660
Dr. Phys. & Math. Sci., Professor; Head of Dept; Dept. of Applied Mathematics & Computer Science; e-mail: radchenko.vp@samgtu.ru

Mikhail N. Saushkin https://orcid.org/0000-0002-8260-2069
Cand. Phys. & Math. Sci.; Associate Professor; Dept. of Applied Mathematics & Computer Science; e-mail: saushkin.mn@samgtu.ru

Personalia

The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License (http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)

Please cite this article in press as:
Radchenko V. P., Saushkin M. N. To the 70th Anniversary of Professor Leonid A. Saraev, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2023, vol. 27, no. 2, pp. 207–213. EDN: YWEIWC. DOI: 10.14498/vsgtu2020 (In Russian).

Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2023, vol. 27, no. 2, pp. 214–240
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu2009

MSC: 26A33, 44A10, 45J05

An efficient method for the analytical study of linear and nonlinear time-fractional partial differential equations with variable coefficients

M. I. Liaqat[1,2]***, A. Akgül***[3,4,5]***, E. Yu. Prosviryakov***[6,7,8,9]

[1] Government College University, Lahore, 54600, Pakistan.
[2] National College of Business Administration & Economics, Lahore, 54660, Pakistan.
[3] Lebanese American University, Beirut, 1102 2801, Lebanon.
[4] Siirt University, Siirt, 56100, Turkey.
[5] Near East University, Nicosia, 99138, Turkey.
[6] Ural Federal University, Ekaterinburg, 620137, Russian Federation.
[7] Institute of Engineering Science, RAS (Ural Branch), Ekaterinburg, 620049, Russian Federation.
[8] Urals State University of Railway Transport, Ekaterinburg, 620034, Russian Federation.
[9] Udmurt Federal Research Center, RAS (Ural Branch), Izhevsk, 426067, Russian Federation.

Abstract

The residual power series method is effective for obtaining approximate analytical solutions to fractional-order differential equations. This method, however, requires the derivative to compute the coefficients of terms in a series solution. Other well-known methods, such as the homotopy perturbation, the Adomian decomposition, and the variational iteration methods, need integration. We are all aware of how difficult it is to calculate the fractional derivative and integration of a function. As a result, the use of the methods mentioned above is somewhat constrained. In this research work, approximate and exact analytical solutions to time-fractional partial differential equations with variable coefficients are obtained using the Laplace residual power series method in the sense of the Gerasimov–Caputo fractional derivative. This method helped us overcome the limitations of the various methods. The Laplace residual power series method performs exceptionally well in computing the coefficients of terms in a series solution by applying the straightforward limit principle at infinity, and it is also more effective than various series solution methods due to the avoidance of Adomian

Differential Equations and Mathematical Physics
Research Article

© Authors, 2023
© Samara State Technical University, 2023 (Compilation, Design, and Layout)
The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License (http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)

Please cite this article in press as:
Liaqat M. I., Akgül A., Prosviryakov E. Yu. An efficient method for the analytical study of linear and nonlinear time-fractional partial differential equations with variable coefficients, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2023, vol. 27, no. 2, pp. 214–240. EDN: XAVFLR. DOI: 10.14498/vsgtu2009.

Authors' Details:
Muhammad Imran Liaqat https://orcid.org/0000-0002-5732-9689
PhD Student, Abdus Salam School of Mathematical Sciences[1]; Lecturer, Dept. of Mathematics[2]; e-mail: imranliaqat50@yahoo.com

and He polynomials to solve nonlinear problems. The relative, recurrence, and absolute errors of the three problems are investigated in order to evaluate the validity of our method. The results show that the proposed method can be a suitable alternative to the various series solution methods when solving time-fractional partial differential equations.

Keywords: Laplace transform, residual power series method, partial differential equation, Gerasimov–Caputo derivative.

Received: 18th March, 2023 / Revised: 12th June, 2023 / Accepted: 19th June, 2023 / First online: 27th June, 2023

List of abbreviations

RPSM	residual power series method
HPM	homotopy perturbation method
ADM	Adomian decomposition method
VIM	variational iteration method
TFPDEs	time-fractional partial differential equations
LRPSM	Laplace residual power series method
GCFD	Gerasimov–Caputo fractional derivative
DEs	differential equations
FODEs	fractional order differential equations
Rel-E	relative error
Abs-E	absolute error
Rec-E	recurrence error
LRF	Laplace residual functions

Ali Akgül https://orcid.org/0000-0001-9832-1424
PhD in Math, Full Professor; Dept. of Computer Science and Mathematics[3]; Dept. of Mathematics, Art and Science Faculty[4]; Dept. of Mathematics, Mathematics Research Center[5]; e-mail: aliakgul00727@gmail.com

Evgenii Yu. Prosviryakov https://orcid.org/0000-0002-2349-7801
Dr. Phys. & Math. Sci.; Dept. of Information Technologies and Control Systems[6]; Sect. of Nonlinear Vortex Hydrodynamics[7]; Dept. of Natural Sciences[8]; Lab. of Physical and Chemical Mechanics[9]; e-mail: evgen_pros@mail.ru

1. Introduction. Fractional calculus deals with fractional order derivatives and integrations. Fractional calculus was founded by two mathematicians, Leibniz and l'Hôpital, and its official birthday is September 30, 1695. The widespread usage of fractional calculus in fields including image processing, physics, engineering, biology, biochemistry, entropy theory, and fluid mechanics has attracted a lot of researchers in recent years [1–5]. There are numerous definitions for fractional order derivatives; however, not all of them are regularly applied. The Grünwald–Letnikov, Hadamard derivative, Riemann–Liouville, conformable, and Gerasimov–Caputo fractional derivative (GCFD) are the most well known fractional order derivatives [6–9].

The GCFD of order $\beta > 0$ is given by [10]:

$$D_{\omega}^{\beta}\aleph(\omega) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(r-\beta)}\displaystyle\int_q^{\omega}(\omega-q)^{r-\beta-1}\frac{d^r}{dq^r}\aleph(q)dq, & r-1<\beta<r, \\ \dfrac{d^r}{d\omega^r}\aleph(\omega), & \beta = r \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

The following are the important properties of GCFD:

(i) $D_{\omega}^{\beta}\xi = 0$, $\xi \in \mathbb{R}$,

(ii) $D_{\omega}^{\beta}\omega^{\xi} = \dfrac{\Gamma(\xi+1)}{\Gamma(\xi+1-\beta)}\omega^{\xi-\beta}$, $r-1<\beta\leqslant r$, $\xi > r-1$, $r \in \mathbb{N}$, $\xi \in \mathbb{R}$,

(iii) $D_{\omega}^{\beta}(\xi_1\aleph_1(\omega)+\xi_2\aleph_2(\omega)) = \xi_1 D_{\omega}^{\beta}\aleph_1(\omega)+\xi_2 D_{\omega}^{\beta}\aleph_2(\omega)$.

In some cases, fractional order derivatives are preferable to integer-order derivatives for modeling because they can simulate and examine complex structures with complicated nonlinear processes and higher-order behaviors. There are two main causes of this. First, rather than being limited to an integer order, we can choose any order for the fractional order derivatives. Furthermore, when the mechanism has long-term memory, fractional order derivatives are advantageously based on both past and present situations.

In the disciplines of science and engineering, there are natural and physical phenomena that, when described by mathematical relations, turn into differential equations (DEs). Examples of phenomena that are characterized by DEs include equations of motion, simple harmonic motion, beam deflection, and more. The fractional order differential equations (FODEs) have developed a convenient means of expressing naturally occurring phenomena in artificial intelligence, engineering, physics, earth sciences, bioinformatics, finance systems, and biological systems. Consequently, the study of the approximate or exact solution enables us to recognize the mechanism of these FODEs, and their actual physical intention can be perceived from the graphical depiction of the solution. Applications often come with FODEs that are so complex that exact solutions are frequently impractical. For solving FODEs in the initial circumstances given, methods that give approximate solutions present a potent alternative tool. In recent times, numerous approximate methods for solving FODEs have been presented [11–19].

The residula power series method (RPSM) is a very powerful approach in terms of the construction of power series solutions for FODEs. Many FODEs have been successfully solved by RPSM. Y. Zhang *et al.* [20] used RPSM to develop series solutions of the time-fractional Schrödinger equation. A. El-Ajou *et al.* [21] studied the KdV–Burgers equation to find approximate solutions. R. Saadeh *et al.* [22] discussed the fractional Newell–Whitehead–Segal equation by the RPSM.

Approximate analytical solutions of FODEs can be solved effectively using the RPSM. However, to determine the coefficients of the series solution, the $(n-1)\beta$ derivative of the residual function is required. As we all know, it is difficult to compute the fractional order derivatives of a function. This limits the application of the classic RPSM to a certain extent. To overcome this drawback, T. Eriqat *et al.* [23] introduced a new approach, known as the Laplace residual power series method (LRPSM), which is the coupling of the Laplace transforms and the RPSM for approximate series solutions of linear and nonlinear FODEs. The limit idea is used to establish the series coefficients in the LRPSM. The set of guidelines for this novel approach is based on converting the specified equation into the Laplace transforms space, identifying an expansion solution to the transformed equation, and then obtaining the original equation's solution by using the inverse Laplace transform.

Finding solutions to FODEs with variable coefficients is also an interesting area for researchers. E. Hesameddini and A. Rahimi [24] used the variational iterative approach to solve FODEs with variable coefficients. Y. Keskin *et al.* [25] used the generalized Taylor collection technique to find solutions for higher-order linear FODEs with variable coefficients. S. Sarwar *et al.* [26] found approximate solutions to time-fractional wavelike models with variable coefficients using the definition of the GCFD and with the help of optimal homotopy asymptotic method. With the operational matrix technique, D. Rostamy and K. Karimi [27] established approximate solutions of fractional-order wave and heat equations with variable coefficients. H. Bulut *et al.* [28] used the Sumudu transform method to obtain approximate solutions for partial differential equations with variable coefficients. M. Nadeem *et al.* [29] established numerical solutions for the fourth-order parabolic partial differential equation with variable coefficients using the modified Laplace variational iteration method. M. Dehghan and J. Manafian [30] used the homotopy perturbation technique to find a solution for a fourth-order parabolic problem with variable coefficients. T.M. Elzaki and S.M. Ezaki [31] established solutions for ordinary DEs with variable coefficients using the Elzaki transform method. Each of these strategies has particular limitations and drawbacks. These methods require a lot of work and longer running times.

In this research, the LRPSM was used to solve time-fractional partial diffrential equations (TFPDEs) with variable coefficients in the sense of GCFD. This method combines the Laplace transforms with the RPSM, which is based on a revamped version of Taylor's series and yields a convergent series as a solution. By employing the simple limit principle at infinity, the LRPSM excels at calculating the coefficients of terms in a series solution, but other well-known methods such as the variational iteration method (VIM), Adomian decomposition method (ADM), and homotopy perturbation method (HPM) need integration, while the RPSM needs the derivative, both of which are challenging in fractional contexts. LRPSM is also more effective than various series solution methods due to its small processing size and avoidance of Adomian and He polynomials to solve nonlinear problems. Moreover, this method does not require any assumptions about physical parameters, no matter how big or small, for the problem. Therefore, it can be used to handle both mildly and severely nonlinear problems and to circumvent some of the issues that perturbation techniques previously had. To evaluate the efficiency and consistency of the suggested strategy, the relative error (Rel-E),

recurrence error (Rec-E), and absolute error (Abs-E) of the three problems are examined. The findings demonstrate that when solving FODEs, the LRPSM can be a viable substitute for the RPSM, VIM, ADM, and HPM.

To emphasize the essential ideas of our suggested method, such as its dependability, capability, and application, we selected the most prevalent forms of TFPDEs with variable coefficients. J. Fourier proposed the heat equation in 1822, which defines how a certain amount of heat diffuses over a region. Consider the TFPDE with variable coefficients shown below [27]:

$$D_{\omega}^{\kappa\beta}\aleph(\theta,\omega)+\Im(\theta)\Psi(\aleph)-\Xi(\theta,\aleph)=0, \tag{1}$$

subject to the initial condition:

$$D_{\omega}^{\eta\beta}\aleph(\theta,0)=\Phi_{\eta},$$

where $\eta = 0,1,2,3\ldots,\kappa-1$; $\theta=(\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_e)\in\mathbb{R}^e$; $\beta\in\left(\frac{\kappa-1}{\kappa}\right]$, $\kappa\in\mathbb{N}$, and $\Psi(\aleph)=\Psi(\aleph,D_{\omega}^{\beta}\aleph,D_{\omega}^{2\beta}\aleph,\ldots,D_{\omega}^{(\kappa-1)\beta}\aleph,\ D_{\theta_1}^{\ell_{11}}\aleph,\ D_{\theta_2}^{\ell_{12}}\aleph,\ \ldots,D_{\theta_e}^{\ell_{1e}}\aleph,\ \ldots,\ D_{\theta_1}^{\ell_{p1}}\aleph,$ $D_{\theta_2}^{\ell_{p2}}\aleph,\ldots,D_{\theta_e}^{\ell_{pe}}\aleph)$, with $h-1<\ell_{hu}\leqslant h$, $h=1,2,\ldots,p$; $u=1,2,\ldots,e$.

The GCFD of ω of order $\eta\beta$ and θ_u of order ℓ_{hu} are represented by $D_{\omega}^{\eta\beta}$ and $D_{\theta_u}^{\ell_{hu}}$, respectively. These kinds of DEs give accurate representations of a wide range of physical events in the fields of fluid dynamics, elastic mechanics, and electrodynamics [26–33].

This study is structured as follows. First, in Section 2, we present significant definitions and findings from FC theory. The LRPSM algorithms for solving TFPDEs with variable coefficients are discussed in Section 3. In Section 4, some linear and nonlinear TFPDE problems are solved to demonstrate the accuracy and reliability of LRPSM. The numerical and graphic results obtained using LRPSM are evaluated in Section 5. Finally, we conclude the paper in Section 6.

2. Preliminaries. In this section, basic definitions, Laplace transform characteristics, and LRPSM-related theorems that help establish approximate series solutions are included.

Definition 1 [34]. The Laplace transforms of $\aleph(\theta,\omega)$ is defined as follows:

$$\mathcal{L}[\aleph(\theta,\omega)]=\Omega(\theta,\nu)=\int_0^{\infty}\aleph(\theta,\omega)e^{-\omega\nu}d\omega,$$

and the inverse Laplace transforms is defined by

$$\mathcal{L}^{-1}[\Omega(\theta,\nu)]=\aleph(\theta,\omega)=\int_{b-i\infty}^{b+i\infty}e^{\nu\omega}\Omega(\theta,\nu)d\nu,\quad b=\mathrm{Re}(\nu)>b_0,$$

where $\theta=(\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_e)\in\mathbb{R}^e$ and $e\in\mathbb{N}$ and b_0 lies in the right half plane of the absolute convergence of the Laplace integral.

Lemma 1 [23]. *Consider that $\aleph_1(\theta,\omega)$ and $\aleph_2(\theta,\omega)$ satisfy the axioms of the existence of Laplace transforms. Suppose that $\mathcal{L}[\aleph_1(\theta,\omega)]=\Omega_1(\theta,\nu)$,, $\mathcal{L}[\aleph_2(\theta,\omega)]=\Omega_2(\theta,\nu)$ and the constants ζ_1, ζ_2. When this occurs, the following criteria are met* [23, 24]:

(i) $\mathcal{L}[\zeta_1\aleph_1(\theta,\omega)+\zeta_2\aleph_2(\theta,\omega)]=\zeta_1\Omega_1(\theta,\nu)+\zeta_2\Omega_2(\theta,\nu)$;

(ii) $\mathcal{L}^{-1}[\zeta_1\Omega_1(\theta,\nu)+\zeta_2\Omega_2(\theta,\nu)]=\zeta_1\aleph_1(\theta,\omega)+\zeta_2\aleph_2(\theta,\omega)$;
(iii) $\xi_0(\theta)=\lim\limits_{\nu\to\infty}\nu\Omega(\theta,\nu)=\aleph(\theta,0)$;

(iv) $\mathcal{L}[D_\omega^\beta\aleph(\theta,\omega)]=\nu^\beta\Omega(\theta,\nu)-\sum\limits_{j=0}^{r-1}\dfrac{\aleph^{(j)}(\theta,0)}{\nu^{j-\beta+1}},\quad r-1<\beta\leqslant r,\ r\in\mathbb{N}$;

(v) $\mathcal{L}[D_\omega^{r\beta}\aleph(\theta,\omega)]=\nu^{r\beta}\Omega(\theta,\nu)-\sum\limits_{j=0}^{r-1}\nu^{\beta(r-j)-1}D_\omega^{j\beta}\aleph(\theta,0),\quad 0<\beta\leqslant 1.$

Definition 2 [35]. The multiple fractional power series is defined as follows:

$$\sum_{r=0}^{\infty}\xi_r(\theta)(\omega-\omega_0)^{r\beta}=\xi_0(\omega-\omega_0)^0+\xi_1(\omega-\omega_0)^{\beta}+\xi_2(\omega-\omega_0)^{2\beta}+\cdots,$$

where $\theta=(\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_e)\in\mathbb{R}^e$ and $e\in\mathbb{N}$, ω represent a variable and $\xi_r(\theta)$ represent the coefficients of the multiple fractional power series.

We present a new type of multiple fractional power series in the sense of Laplace transform space in the following lemma, which is the main pillar for the LRPSM.

Lemma 2 [23]. *Assume that the multiple fractional power series demonstration is in Laplace transforms space for the function* $\mathcal{L}[\aleph(\theta,\omega)]=\Omega(\theta,\nu)$ *as shown follows*:

$$\Omega(\theta,\nu)=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\xi_r(\theta)}{\nu^{r\beta+1}},\quad \nu>0,$$

where, $\theta=(\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_e)\in\mathbb{R}^e$, $e\in\mathbb{N}$.

Theorem 1 [23]. *The coefficients of the multiple fractional power series can be determined as follows*:

$$\xi_r(\theta)=D_\omega^{r\beta}\aleph(\theta,0),$$

where $D_\omega^{r\beta}=D_\omega^{\beta}\cdot D_\omega^{\beta}\cdots D_\omega^{\beta}$ *(r times)*.

The following theorem establishes the prerequisite for the convergence of the new form of multiple fractional power series.

Theorem 2 [23]. *Let* $\mathcal{L}[\aleph(\theta,\omega)]=\Omega(\theta,\nu)$ *can be denoted as the new form of multiple fractional power series given in Lemma 2. If* $|\nu\mathcal{L}[D_\omega^{(j+1)\beta}\aleph(\theta,\omega)]|\leqslant\mathcal{P}$ *on* $0<\nu\leqslant y$ *with* $0<\beta\leqslant 1$, *then the remainder* $R_j(\theta,\nu)$ *of the multiple fractional power series satisfies the following inequality*:

$$|R_j(\theta,\nu)|\leqslant\frac{\mathcal{P}}{\nu^{(j+1)\beta+1}},\quad 0<\nu\leqslant y.$$

3. LRPSM for Solving TFPDEs with Variable Coefficients. In this section, the set of steps for employing the suggested method to acquire approximative analytical solutions to TFPDEs is addressed. First of all, we apply the Laplace transforms to the TFPDEs with variable coefficients and get an algebraic expression as a result. Then, we take into account the multiple fractional power series as the new space solution for the resulting expression obtained in the first step, which is the fundamental idea behind the LRPSM. The way in which the

coefficients of this series are obtained by employing the limit idea is the primary difference between the LRPSM and the RPSM. The resulting implications are then translated into actual space using the inverse Laplace transforms. The rules for using the LRPSM to locate solutions are listed below.

The LRPSM Algorithm for Linear and Nonlinear TFPDEs. We describe the LRPSM's set of guidelines for solving Eq. (1).

Step 1. Reformatted Eq. (1):

$$D_{\omega}^{\kappa\beta}\aleph(\theta,\omega)+\Im(\theta)\Psi(\aleph)-\Xi(\theta,\aleph)=0. \tag{2}$$

Step 2. Utilize $\mathcal{L}$ on both sides of Eq. (2):

$$\mathcal{L}\big[D_{\omega}^{\kappa\beta}\aleph(\theta,\omega)+\Im(\theta)\Psi(\aleph)-\Xi(\theta,\aleph)\big]=0. \tag{3}$$

Using the Lemma 1(v) and the initial condition, we get the following from Eq. (3):

$$\Omega(\theta,\nu)=\sum_{j=0}^{\kappa-1}\frac{D_{\omega}^{j}\aleph(\theta,0)}{\nu^{j\beta+1}}-\frac{\Im(\theta)B(\nu)}{\nu^{j\beta}}+\frac{A(\theta,\nu)}{\nu^{j\beta}}, \tag{4}$$

where $\mathcal{L}[\Xi(\theta,\aleph)]=\mathcal{A}(\theta,\nu)$, $\mathcal{L}[\Psi(\aleph)]=\mathcal{B}(\nu)$.

Step 3. Assume that the multiple fractional power series solution of Eq. (4) in Laplace transforms space is below:

$$\Omega(\theta,\nu)=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\xi_r(\theta)}{\nu^{r\beta+1}},\quad \nu>0.$$

Step 4. As a result of applying the Lemma 1(iii) and Theorem 1 we obtained the following results:

$$\begin{aligned}\xi_0(\theta)&=\lim_{\nu\to\infty}\nu\Omega(\theta,\nu)=\aleph(\theta,0),\\ \xi_1(\theta)&=D_{\omega}^{\beta}\aleph(\theta,0),\\ \xi_2(\theta)&=D_{\omega}^{2\beta}\aleph(\theta,0),\\ \xi_{\eta}(\theta)&=D_{\omega}^{\eta\beta}\aleph(\theta,0).\end{aligned}$$

Step 5. Assume that the jth truncated multiple fractional power series solution of Eq. (4) is below:

$$\Omega_j(\theta,\nu)=\sum_{r=0}^{j}\frac{\xi_r(\theta)}{\nu^{r\beta+1}},\quad \nu>0,$$

$$\Omega_j(\theta,\nu)=\frac{\xi_0(\theta)}{\nu}+\frac{\xi_1(\theta)}{\xi^{\beta+1}}+\cdots+\frac{\xi_{\eta}(\theta)}{\nu^{\eta\beta+1}}+\sum_{r=\eta+1}^{j}\frac{\xi_r(\theta)}{\nu^{r\beta+1}}.$$

Step 6. The Laplace residual functions (LRF) and jth truncated LRF for the Eq. (4) are defined as follows:

$$\mathcal{L}\,\mathrm{Res}(\theta,\nu)=\Omega(\theta,\theta)-\sum_{j=0}^{\kappa-1}\frac{D_{\omega}^{j}\aleph(\theta,0)}{\nu^{j\beta+1}}+\frac{\Im(\theta)\mathcal{B}(\nu)}{\nu^{j\beta}}-\frac{\mathcal{A}(\theta,\nu)}{\nu^{j\beta}},$$

and

$$\mathcal{L}\,\mathrm{Res}_j(\theta,\nu)=\Omega_j(\theta,\nu)-\sum_{j=0}^{\kappa-1}\frac{D_{\omega}^{j}\aleph(\theta,0)}{\nu^{j\beta+1}}+\frac{\Im(\theta)\mathcal{B}(\nu)}{\nu^{j\beta}}-\frac{\mathcal{A}(\theta,\nu)}{\nu^{j\beta}}. \tag{5}$$

Step 7. By inserting the jth truncated multiple fractional power series into the Eq. (5) we get the following:

$$\mathcal{L}\,\mathrm{Res}_j(\theta,\nu)=\Big(\frac{\xi_0(\theta)}{\nu}+\frac{\xi_1(\theta)}{\xi^{\beta+1}}+\cdots+\frac{\xi_\eta(\theta)}{\nu^{\eta\beta+1}}+\sum_{r=\eta+1}^{j}\frac{\xi_r(\theta)}{\nu^{r\beta+1}}\Big)-$$
$$-\sum_{j=0}^{\kappa-1}\frac{D_{\omega}^{j}\aleph(\theta,0)}{\nu^{j\beta+1}}+\frac{\Im(\theta)\mathcal{B}(\nu)}{\nu^{j\beta}}-\frac{\mathcal{A}(\theta,\nu)}{\nu^{j\beta}}. \tag{6}$$

Step 8. Multiplying the resulting expression $\mathcal{L}\,\mathrm{Res}_j(\theta,\nu)$ by $\nu^{j\beta+1}$ on both sides of Eq. (6):

$$\nu^{j\beta+1}\mathcal{L}\,\mathrm{Res}_j(\theta,\nu)=\nu^{j\beta+1}\Big(\frac{\xi_0(\theta)}{\nu}+\frac{\xi_1(x)}{\xi^{\beta+1}}+\cdots+\frac{\xi_\eta(\theta)}{\nu^{\eta\beta+1}}+\sum_{r=\eta+1}^{j}\frac{\xi_r(\theta)}{\nu^{r\beta+1}}-$$
$$-\sum_{j=0}^{\kappa-1}\frac{D_{\omega}^{j}\aleph(\theta,0)}{\nu^{j\beta+1}}+\frac{\Im(\theta)\mathcal{B}(\nu)}{\nu^{j\beta}}-\frac{\mathcal{A}(\theta,\nu)}{\nu^{j\beta}}\Big). \tag{7}$$

Step 9. Applying $\lim\limits_{\nu\to\infty}$ on both sides of Eq. (7):

$$\lim_{\nu\to\infty}\nu^{j\beta+1}\mathcal{L}\,\mathrm{Res}_j(\theta,\nu)=\lim_{\nu\to\infty}\nu^{j\beta+1}\Big(\frac{\xi_0(\theta)}{\nu}+\frac{\xi_1(\theta)}{\xi^{\beta+1}}+\cdots+\frac{\xi_\eta(\theta)}{\nu^{\eta\beta+1}}+$$
$$+\sum_{r=\eta+1}^{j}\frac{\xi_r(\theta)}{\nu^{r\beta+1}}-\sum_{j=0}^{\kappa-1}\frac{D_{\omega}^{j}\aleph(\theta,0)}{\nu^{j\beta+1}}+\frac{\Im(\theta)\mathcal{B}(\nu)}{\nu^{j\beta}}-\frac{\mathcal{A}(\theta,\nu)}{\nu^{j\beta}}\Big).$$

Step 10. Solve the following expression for $\xi_j(\theta)$:

$$\lim_{\nu\to\infty}\big(\nu^{j\beta+1}\mathcal{L}\,\mathrm{Res}_j(\theta,\nu)\big)=0,$$

where $j=\eta+1,\eta+2,\ldots$.

Step 11. To obtain the jth step approximate solution of Eq. (4), substitute the obtained values of $\xi_j(\theta)$ into a jth truncated series of $\Omega(\theta,\nu)$.

Step 12. Apply the $\mathcal{L}^{-1}$ on $\Omega_j(\theta,\nu)$ to attain the jth approximate solution $\aleph_j(\theta,\omega)$.

4. Applications to Linear and Nonlinear TFPDEs with Variable Coefficients. In this section, to show the applicability and reliability of the novel algorithm, three linear and nonlinear TFPDEs are solved.

Problem 1. In our first illustration, we take the nonlinear TFPDE provided below [33]:

$$D_\omega^{2\beta}\aleph(\theta_1,\omega) = \aleph^2(\theta_1,\omega)\frac{\partial^2}{\partial\theta_1^2}\big(\aleph_{\theta_1}(\theta_1,\omega)\aleph_{\theta_1\theta_1}(\theta_1,\omega)\aleph_{\theta_1\theta_1\theta_1}(\theta_1,\omega)\big)+ \\ + \big(\aleph_{\theta_1}(\theta_1,\omega)\big)^2\frac{\partial^2}{\partial\theta_1^2}\big(\aleph_{\theta_1\theta_1}(\theta_1,\omega)\big)^3 - 18\aleph^5(\theta_1,\omega) + \aleph(\theta_1,\omega), \quad (8)$$

where $0<\beta\leqslant 1$, $\omega\geqslant 0$, $\theta_1\in\mathbb{R}$, and with the following initial conditions:

$$\aleph(\theta_1,0) = \mathrm{e}^{\theta_1}, \quad D_\omega^{\beta}\aleph(\theta,0) = \mathrm{e}^{\theta_1}.$$

By applying $\mathcal{L}$ to Eq. (8),

$$\mathcal{L}\big[D_\omega^{2\beta}\aleph(\theta_1,\omega)\big] = \mathcal{L}\Big[\aleph^2(\theta_1,\omega)\frac{\partial^2}{\partial\theta_1^2}\big(\aleph_{\theta_1}(\theta_1,\omega)\aleph_{\theta_1\theta_1}(\theta_1,\omega)\aleph_{\theta_1\theta_1\theta_1}(\theta_1,\omega)\big)+ \\ + \big(\aleph_{\theta_1}(\theta_1,\omega)\big)^2\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\big(\aleph_{\theta_1\theta_1}(\theta_1,\omega)\big)^3 - 18\aleph^5(\theta_1,\omega) + \aleph(\theta_1,\omega)\Big]. \quad (9)$$

By following the steps that are established in Section 3, we get the following result from Eq. (9):

$$\Omega(\theta_1,\nu) = \frac{\mathrm{e}^{\theta_1}}{\nu} + \frac{\mathrm{e}^{\theta_1}}{\nu^{\beta+1}} + \\ + \frac{1}{\nu^{2\beta}}\mathcal{L}\Big[\big(\mathcal{L}^{-1}[\Omega(\theta_1,\nu)]\big)^2\frac{\partial^2}{\partial{\theta_1}^2}\Big(\frac{\partial}{\partial\theta_1}\mathcal{L}^{-1}[\Omega(\theta_1,\nu)]\times \\ \times\frac{\partial^2}{\partial{\theta_1}^2}\mathcal{L}^{-1}[\Omega(\theta,\nu)]\frac{\partial^3}{\partial{\theta_1}^3}\mathcal{L}^{-1}[\Omega(\theta_1,\nu)]\Big)\Big]+ \\ + \frac{1}{\nu^{2\beta}}\mathcal{L}\Big[\Big(\frac{\partial}{\partial\theta_1}\mathcal{L}^{-1}[\Omega(\theta_1,\omega)]\Big)^2\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\Big(\frac{\partial^2}{\partial\theta_1^2}\mathcal{L}^{-1}[\Omega(\theta_1,\nu)]\Big)^3 - \\ - 18\big(\mathcal{L}^{-1}[\Omega(\theta_1,\nu)]\big)^5\Big] + \frac{1}{\nu^{2\beta}}\Omega(\theta_1,\nu). \quad (10)$$

Consider the series solutions of Eq. (10), which have the following form:

$$\Omega(\theta_1,\nu) = \sum_{r=0}^{\infty}\frac{\xi_r(\theta_1)}{\nu^{r\beta+1}}, \quad \nu>0.$$

The jth truncated expansion is as

$$\Omega_j(\theta_1,\nu)=\sum_{r=0}^{j}\frac{\xi_r(\theta_1)}{\nu^{r\beta+1}},\quad \nu>0.$$

As a result of applying the Lemma 1(iii) and Theorem 1, we obtained the following results:

$$\lim_{\nu\to\infty}\big(\nu\Omega(\theta_1,\nu)\big)=\aleph(\theta_1,0)=\xi_0(\theta_1)=\mathrm{e}^{\theta_1},\quad \xi_1(\theta_1)=D_\omega^\beta\aleph(\theta_1,0)=\mathrm{e}^{\theta_1}.$$

So, Eq. (10) becomes as follows:

$$\Psi_j(\theta_1,\nu)=\frac{\mathrm{e}^{\theta_1}}{\nu}+\frac{\mathrm{e}^{\theta_1}}{\nu^{\beta+1}}+\sum_{r=2}^{j}\frac{\xi_r(\theta_1)}{\nu^{r\beta+1}}. \tag{11}$$

The following is the LRF for Eq. (10):

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\,\mathrm{Res}(\theta_1,\nu)&=\Omega(\theta_1,\nu)-\frac{\mathrm{e}^{\theta_1}}{\nu}-\frac{\mathrm{e}^{\theta_1}}{\nu^{\beta+1}}-\\&-\frac{1}{\nu^{2\beta}}\mathcal{L}\Big[\big(\mathcal{L}^{-1}[\Omega(\theta_1,\nu)]\big)^2\frac{\partial^2}{\partial{\theta_1}^2}\Big(\frac{\partial}{\partial\theta_1}\mathcal{L}^{-1}[\Omega(\theta_1,\nu)]\times\\&\times\frac{\partial^2}{\partial{\theta_1}^2}\mathcal{L}^{-1}[\Omega(\theta_1,\nu)]\frac{\partial^3}{\partial{\theta_1}^3}\mathcal{L}^{-1}[\Omega(\theta_1,\nu)]\Big)\Big]-\\&-\frac{1}{\nu^{2\beta}}\mathcal{L}\Big[\Big(\frac{\partial}{\partial\theta_1}\mathcal{L}^{-1}[\Omega(\theta_1,\omega)]\Big)^2\frac{\partial^2}{\partial\theta_1^2}\Big(\frac{\partial^2}{\partial\theta_1^2}\mathcal{L}^{-1}[\Omega(\theta_1,\nu)]\Big)^3-\\&-18\Big(\mathcal{L}^{-1}[\Omega(\theta_1,\nu)]\Big)^5\Big]-\frac{1}{\nu^{2\beta}}\Omega(\theta_1,\nu).\end{aligned}$$

The following is the jth truncated LRF for Eq. (10):

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\,\mathrm{Res}_j(\theta_1,\nu)&=\Omega_j(\theta_1,\nu)-\frac{\mathrm{e}^{\theta_1}}{\nu}-\frac{\mathrm{e}^{\theta_1}}{\nu^{\beta+1}}-\\&-\frac{1}{\nu^{2\beta}}\mathcal{L}\Big[\big(\mathcal{L}^{-1}[\Omega_j(\theta_1,\nu)]\big)^2\frac{\partial^2}{\partial{\theta_1}^2}\Big(\frac{\partial}{\partial\theta_1}\mathcal{L}^{-1}[\Omega_j(\theta_1,\nu)]\times\\&\times\frac{\partial^2}{\partial{\theta_1}^2}\mathcal{L}^{-1}[\Omega_j(\theta_1,\nu)]\frac{\partial^3}{\partial{\theta_1}^3}\mathcal{L}^{-1}[\Omega_j(\theta_1,\nu)]\Big)\Big]-\\&-\frac{1}{\nu^{2\beta}}\mathcal{L}\Big[\Big(\frac{\partial}{\partial\theta_1}\mathcal{L}^{-1}[\Omega_j(\theta_1,\omega)]\Big)^2\frac{\partial^2}{\partial\theta_1^2}\Big(\frac{\partial^2}{\partial\theta_1^2}\mathcal{L}^{-1}[\Omega_j(\theta_1,\nu)]\Big)^3-\\&-18\Big(\mathcal{L}^{-1}[\Omega_j(\theta_1,\nu)]\Big)^5\Big]-\frac{1}{\nu^{2\beta}}\Omega_j(\theta_1,\nu).\end{aligned} \tag{12}$$

In Eq. (11) and Eq. (12), use $j=\overline{1,7}$ to find the undetermined coefficients $\xi_j(\theta_1,\theta_2)$, and then solve the following:

$$\lim_{\nu\to\infty}\big(\nu^{j\beta+1}\mathcal{L}\,\mathrm{Res}_j(\theta_1,\nu)\big)=0.$$

The following outcomes obtained:

$$\xi_2(\theta_1) = \mathrm{e}^{\theta_1}, \quad \xi_3(\theta_1) = \mathrm{e}^{\theta_1}, \quad \xi_4(\theta_1) = \mathrm{e}^{\theta_1},$$

$$\xi_5(\theta_1) = \mathrm{e}^{\theta_1}, \quad \xi_6(\theta_1) = \mathrm{e}^{\theta_1}, \quad \xi_7(\theta_1) = \mathrm{e}^{\theta_1}.$$

In this way, we obtained the following 7th step approximate solution of Eq. (10) in Laplace transforms space:

$$\Omega_7(\theta_1, \nu) = \mathrm{e}^{\theta_1}\Big(\frac{1}{\nu} + \frac{1}{\nu^{\beta+1}} + \frac{1}{\nu^{2\beta+1}} + \frac{1}{\nu^{3\beta+1}} + \\ + \frac{1}{\nu^{4\beta+1}} + \frac{1}{\nu^{5\beta+1}} + \frac{1}{\nu^{6\beta+1}} + \frac{1}{\nu^{7\beta+1}}\Big). \quad (13)$$

By applying $\mathcal{L}^{-1}$ to Eq. (13), we obtain the approximate 7th step solution in the original space, which has the following form:

$$\aleph_7(\theta_1, \omega) = \mathrm{e}^{\theta_1}\Big(1 + \frac{\omega^{\beta}}{\Gamma[\beta+1]} + \frac{\omega^{2\beta}}{\Gamma[2\beta+1]} + \frac{\omega^{3\beta}}{\Gamma[3\beta+1]} + \\ + \frac{\omega^{4\beta}}{\Gamma[4\beta+1]} + \frac{\omega^{5\beta}}{\Gamma[5\beta+1]} + \frac{\omega^{6\beta}}{\Gamma[6\beta+1]} + \frac{\omega^{7\beta}}{\Gamma[7\beta+1]}\Big).$$

When $\beta = 1.0$, the 7th step approximate solution is

$$\aleph_7(\theta_1, \omega) = \mathrm{e}^{\theta_1}\Big(1 + \frac{\omega}{\Gamma[2]} + \frac{\omega^2}{\Gamma[3]} + \frac{\omega^3}{\Gamma[4]} + \frac{\omega^4}{\Gamma[5]} + \frac{\omega^5}{\Gamma[6]} + \frac{\omega^6}{\Gamma[7]} + \frac{\omega^7}{\Gamma[8]}\Big). \quad (14)$$

The first eight terms of the series of the exact solution to $\aleph(\theta, \omega) = \mathrm{e}^{\theta_1+\omega}$ are represented by Eq. (14).

Problem 2. In our second illustration, we take the linear TFPDE provided below [32]:

$$D_{\omega}^{2\beta}\aleph(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \omega) = \frac{1}{2}\theta_1^2\aleph_{\theta_1\theta_1}(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \omega) + \frac{1}{2}\theta_2^2\aleph_{\theta_2\theta_2}(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \omega) + \\ + \frac{1}{2}\theta_3^2\aleph_{\theta_3\theta_3}(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \omega) + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2, \quad (15)$$

where $0 < \beta \leqslant 1$, $(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \omega) \in \left(\mathbb{R}^+\right)^4$, and with the following initial conditions:

$$\aleph(\theta_1, \theta_2, \theta_3, 0) = 0, \quad D_{\omega}^{\beta}\aleph(\theta_1, \theta_2, \theta_3, 0) = \theta_1^2 + \theta_2^2 - \theta_3^2.$$

By applying $\mathcal{L}$ to Eq. (15),

$$\mathcal{L}[D_{\omega}^{2\beta}\aleph(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \omega)] = \mathcal{L}\Big[\frac{1}{2}\theta_1^2\aleph_{\theta_1\theta_1}(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \omega) + \frac{1}{2}\theta_2^2\aleph_{\theta_2\theta_2}(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \omega) + \\ + \frac{1}{2}\theta_3^2\aleph_{\theta_3\theta_3}(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \omega) + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2\Big], \quad (16)$$

By following the steps that are established in Section 3, we get the following result from Eq. (16):

$$\Omega(\theta_1,\theta_2,\theta_3,\nu) = \frac{1}{\nu^{\beta+1}}(\theta_1^2+\theta_2^2-\theta_3^2) + \frac{\theta_1^2}{2\nu^{2\beta}}D_{\theta_1\theta_1}\Omega(\theta_1,\theta_2,\theta_3,\nu) + \\ + \frac{\theta_2^2}{2\nu^{2\beta}}D_{\theta_2\theta_2}\Omega(\theta_1,\theta_2,\theta_3,\omega) + \frac{\theta_3^2}{2\nu^{2\beta}}D_{\theta_3\theta_3}\Omega(\theta_1,\theta_2,\theta_3,\omega) + \\ + \frac{1}{\nu^{2\beta+1}}(\theta_1^2+\theta_2^2+\theta_3^2). \quad (17)$$

Consider the series solutions of Eq. (17), which have the following form:

$$\Omega(\theta_1,\theta_2,\theta_3,\nu) = \sum_{r=0}^{\infty}\frac{\xi_r(\theta_1,\theta_2,\theta_3)}{\nu^{r\beta+1}}, \quad \nu>0.$$

The jth truncated series is as

$$\Omega_j(\theta_1,\theta_2,\theta_3,\nu) = \sum_{r=0}^{j}\frac{\xi_r(\theta_1,\theta_2,\theta_3)}{\nu^{r\beta+1}}, \ \nu>0. \quad (18)$$

As a result of applying the Lemma 1(iii) and Theorem1, we obtained the following results:

$$\lim_{\nu\to\infty}\big(\nu\Omega(\theta_1,\theta_2,\theta_3,\nu)\big) = \xi_0(\theta_1,\theta_2,\theta_3) = \aleph(\theta_1,\theta_2,\theta_3,0) = 0,$$
$$\xi_1(\theta_1,\theta_2,\theta_3) = D_\omega^\beta\aleph(\theta_1,\theta_2,\theta_3,0) = \theta_1^2+\theta_2^2-\theta_3^2.$$

So, Eq. (18) becomes as follows:

$$\Omega_j(\theta_1,\theta_2,\theta_3,\nu) = \frac{(\theta_1^2+\theta_2^2-\theta_3^2)}{\nu^{\beta+1}} + \sum_{r=2}^{\kappa}\frac{\xi_r(\theta_1,\theta_2,\theta_3)}{\nu^{r\beta+1}}, \quad \nu>0. \quad (19)$$

The following is the LRF for Eq. (17):

$$L\,\mathrm{Res}(\theta_1,\theta_2,\theta_3,\nu) = \Omega(\theta_1,\theta_2,\theta_3,\nu) - \frac{1}{\nu^{\beta+1}}(\theta_1^2+\theta_2^2-\theta_3^2) - \\ - \frac{\theta_1^2}{2\nu^{2\beta}}D_{\theta_1\theta_1}\Omega(\theta_1,\theta_2,\theta_3,\nu) - \frac{\theta_2^2}{2\nu^{2\beta}}D_{\theta_2\theta_2}\Omega(\theta_1,\theta_2,\theta_3,\nu) - \\ - \frac{\theta_3^2}{2\nu^{2\beta}}D_{\theta_3\theta_3}\Omega(\theta_1,\theta_2,\theta_3,\nu) - \frac{1}{\nu^{2\beta+1}}(\theta_1^2+\theta_2^2+\theta_3^2).$$

The following is the jth truncated LRF for Eq. (17):

$$\mathcal{L}\,\mathrm{Res}_j(\theta_1,\theta_2,\theta_3,\nu) = \Omega_j(\theta_1,\theta_2,\theta_3,\nu) - \frac{1}{\nu^{\beta+1}}(\theta_1^2+\theta_2^2-\theta_3^2) - \\ - \frac{\theta_1^2}{2\nu^{2\beta}}D_{\theta_1\theta_2}\Omega_j(\theta_1,\theta_2,\theta_3,\nu) - \frac{\theta_2^2}{2\nu^{2\beta}}D_{\theta_2\theta_2}\Omega_j(\theta_1,\theta_2,\theta_3,\nu) -$$

$$-\frac{\theta_3^2}{2\nu^{2\beta}}D_{\theta_3\theta_3}\Omega_j(\theta_1,\theta_2,\theta_3,\nu)-\frac{1}{\nu^{2\beta+1}}(\theta_1^2+\theta_2^2+\theta_3^2). \quad (20)$$

In Eq. (19) and Eq. (20), use $j=\overline{1,7}$ to find the undetermined coefficients $\xi_j(\theta_1,\theta_2)$, and then solve the following:

$$\lim_{\nu\to\infty}\left(\nu^{j\beta+1}\mathcal{L}\,\mathrm{Res}_j(\theta_1,\theta_2,\theta_3,\nu)\right)=0.$$

The following outcomes obtained:

$$\begin{aligned}
&\xi_2(\theta_1,\theta_2,\theta_3)=\theta_1^2+\theta_2^2+\theta_3^2, && \xi_3(\theta_1,\theta_2,\theta_3)=\theta_1^2+\theta_2^2-\theta_3^2,\\
&\xi_4(\theta_1,\theta_2,\theta_3)=\theta_1^2+\theta_2^2+\theta_3^2, && \xi_5(\theta_1,\theta_2,\theta_3)=\theta_1^2+\theta_2^2-\theta_3^2,\\
&\xi_6(\theta_1,\theta_2,\theta_3)=\theta_1^2+\theta_2^2+\theta_3^2, && \xi_7(\theta_1,\theta_2,\theta_3)=\theta_1^2+\theta_2^2-\theta_3^2.
\end{aligned}$$

In this way, we obtained the following 7th step approximate solution of Eq. (17) in Laplace transforms space:

$$\begin{aligned}
\Omega_7(\theta_1,\theta_2,\theta_3,\nu)=&\frac{\theta_1^2+\theta_2^2-\theta_3^2}{\nu^{\beta+1}}+\frac{\theta_1^2+\theta_2^2+\theta_3^2}{\nu^{2\beta+1}}+\frac{\theta_1^2+\theta_2^2-\theta_3^2}{\nu^{3\beta+1}}+\\
&+\frac{\theta_1^2+\theta_2^2+\theta_3^2}{\nu^{4\beta+1}}+\frac{\theta_1^2+\theta_2^2-\theta_3^2}{\nu^{5\beta+1}}+\frac{\theta_1^2+\theta_2^2+\theta_3^2}{\nu^{6\beta+1}}+\frac{\theta_1^2+\theta_2^2-\theta_3^2}{\nu^{7\beta+1}}. \quad (21)
\end{aligned}$$

By applying $\mathcal{L}^{-1}$ to Eq. (21), we obtain the approximate 7th step solution in the original space, which has the following form:

$$\begin{aligned}
&\aleph_7(\theta_1,\theta_2,\theta_3,\omega)=\\
&=(\theta_1^2+\theta_2^2-\theta_3^2)\Big(\frac{\omega^{\beta}}{\Gamma[\beta+1]}+\frac{\omega^{3\beta}}{\Gamma[3\beta+1]}+\frac{\omega^{5\beta}}{\Gamma[5\beta+1]}+\frac{\omega^{7\beta}}{\Gamma[7\beta+1]}\Big)+\\
&\quad+(\theta_1^2+\theta_2^2+\theta_3^2)\Big(\frac{\omega^{2\beta}}{\Gamma[2\beta+1]}+\frac{\omega^{4\beta}}{\Gamma[4\beta+1]}+\frac{\omega^{6\beta}}{\Gamma[6\beta+1]}\Big).
\end{aligned}$$

When $\beta=1.0$, the 7th step approximate solution is

$$\begin{aligned}
\aleph_7(\theta_1,\theta_2,\theta_3,\omega)=&(\theta_1^2+\theta_2^2-\theta_3^2)\Big(\frac{\omega}{\Gamma[2]}+\frac{\omega^3}{\Gamma[4]}+\frac{\omega^5}{\Gamma[6]}+\frac{\omega^7}{\Gamma[8]}\Big)+\\
&+(\theta_1^2+\theta_2^2+\theta_3^2)\Big(\frac{\omega^2}{\Gamma[3]}+\frac{\omega^4}{\Gamma[5]}+\frac{\omega^6}{\Gamma[7]}\Big). \quad (22)
\end{aligned}$$

The first seven terms of the series of the exact solution to

$$\aleph(\theta_1,\theta_2,\theta_3,\omega)=(\theta_1^2+\theta_2^2-\theta_3^2)\sinh\omega+(\theta_1^2+\theta_2^2+\theta_3^2)(\cosh\omega-1)$$

are represented by Eq. (22).

Problem 3. In our third illustration, we take the nonlinear TFPDE provided below [33]:

$$D_{\omega}^{2\beta}\aleph(\theta_1,\theta_2,\omega) = \frac{\partial^2}{\partial\theta_1\partial\theta_2}\big(\aleph_{\theta_1\theta_1}(\theta_1,\theta_2,\omega)\aleph_{\theta_2\theta_2}(\theta_1,\theta_2,\omega)\big) - \\ - \frac{\partial^2}{\partial\theta_1\partial\theta_2}\big(\theta_1\theta_2\aleph_{\theta_1}(\theta_1,\theta_2,\omega)\aleph_{\theta_2}(\theta_1,\theta_2,\omega)\big) - \aleph(\theta_1,\theta_2,\omega), \quad (23)$$

where $0 < \beta \leqslant 1$, $(\theta_1,\theta_2,\omega) \in (\mathbb{R}^+)^3$, and with the following initial conditions:

$$\aleph(\theta_1,\theta_2,0) = \mathrm{e}^{\theta_1\theta_2}, \quad D_{\omega}^{\beta}\aleph(\theta_1,\theta_2,0) = \mathrm{e}^{\theta_1\theta_2}.$$

By applying $\mathcal{L}$ to Eq. (23),

$$\mathcal{L}[D_{\omega}^{2\beta}\aleph(\theta_1,\theta_2,\omega) = \mathcal{L}\Big[\frac{\partial^2}{\partial\theta_1\partial\theta_2}\big(\aleph_{\theta_1\theta_1}(\theta_1,\theta_2,\omega)\aleph_{\theta_2\theta_2}(\theta_1,\theta_2,\omega)\big) - \\ - \frac{\partial^2}{\partial\theta_1\partial\theta_2}\big(\theta_1\theta_2\aleph_{\theta_1}(\theta_1,\theta_2,\omega)\aleph_{\theta_2}(\theta_1,\theta_2,\omega)\big) - \aleph(\theta_1,\theta_2,\omega)\Big]. \quad (24)$$

By following the steps that are established in Section 3, we get the following result from Eq. (24):

$$\Omega(\theta_1,\theta_2,\nu) = \frac{\mathrm{e}^{\theta_1\theta_2}}{\nu} + \frac{\mathrm{e}^{\theta_1\theta_2}}{\nu^{\beta+1}} + \\ + \frac{1}{\nu^{2\beta}}\mathcal{L}\Big[\frac{\partial^2}{\partial\theta_1\partial\theta_2}\big(D_{\theta_1\theta_1}\mathcal{L}^{-1}[\Omega(\theta_1,\theta_2,\nu)]D_{\theta_2\theta_2}\mathcal{L}^{-1}[\Omega(\theta_1,\theta_2,\nu)]\big)\Big] - \\ - \frac{1}{\nu^{2\beta}}\mathcal{L}\Big[\frac{\partial^2}{\partial\theta_1\partial\theta_2}\big(\theta_1\theta_2 D_{\theta_1}\mathcal{L}^{-1}[\Omega(\theta_1,\theta_2,\nu)]D_{\theta_2}\mathcal{L}^{-1}[\Omega(\theta_1,\theta_2,\nu)]\big)\Big] - \\ - \frac{1}{\nu^{2\beta}}\Omega(\theta_1,\theta_2,\nu). \quad (25)$$

Consider the series solutions of Eq. (25), which have the following form:

$$\Omega(\theta_1,\theta_2,\nu) = \sum_{r=0}^{\infty}\frac{\xi_r(\theta_1,\theta_2)}{\nu^{r\beta+1}}, \quad \nu > 0.$$

The jth truncated expansion is as

$$\Omega_j(\theta_1,\theta_2,\nu) = \sum_{r=0}^{j}\frac{\xi_r(\theta_1,\theta_2)}{\nu^{r\beta+1}}, \quad \nu > 0.$$

As a result of applying the Lemma 1(iii) and Theorem 1, we obtained the following results:

$$\lim_{\nu\to\infty}\big(\nu\Omega(\theta_1,\theta_2,\nu)\big) = \aleph(\theta_1,\theta_2,0) = \xi_0(\theta_1) = \mathrm{e}^{\theta_1\theta_2}, \xi_1(\theta_1) = D_{\omega}^{\beta}\aleph(\theta_1,\theta_2,0) = \mathrm{e}^{\theta_1\theta_2}.$$

So, Eq. (26) becomes

$$\Omega_j(\theta_1,\theta_2,\nu)=\frac{\mathrm{e}^{\theta_1\theta_2}}{\nu}+\frac{\mathrm{e}^{\theta_1\theta_2}}{\nu^{\beta+1}}+\sum_{r=2}^{j}\frac{\xi_r(\theta_1,\theta_2)}{\nu^{r\beta+1}},\quad \nu>0. \tag{26}$$

The following is the LRF for Eq. (25):

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\,\mathrm{Res}(\theta_1,\theta_2,\nu)&=\Omega(\theta_1,\theta_2,\nu)-\frac{\mathrm{e}^{\theta_1\theta_2}}{\nu}-\frac{\mathrm{e}^{\theta_1\theta_2}}{\nu^{\beta+1}}-\\&-\frac{1}{\nu^{2\beta}}\mathcal{L}\Big[\frac{\partial^2}{\partial\theta_1\partial\theta_2}\big(D_{\theta_1\theta_1}\mathcal{L}^{-1}[\Omega(\theta_1,\theta_2,\nu)]D_{\theta_2\theta_2}\mathcal{L}^{-1}[\Omega(\theta_1,\theta_2,\nu)]\big)\Big]+\\&+\frac{1}{\nu^{2\beta}}\mathcal{L}\Big[\frac{\partial^2}{\partial\theta_1\partial\theta_2}\big(\theta_1\theta_2D_{\theta_1}\mathcal{L}^{-1}[\Omega(\theta_1,\theta_2,\nu)]D_{\theta_2}\mathcal{L}^{-1}[\Omega(\theta_1,\theta_2,\nu)]\big)\Big]+\\&+\frac{1}{\nu^{2\beta}}\Omega(\theta_1,\theta_2,\nu).\end{aligned}$$

The following is the jth truncated LRF for Eq. (25):

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\,\mathrm{Res}_j(\theta_1,\theta_2,\nu)&=\Omega_j(\theta_1,\theta_2,\nu)-\frac{\mathrm{e}^{\theta_1\theta_2}}{\nu}-\frac{\mathrm{e}^{\theta_1\theta_2}}{\nu^{\beta+1}}-\\&-\frac{1}{\nu^{2\beta}}\mathcal{L}\Big[\frac{\partial^2}{\partial\theta_1\partial\theta_2}\big(D_{\theta_1\theta_1}\mathcal{L}^{-1}[\Omega_j(\theta_1,\theta_2,\nu)]D_{\theta_2\theta_2}\mathcal{L}^{-1}[\Omega_j(\theta_1,\theta_2,\nu)]\big)\Big]+\\&+\frac{1}{\nu^{2\beta}}\mathcal{L}\Big[\frac{\partial^2}{\partial\theta_1\partial\theta_2}\big(\theta_1\theta_2D_{\theta_1}\mathcal{L}^{-1}[\Omega_j(\theta_1,\theta_2,\nu)]D_{\theta_2}\mathcal{L}^{-1}[\Omega_j(\theta_1,\theta_2,\nu)]\big)\Big]+\\&+\frac{1}{\nu^{2\beta}}\Omega_j(\theta_1,\theta_2,\nu).\end{aligned} \tag{27}$$

In Eq. (26) and Eq. (27), use $j=\overline{1,7}$ to find the undetermined coefficients $\xi_j(\theta_1,\theta_2)$, and then solve the following:

$$\lim_{\nu\to\infty}\big(\nu^{j\beta+1}\mathcal{L}\,\mathrm{Res}_j(\theta_1,\theta_2,\nu)\big)=0.$$

The following outcomes obtained:

$$\begin{aligned}&\xi_2(\theta_1,\theta_2)=-\mathrm{e}^{\theta_1\theta_2},\quad \xi_3(\theta_1,\theta_2)=-\mathrm{e}^{\theta_1\theta_2},\quad \xi_4(\theta_1,\theta_2)=\mathrm{e}^{\theta_1\theta_2},\\&\xi_5(\theta_1,\theta_2)=\mathrm{e}^{\theta_1\theta_2},\quad \xi_6(\theta_1,\theta_2)=-\mathrm{e}^{\theta_1\theta_2},\quad \xi_7(\theta_1,\theta_2)=-\mathrm{e}^{\theta_1\theta_2}.\end{aligned}$$

In this way, we obtained the following 7th step approximate solution of Eq. (25) in Laplace transforms space:

$$\begin{aligned}\Omega_7(\theta_1,\theta_2,\nu)=\mathrm{e}^{\theta_1\theta_2}\Big(&\frac{1}{\nu}+\frac{1}{\nu^{\beta+1}}-\frac{1}{\nu^{2\beta+1}}-\frac{1}{\nu^{3\beta+1}}+\\&+\frac{1}{\nu^{4\beta+1}}+\frac{1}{\nu^{5\beta+1}}-\frac{1}{\nu^{6\beta+1}}-\frac{1}{\nu^{7\beta+1}}\Big).\end{aligned} \tag{28}$$

By applying $\mathcal{L}^{-1}$ to Eq. (28), we obtain the approximate 7th step solution in the original space, which has the following form:

$$\aleph_7(\theta_1,\theta_2,\omega) = \mathrm{e}^{\theta_1\theta_2}\Big(1 + \frac{\omega^{\beta}}{\Gamma[\beta+1]} - \frac{\omega^{2\beta}}{\Gamma[2\beta+1]} - \frac{\omega^{3\beta}}{\Gamma[3\beta+1]} + \frac{\omega^{4\beta}}{\Gamma[4\beta+1]} + \\ + \frac{\omega^{5\beta}}{\Gamma[5\beta+1]} - \frac{\omega^{6\beta}}{\Gamma[6\beta+1]} - \frac{\omega^{7\beta}}{\Gamma[7\beta+1]}\Big).$$

When $\beta = 1.0$, the 7th step approximate solution is

$$\aleph_7(\theta_1,\theta_2,\omega) = \mathrm{e}^{\theta_1\theta_2}\Big(1 + \frac{\omega}{\Gamma[2]} - \frac{\omega^2}{\Gamma[3]} - \frac{\omega^3}{\Gamma[4]} + \frac{\omega^4}{\Gamma[5]} + \frac{\omega^5}{\Gamma[6]} - \frac{\omega^6}{\Gamma[7]} - \frac{\omega^7}{\Gamma[8]}\Big). \quad (29)$$

The first eight terms of the series of the exact solution to $\mathrm{e}^{\theta_1\theta_2}(\cos\omega + \sin\omega)$ are represented by Eq. (29).

5. Numerical Simulation and Discussion. In this section, the results of the approximate and exact solutions to the problems are examined graphically and numerically. Error functions can be used to evaluate the accuracy of the approximate analytical approach, so it is necessary to specify the errors in the approximate solutions provided by the LRPSM. We used the Abs-E, Rel-E, and Rec-E functions to demonstrate the accuracy and efficiency of LRPSM.

Fig. 1 depicts the 2D graphs of the comparative study of the exact and approximate solutions obtained by the proposed method in Problems 1–3. These figures show the 2D plots of the exact and 7th step approximate solutions attained by LRPSM for Problems 1–3, when $\beta = 0.6$, 0.7, 0.8, 0.9, and 1.0 in the range

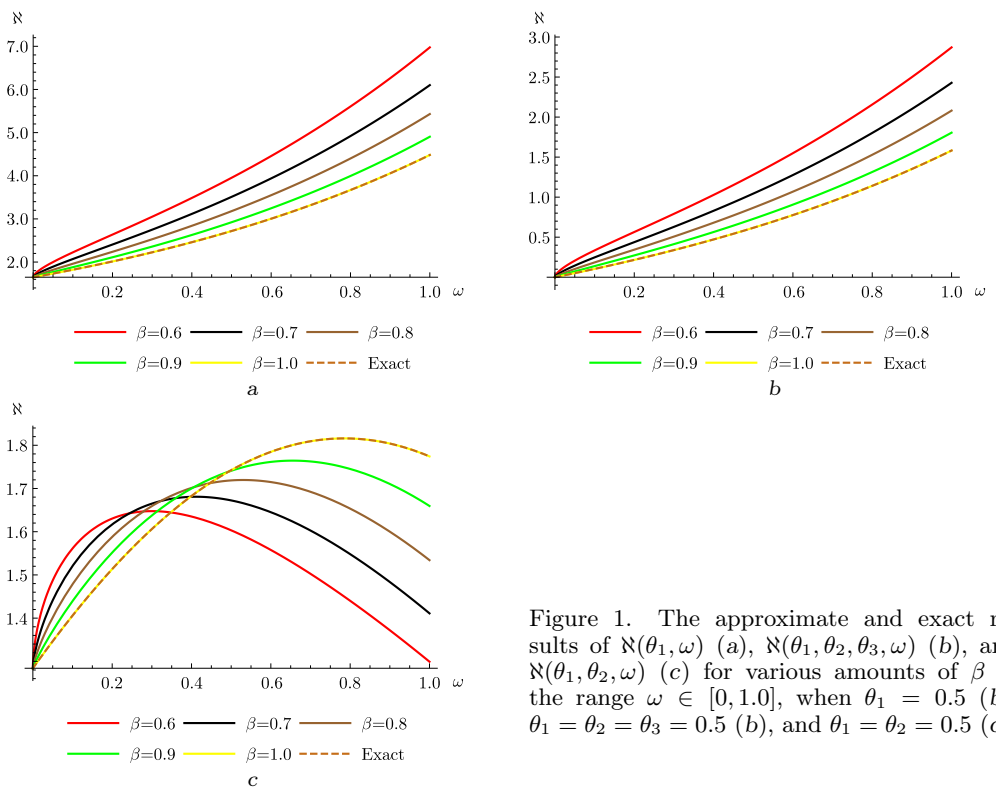


Figure 1. The approximate and exact results of $\aleph(\theta_1,\omega)$ (a), $\aleph(\theta_1,\theta_2,\theta_3,\omega)$ (b), and $\aleph(\theta_1,\theta_2,\omega)$ (c) for various amounts of β in the range $\omega \in [0, 1.0]$, when $\theta_1 = 0.5$ (b), $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = 0.5$ (b), and $\theta_1 = \theta_2 = 0.5$ (c)

$\omega \in [0, 1.0]$. These graphs indicate that when $\beta \to 1.0$ is applied, the approximative solution converges to the exact solution. The exact and approximation solutions overlap at $\beta = 1.0$, demonstrating the accuracy and reliability of the proposed method.

Fig. 2 shows the Abs-E of the proposed method's 7th step approximate and exact solutions to Problems 1–3 in the range $\omega \in [0, 0.5]$ for $\beta = 1.0$.

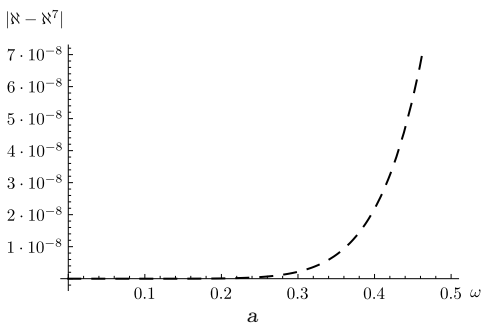
Fig. 3 depicts a comparison of the Rel-E of the exact and 7th step approximate solutions to problems $1 - 3$ with $\beta = 1.0$ in the range $\omega \in [0, 1.0]$. The graphical analysis of the approximate and exact findings in the form of Abs-E and Rel-E demonstrates the reliability and precision of LRPSM.

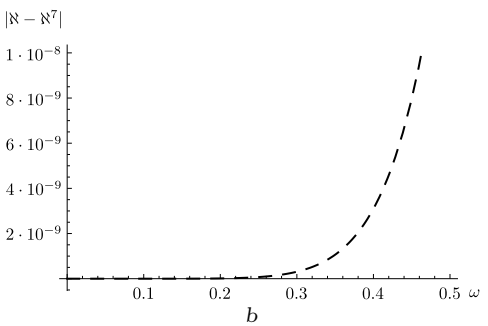
Fig. 4 depicts the comparison study using the 3D plots in terms of the Abs-E of the approximate finding from the seven iterations and the exact result found using the suggested method to Problems 1–3, respectively, at $\beta = 1.0$ in the ranges $\omega \in [0, 0.5]$ and $\theta \in [0, 0.5]$.

Fig. 5 depicts the comparison study using the 3D curve in terms of the Rel-E of the approximate finding from the seven iterations and the exact result found using the suggested method to Problems 1–3, respectively, at $\beta = 1.0$ in the range $\omega \in [0, 0.5]$ and $\theta \in [0, 0.5]$.

The study has revealed that the 7th step approximate solutions of the proposed method are very similar to the exact solution. The reliability and accuracy of LRPSM is demonstrated by graphical analysis of approximate and exact results in the form of Abs-E and Rel-E.

Tables 1–3 show Abs-E and Rel-E in the range $\omega \in [0, 1.0]$ between the approximate solution obtained from the seven iterations and the exact solution obtained by LRPSM at $\beta = 1.0$ for appropriately chosen values. The amplitudes of Abs-E and Rel-E are shown in Table 1 which range from $2.29781 \cdot 10^{-11}$ to $3.04568 \cdot 10^{-3}$ and from $2.07914 \cdot 10^{-11}$ to $4.55539 \cdot 10^{-4}$, respectively, for Problem 1. The inter-





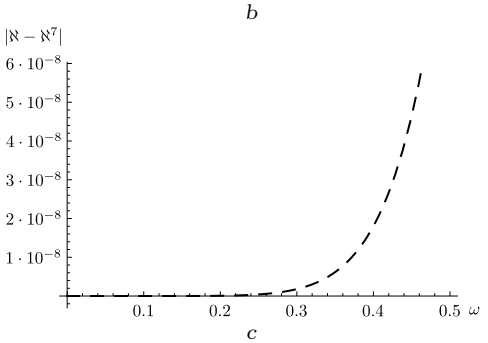
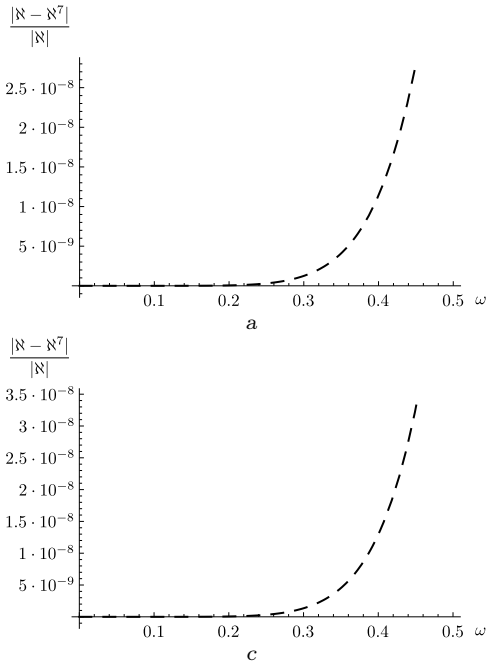


Figure 2. The 2D curves of the Abs-E graph of $\aleph(\theta_1, \omega)$ (a), $\aleph(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \omega)$ (b), and $\aleph(\theta_1, \theta_2, \omega)$ (c) for the approximate finding obtained through seven iterations and the exact result in the range $\omega \in [0, 0.5]$, when $\theta_1 = 0.25$ (a), $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = 0.25$ (b), and $\theta_1 = \theta_2 = 0.25$ (c)



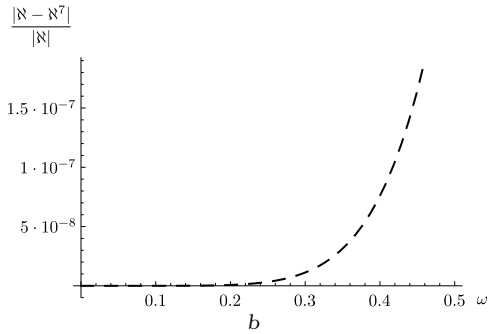
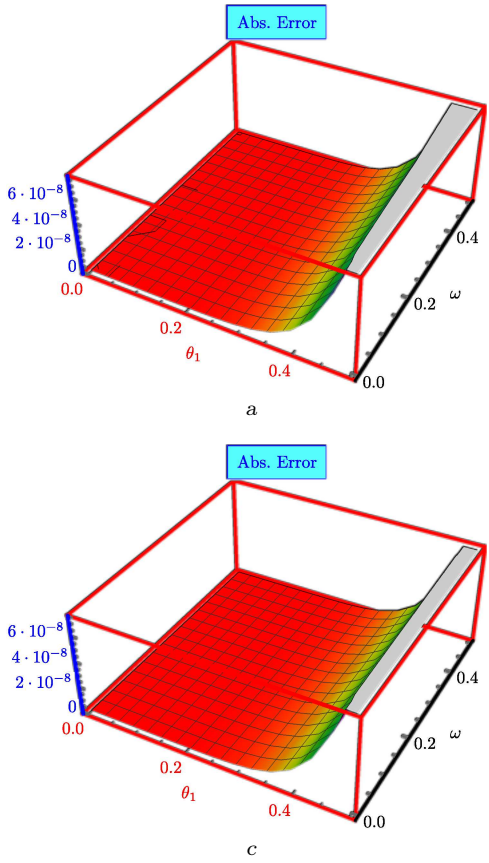


Figure 3. The 2D curves of the Rel-E graph of $\aleph(\theta_1, \omega)$ (a), $\aleph(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \omega)$ (b), and $\aleph(\theta_1, \theta_2, \omega)$ (c) for the approximate finding obtained through seven iterations and the exact result in the range $\omega \in [0, 0.5]$, when $\theta_1 = 0.25$ (a), $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = 0.25$ (b), and $\theta_1 = \theta_2 = 0.25$ (c)



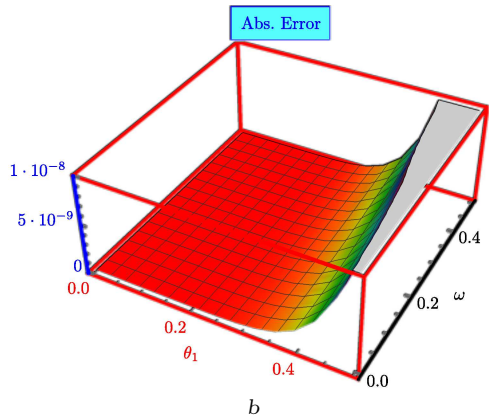
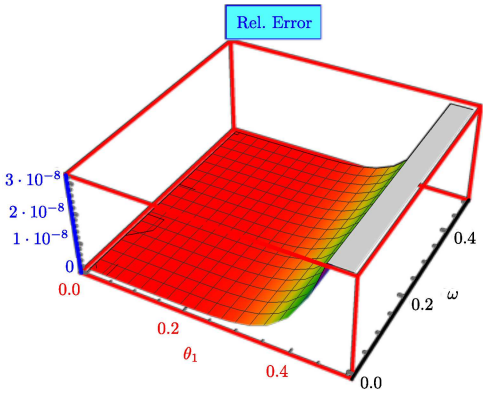
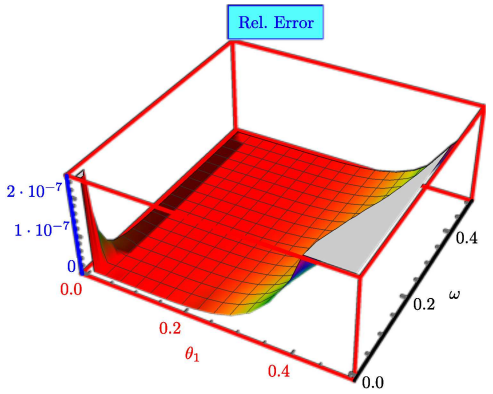


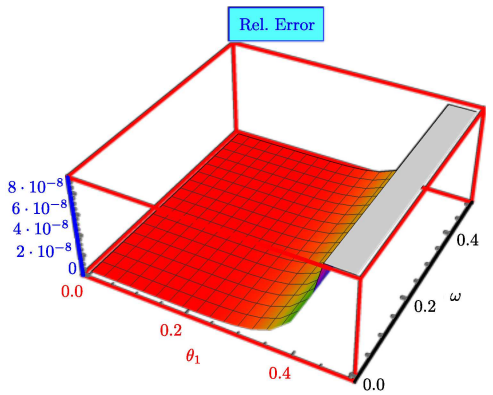
Figure 4. The 3D plots of the Abs-E of $\aleph(\theta_1, \omega)$ (a), $\aleph(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \omega)$ (b), and $\aleph(\theta_1, \theta_2, \omega)$ (c) for the approximate finding obtained through seven iterations and exact result in the ranges $\omega \in [0, 0.5]$ and $\theta_1 \in [0, 0.5]$, when $\theta_2 = \theta_3 = 0.25$ (b), and $\theta_2 = 0.25$ (c)



a



b



c

Figure 5. The 3D plots of the Rel-E of $\aleph(\theta_1, \omega)$ (a), $\aleph(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \omega)$ (b), and $\aleph(\theta_1, \theta_2, \omega)$ (c) for the approximate finding obtained through seven iterations and exact result in the ranges $\omega \in [0, 0.5]$ and $\theta_1 \in [0, 0.5]$, when $\theta_2 = \theta_3 = 0.25$ (b), and $\theta_2 = 0.25$ (c)

vals of Abs-E and Rel-E are shown in Table 2 which are from $1.63156 \cdot 10^{-13}$ to $2.93588 \cdot 10^{-3}$ and from $1.21370 \cdot 10^{-9}$ for $1.27164 \cdot 10^{-3}$, respectively, to Problem 2. Table 3 shows the intervals of Abs-E and Rel-E which are from $2.19100 \cdot 10^{-11}$ to $2.81468 \cdot 10^{-3}$ and $2.08398 \cdot 10^{-11}$ for $8.18227 \cdot 10^{-4}$, respectively, to Problem 3. Tables 1–3 demonstrate that the 7th step approximate solutions to all numerical equations have remarkably minimal Abs-E and Rel-E. So, the suggested method is very useful for the analysis of different FODEs with a physical interest in the areas of applied mathematics and engineering. As shown in Tables 4–6, Rec-E has been used to numerically demonstrate the process by which the approximate solutions of the Problems 1–3 converge to the exact solution for selected values in the range $\omega \in [0, 1]$. As the order of the fractional derivative is increased, the approximate solution of the seven iterations produced using the suggested method quickly converges to the exact solution. The graphical and numerical findings show the accuracy and reliability of the LRPSM.

Table 1 displays the Abs-E and Rel-E at appropriate grid locations in the ranges $\omega \in [0,\ 1.0]$ and $\theta_1 \in [0,\ 1.0]$ of the approximate solution attained from the seven iterations and the exact solution to Problem 1 at $\beta = 1.0$ using the LRPSM.

Table 2 displays the Abs-E and Rel-E at appropriate grid locations in the ranges $\omega \in [0, 1.0]$, $\theta_1 \in [0, 1.0]$, $\theta_2 \in [0, 1.0]$ as well as $\theta_3 \in [0, 1.0]$ of the ap-

Table 1

The Abs-E and Rel-E for Problem 1

(θ_1, ω)	Abs. Errors	Rel. Errors
$(0.05, 0.05)$	$2.29781 \cdot 10^{-11}$	$2.07914 \cdot 10^{-11}$
$(0.15, 0.15)$	$1.87820 \cdot 10^{-8}$	$1.39140 \cdot 10^{-8}$
$(0.25, 0.25)$	$4.51442 \cdot 10^{-7}$	$2.73814 \cdot 10^{-7}$
$(0.35, 0.35)$	$3.81249 \cdot 10^{-6}$	$1.89322 \cdot 10^{-6}$
$(0.45, 0.45)$	$1.93189 \cdot 10^{-5}$	$7.85450 \cdot 10^{-6}$
$(0.55, 0.55)$	$7.22544 \cdot 10^{-5}$	$2.40514 \cdot 10^{-5}$
$(0.65, 0.65)$	$2.20912 \cdot 10^{-4}$	$6.02057 \cdot 10^{-5}$
$(0.75, 0.75)$	$5.85105 \cdot 10^{-4}$	$1.30554 \cdot 10^{-4}$
$(0.85, 0.85)$	$1.39181 \cdot 10^{-3}$	$2.54261 \cdot 10^{-4}$
$(0.95, 0.95)$	$3.04568 \cdot 10^{-3}$	$4.55539 \cdot 10^{-4}$

Table 2

The Abs-E and Rel-E for Problem 2

$(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \omega)$	Abs. Errors	Rel. Errors
$(0.05, 0.05, 0.05, 0.05)$	$1.63156 \cdot 10^{-13}$	$1.21370 \cdot 10^{-9}$
$(0.15, 0.15, 0.15, 0.15)$	$1.07593 \cdot 10^{-9}$	$2.59356 \cdot 10^{-7}$
$(0.25, 0.25, 0.25, 0.25)$	$6.44068 \cdot 10^{-8}$	$2.97104 \cdot 10^{-6}$
$(0.35, 0.35, 0.35, 0.35)$	$9.56001 \cdot 10^{-7}$	$1.43769 \cdot 10^{-5}$
$(0.45, 0.45, 0.45, 0.45)$	$7.18225 \cdot 10^{-6}$	$4.58092 \cdot 10^{-5}$
$(0.55, 0.55, 0.55, 0.55)$	$3.59959 \cdot 10^{-5}$	$1.14039 \cdot 10^{-4}$
$(0.65, 0.65, 0.65, 0.65)$	$1.37909 \cdot 10^{-4}$	$2.41227 \cdot 10^{-4}$
$(0.75, 0.75, 0.75, 0.75)$	$4.36368 \cdot 10^{-4}$	$4.54630 \cdot 10^{-4}$
$(0.85, 0.85, 0.85, 0.85)$	$1.19656 \cdot 10^{-3}$	$7.86128 \cdot 10^{-4}$
$(0.95, 0.95, 0.95, 0.95)$	$2.93588 \cdot 10^{-3}$	$1.27164 \cdot 10^{-3}$

Table 3

The Abs-E and Rel-E for Problem 3

$(\theta_1, \theta_2, \omega)$	Abs. Errors	Rel. Errors
$(0.05, 0.05, 0.05)$	$2.19100 \cdot 10^{-11}$	$2.08398 \cdot 10^{-11}$
$(0.15, 0.05, 0.15)$	$1.65204 \cdot 10^{-8}$	$1.41915 \cdot 10^{-8}$
$(0.25, 0.05, 0.25)$	$3.73431 \cdot 10^{-7}$	$2.88416 \cdot 10^{-7}$
$(0.35, 0.05, 0.35)$	$3.02361 \cdot 10^{-6}$	$2.08615 \cdot 10^{-6}$
$(0.45, 0.05, 0.45)$	$1.49760 \cdot 10^{-5}$	$9.15876 \cdot 10^{-6}$
$(0.55, 0.05, 0.55)$	$5.58162 \cdot 10^{-5}$	$2.99928 \cdot 10^{-5}$
$(0.65, 0.05, 0.65)$	$1.73376 \cdot 10^{-4}$	$8.10919 \cdot 10^{-5}$
$(0.75, 0.05, 0.75)$	$4.75627 \cdot 10^{-4}$	$1.91749 \cdot 10^{-4}$
$(0.85, 0.05, 0.85)$	$1.19473 \cdot 10^{-3}$	$4.11041 \cdot 10^{-4}$
$(0.95, 0.05, 0.95)$	$2.81468 \cdot 10^{-3}$	$8.18227 \cdot 10^{-4}$

Table 4

The Rec-E for $\aleph(\theta_1, \omega)$ at different values of β for Problem 1

(θ_1, ω)	$\beta = 0.7$	$\beta = 0.8$	$\beta = 0.9$	$\beta = 1.0$
$(0.02, 0.02)$	$9.92308 \cdot 10^{-8}$	$6.80134 \cdot 10^{-9}$	$4.41026 \cdot 10^{-10}$	$2.72054 \cdot 10^{-11}$
$(0.12, 0.12)$	$5.80237 \cdot 10^{-5}$	$9.74157 \cdot 10^{-6}$	$1.54730 \cdot 10^{-6}$	$2.33798 \cdot 10^{-7}$
$(0.22, 0.22)$	$5.35032 \cdot 10^{-4}$	$1.21625 \cdot 10^{-4}$	$2.61571 \cdot 10^{-5}$	$5.35152 \cdot 10^{-6}$
$(0.32, 0.32)$	$2.19460 \cdot 10^{-3}$	$6.01676 \cdot 10^{-4}$	$1.56060 \cdot 10^{-4}$	$3.85073 \cdot 10^{-5}$
$(0.42, 0.42)$	$6.28249 \cdot 10^{-3}$	$1.97328 \cdot 10^{-3}$	$5.86366 \cdot 10^{-4}$	$1.65756 \cdot 10^{-4}$
$(0.52, 0.52)$	$1.46622 \cdot 10^{-2}$	$5.12431 \cdot 10^{-3}$	$1.69430 \cdot 10^{-3}$	$7.39038 \cdot 10^{-4}$
$(0.62, 0.62)$	$2.99909 \cdot 10^{-2}$	$1.14451 \cdot 10^{-2}$	$4.13208 \cdot 10^{-3}$	$1.80237 \cdot 10^{-3}$
$(0.72, 0.72)$	$5.59386 \cdot 10^{-2}$	$2.30044 \cdot 10^{-2}$	$8.95017 \cdot 10^{-3}$	$3.90397 \cdot 10^{-3}$
$(0.82, 0.82)$	$9.74598 \cdot 10^{-2}$	$4.27726 \cdot 10^{-2}$	$1.77593 \cdot 10^{-2}$	$7.74645 \cdot 10^{-3}$
$(0.92, 0.92)$	$1.61125 \cdot 10^{-1}$	$7.49016 \cdot 10^{-2}$	$3.29412 \cdot 10^{-2}$	$1.43686 \cdot 10^{-2}$

proximate solution obtained from the seven iterations and the exact solution to Problem 2 at $\beta = 1.0$ using the LRPSM.

Table 3 displays the Abs-E and Rel-E at appropriate grid locations in the ranges $\omega \in [0, 1.0]$, $\theta_1 \in [0, 1.0]$ as well as $\theta_2 \in [0, 1.0]$ of the approximate solution obtained from the seven iterations and the exact solution to Problem 3 at $\beta = 1.0$ using the LRPSM.

Table 4 shows the Rec-E between the approximate solution attained from the seven iterations and exact solutions of Problem 1 acquired by LRPSM at appropriate grid locations in the ranges $\omega \in [0, 1.0]$, and $\theta_1 \in [0, 1.0]$.

Table 5 shows the Rec-E between the approximate solution obtained from the seven iterations and exact solutions of Problem 2 acquired by LRPSM at appropriate grid locations in the ranges $\omega \in [0, 1.0]$, $\theta_1 \in [0, 1.0]$, $\theta_2 \in [0, 1.0]$, and $\theta_3 \in [0, 1.0]$.

Table 6 shows the Rec-E between the approximate solution from the 5th iteration and exact solutions of Problem 3 acquired by LRPSM at appropriate grid locations in the ranges $\omega \in [0, 1.0]$, $\theta_1 \in [0, 1.0]$, and $\theta_2 \in [0, 1.0]$.

6. Conclusion. We used the Laplace transform with the residual power series method to solve time-fractional partial differential equations with variable coefficients in the sense of the Gerasimov–Caputo fractional derivative. Graphics and tables show that the 7th step approximate and exact solutions are in perfect agreement, which demonstrated the efficiency and reliability of the Laplace residual power series method.

Finally, in conclusion, the main features of our recommended method are the following. The residual power series method is useful for obtaining approximate analytical solutions to fractional order problems, but it requires the residual function's $(n-1)\beta$ derivative to determine the coefficients of the series solution, whereas more widely used methods such as the homotopy perturbation, variational iterational, and Adomian decomposition methods require integration. We are all aware of how challenging it is to find the fractional derivatives and the integration, but our method only requires the concept of an infinite limit, which is relatively simple. Therefore, the problem can be solved using our recommended method, which provides a quick and simple way to figure out the coefficients of the series solution. It is not essential to make any significant physical or parametric assumptions related to the problem. Therefore, our method overcomes some of

Table 5

The Rec-E for $\aleph(\theta_1, \theta_2, \omega)$ at different values of β for Problem 2

$(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \omega)$	$\beta = 0.7$	$\beta = 0.8$	$\beta = 0.9$	$\beta = 1.0$
$(0.02, 0.02, o.02, 0.02)$	$3.89064 \cdot 10^{-11}$	$2.66667 \cdot 10^{-12}$	$1.72917 \cdot 10^{-13}$	$1.06667 \cdot 10^{-14}$
$(0.12, 0.12, 0.12, 0.12)$	$7.41059 \cdot 10^{-7}$	$1.24416 \cdot 10^{-7}$	$1.97616 \cdot 10^{-8}$	$2.98598 \cdot 10^{-9}$
$(0.22, 0.22, 0.22, 0.22)$	$2.07817 \cdot 10^{-5}$	$4.72416 \cdot 10^{-6}$	$1.01599 \cdot 10^{-6}$	$2.07863 \cdot 10^{-7}$
$(0.32, 0.32, 0.32, 0.32)$	$1.63185 \cdot 10^{-4}$	$4.47392 \cdot 10^{-5}$	$1.16043 \cdot 10^{-5}$	$2.86331 \cdot 10^{-6}$
$(0.42, 0.42, 0.42, 0.42)$	$7.28160 \cdot 10^{-4}$	$2.28710 \cdot 10^{-4}$	$6.79616 \cdot 10^{-5}$	$1.92116 \cdot 10^{-5}$
$(0.52, 0.52, 0.52, 0.52)$	$2.35708 \cdot 10^{-3}$	$8.23775 \cdot 10^{-3}$	$2.72374 \cdot 10^{-4}$	$8.56726 \cdot 10^{-5}$
$(0.62, 0.62, 062, 0.62)$	$6.20169 \cdot 10^{-3}$	$2.36668 \cdot 10^{-3}$	$8.54455 \cdot 10^{-4}$	$2.93468 \cdot 10^{-4}$
$(0.72, 0.72, 0.72, 0.72)$	$1.41151 \cdot 10^{-2}$	$5.80475 \cdot 10^{-3}$	$2.25842 \cdot 10^{-3}$	$8.35884 \cdot 10^{-4}$
$(0.82, 0.82, 0.82, 0.82)$	$2.88624 \cdot 10^{-2}$	$1.26669 \cdot 10^{-2}$	$5.25936 \cdot 10^{-3}$	$2.07738 \cdot 10^{-3}$
$(0.92, 0.92, 0.92, 0.92)$	$5.43487 \cdot 10^{-2}$	$2.52648 \cdot 10^{-2}$	$1.11113 \cdot 10^{-2}$	$4.64872 \cdot 10^{-3}$

Table 6

The Rec-E for $\aleph(\theta_1, \theta_2, \omega)$ at different values of β for Problem 3

$(\theta_1, \theta_2, \omega)$	$\beta = 0.7$	$\beta = 0.8$	$\beta = 0.9$	$\beta = 1.0$
$(0.02, 0.02, 0.02)$	$9.73048 \cdot 10^{-8}$	$6.66933 \cdot 10^{-9}$	$4.32466 \cdot 10^{-10}$	$2.66773 \cdot 10^{-11}$
$(0.12, 0.12, 0.12)$	$5.22088 \cdot 10^{-5}$	$8.76532 \cdot 10^{-6}$	$1.39224 \cdot 10^{-6}$	$2.10368 \cdot 10^{-7}$
$(0.22, 0.22, 0.22)$	$5.06660 \cdot 10^{-4}$	$1.02447 \cdot 10^{-4}$	$2.20326 \cdot 10^{-5}$	$4.50767 \cdot 10^{-6}$
$(0.32, 0.32, 0.32)$	$1.76544 \cdot 10^{-3}$	$4.84017 \cdot 10^{-4}$	$1.25542 \cdot 10^{-4}$	$3.09771 \cdot 10^{-5}$
$(0.42, 0.42, 0.42)$	$4.92422 \cdot 10^{-3}$	$1.54666 \cdot 10^{-3}$	$4.59594 \cdot 10^{-4}$	$1.29920 \cdot 10^{-4}$
$(0.52, 0.52, 0.52)$	$1.14235 \cdot 10^{-2}$	$3.99241 \cdot 10^{-3}$	$1.32005 \cdot 10^{-3}$	$4.15211 \cdot 10^{-4}$
$(0.62, 0.62, 0.62)$	$2.36957 \cdot 10^{-2}$	$9.04270 \cdot 10^{-3}$	$3.26474 \cdot 10^{-3}$	$1.12130 \cdot 10^{-3}$
$(0.72, 0.72, 0.72)$	$4.57254 \cdot 10^{-2}$	$1.88043 \cdot 10^{-2}$	$7.31607 \cdot 10^{-3}$	$2.70782 \cdot 10^{-3}$
$(0.82, 0.82, 0.82)$	$8.40860 \cdot 10^{-2}$	$3.69032 \cdot 10^{-2}$	$1.53223 \cdot 10^{-2}$	$6.05212 \cdot 10^{-3}$
$(0.92, 0.92, 0.92)$	$1.49692 \cdot 10^{-1}$	$6.95868 \cdot 10^{-2}$	$3.06038 \cdot 10^{-2}$	$1.28040 \cdot 10^{-2}$

the inherent limitations of conventional perturbation approaches and works with both weak and strongly nonlinear systems. The He and Adomian polynomials do not need our method, so nonlinear problems can be solved with a relatively small number of calculations. As a result, it performs noticeably better than various series solution methods based on Adomian decomposition and homotopy perturbation methods. In contrast to various analytic approximate methods, the Laplace residual power series method may give analytical expansion solutions for both linear and nonlinear problems without the need for perturbation, linearization, or discretization.

Therefore, our method is simple to apply, accurate and reliable in its results. In the future, as new fractional-order problems emerge in various situations, we plan to solve them using the Laplace residual power series method.

Competing interests. The authors declare that they have no competing interests.

Authors' contributions and responsibilities. The authors declare that the study was realized in collaboration with equal responsibility. All authors read and approved the final manuscript.

Availability of Data and Materials. No data were generated or analyzed during the current study.

References

1. Kulish V. V., Lage J. L. Application of fractional calculus to fluid mechanics, *J. Fluids Eng.*, 2002, vol. 124, no. 3, pp. 803–806. DOI: https://doi.org/10.1115/1.1478062.
2. Tarasov V. E. On history of mathematical economics: Application of fractional calculus, *Mathematics*, 2019, vol. 7, no. 6, 509. EDN: QUGYQX. DOI: https://doi.org/10.3390/math7060509.
3. Sun H., Zhang Y., Baleanu D., Chen W., Chen Y. A new collection of real world applications of fractional calculus in science and engineering, *Comm. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, 2018, vol. 64, pp. 213–231. EDN: YGTRMT DOI: https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2018.04.019.
4. Dalir M., Bashour M. Applications of fractional calculus, *Appl. Math. Sci.*, 2010, vol. 4, no. 21, pp. 1021–1032.
5. Valério D., Machado J. T., Kiryakova V. Some pioneers of the applications of fractional calculus, *Fract. Calc. Appl. Anal.*, 2014, vol. 17, no. 2, pp. 552–578. EDN: SOSIVZ. DOI: https://doi.org/10.2478/s13540-014-0185-1.
6. Liaqat M. I., Akgül A., Abu-Zinadah H. Analytical investigation of some time-fractional Black–Scholes models by the Aboodh residual power series method, *Mathematics*, 2023, vol. 11, no. 2, 276. DOI: https://doi.org/10.3390/math11020276.
7. Traore A., Sene N. Model of economic growth in the context of fractional derivative, *Alexandria Eng. J.*, 2020, vol. 59, no. 6, pp. 4843–4850. DOI: https://doi.org/10.1016/j.aej.2020.08.047.
8. Hilfer R., Luchko Y., Tomovski Z. Operational method for the solution of fractional differential equations with generalized Riemann–Liouville fractional derivatives, *Fract. Calc. Appl. Anal.*, 2009, vol. 12, no. 3, pp. 299–318.
9. Bas E., Ozarslan R. Real world applications of fractional models by Atangana–Baleanu fractional derivative, *Chaos, Solitons, Fractals*, 2018, vol. 116, pp. 121–125. DOI: https://doi.org/10.1016/j.chaos.2018.09.019.
10. Almeida R. A Caputo fractional derivative of a function with respect to another function, *Comm. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, 2017, vol. 44, pp. 460–481. DOI: https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2016.09.006.

11. Khan A., Liaqat M. I., Alqudah M. A., Abdeljawad T. Analysis of the conformable temporal-fractional Swift–Hohenberg equation using a novel computational technique, *Fractals*, 2023, vol. 31, no. 4, 2340050. DOI: https://doi.org/10.1142/S0218348X23400509.
12. Odibat Z., Momani S., Erturk V. S. Generalized differential transform method: Application to differential equations of fractional order, *Appl. Math. Comp.*, 2008, vol. 197, no. 2, pp. 467–477. DOI: https://doi.org/10.1016/j.amc.2007.07.068.
13. Anjum N., He J.-H. Laplace transform: Making the variational iteration method easier, *Appl. Math. Letters*, 2019, vol. 92, pp. 134–138. DOI: https://doi.org/10.1016/j.aml.2019.01.016.
14. Dehestani H., Ordokhani Y., Razzaghi M. Pseudo-operational matrix method for the solution of variable-order fractional partial integro-differential equations, *Engineering with Computers*, 2021, vol. 37, no. 3, pp. 1791–1806. DOI: https://doi.org/10.1007/s00366-019-00912-z.
15. Liaqat M. I., Khan A., Alqudah M. A., Abdeljawad T. Adapted homotopy perturbation method with Shehu transform for solving conformable fractional nonlinear partial differential equations, *Fractals*, 2023, vol. 31, no. 2, 2340027. DOI: https://doi.org/10.1142/S0218348X23400273.
16. Xiang W., Yan S., Wu J., Niu W. Dynamic response and sensitivity analysis for mechanical systems with clearance joints and parameter uncertainties using Chebyshev polynomials method, *Mech. Syst. Signal Proc.*, 2020, vol. 138, 106596. DOI: https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2019.106596.
17. Liaqat M. I., Etemad S., Rezapour S., Park C. A novel analytical Aboodh residual power series method for solving linear and nonlinear time-fractional partial differential equations with variable coefficients, *AIMS Math.*, 2022, vol. 7, no. 9, pp. 16917–16948. DOI: https://doi.org/10.3934/math.2022929.
18. Ratas M., Salupere A., Majak J. Solving nonlinear PDEs using the higher order Haar wavelet method on nonuniform and adaptive grids, *Math. Model. Anal.*, 2021, vol. 26, no. 1, pp. 147-169. DOI: https://doi.org/10.3846/mma.2021.12920.
19. Liaqat M. I., Khan A., Akgül A. Adaptation on power series method with conformable operator for solving fractional order systems of nonlinear partial differential equations, *Chaos, Solitons, Fractals*, 2022, vol. 157, 111984. DOI: https://doi.org/10.1016/j.chaos.2022.111984.
20. Zhang Y., Kumar A., Kumar S., et al. Residual power series method for time-fractional Schrödinger equations, *J. Nonlinear Sci. Appl.*, 2016, vol. 9, no. 11, pp. 5821–5829. DOI: https://doi.org/10.22436/jnsa.009.11.10.
21. El-Ajou A., Arqub O. A., Momani S. Approximate analytical solution of the nonlinear fractional KdV-Burgers equation: A new iterative algorithm, *J. Comp. Phys.*, 2015, vol. 293, pp. 81–95. DOI: https://doi.org/10.1016/j.jcp.2014.08.004.
22. Saadeh R., Alaroud M., Al-Smadi M., et al. Application of fractional residual power series algorithm to solve Newell–Whitehead–Segel equation of fractional order, *Symmetry*, 2019, vol. 11, no. 12, 1431. DOI: https://doi.org/10.3390/sym11121431.
23. Eriqat T., El-Ajou A., Oqielat M. N., et al. A new attractive analytic approach for solutions of linear and nonlinear neutral fractional pantograph equations, *Chaos, Solitons, Fractals*, 2020, vol. 138, 109957. DOI: https://doi.org/10.1016/j.chaos.2020.109957.
24. Hesameddini E., Rahimi A. Solving fractional partial differential equations with variable coefficients by the reconstruction of variational iteration method, *Z. Naturforsch., A*, 2015, vol. 70, no. 5, pp. 375–382. DOI: https://doi.org/10.1515/zna-2015-1017.
25. Keskin Y., Karaoglu O., Servi S. The approximate solution of high-order linear fractional differential equations with variable coefficients in terms of generalized Taylor polynomials, *Math. Comput. Appl.*, 2011, vol. 16, no. 3, pp. 617–629. DOI: https://doi.org/10.3390/mca16030617.
26. Sarwar S., Alkhalaf S., Iqbal S., Zahid M. A. A note on optimal homotopy asymptotic method for the solutions of fractional order heat-and wave-like partial differential equations,

Comp. Math. Appl., 2015, vol. 70, no. 5, pp. 942–953. DOI: https://doi.org/10.1016/j.camwa.2015.06.017.

27. Rostamy D., Karimi K. Bernstein polynomials for solving fractional heat- and wave-like equations, *Fract. Calc. Appl. Anal.*, 2012, vol. 15, no. 4, pp. 556–571. DOI: https://doi.org/10.2478/s13540-012-0039-7.
28. Bulut H., Baskonus H. M., Tuluce S. The solutions of partial differential equations with variable coefficient by Sumudu transform method, *AIP Conf. Proc.*, 2012, vol. 1493, pp. 91–95. DOI: https://doi.org/10.1063/1.47654751.
29. Nadeem M., Li F., Ahmad H. Modified Laplace variational iteration method for solving fourth-order parabolic partial differential equation with variable coefficients, *Comp. Math. Appl.*, 2019, vol. 78, no. 6, pp. 2052–2062. DOI: https://doi.org/10.1016/j.camwa.2019.03.053.
30. Dehghan M., Manafian J. The solution of the variable coefficients fourth-order parabolic partial differential equations by the homotopy perturbation method, *Z. Naturforsch., A*, 2009, vol. 64, no. 7–8, pp. 420–430. DOI: https://doi.org/10.1515/zna-2009-7-803.
31. Elzaki T. M., Ezaki S. M. On the Elzaki transform and ordinary differential equation with variable coefficients, *Adv. Theor. Appl. Math.*, 2011, vol. 6, no. 1, pp. 41–46.
32. Khan H., Shah R., Kumam P., Arif M. Analytical solutions of fractional-order heat and wave equations by the natural transform decomposition method, *Entropy*, 2019, vol. 21, no. 6, 597. DOI: https://doi.org/10.3390/e21060597.
33. Khalouta A., Kadem A. A new computational for approximate analytical solutions of nonlinear time-fractional wave-like equations with variable coefficients, *AIMS Math.*, 2020, vol. 5, no. 1, pp. 1–14. DOI: https://doi.org/10.3934/math.2020001.
34. Silva F. S., Moreira D. M., Moret M. A. Conformable Laplace transform of fractional differential equations, *Axioms*, 2018, vol. 7, no. 3, 55. DOI: https://doi.org/10.3390/axioms7030055.
35. Prakasha D. G., Veeresha P., Baskonus H. M. Residual power series method for fractional Swift-Hohenberg equation, *Fractal Fract.*, 2019, vol. 3, no. 1, 9. DOI: https://doi.org/10.3390/fractalfract3010009.

Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2023. Т. 27, № 2. С. 214–240
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu2009
EDN: XAVFLR

УДК 519.642.2

Эффективный метод аналитического исследования линейных и нелинейных дробно-временных уравнений в частных производных с переменными коэффициентами

M. I. Liaqat[1,2]***, A. Akgül***[3,4,5]***, E. Yu. Prosviryakov***[6,7,8,9]

[1] Правительственный колледж Университета, Лахор, 54600, Пакистан.
[2] Национальный колледж делового администрирования и экономики, Лахор, 54660, Пакистан.
[3] Ливанский Американский университет, Бейрут, 1102 2801, Ливан.
[4] Университет Сиирта, Сиирт, 56100, Турция.
[5] Ближневосточный университет, Никосия, 99138, Турция.
[6] Уральский федеральный университет, Екатеринбург, 620137, Россия.
[7] Институт машиноведения УрО РАН, Екатеринбург, 620049, Россия.
[8] Уральский государственный университет путей сообщения, Екатеринбург, 620034, Россия.
[9] Удмуртский федеральный исследовательский центр УрО РАН, Ижевск, 426067, Россия.

Аннотация

Метод остаточных степенных рядов эффективен для получения приближенных аналитических решений дифференциальных уравнений дробного порядка. Вычисление дробной производной для коэффициентов степенного ряда, аппроксимирующего точное решение дифференциального уравнения, является недостатком этого метода. Другие известные методы приближенного интегрирования, такие как гомотопическое возмущение, разложение Адомиана и методы вариационных итераций, основываются на интегрировании для получения степенного ряда. Известна сложность вычисления дробных производных и интегрирования функций при построении степенного ряда для решения уравнений математической физики дробного порядка, поэтому использование упомянутых выше методов ограничено спецификой решаемой задачи. В настоящей статье получены приближенные и точные аналитические решения уравнений в частных производных переменными коэффициентами при использовании метода рядов остаточных степеней Лапласа в смысле дробной производной Герасимова–Капуто для времени. Этот метод

Дифференциальные уравнения и математическая физика
Научная статья

© Коллектив авторов, 2023
© СамГТУ, 2023 (составление, дизайн, макет)
Контент публикуется на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru)

Образец для цитирования
Liaqat M. I., Akgül A., Prosviryakov E. Yu. An efficient method for the analytical study of linear and nonlinear time-fractional partial differential equations with variable coefficients, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2023, vol. 27, no. 2, pp. 214–240. EDN: XAVFLR. DOI: 10.14498/vsgtu2009.

Сведения об авторах
Muhammad Imran Liaqat https://orcid.org/0000-0002-5732-9689
PhD Student, Abdus Salam School of Mathematical Sciences[1]; Lecturer, Dept. of Mathematics[2]; e-mail: imranliaqat50@yahoo.com

помог преодолеть ограничения упомянутых выше способов интегрирования уравнений дробного порядка. Метод остаточных степенных рядов Лапласа лучше использовать при вычислении коэффициентов членов в решении ряда, применяя принцип прямого предела на бесконечности. Он также более эффективен, чем различные методы решения, если не использовать полиномы Адомиана и Не для решения нелинейных задач дробного порядка. В статье исследуются относительные, повторяющиеся и абсолютные ошибки для трех задач математической физики для оценки достоверности предложенного метода. Результаты показывают, что сконструированный метод является альтернативой различным методам для построения решения рядами при решении уравнений в частных производных с дробным временем.

Ключевые слова: преобразование Лапласа, метод остаточных степенных рядов, уравнение в частных производных, производная Герасимова–Капуто.

Получение: 18 марта 2023 г. / Исправление: 12 июня 2023 г. / Принятие: 19 июня 2023 г. / Публикация онлайн: 27 июня 2023 г.

Конкурирующие интересы. Авторы заявляют, что у них нет конкурирующих интересов.

Авторский вклад и ответственность. Авторы заявляют, что исследование было проведено в сотрудничестве с равной ответственностью. Все авторы прочитали и одобрили окончательную рукопись.

Доступность данных и материалов. В ходе текущего исследования не было получено или проанализировано никаких данных.

Ali Akgül https://orcid.org/0000-0001-9832-1424
PhD in Math, Full Professor; Dept. of Computer Science and Mathematics[3]; Dept. of Mathematics, Art and Science Faculty[4]; Dept. of Mathematics, Mathematics Research Center[5]; e-mail: aliakgul00727@gmail.com

Evgenii Yu. Prosviryakov https://orcid.org/0000-0002-2349-7801
Dr. Phys. & Math. Sci.; Dept. of Information Technologies and Control Systems[6]; Sect. of Nonlinear Vortex Hydrodynamics[7]; Dept. of Natural Sciences[8]; Lab. of Physical and Chemical Mechanics[9]; e-mail: evgen_pros@mail.ru

Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2023, vol. 27, no. 2, pp. 241–249
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu1940

MSC: 47H09, 47H10

A note on common fixed point theorems in a bounded metric space

Y. Touail, A. Jaid, D. El Moutawakil

Université Sultan Moulay Slimane,
Beni-Mellal, 23000, Morocco.

Abstract

In this paper, we introduce the concept of T_β-contraction for a pair of commuting self-mappings and prove a common fixed point theorem for this type. Our results improve and extend many existing results in the literature. The paper also contains an application for non-linear integral equations.

Keywords: fixed point, T_β-contraction, $T-\alpha$-admissible, τ-distance.

Received: 5th July, 2022 / Revised: 23rd March, 2023 /
Accepted: 25th May, 2023 / First online: 20th June, 2023

1. Introduction. The importance of fixed point theories lies in finding solutions for many problems in applied sciences such as physics, variational inequality, optimization, and many other problems in non-linear analysis.

In 1998, Jungck [1] introduced the concept of weakly compatible pairs of mappings, that is, the class of mappings such that they commute at their coincidence points. In recent years, several authors have obtained common fixed point results for different classes of mappings on various metric spaces, such as complete metric spaces.

In 2012, Samet *et al.* [2] introduced the notion of α-admissible mappings. By using this concept, the authors defined α-ψ-contractive mappings and proved

Differential Equations and Mathematical Physics
Research Article

© Authors, 2023
© Samara State Technical University, 2023 (Compilation, Design, and Layout)
The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License (http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)

Please cite this article in press as:
Touail Y., Jaid A., El Moutawakil D. A note on common fixed point theorems in a bounded metric space, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2023, vol. 27, no. 2, pp. 241–249. EDN: ZXSBPZ. DOI: 10.14498/vsgtu1940.

Authors' Details:

Youssef Touail https://orcid.org/0000-0003-3593-8253
MATIC, Faculté Polydisciplinaire de Khouribga;
e-mail: youssef9touail@gmail.com; y.touail@usms.ma

Amine Jaid https://orcid.org/0000-0001-7322-2008
MATIC, Faculté Polydisciplinaire de Khouribga; e-mail: aminejaid1990@gmail.com

Driss El Moutawakil https://orcid.org/0000-0001-7322-2008
MATIC, Faculté Polydisciplinaire de Khouribga; e-mail: d.elmoutawakil@gmail.com

a nice result for such mappings in the setting of metric spaces. Then Abdeljawad [3] expanded the notion of α-admissibility to a pair of functions.

Recently, the authors in [4] established a common fixed point theorem without using any additional condition on the space. Namely, we assert the following theorem.

THEOREM 1.1 [4]. *Let (X, d) be a bounded complete metric space. Let f and g be two weakly compatible self-mappings of X satisfying the following conditions*

i) $g(X) \subset f(X)$,

ii) $\inf\limits_{x \neq y \in X} \{d(fx, fy) - d(gx, gy)\} > 0$.

If the range of f or g is a S-complete subspace of X, then f and g have a unique common fixed point.

Recent works in this direction can be found in [5–11].

Note that we can find a class of weakly compatible mappings satisfying

$$\inf_{x \neq y \in X} \{d(fx, fy) - d(gx, gy)\} = 0,$$

which have common fixed points, in this case, Theorem 1.1 does not work.

Inspired by the above facts, we prove a common fixed point theorem satisfying a new condition, named T_β-contraction, which improves Theorem 1.1, and present an example to illustrate the usability of our result.

Finally, on the basis of our main result, we study the existence of solutions for a system of differential equations.

2. Preliminaries. The purpose of this section is to explain some notions and results utilized in the paper.

Let (X, τ) be a topological space and $p : X \times X \to [0, \infty)$ be a function. For any $\varepsilon > 0$ and any $x \in X$, let $B_p(x, \varepsilon) = \{y \in X : p(x, y) < \varepsilon\}$.

DEFINITION 2.1 [12]. The function p is said to be τ-distance if for each $x \in X$ and any neighborhood V of x, there exists $\varepsilon > 0$ such that $B_p(x, \varepsilon) \subset V$.

DEFINITION 2.2 [12]. A sequence $\{x_n\}$ in a Hausdorff topological space (X, τ) is a p-Cauchy if it satisfies the usual metric condition with respect to p, in other words, if $\lim\limits_{n,m \to \infty} p(x_n, x_m) = 0$.

DEFINITION 2.3 [12]. Let (X, τ) be a topological space with a τ-distance p.

1) X is S-complete if for every p-Cauchy sequence $\{x_n\}$, there exists x in X with $\lim p(x, x_n) = 0$.
2) X is p-Cauchy complete if for every p-Cauchy sequence $\{x_n\}$, there exists x in X such that $\lim x_n = x$ with respect to τ.
3) X is said to be p-bounded if $\sup\{p(x, y) : x, y \in X\} < \infty$.

LEMMA 2.1 [12]. *Let (x_n) be a sequence in a Hausdorff topological space (X, τ) with a τ-distance p and $x, y \in X$, then*

1) *if $\{\alpha_n\} \subset \mathbb{R}^+$ a sequence converging to 0 such that $p(x, x_n) \leqslant \alpha_n$ for all $n \in \mathbb{N}$, then $\{x_n\}$ converges to x with respect to the topology τ;*
2) *$p(x, y) = 0$ implies $x = y$;*
3) *if $\lim\limits_{n \to \infty} p(x, x_n) = 0$ and $\lim\limits_{n \to \infty} p(y, x_n) = 0$, then $x = y$.*

DEFINITION 2.4 [12]. Ψ is the class of all functions $\psi : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ satisfying:

i) ψ is nondecreasing;
ii) $\lim \psi^n(t) = 0$, for all $t \in [0, \infty)$.

Definition 2.5 [2]. Let (X, d) be a metric space, $T : X \to X$ and $\alpha : X \times X \to \mathbb{R}^+$ be two given mappings. Then, T is called an α-admissible mapping if

$$\alpha(x, y) \geqslant 1 \implies \alpha(Tx, Ty) \geqslant 1 \text{ for all } x, y \in X.$$

Lemma 2.2 [4]. *Let (X, d) be a metric space and $p : X \times X \to \mathbb{R}^+$ be a function defined by*

$$p(x, y) = e^{d(x,y)} - 1.$$

Then p is a τ_d-distance on X, where τ_d is the metric topology.

Lemma 2.3 [4]. *Let (X, d) be a bounded metric space. Then the function p defined in Lemma 2.2 is a bounded τ-distance.*

Lemma 2.4 [4]. *Let (X, d) be a complete metric space. Then the function p defined in Lemma 2.2 is a S-complete $\tau-$distance.*

3. Main results. We start our work by introducing the notion of T-α-admissible for a pair of self-mappings f and g on a metric space X.

Definition 3.1. Let f, g be two self-mappings of a bounded metric space (X, d) and $\alpha : X \times X \to \mathbb{R}^+$ be a function. (f, g) is said to be a pair of T-α-admissibility if $fg = gf$ and

$$\alpha(x, y) \geqslant 1 \implies \alpha(gx, gy) \geqslant 1 \text{ and } \alpha(fx, fy) \geqslant 1,$$

for all $x, y \in X$.

Theorem 3.1. *Let (X, τ) be a Hausdorff topological space with a τ-distance p. Suppose that X is p-bounded and $f(X)$ is S-complete. Let f and g be two self-mappings of X such that*

i) $g(X) \subset f(X)$;
ii) (f, g) is a pair of T-α-admissibility;
iii) $\alpha(x, gx) \geqslant 1$ for all $x \in X$;
iv) there exists $x_0 \in X$ such that $\alpha(x_0, g^n x_0) \geqslant 1$ and $\alpha(x, g^n x_0) \neq 0$, for all $x \in X$ and $n \in \mathbb{N}$;
v) $\alpha(x, y)p(gx, gy) \leqslant \psi(p(fx, fy))$, for all $x, y \in X$, where $\psi \in \Psi$.

Then f and g have a common fixed point.

Proof. Let $x_0 \in X$ such that $\alpha(x_0, g^n x_0) \geqslant 1$. Since $g(X) \subset f(X)$, then there exist x_1, $x_2 \in X$ such that $g(x_0) = f(x_1) = x_2$, continuing this process, we can choose $x_n \in X$ such that $x_{2n+2} = fx_{2n+1} = gx_{2n}$ for any $n \in \mathbb{N}$.

Now, consider the sequences $\{y_n\} = \{x_{2n}\}$, $\{z_n\} = \{x_{2n+1}\}$ and $\{t_n\} = \{x_{3n}\}$.

Let n, $m \in \mathbb{N}$, since (f, g) is T-α-admissible, we obtain $\alpha(x_{2n}, x_{2n+2m}) \geqslant 1$ and we have

$$\begin{aligned} p(fz_n, fz_{n+m}) &= p(fx_{2n+1}, fx_{2n+2m+1}) = p(gx_{2n}, gx_{2n+2m}) \leqslant \\ &\leqslant \alpha(x_{2n}, x_{2n+2m})p(gx_{2n}, gx_{2n+2m}) \leqslant \\ &\leqslant \psi(p(fx_{2n}, fx_{2n+2m})) \leqslant \\ &\vdots \\ &\leqslant \psi^{2n}(p(f^{2n}x_0, f^{2n}x_{2m})) \leqslant \psi^{2n}(M), \end{aligned}$$

where $M = \sup\{p(x,y) : x, y \in X\}$. As $\lim \psi^n(M) = 0$, so the sequence $\{fz_n\}$ is a p-Cauchy sequence. Since $f(X)$ is S-complete, there exists $u \in X$ such that $\lim p(fu, fz_n) = 0$.

By the same argument, it is easy to prove that $\{fy_n\}$, $\{ft_n\}$ are p-Cauchy sequences, which leads to $\lim p(fu, fz_n) = \lim p(fu, fy_n) = \lim p(fu, ft_n)$.

On the other hand we have

$$\begin{aligned}\alpha(u, y_n)p(gu, fz_n) &= \alpha(u, y_n)p(gu, fx_{2n+1}) = \\ &= \alpha(u, x_{2n})p(gu, gx_{2n}) < \\ &< p(fu, fx_{2n}) = p(fu, fy_n).\end{aligned}$$

Since $\alpha(u, y_n) = \alpha(u, g^n x_0) \neq 0$, we have

$$\lim p(gu, fz_n) = \lim p(fu, fy_n) = \lim p(fu, fz_n) = 0.$$

By Lemma 2.1, we conclude that $fu = gu$.

Suppose that $p(gu, ggu) \neq 0$, the assumption that $\alpha(u, gu) \geqslant 1$ implies

$$\begin{aligned}p(gu, ggu) &\leqslant \alpha(u, gu)p(gu, ggu) \leqslant \\ &\leqslant \psi(p(fu, ggu)) < p(gu, ggu)\end{aligned}$$

which is a contradiction.

Hence $ggu = gu$ and $fgu = gfu = ggu = gu$, it follows that that gu is a common fixed point of f and g. □

For $f = Id_X$, $\alpha(x, y) = 1$ and $\psi(t) = kt$, where $k \in [0, 1)$ in Theorem 3.1, we get.

Corollary 3.1 [12]. *Let (X, τ) be a Hausdorff topological space with a τ-distance p. Suppose that X is p-bounded and S-complete. Let g be a self-mapping of X, if there exist $k \in [0, 1)$ such that*

$$p(gx, gy) \leqslant kp(x, y),$$

for all $x, y \in X$. Then g has a fixed point.

Now, we introduce the notion of pair of T_β-contraction.

Definition 3.2. Let f, g be two self-mappings of a bounded metric space (X, d), (f, g) is said to be a pair of T_β-contraction if $fg = gf$, $\beta(x, gx) \leqslant 0$ and

$$\inf_{x \neq y \in X} \big\{d(fx, fy) - d(gx, gy) + \beta(x, y)\big\} > 0,$$

where $\beta : X \times X \to \mathbb{R}$ is a function satisfying

$$\beta(x, y) \leqslant 0 \implies \beta(gx, gy) \leqslant 0 \text{ and } \beta(fx, fy) \leqslant 0,$$

for all $x, y \in X$.

Our first result is the following.

Theorem 3.2. *Let (f, g) be a pair of T_β-contraction of a bounded complete metric space (X, d) such that*

i) $g(X) \subset f(X)$;
ii) *there exists* $x_0 \in X$ *such that* $\beta(x_0, g^n x_0) \leqslant 0$, *for all* $n \in \mathbb{N}$;
iii) $\beta(a,b) \leqslant \inf\limits_{x \neq y \in X} \{d(fx,fy) - d(gx,gy) + \beta(x,y)\}$, *for all* $a, b \in X$.

Then f *and* g *have a common fixed point.*

Proof. Since (f,g) is a pair of T_β-contraction, so there exists a function $\beta : X \times X \to \mathbb{R}$ such that

$$\inf_{x \neq y \in X} \{d(fx,fy) - d(gx,gy) + \beta(x,y)\} > 0.$$

We put

$$\gamma = \inf_{x \neq y \in X} \{d(fx,fy) - d(gx,gy) + \beta(x,y)\},$$

which implies that for all $x \neq y \in X$, we have

$$d(gx,gy) - \beta(x,y) \leqslant d(fx,fy) - \gamma.$$

Thus

$$\alpha(x,y) e^{d(gx,gy)} \leqslant k e^{d(fx,fy)},$$

where $k = e^{-\gamma} < 1$ and $\alpha(x,y) = e^{-\beta(x,y)}$. Then, it follows from (iii) that

$$\alpha(x,y) p(gx,gy) \leqslant k p(fx,fy),$$

for all x, $y \in X$, with $p(x,y) = e^{d(x,y)} - 1$ is the τ-distance defined in Lemma 2.2.

Finally, we deduce from Lemmas 2.2, 2.3, 2.4 and Theorem 3.1 that f and g have a common fixed point. □

Corollary 3.2 [5]. *Let* $g : X \to X$ *be a mapping of a bounded complete metric space* (X,d) *such that*

$$\inf_{x \neq y \in X} \{d(x,y) - d(gx,gy)\} > 0.$$

Then g *has a fixed point.*

Example. Let $X = \{0,1,2\}$ endowed with the discrete metric

$$d(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{if } x = y, \\ 1, & \text{if } x \neq y. \end{cases}$$

Define self-mappings g and f on X by

$$g0 = g1 = g2 = 2, \quad f0 = f1 = 0, \quad f2 = 2,$$

and a function $\beta : X \times X \to \mathbb{R}$ by

$$\beta(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{if } x, y \in \{0,1\}, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

It is clear that

$$\beta(x,y) \leqslant 0 \implies \beta(gx,gy) \leqslant 0 \text{ and } \beta(fx,fy) \leqslant 0,$$

and

$$fgx = gfx = 2,$$

for all $x, y \in X$.

Also,

$$g(X) = \{2\} \subset f(X) = \{0, 2\},$$

$$\beta(x, gx) \leqslant 0, \quad \beta(2, g^n 2) \leqslant 0,$$

for all $x \in X$ and $n \in \mathbb{N}$,

$$d(fx, fy) - d(gx, gy) + \beta(x, y) = 1,$$

for all $x \neq y \in X$.

Then g and f satisfy all conditions of Theorem 3.2 and have the common fixed point 2.

Remark. Note that, in the class of commuting mappings, Theorem 3.2 is a real extension of Theorem 1.1, indeed:

$$d(f0, f1) - d(g0, g1) = 0.$$

4. Application. In this section, we will prove the existence of a common solution for two nonlinear integral equations

$$x(t) = \int_0^t k\left(s, \int_0^s k(u, x(u)\right) du)ds, \quad t \in [0, \tau], \tag{1}$$

$$x(t) = \int_0^t k(s, x(s))ds, \quad t \in [0, \tau], \tag{2}$$

where $x \in \mathcal{C}[0, \tau]$, the space of all continuous functions from $[0, \tau]$ into $\mathbb{R}$, with $\tau > 0$. $K : [0, \tau] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is a continuous mapping.

Let $X = \mathcal{C}[0, \tau]$ be endowed by the metric

$$d(x, y) = \sup_{t \in [0, \tau]} |x(t) - y(t)|.$$

Define the mappings $f, g : X \to X$ as follows

$$gx(t) = \int_0^t k\left(s, \int_0^s k(u, x(u))du\right) ds, \quad t \in [0, \tau], \tag{3}$$

$$fx(t) = \int_0^t k(s, x(s))ds, \quad t \in [0, \tau]. \tag{4}$$

Hence, equations (1) and (2) have a common solution if and only if the mappings f and g have a common fixed point.

Theorem 4.1. *Let $g, f : X \to X$ be the mappings defined by (3) and (4) and assume the following condition is satisfied.*

There exist $M > 0$ and a function $\theta : X \times X \to \mathbb{R}$ such that for all $x, y \in X$ with $x \neq y$, we have:

$$\begin{aligned} \theta(x,y) \geqslant 0 &\implies \big|k(t,x(t)) - k(t,y(t))\big| \leqslant \frac{1}{\tau}\big(|x(t)-y(t)| - M\big), \\ \theta(x,y) < 0 &\implies \big|k(t,x(t)) - k(t,y(t))\big| \leqslant \frac{1}{\tau}\big|x(t)-y(t)\big| \end{aligned} \tag{5}$$

and

- *for all x, $y \in X$, $\theta(x,y) \geqslant 0$ implies $\theta(gx,gy) \geqslant 0$ and $\theta(fx,fy) \geqslant 0$,*
- *there exists $x_0 \in X$ such that $\theta(x_0, g^n x_0) \geqslant 0$ for all $n \in \mathbb{N}$,*
- *$\theta(x, gx) \geqslant 0$ for all $x \in X$.*

Then the functional equations (1) and (2) have a common solution.

Proof. It is easy to see that $fg(x) = gf(x)$ for all $x \in X$ and $g(X) \subset f(X)$.

Let $x \neq y \in X$ and $t \in [0,\tau]$. We discuss two cases.

Case 1. If $\theta(x,y) \geqslant 0$, we have

$$\begin{aligned} |gx(t) - gx(t)| &= \left|\int_0^t k\Big(s, \int_0^s k(u,x(u))du\Big)ds - \int_0^t k\Big(s, \int_0^s k(u,y(u))du\Big)ds\right| \leqslant \\ &\leqslant \frac{1}{\tau}\int_0^\tau \left(\left|\int_0^t k(u,x(u))du - \int_0^t k(u,y(u))du\right| - M\right)ds \leqslant \\ &\leqslant d(fx,fy) - M. \end{aligned}$$

Then $d(gx,gy) \leqslant d(fx,fy) - M$.

Case 2. If $\theta(x,y) < 0$, we have

$$\begin{aligned} |gx(t) - gx(t)| &= \left|\int_0^t k\Big(s, \int_0^s k(u,x(u))du\Big)ds - \int_0^t k\Big(s, \int_0^s k(u,y(u))du\Big)ds\right| \leqslant \\ &\leqslant \frac{1}{\tau}\int_0^\tau \left(\left|\int_0^t k(u,x(u))du - \int_0^t k(u,y(u))du\right|\right)ds \leqslant d(fx,fy). \end{aligned}$$

So $d(gx,gy) \leqslant d(fx,fy)$.

Now, define $\beta : X \times X \to \mathbb{R}$ by

$$\beta(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{if } \theta(x,y) \geqslant 0, \\ M, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Then, by (5) we have

$$\inf_{x \neq y \in X}\big\{d(fx,fy) - d(gx,gy) + \beta(x,y)\big\} > 0.$$

If we have $\beta(x,y) \leqslant 0$, from the definition of β we obtain that $\beta(gx,gy) \leqslant 0$ and $\beta(fx,fy) \leqslant 0$, and $\beta(x_0, g^n x_0) \leqslant 0$ for all $n \in \mathbb{N}$.

Also, we have $\beta(x,gx) \leqslant 0$ for all $x \in X$, so the pair (f,g) is a T_β-contraction.

Moreover, we have for all a, $b \in X$

$$\beta(a,b) \leqslant \inf_{x \neq y \in X}\big\{d(fx,fy) - d(gx,gy) + \beta(x,y)\big\}.$$

Finally, we conclude by Theorem 3.2 that the functional equations (1) and (2) have a common solution. □

Competing interests. On behalf of all authors, the corresponding author states that there is no conflict of interest.

Authors' contributions and responsibilities. Each author has participated in the development of the concept of the article and in the writing of the manuscript. The authors are absolutely responsible for submitting the final manuscript in print. Each author has approved the final version of the manuscript.

Data availability. No data were used to support this study.

References

1. Jungck G., Rhoades B. E. Fixed points for set valued functions without continuity, *Indian J. Pure Appl. Math.*, 1998, vol. 29, no. 3, pp. 227–238.
2. Samet B., Vetro C., Vetro P. Fixed point theorems for α-ψ-contractive type mappings, *Nonl. Anal., Th. Meth. Appl.*, 2012, vol. 75, no. 4, pp. 2154–2165. DOI: https://doi.org/10.1016/j.na.2011.10.014.
3. Abdeljawad T. Meir-Keeler α-contractive fixed and common fixed point theorems, *Fixed Point Theory Appl.*, 2013, vol. 2013, no. 1, 19. DOI: https://doi.org/10.1186/1687-1812-2013-19.
4. Touail Y., El Moutawakil D. New common fixed point theorems for contractive self mappings and an application to nonlinear differential equations, *Int. J. Nonlinear Anal. Appl.*, 2021, vol. 12, no. 1, pp. 903–911. DOI: https://doi.org/10.22075/IJNAA.2021.21318.2245.
5. Touail Y., El Moutawakil D., Bennani S. Fixed point theorems for contractive selfmappings of a bounded metric space, *J. Funct. Spaces*, 2019, vol. 2019, 4175807. DOI: https://doi.org/10.1155/2019/4175807.
6. Touail Y., El Moutawakil D. Fixed point results for new type of multivalued mappings in bounded metric spaces with an application, *Ric. Mat.*, 2022, vol. 71, no. 2, pp. 315–323. DOI: https://doi.org/10.1007/s11587-020-00498-5.
7. Touail Y., El Moutawakil D. $\perp_{\psi F}$-contractions and some fixed point results on generalized orthogonal sets, *Rend. Circ. Mat. Palermo (2)*, 2021, vol. 70, no. 3, pp. 1459–1472. DOI: https://doi.org/10.1007/s12215-020-00569-4.
8. Touail Y., El Moutawakil D. Fixed point theorems for new contractions with application in dynamic programming, *Vestn. St. Petersbg. Univ., Math.*, 2021, vol. 54, no. 2, pp. 206–212. EDN: ZJHFQW. DOI: https://doi.org/10.1134/S1063454121020126.
9. Touail Y., El Moutawakil D. Fixed point theorems on orthogonal complete metric spaces with an application, *Int. J. Nonlinear Anal. Appl.*, 2021, vol. 12, no. 2, pp. 1801–1809. DOI: https://doi.org/10.22075/IJNAA.2021.23033.2464.
10. Touail Y., El Moutawakil D. Some new common fixed point theorems for contractive selfmappings with applications, *Asian-Eur. J. Math.*, 2022, vol. 15, no. 4, 2250080. DOI: https://doi.org/10.1142/S1793557122500802.
11. Touail Y., Jaid A., El Moutawakil D. New contribution in fixed point theory via an auxiliary function with an application, *Ric. Mat.*, 2023, vol. 72, no. 1, pp. 181–191. DOI: https://doi.org/10.1007/s11587-021-00645-6.
12. Aamri M., El Moutawakil D. τ-distance in general topological spaces (X, τ) with application to fixed point theory, *Southwest J. Pure Appl. Math.*, 2003, no. 2, pp. 1–6. https://eudml.org/doc/123956.

Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2023. Т. 27, № 2. С. 241–249
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu1940
EDN: ZXSBPZ

УДК 517.988.523

Замечание об общих теоремах о неподвижной точке в ограниченном метрическом пространстве

Y. Touail, A. Jaid, D. El Moutawakil

Университет Султана Мулая Слимана,
Бени-Меллаль, 23000, Марокко.

Аннотация

Вводится концепция T_β-сжатия для пары коммутирующих самопреобразований и доказывается общая теорема о неподвижной точке для этого типа. Полученные результаты улучшают и обобщают многие известные в литературе результаты. В качестве приложения полученных результатов приводится доказательство существования общего решения для двух нелинейных интегральных уравнений.

Ключевые слова: неподвижная точка, T_β-сжатие, $T-\alpha$-допустимость, τ-расстояние.

Получение: 5 июля 2022 г. / Исправление: 23 марта 2023 г. / Принятие: 25 мая 2023 г. / Публикация онлайн: 20 июня 2023 г.

Конкурирующие интересы. От имени всех авторов автор-корреспондент заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Авторский вклад и ответственность. Все авторы принимали участие в разработке концепции статьи; все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

Доступность данных. Никакие данные не использовались в этом исследовании.

Дифференциальные уравнения и математическая физика
Научная статья

© Коллектив авторов, 2023
© СамГТУ, 2023 (составление, дизайн, макет)
Контент публикуется на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru)

Образец для цитирования
Touail Y., Jaid A., El Moutawakil D. A note on common fixed point theorems in a bounded metric space, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2023, vol. 27, no. 2, pp. 241–249. EDN: ZXSBPZ. DOI: 10.14498/vsgtu1940.

Сведения об авторах

Youssef Touail https://orcid.org/0000-0003-3593-8253
MATIC, Faculté Polydisciplinaire de Khouribga;
e-mail: youssef9touail@gmail.com; y.touail@usms.ma

Amine Jaid https://orcid.org/0000-0001-7322-2008
MATIC, Faculté Polydisciplinaire de Khouribga; e-mail: aminejaid1990@gmail.com

Driss El Moutawakil https://orcid.org/0000-0001-7322-2008
MATIC, Faculté Polydisciplinaire de Khouribga; e-mail: d.elmoutawakil@gmail.com

Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2023. Т. 27, № 2. С. 250–269
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu1992
EDN: TXGRQG

УДК 517.958:530.145

Динамика точно решаемой нелинейной модели квантовой электродинамики резонаторов

Е. К. Башкиров

Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С.П. Королева,
Россия, 443086, Самара, Московское ш., 34.

Аннотация

Рассмотрена система, состоящая из двух идентичных искусственных атомов (кубитов), нерезонансно взаимодействующих посредством вырожденных двухфотонных переходов с модой теплового квантового поля идеального микроволнового резонатора при наличии керровской нелинейности. Для рассматриваемой модели получено точное решение квантового уравнения Лиувилля для полной матрицы плотности системы «два кубита + мода поля резонатора». Для решения квантового уравнения эволюции использовано представление «одетых» состояний, то есть собственных функций гамильтониана.

Найден полный набор «одетых» состояний рассматриваемой модели. С его помощью первоначально найдено решение уравнения эволюции для перепутанных начальных состояний кубитов и фоковских состояний поля резонатора, то есть состояний с определенным числом фотонов в резонаторной моде. Указанное решение использовано для построения точного решения квантового уравнения Лиувилля в случае теплового состояния поля резонатора.

Усреднением полной матрицы плотности по переменным поля резонатора найдена редуцированная матрица плотности двух кубитов. Двухкубитная матрица плотности использована для вычисления параметра перепутывания кубитов в аналитическом виде для двух типов начальных перепутанных состояний кубитов белловского типа. В качестве количественного критерия перепутывания кубитов выбран параметр Переса–Хородецких, или отрицательность.

Проведено численное моделирование временной зависимости параметра перепутывания кубитов для различных параметров модели и начальных состояний кубитов. Наиболее интересным представляется результат, заключающийся в том, что для некоторых параметров модели

Дифференциальные уравнения и математическая физика
Научная статья

© Коллектив авторов, 2023
© СамГТУ, 2023 (составление, дизайн, макет)
Контент публикуется на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru)

Образец для цитирования
Башкиров Е. К. Динамика точно решаемой нелинейной модели квантовой электродинамики резонаторов // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2023. Т. 27, № 2. С. 250–269. EDN: TXGRQG. DOI: 10.14498/vsgtu1992.

Сведения об авторе
Евгений Константинович Башкиров https://orcid.org/0000-0001-8682-4956
доктор физико-математических наук, профессор; профессор; каф. общей и теоретической физики; e-mail: bashkirov.ek@ssau.ru

учет керровской нелинейности приводит к существенной стабилизации начального перепутывания кубитов, а также к исчезновению эффекта мгновенной смерти перепутывания.

Ключевые слова: кубиты, квантовое уравнение Лиувилля, точное решение в представлении «одетых» состояний, тепловое поле, перепутывание, мгновенная смерть перепутывания.

Получение: 17 января 2023 г. / Исправление: 15 мая 2023 г. / Принятие: 25 мая 2023 г. / Публикация онлайн: 19 июня 2023 г.

Введение. Перепутанные состояния являются основным ресурсом современных квантовых технологий и устройств квантовой информатики, таких как квантовые компьютеры и квантовые сети [1]. Поэтому крайне важно не только детально изучать природу и свойства перепутанных состояний, но и уметь управлять и манипулировать перепутанными состояниями кубитов различной физической природы. Таким образом, исследование наиболее эффективных схем генерации, механизмов контроля и сохранения перепутанных состояний кубитов является одной из основных задач в физике квантовых вычислений и квантовой обработки информации. Для квантовых вычислений и квантовых коммуникаций требуются максимально перепутанные кубит-кубитные стабильные состояния с большими временами декогеренции. Для генерации таких состояний можно использовать взаимодействие естественных и искусственных атомов (нейтральных ридберговских атомов и ионов в резонаторах и ловушках, примесных спинов, квантовых точек, сверхпроводящих колец с джозефсоновскими контактами, гибридных и оптомеханических систем, азотозамещенных вакансий в алмазе и др.) с электромагнитными полями [2–8]. Обычно для теоретического исследования динамики кубитов, взаимодействующих с электромагнитными полями, используются модели квантовой электродинамики резонаторов [2]. Кубиты в квантовых устройствах всегда взаимодействуют с окружающей их средой. Хорошо известно, что это взаимодействие обычно приводит к декогерентности и исчезновению перепутанности кубитов. Однако в ряде случаев взаимодействие с окружающей средой может, наоборот, являться источником перепутывания. В частности, перепутывание кубитов может быть вызвано тепловым шумом резонатора. Возможность перепутывания двух двухуровневых атомов (кубитов) в рамках простейшей двухчастичной однофотонной модели квантовой электродинамики резонаторов с тепловым полем была показана П. Найтом (P. Knight) и др. [9]. Перепутывание, индуцированное тепловыми шумами в двухкубитных моделях с двухфотонными переходами, исследовано в работах [10–14]. При этом было установлено, что двухфотонное взаимодействие может значительно увеличить степень перепутывания кубитов, индуцированного тепловым шумом, в сравнении с однофотонным взаимодействием. В работах [15–17] было также показано, что наличие расстройки частот переходов в кубитах и тепловой моды резонатора и диполь-дипольного взаимодействия кубитов может существенно увеличить максимальную степень теплового перепутывания кубитов.

Одним из препятствий на пути реализации эффективных и надежных протоколов физики квантовых вычислений и квантовых коммуникаций яв-

ляется также эффект внезапной смерти перепутывания кубитов, заключающийся в исчезновении перепутывания кубитов на временах, меньших времени декогеренции системы, за счет взаимодействия кубитов с полями резонаторов. Такой эффект теоретически впервые был предсказан Ю (T. Yu) и Эберли (J. Eberly) [18, 19] при изучении унитарной динамики двух кубитов в резонаторе. Позднее указанный эффект наблюдался экспериментально для кубитов различной физической природы [20–23].

Таким образом, изучение механизмов, способствующих исчезновению или ослаблению эффекта мгновенной смерти перепутывания кубитов, становится одной из приоритетных задач квантовой информатики. В настоящее время экспериментально получены перепутанные состояния кубитов различной физической природы в резонаторах при различных температурах [4–6]. Это означает наличие тепловых фотонов в резонаторах таких квантовых устройств. Поэтому представляет значительный интерес исследование механизмов, позволяющих предотвратить внезапную смерть перепутывания, индуцированного тепловыми полями резонаторов. В настоящее время предложены различные способы устранения эффекта мгновенной смерти перепутывания, индуцированного тепловым шумом, такие как включение расстройки частот кубитов и поля, прямого диполь-дипольного и изинговского взаимодействия кубитов, штарковского сдвига и др. (см. ссылки в [22]). В последнее время большое количество работ было посвящено исследованию динамики кубитов в моделях квантовой электродинамики резонаторов со средой Керра [24–29]. Указанные исследования были стимулированы экспериментальной работой, в которой был впервые реализован однофотонный режим для сверхпроводящего кубита-транзмона в резонаторе со средой Керра [30]. В нашей работе [31] была показана возможность исчезновения эффекта мгновенной смерти перепутывания кубитов, взаимодействующих с модой теплового поля резонатора посредством однофотонных переходов, за счет использования керровской среды в резонаторе. Представляет большой интерес изучение возможности подавления эффекта мгновенной смерти теплового перепутывания в нелинейной двухфотонной модели со средой Керра. Заметим, что результаты исследования динамики перепутывания кубитов в нелинейной двухфотонной модели, индуцированного тепловым шумом, для случая слабых тепловых полей представлены в тезисе [32]. При этом основное внимание было уделено изучению влияния нелинейности на перепутывание кубитов, индуцированного тепловым шумом, в случае начального сепарабельного состояния кубитов.

В настоящей работе нами найдено в представлении «одетых» состояний точное решение квантового уравнения Лиувилля для матрицы плотности двухфотонной модели квантовой электродинамики резонаторов, состоящей из двух идентичных кубитов, взаимодействующих с одномодовым тепловым полем идеального резонатора со средой Керра посредством вырожденных двухфотонных переходов. В качестве начальных состояний кубитов выбраны перепутанные состояния белловского типа. На основе точного решения нам удалось получить выражение для критерия перепутывания двух кубитов — парметра Переса—Хородецких, или отрицательности, и исследовать влияние керровской нелинейности на динамику кубит-кубитного перепутывания. При этом показано, что внедрение керровской среды в резонатор приводит к исчезновению эффекта мгновенной смерти перепутывания.

1. Модель и точное решение временного уравнения Шредигера для фоковского состояния поля. Рассмотрим систему, состоящую из двух идентичных кубитов Q_1 и Q_2 с энергетической щелью $\hbar\omega_0$, нерезонансно взаимодействующих посредством двухфотонных вырожденных переходов с полем одномодового резонатора частоты ω. Положим, что константы связи между кубитами и полем резонатора равны. Предположим также, что в резонаторе имеется дополнительная среда Керра. Тогда гамильтониан взаимодействия для рассматриваемой модели в системе отсчета, вращающейся с удвоенной частотой моды поля 2ω, можно записать в виде

$$H = \sum_{i=1}^{2} \hbar\Delta\sigma_i^z/2 + \sum_{i=1}^{2} \hbar g(\sigma_i^+ a^2 + \sigma_i^- a^{\dagger 2}) + \hbar X a^{\dagger 2} a^2, \tag{1}$$

где σ_i^z — операторы разности населенностей для возбужденного $|+\rangle_i$ и основного $|-\rangle_i$ состояний в i-том кубите ($i = 1, 2$), $\sigma_i^+ = |+\rangle_{ii}\langle -|$ и $\hat{\sigma}_i^- = |-\rangle_{ii}\langle +|$ — повышающий и понижающий операторы в i-том кубите, $a^\dagger$ и a — операторы рождения и уничтожения фотонов резонаторной моды, g — константа двухфотонного взаимодействия между кубитами и полем резонатора, $\Delta = \omega_0 - 2\omega$ — параметр расстройки и X — константа нелинейности Керра.

Будем полагать, что в начальный момент времени кубиты приготовлены в одном из перепутанных состояний белловского типа:

$$|\Psi(0)\rangle^{(1)}_{Q_1 Q_2} = \cos\theta|+,-\rangle + \sin\theta|-,+\rangle, \tag{2}$$

или

$$|\Psi(0)\rangle^{(2)}_{Q_1 Q_2} = \cos\theta|+,+\rangle + \sin\theta|-,-\rangle, \tag{3}$$

где θ — параметр, определяющий степень начального перепутывания кубитов Q_1 и Q_2. Максимальной степени перепутывания кубитов соответствует значение $\theta = \pi/4$. Такие начальные состояния для кубитов в резонаторах можно получить с помощью микроволновых импульсов определенной длительности [33].

В качестве начального состояния поля выберем одномодовое тепловое состояние с матрицей плотности вида

$$\rho_F(0) = \sum_n p_n |n\rangle\langle n|. \tag{4}$$

Здесь весовые функции p_n в формуле (4) имеют вид

$$p_n = \frac{\bar{n}^n}{(1+\bar{n})^{n+1}},$$

где $\bar{n}$ — среднее число тепловых фотонов, определяемое формулой Бозе—Эйнштейна

$$\bar{n} = \left(\exp\left[\hbar\omega/k_B T\right] - 1\right)^{-1},$$

k_B — постоянная Больцмана и T — температура микроволнового резонатора. В зависимости от физической природы кубитов, взаимодействующих с полями резонаторов, температура резонатора может меняться от комнатных

температур для азотозамещенных вакансий в алмазе до нК в случае нейтральных атомов и ионов в магнитных ловушках [4]. Поэтому в резонаторе всегда имеются тепловые фотоны.

Поставим перед собой задачу найти точную динамику рассматриваемой модели. Для решения поставленной задачи будем следовать общей схеме, предложенной в работе [17]. Начнем решение задачи для случая фоковского начального состояния электромагнитного поля резонатора, а затем обобщим эти результаты на случай теплового поля.

В случае фоковского начального состояния поля волновая функция есть

$$|\Psi(0)\rangle_F = |n\rangle \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Состояние полной системы, включающей кубиты и моду поля резонатора, мы можем в произвольный момент времени t задать с помощью волновой функции $|\Psi(t)\rangle_n$, удовлетворяющей временному уравнению Шредингера вида

$$\imath\hbar\frac{\partial|\Psi(t)\rangle_n}{\partial t} = H|\Psi(t)\rangle_n \tag{5}$$

с начальным условием

$$|\Psi(0)\rangle_n = |\Psi(0)\rangle_{Q_1\,Q_2} \otimes |\Psi(0)\rangle_F = |\Psi(0)\rangle_{Q_1\,Q_2} \otimes |n\rangle$$

и стандартными для квантовой механики граничными условиями.

Формальное решение уравнения (5) можно представить в виде

$$|\Psi(t)\rangle_n = e^{-\imath Ht/\hbar}|\Psi(0)\rangle_n. \tag{6}$$

Эволюция волнового вектора $|\Psi(t)\rangle_n$ происходит в 4-мерном гильбертовом пространтсве. Предположим, в начальный момент времени волновая функция системы имеет вид $|+,+,n\rangle$, $|+,-,n+2\rangle$, $|-,+,n+2\rangle$, $|-,-,n+4\rangle$ или их суперпозиции, где $n = 0, 1, 2, \dots$. Тогда в качестве базиса гильбертова пространства, в котором эволюционирует волновая функция системы, мы можем выбрать векторы вида

$$|-,-,n+4\rangle, \quad |+,-,n+2\rangle, \quad |-,+,n+2\rangle, \quad |+,+,n\rangle. \tag{7}$$

Для нахождения явного вида вектора состояния $|\Psi(t)\rangle_n$ удобно использовать так называемые «одетые» состояния, т.е. собственные функции гамильтониана (1). В базисе (7) собственные функции имеют вид

$$|\Phi_{in}\rangle = w_{in}\big(C_{i1n}|-,-,n+4\rangle + C_{i2n}|+,-,n+2\rangle + \\ + C_{i3n}|-,+,n+2\rangle + C_{i4n}|+,+,n\rangle\big) \quad (i = 1, 2, 3, 4), \tag{8}$$

где

$$w_{in} = 1/\sqrt{|C_{i1n}|^2 + |C_{i2n}|^2 + |C_{i3n}|^2 + |C_{i4n}|^2},$$

$$C_{11,n} = 0, \quad C_{12,n} = -1, \quad C_{13,n} = 1, \quad C_{14,n} = 0,$$

$$C_{i1,n} = \frac{-12\delta - 7n\delta - n^2\delta + 12n\chi - 5n^2\chi - 6n^3\chi - n^4\chi + 12E_{in} + 7nE_{in} + n^2E_{in}}{\sqrt{2+3n+n^2}\sqrt{12+7n+n^2}(-\delta + 12\chi + 7n\chi + n^2\chi - E_{in})},$$

$$C_{i2,n} = \frac{\alpha_{in}\gamma_{in}}{(-12-7n-n^2)\beta_{in}}, \quad C_{i3,n} = -\frac{\alpha_{in}}{\beta_{in}}, \quad C_{i4,n} = 1,$$

$$\alpha_{in}=(-12-7n-n^2)\big(\delta+(-1+n)n\chi-E_{in}\big)-(1+n)(2+n)\big(-\delta+(3+n)(4+n)\chi-E_{2n}\big),$$

$$\beta_{in} = \sqrt{(1+n)(2+n)}(-12-7n-n^2) - \sqrt{(1+n)(2+n)}\gamma_{in},$$

$$\gamma_{in} = -(3+n)(4+n) + \big((1+n)(2+n)\chi - E_{in}\big)\big(-\delta + (3+n)(4+n)\chi - E_{in}\big),$$

и $\chi = X/\hbar g$, $\delta = \Delta/g$.

Соответствующие собственные значения энергии есть

$$E_{1n} = (2+3n+n^2)\chi, \qquad E_{2n} = \frac{1}{3}\left(A_n + B_n/G_n + G_n\right),$$

$$E_{3n} = \frac{1}{12}\,\mathrm{Re}\big[4A_n - 2i(-i+\sqrt{3})B_n/G_n + 2i(i+\sqrt{3})G_n\big],$$

$$E_{4n} = \frac{1}{12}\,\mathrm{Re}\big[4A_n + 2i(-i+\sqrt{3})B_n/G_n - 2i(i+\sqrt{3})G_n\big],$$

где

$$G_n = \left(C_n + \frac{1}{2}\sqrt{D_n+S_n}\right)^{1/3}, \quad A_n = (14+9n+3n^2)\chi,$$

$$B_n = 3\left(28+4n(5+n)+\delta^2\right) - 12(3+2n)\delta\chi + 4(31+12n(3+n))\chi^2,$$

$$C_n = 36(31+2n(19+5n))\chi + 36\delta^2\chi + \\ + 16(7+6n)(11+6n)\chi^3 - 18\delta(15+6n+8(3+2n)\chi^2),$$

$$D_n = -4(3(28+4n(5+n)+\delta^2) - 12(3+2n)\delta\chi + 4(31+12n(3+n))\chi^2)^3,$$

$$S_n = 16(27(5+2n)\delta - 18(31+2n(19+5n)+\delta^2)\chi + \\ + 72(3+2n)\delta\chi^2 - 8(7+6n)(11+6n)\chi^3)^2.$$

Теперь для нахождения явного вида временной волновой функции достаточно выразить начальный вектор состояния через собственные функции гамильтониана (8). Выполним это действие для начального состояния вида $|\Psi(0)\rangle = |+,-,n+2\rangle$. Имеем

$$|+,-,n+2\rangle = C^*_{12n}|\Phi_{1n}\rangle + C^*_{22n}|\Phi_{2n}\rangle + C^*_{32n}|\Phi_{3n}\rangle + C^*_{42n}|\Phi_{4n}\rangle. \tag{9}$$

Подставляя представление (9) в правую часть формулы (6), получаем окончательно явный вид временной волновой функции в случае начального состояния $|+,-,n+2\rangle$:

$$|\Psi(t)\rangle^{(+-)}_n = Z_{12,n}|-,-,n+4\rangle + Z_{22,n}|+,-,n+2\rangle + \\ + Z_{32,n}|-,+,n+2\rangle + Z_{42,n}|+,+,n\rangle,$$

где

$$Z_{i2,n} = e^{-\imath E_{1n}t/\hbar}\, w_{1n}\, C^*_{i2n}\, C_{1in} + e^{-\imath E_{2n}t/\hbar}\, w_{2n}\, C^*_{i2n}\, C_{2in} + \\ + e^{-\imath E_{3n}t/\hbar}\, w_{3n}\, C^*_{i2n}\, C_{3in} + e^{-\imath E_{4n}t/\hbar}\, w_{4n}\, C^*_{i2n}\, C_{4in} \quad (i = 1, 2, 3, 4). \quad (10)$$

Для начального состояния $|-,+,n+2\rangle$ для временной волновой функции можно получить выражения вида

$$|\Psi(t)\rangle_n^{(-+)} = Z_{13,n}|-,-,n+4\rangle + Z_{23,n}|+,-,n+2\rangle + \\ + Z_{33,n}|-,+,n+2\rangle + Z_{43,n}|+,+,n\rangle,$$

где коэффициенты $Z_{i3,n}$ имеют вид (10) при замене C^*_{i2n} на C^*_{i3n}. Аналогично для начальных состояний $|+,+,n\rangle$ и $|-,-,n+4$ получаем

$$|\Psi(t)\rangle_n^{(++)} = Z_{14,n}|-,-,n+4\rangle + Z_{24,n}|+,-,n+2\rangle + \\ + Z_{34,n}|-,+,n+2\rangle + Z_{44,n}|+,+,n\rangle,$$

$$|\Psi(t)\rangle_n^{(--)} = Z_{13,n}|-,-,n+4\rangle + Z_{23,n}|+,-,n+2\rangle + \\ + Z_{33,n}|-,+,n+2\rangle + Z_{43,n}|+,+,n\rangle$$

соответственно. Коэффициенты $Z_{i4,n}$ и $Z_{i1,n}$ имеют вид (10) при замене C^*_{i2n} на C^*_{i4n} или C^*_{i1n} соответственно.

Для начальных состояний изучаемой системы $|+,-,0\rangle$ и $|+,-,1\rangle$ временные волновые функции могут быть записаны как

$$|\Psi(t)\rangle_0^{(+-)} = G_{12}|-,-,2\rangle + G_{22}|+,-,0\rangle + G_{32,n}|-,+,0\rangle,$$

где

$$G_{12} = -\frac{2\sqrt{2}e^{\frac{1}{2}it(\delta-2\chi)}\sin\left(\frac{1}{2}\Omega_1 t\right)}{\Omega_1^2},$$

$$G_{22} = \frac{ie^{-\frac{1}{2}it(\Omega_1+2\chi)}\left(2e^{\frac{1}{2}it(\Omega_1+2\chi)}\Omega_1^2 + e^{\frac{1}{2}it(\delta+2\Omega_1)}(16+\zeta_1) + e^{\frac{1}{2}it\delta}(16+\zeta_2)\right)}{4\Omega_1^2},$$

$$G_{32} = \frac{e^{-\frac{1}{2}it(\Omega_1+2\chi)}\left(-2e^{\frac{1}{2}it(\Omega_1+2\chi)}\Omega_1^2 + e^{\frac{1}{2}it(\delta+2\Omega_1)}(16+\zeta_1) + e^{\frac{1}{2}it\delta}(16+\zeta_2)\right)}{4\Omega_1^2},$$

$$\Omega_1 = \sqrt{16+(\delta-2\chi)^2}, \quad \zeta_1 = (\delta-2\chi)(\delta+\Omega_1-2\chi), \\ \zeta_2 = (\delta-2\chi)(\delta-\Omega_1-2\chi)$$

и

$$|\Psi(t)\rangle_1^{(+-)} = F_{12}|-,-,3\rangle + F_{22}|+,-,1\rangle + F_{32,n}|-,+,1\rangle,$$

где

$$F_{12} = -\frac{2i\sqrt{6}e^{\frac{1}{2}it(\delta-6\chi)}\sin(\frac{1}{2}\Omega_2 t)}{\Omega_2},$$

$$F_{22} = \frac{e^{-\frac{1}{2}it(\Omega_2+6\chi)}\left(2e^{\frac{1}{2}it(\Omega_2+6i\chi)}\Omega_2^2 + e^{\frac{1}{2}it\delta}(48+\xi_1) + e^{\frac{1}{2}it(\delta+2\Omega_2)}(48+\xi_2)\right)}{4\Omega_2^2},$$

$$F_{32} = \frac{e^{-\frac{1}{2}it(\Omega_2+6\chi)}\left(-2e^{\frac{1}{2}it(\Omega_2+6i\chi)}\Omega_2^2 + e^{\frac{1}{2}it\delta}(48+\xi_1) + e^{\frac{1}{2}it(\delta+2\Omega_2)}(48+\xi_2)\right)}{4\Omega_2^2},$$

$$\Omega_2 = \sqrt{48+(\delta-6\chi)^2}, \quad \xi_1 = (\delta-6\chi)(\delta+\Omega_2-6\chi),$$
$$\xi_2 = (\delta-6\chi)(\delta-\Omega_2-6\chi)$$

соответственно.

Для начальных состояний изучаемой системы $|-,+,0\rangle$ и $|-,+,1\rangle$ временные волновые функции могут быть записаны как

$$|\Psi(t)\rangle_0^{(-+)} = G_{13}|-,-,2\rangle + G_{23}|+,-,0\rangle + G_{33,n}|-,+,0\rangle,$$

где $G_{13} = G_{12}$, $G_{23} = G_{22}$, $G_{33} = G_{32}$;

$$|\Psi(t)\rangle_1^{(-+)} = F_{13}|-,-,2\rangle + F_{23}|+,-,0\rangle + F_{33,n}|-,+,0\rangle,$$

где $F_{13} = F_{12}$, $F_{23} = F_{22}$, $F_{33} = F_{32}$.

Наконец, для начальных состояний системы $|-,-,0\rangle$, $|-,-,1\rangle$, $|-,-2\rangle$ и $|-,-,3\rangle$ временные волновые функции есть

$$|\Psi(t)\rangle_0^{(--)} = e^{-it\delta}|-,-,0\rangle, \quad |\Psi(t)\rangle_1^{(--)} = e^{-it\delta}|-,-,1\rangle,$$

$$|\Psi(t)\rangle_2^{(--)} = P_1|-,-,2\rangle + P_2|+,-,0\rangle + P_3|-,+,0\rangle,$$

где

$$P_1 = \frac{e^{-\frac{1}{2}it(-\delta+\Omega_1+2\chi)}\left(16+\zeta_2+e^{it\Omega_1}(16+\zeta_1)\right)}{2\Omega_1^2},$$

$$P_2 = P_3 = -\frac{2i\sqrt{2}e^{\frac{1}{2}it(\delta-2\chi)}\sin(\frac{1}{2}\Omega_1 t)}{\Omega_1};$$

$$|\Psi(t)\rangle_3^{(--)} = Q_1|-,-,1\rangle + Q_2|+,-,1\rangle + Q_3|-,+,1\rangle,$$

где

$$Q_1 = \frac{e^{-\frac{1}{2}it(-\delta+\Omega_2+6\chi)}\left(48+\xi_2+e^{it\Omega_2}(48+\xi_1)\right)}{2\Omega_2^2},$$

$$Q_2 = Q_3 = -\frac{2i\sqrt{6}e^{\frac{1}{2}it(\delta-6\chi)}\sin(\frac{1}{2}\Omega_2 t)}{\Omega_2}.$$

Используя полный набор собственных функций гамильтониана (8), мы можем найти явный вид временной волновой функции для начального состояния (2):

$$\begin{aligned}
|\Psi(t)\rangle_n^{(1)} &= \cos\theta|\Psi\rangle_{n-2}^{(+-)} + \sin\theta|\Psi\rangle_{n-2}^{(-+)} \text{ для } n \geqslant 2,\\
|\Psi(t)\rangle_1^{(1)} &= \cos\theta|\Psi\rangle_1^{(+-)} + \sin\theta|\Psi\rangle_1^{(-+)},\\
|\Psi(t)\rangle_0^{(1)} &= \cos\theta|\Psi\rangle_0^{(+-)} + \sin\theta|\Psi\rangle_0^{(-+)}.
\end{aligned} \tag{11}$$

Аналогично для состояния (3) получаем

$$
\begin{aligned}
|\Psi(t)\rangle_n^{(2)} &= \cos\theta|\Psi\rangle_n^{(++)} + \sin\theta|\Psi\rangle_{n-4}^{(--)} \text{ для } n \geqslant 4,\\
|\Psi(t)\rangle_3^{(2)} &= \cos\theta|\Psi\rangle_3^{(++)} + \sin\theta|\Psi\rangle_3^{(--)},\\
|\Psi(t)\rangle_2^{(2)} &= \cos\theta|\Psi\rangle_2^{(++)} + \sin\theta|\Psi\rangle_2^{(--)},\\
|\Psi(t)\rangle_1^{(2)} &= \cos\theta|\Psi\rangle_1^{(++)} + \sin\theta|\Psi\rangle_1^{(--)},\\
|\Psi(t)\rangle_0^{(1)} &= \cos\theta|\Psi\rangle_0^{(++)} + \sin\theta|\Psi\rangle_0^{(--)}.
\end{aligned}
\tag{12}
$$

2. Точное решение квантового уравнения Лиувилля для теплового состояния поля. Имея явные выражения для временных волновых функций системы (11) и (12), мы можем найти временную матрицу плотности, являющуюся решением уравнения Лиувилля

$$
\imath\hbar\frac{\partial\rho(t)}{\partial t} = [H, \rho(t)]
$$

с начальными условиями

$$
\rho(0)\rangle_n = |\Psi(0)\rangle_{Q_1\,Q_2}^{(i)}\ {}_{Q_1\,Q_2}\langle\Psi(0)|^{(i)} \otimes \rho(0)_F \qquad (i = 1, 2).
$$

Решение квантового уравнения Лиувилля для начальных состояний (2) и (3) и теплового состояния поля (4) можно записать в виде

$$
\rho(t) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n |\Psi(t)\rangle_{n\,n}^{(1)}\langle\Psi(t)|^{(1)}, \tag{13}
$$

$$
\rho(t) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n |\Psi(t)\rangle_{n\,n}^{(2)}\langle\Psi(t)|^{(2)} \tag{14}
$$

соответственно.

Полученные точные решения (13) и (14) могут быть использованы для получения временных зависимостей любых наблюдаемых для подсистемы кубитов и резонаторного поля. В настоящей работе мы воспользуемся точными решениями для полной матрицы плотности для нахождения временной зависимости параметра перепутывания кубитов. Для этого нам необходимо получить из полной матрицы плотности $\rho(t)$ редуцированную двухкубитную матрицу плотности путем усреднения полной матрицы плотности по переменным поля

$$
\rho_{Q_1\,Q_2}(t) = \mathrm{Tr}_F\,\rho(t) = \sum_{n=0}^{\infty}\langle n|\rho(t)|n\rangle.
$$

Удобно записать редуцированную матрицу плотности $\rho_{Q_1\,Q_2}(t)$ в матричной форме, используя двухкубитный базис

$$
|-,-\rangle, \quad |+,-\rangle, \quad |-,+\rangle, \quad |+,+\rangle.
$$

Для начальных состояний (2) и (3) редуцированные двухкубитные матрицы плотности имеют вид

$$\rho_{Q_1\,Q_2}(t) = \begin{pmatrix} \rho_{11}^{(1)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_{22}^{(1)} & \rho_{23}^{(1)} & 0 \\ 0 & (\rho_{23}^{(1)})^* & \rho_{33}^{(1)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho_{44}^{(1)} \end{pmatrix} \tag{15}$$

и

$$\rho_{Q_1\,Q_2}(t) = \begin{pmatrix} \rho_{11}^{(2)} & 0 & 0 & \rho_{14}^{(2)} \\ 0 & \rho_{22}^{(2)} & \rho_{23}^{(2)} & 0 \\ 0* & (\rho_{23}^{(2)})^* & \rho_{33}^{(2)} & 0 \\ (\rho_{14}^{(2)})^* & 0 & 0 & \rho_{44}^{(2)} \end{pmatrix} \tag{16}$$

соответственно.

Нами найдены явные выражения для элементов редуцированных матриц плотности (15) и (16), однако здесь они не приводятся ввиду их чрезвычайно громоздкого вида.

3. Вычисление отрицательности. Для двухкубитной системы, описываемой редуцированной двухкубитной матрицей плотности $\rho_{Q_1\,Q_2}(t)$, в качестве критерия перепутывания кубитов может быть выбран параметр Переса—Хородецких, или отрицательность [34, 35], которая может быть определена через отрицательные собственные значения μ_i^- частичной транспонированной по переменным одного кубита редуцированной двухкубитной матрицы плотности $\rho_{Q_1\,Q_2}^{T_1}$:

$$\varepsilon = -2\sum_i \mu_i^- . \tag{17}$$

Для начальных состояний кубитов (2) и (3) и теплового состояния поля частично транспонированные по переменным одного кубита редуцированные двухкубитные матрицы плотности имеют вид

$$\rho_{Q_1\,Q_2}^{T_1}(t) = \begin{pmatrix} \rho_{11}^{(1)} & 0 & 0 & (\rho_{23}^{(1)})^* \\ 0 & \rho_{22}^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_{33}^{(1)} & 0 \\ \rho_{23}^{(1)} & 0 & 0 & \rho_{44}^{(1)} \end{pmatrix} \tag{18}$$

и

$$\rho_{Q_1\,Q_2}^{T_1}(t) = \begin{pmatrix} \rho_{11}^{(2)} & 0 & 0 & (\rho_{23}^{(2)})^* \\ 0 & \rho_{22}^{(2)} & (\rho_{14}^{(2)})^* & 0 \\ 0 & \rho_{14}^{(2)} & \rho_{33}^{(2)} & 0 \\ \rho_{23}^{(2)} & 0 & 0 & \rho_{44}^{(2)} \end{pmatrix} \tag{19}$$

соответственно.

Матрица (18) имеет всего одно собственное значение, которое может принимать отрицательные значения. Соответственно, отрицательность (17) для начального состояния кубитов (2) и начальной полевой матрицы плотности (4) может быть записана в виде

$$\varepsilon(t) = \sqrt{(\rho_{11}^{(1)} - \rho_{44}^{(1)})^2 + 4|\rho_{23}^{(1)}|^2} - \rho_{11}^{(1)} - \rho_{44}^{(1)}. \tag{20}$$

Матрица (19) имеет два собственных значения, которые могут принимать отрицательные значения. Соответственно, отрицательность (17) для начального состояния (3) и начальной полевой матрицы плотности (4) может быть записана в виде

$$\varepsilon(t) = \sqrt{(\rho_{11}^{(2)} - \rho_{44}^{(2)})^2 + 4|\rho_{23}^{(2)}|^2} - \rho_{11}^{(2)} - \rho_{44}^{(2)} + \\ + \sqrt{(\rho_{22}^{(2)} - \rho_{33}^{(2)})^2 + 4|\rho_{14}^{(2)}|^2} - \rho_{22}^{(2)} - \rho_{33}^{(2)}. \tag{21}$$

4. Результаты и обсуждение. Результаты численного моделирования отрицательности (20) и (21) представлены на рис. 1 и 2. На рис. 1 показана временная зависимость отрицательности (20) для начального перепутывания кубитов (2) и различных значений расстройки и среднего числа тепловых фотонов в моде резонатора. На рисунках сплошные линии показывают поведение параметра перепутывания для резонаторов со средой Керра, а штриховые линии соответствуют модели в отсутствие керровской нелинейности. При этом представлено поведение отрицательности как для слабого теплового поля (a, b), так и для интенсивного теплового поля резонатора (c, d). Наконец, представлено поведение параметра перепутывания как для резонансного (a, c), так и для нерезонансного взаимодействия кубитов с тепловым полем (b, d). Из рисунков видно, что для слабых тепловых полей нет эффекта мгновенной смерти перепутывания как в отсутствие, так и в присутствии керровской нелинейности. При этом наличие керровской нелинейности в резонансом случае приводит к существенному уменьшению амплитуд осцилляций Раби параметра перепутывания, т.е. способствует стабилизации наведенного начального перепутывания кубитов. При этом для нерезонансного случая эффект стабилизации начального перепутывания кубитов не наблюдается. По мере увеличения расстройки указанный эффект постепенно исчезает. Для интенсивных тепловых полей резонатора, напротив, имеет место эффект мгновенной смерти перепутывания в случае как резонансного, так и для нерезонансного взаимодействия кубитов. Керровская нелинейность приводит не только к исчезновению указанного эффекта, но и к стабилизации начального перепутывания кубитов. При этом влияние керровской нелинейности на поведение параметра перепутывания схоже как для резонансного, так и для нерезонансного кубит-полевого взаимодействия.

На рис. 2 показана временная зависимость отрицательности (21) для начального перепутывания кубитов (3) и различных значений расстройки и среднего числа тепловых фотонов в моде резонатора. Как и в предыдущем случае, сплошные линии показывают поведение параметра перепутывания для резонаторов со средой Керра, а штриховые линии соответствуют модели без

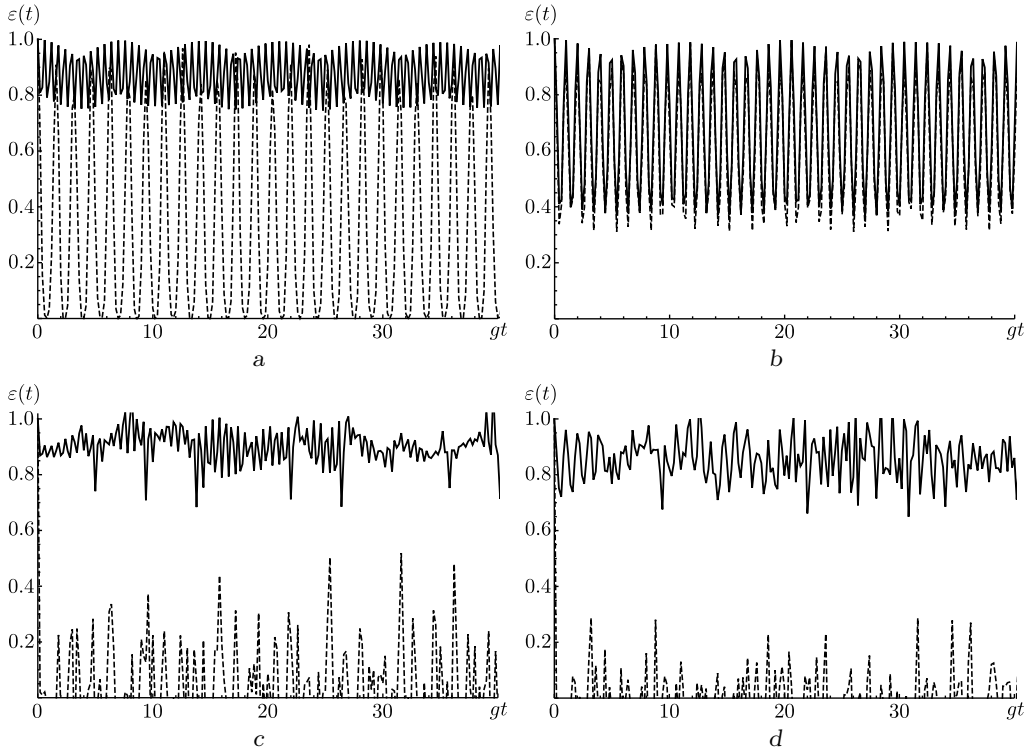


Рис. 1. Отрицательность как функция безразмерного времени gt для начального перепутанного состояния кубитов (2). Сплошные линии соответствуют модели с керровской нелинейностью $\chi = 5$, штриховые линии соответствуют модели с $\chi = 0$. Среднее число тепловых фотонов $\bar{n} = 0.1$ (a, b) и $\bar{n} = 5$ (c, d). Безразмерный параметр расстройки $\delta = 0$ (a, c) и $\delta = 5$ (b, d)

[Figure 1. Negativity vs scaled time gt for initial entangled qubits state (2). The solid lines correspond to the model with the Kerr nonlinearity $\chi = 5$, the dashed lines correspond to the model with $\chi = 0$. The mean thermal photon numbers are $\bar{n} = 0.1$ (a, b) and $\bar{n} = 5$ (c, d). Scaled detuning parameter $\delta = 0$ (a, c) and $\delta = 5$ (b, d)]

керровской нелинейности. При этом представлено поведение отрицательности как для слабого теплового поля (a, b), так и для интенсивного теплового поля резонатора (c, d). Наконец, представлено поведение параметра перепутывания как для резонансного (a, c), так и для нерезонансого взаимодействия кубитов с тепловым полем (b, d). Для рассматриваемого начального состояния наличие керровской нелинейности не приводит, в отличие от предыдущего случая, к существенному уменьшению амплитуд осцилляций Раби параметра перепутывания в случае как слабых, так и интенсивных тепловых полей резонатора. Наиболее интересным является результат, состоящий в исчезновении эффекта мгновенной смерти перепутывания при включении керровской нелинейности в случае интенсивного теплового поля резонатора и нерезонансого взаимодействия кубитов и поля.

Заключение. Таким образом, в настоящей работе мы нашли точное решение квантового уравнения эволюции для матрицы плотности системы двух кубитов, взаимодействующих посредством вырожденных двухфотонных переходов с тепловым полем резонатора со средой Керра. Полученное точное решение использовано для анализа временной динамики перепутывания ку-

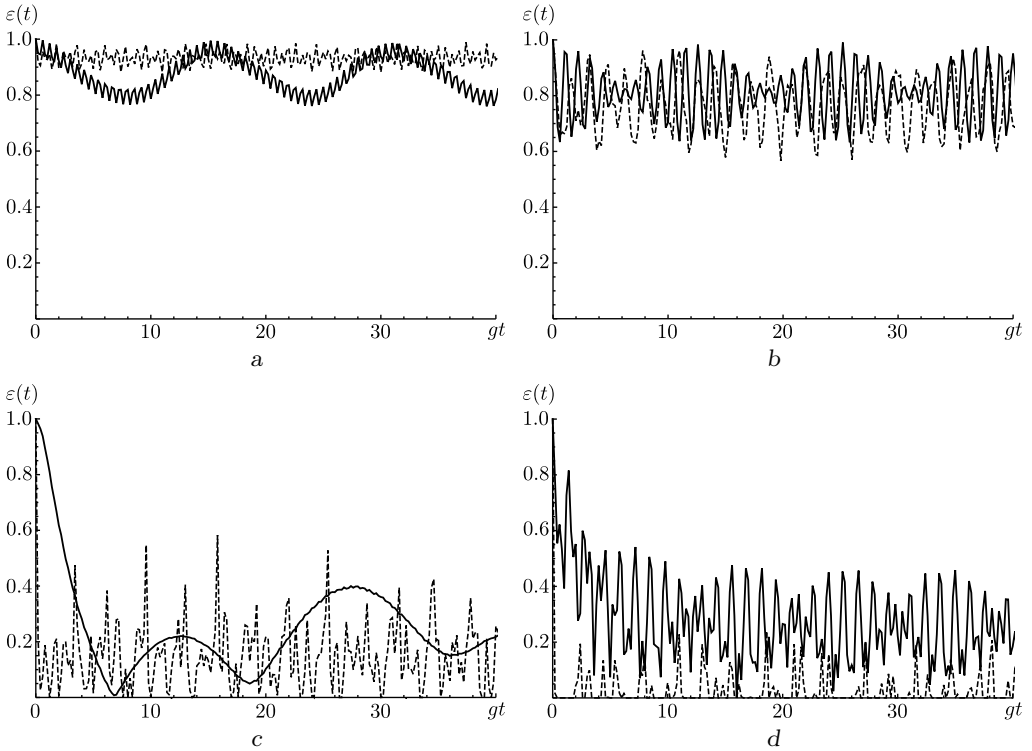


Рис. 2. Отрицательность как функция безразмерного времени gt для начального перепутанного состояния кубитов (3). Сплошные линии соответствуют модели с керровской нелинейностью $\chi = 5$, штриховые линии сооответствуют модели с $\chi = 0$. Среднее число тепловых фотонов $\bar{n} = 0.1$ (a, b) и $\bar{n} = 5$ (c, d). Безразмерный параметр расстройки $\delta = 0$ (a, c) и $\delta = 5$ (b, d)

[Figure 2. Negativity vs scaled time gt for initial entangled qubits state (3). The solid lines correspond to the model with the Kerr nonlinearity $\chi = 5$, the dashed lines correspond to the model with $\chi = 0$. The mean thermal photon numbers are $\bar{n} = 0.1$ (a, b) and $\bar{n} = 5$ (c, d). Scaled detuning parameter $\delta = 0$ (a, c) and $\delta = 5$ (b, d)]

битов, индуцированного тепловым полем резонатора, для перепутанных начальных состояний кубитов белловского типа. Показано, что наличие среды Керра в случае интенсивных тепловых полей резонатора приводит к исчезновению эффекта мгновенной смерти перепутывания. Для некоторых типов начальных перепутанных состояний кубитов керровская нелинейность приводит также к существенной стабилизации начального перепутывания кубитов. Полученные результаты могут быть полезны при выборе оптимальных режимов функционирования квантовых устройств, таких как квантовые компьютеры и квантовые сети.

Конкурирующие интересы. Конкурирующих интересов не имею.

Авторская ответственность. Я несу полную ответственность за предоставление окончательной версии рукописи в печать. Окончательная версия рукописи мною одобрена.

Финансирование. Исследование выполнялось без финансирования.

Благодарность. Автор благодарен рецензенту за тщательное прочтение статьи и ценные предложения и комментарии.

Библиографический список

1. Buluta I., Ashhab S., Nori F. Natural and artificial atoms for quantum computation // *Rep. Prog. Phys.*, 2011. vol. 74, no. 10, 104401. pp. 1–34, arXiv: 1002.1871 [quant-ph]. EDN: PHMQQN. DOI: https://doi.org/10.1088/0034-4885/74/10/104401.
2. Walther H., Varcoe B. T. H., Englert B.-G., Becker T. Cavity quantum electrodynamics // *Rep. Prog. Phys*, 2011. vol. 69, no. 5. pp. 1325–1382. EDN: WMZYEX. DOI: https://doi.org/10.1088/0034-4885/69/5/R02.
3. Leibfried D., Blatt R., Monroe C., Wineland D. Quantum dynamics of single trapped ions // *Rev. Mod. Phys.*, 2003. vol. 75, no. 1. pp. 281–324. EDN: YJDLXU. DOI: https://doi.org/10.1103/RevModPhys.75.281.
4. Xiang Z.-L., Ashhab S., You J. Q., Nori F. Hybrid quantum circuits: Superconducting circuits interacting with other quantum systems // *Rev. Mod. Phys.*, 2013. vol. 85, no. 2. pp. 623–653. EDN: RJQAMF. DOI: https://doi.org/10.1103/RevModPhys.85.623.
5. Georgescu I. M., Ashhab S., Nori F. Quantum simulation // *Rev. Mod. Phys.*, 2014. vol. 88, no. 1. pp. 153–185. EDN: SQCURV. DOI: https://doi.org/10.1103/RevModPhys.86.153.
6. Gu X., Kockum A.F., Miranowicz A., et al. Microwave photonics with superconducting quantum circuits // *Phys. Repts.*, 2017. vol. 718–719. pp. 1–102. EDN: TECRZL. DOI: https://doi.org/10.1016/j.physrep.2017.10.002.
7. Wendin G. Quantum information processing with super-conducting circuits: a review // *Rep. Prog. Phys.*, 2017. vol. 80, no. 10, 106001. DOI: https://doi.org/10.1088/1361-6633/aa7e1a.
8. Li G.-Q., Pan X.-Y. Quantum information processing with nitrogen–vacancy centers in diamond // *Chinese Phys. B*, 2018. vol. 27, no. 2. pp. 1–13, 020304. DOI: https://doi.org/10.1088/1674-1056/27/2/020304.
9. Kim M. S., Lee J., Ahn D., Knight P. L. Entanglement induced by a single-mode heat environment // *Phys. Rev. A*, 2002. vol. 65, no. 4, 040101(R). EDN: YIXDNM. DOI: https://doi.org/10.1103/PhysRevA.65.040101.
10. Zhou L., Song H. S. Entanglement induced by a single-mode thermal field and criteria for entanglement // *J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt.*, 2002. vol. 4, no. 6. pp. 425–429. EDN: BFJLSP. DOI: https://doi.org/10.1088/1464-4266/4/6/310.
11. Bashkirov E. K. Entanglement induced by the two-mode thermal noise // *Laser Phys. Lett.*, 2006. vol. 3, no. 3. pp. 145–150. EDN: LJNXSZ. DOI: https://doi.org/10.1002/lapl.200510081.
12. Bashkirov E. K., Stupatskaya M. P. The entanglement of two dipole-dipole coupled atoms induced by nondegenerate two-mode thermal noise // *Laser Phys.*, 2009. vol. 19, no. 3. pp. 525–530. EDN: LLXFEF. DOI: https://doi.org/10.1134/S1054660X09030281.
13. Bashkirov E. K., Mastyugin M. S. The influence of the dipole-dipole interaction and atomic coherence on the entanglement of two atoms with degenerate two-photon transitions // *Opt. Spectrosc.*, 2014. vol. 116, no. 4. pp. 630–634. EDN: SKTKWP. DOI: https://doi.org/10.1134/S0030400X14040067.
14. Башкиров Е. К., Мангулова Е. Г. Перепутывание атомов, индуцированное двухмодовым тепловым шумом, при наличии диполь-дипольного взаимодействия и атомной когерентности // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2013. № 2(31). С. 177–184. EDN: RAVQJB. DOI: https://doi.org/10.14498/vsgtu1160.
15. Zhang B. Entanglement between two qubits interacting with a slightly detuned thermal field // *Opt. Commun.*, 2010. vol. 283, no. 23. pp. 4676–4679. DOI: https://doi.org/10.1016/j.optcom.2010.06.094.
16. Aguiar L. S., Munhoz P. P., Vidiella-Barranco A., Roversi J. The entanglement of two dipole-dipole coupled in a cavity interacting with a thermal field // *J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt.*, 2005. vol. 7, no. 12. pp. S769–S771. DOI: https://doi.org/10.1088/1464-4266/7/12/049.
17. Башкиров Е. К., Мастюгинн М. С. Перепутывание двух кубитов, взаимодействующих с одномодовым квантовым полем // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2015. Т. 19, № 2. С. 205–220. EDN: UGXNVL. DOI: https://doi.org/10.14498/vsgtu1377.

18. Yu T., Eberly J. H. Finite-time disentanglement via spontaneous emission // *Phys. Rev. Lett.*, 2004. vol. 93, no. 14, 140404, arXiv: quant-ph/0404161. DOI: https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.93.140404.
19. Yu T., Eberly J. H. Sudden death of entanglement // *Science*, 2009. vol. 323, no. 5914. pp. 598–601, arXiv: 0910.1396 [quant-ph]. DOI: https://doi.org/10.1126/science.1167343.
20. Wang F., Hou P.-Y., Huang Y. Y., et al. Observation of entanglement sudden death and rebirth by controlling a solid-state spin bath // *Phys. Rev. B*, 2018. vol. 98, no. 6, 064306, arXiv: 1801.02729 [quant-ph]. DOI: https://doi.org/10.1103/PhysRevB.98.064306.
21. Sun G., Zhou Z., Mao B., et al. Entanglement dynamics of a superonducting phase qubit coupled to a two-level system // *Phys. Rev. B*, 2012. vol. 86, no. 6, 064502, arXiv: 1111.3016 [cond-mat.mes-hall]. DOI: https://doi.org/10.1103/PhysRevB.86.064502.
22. Bashkirov E. K. Entanglement in Tavis-Cummings model with Kerr nonlinearity induced by a thermal noise / *Saratov Fall Meeting 2020: Laser Physics, Photonic Technologies, and Molecular Modeling* (Saratov, Russia) / Proc. SPIE, 11846, 2021. 118460W. DOI: https://doi.org/10.1117/12.2588673.
23. Salles A., de Melo F., Almeida M. P., et al. Experimental investigation of the dynamics of entanglement: Sudden death, complementarity, and continuous monitoring of the environment // *Phys. Rev. A*, 2008. vol. 78, no. 2, 022322, arXiv: 0804.4556 [quant-ph]. DOI: https://doi.org/10.1103/PhysRevA.78.022322.
24. Puri S, Boutin S., Blais A. Engineering the quantum states of light in a Kerr-nonlinear resonator by two-photon driving // *Quantum Inf.*, 2017. vol. 3, no. 1, 18. DOI: https://doi.org/10.1038/s41534-017-0019-1.
25. Manosh T. M., Ashefas M., Thayyullathil R. B. Effects of Kerr medium in coupled cavities on quantum state transfer // *J. Nonlinear Opt. Phys. Mater.*, 2018. vol. 27, no. 3, 1850035. EDN: LFUINC. DOI: https://doi.org/10.1142/S0218863518500352.
26. Al Naim A. F., Khan J. Y., Khalil E. M., Abdel-Khalek S. Effects of Kerr medium and Stark shift parameter on Wehrl entropy and the field puruty for two-photon Jaynes–Cummings model under dispersive approximation // *J. Russ. Laser Res.*, 2019. vol. 40, no. 1. pp. 20–29. DOI: https://doi.org/10.1007/s10946-019-09764-w.
27. Anwar S. J., Ramzan M., Khan M. K. Effect of Stark- and Kerr-like medium on the entanglement dynamics of two three-level atomic systems // *Quant. Inform. Proc.*, 2019. vol. 18, no. 192. pp. 1–14. EDN: YXEFGH. DOI: https://doi.org/10.1007/s11128-019-2277-7.
28. Аданмитонде А. Ж, Авосву Г. И. Ю., Доса Ф. А. О квантовании некоторых обобщенных моделей Джейнса–Каммингса в керроподобной среде // *ТМФ*, 2020. Т. 203, № 3. С. 451–466. EDN: UPAEUL. DOI: https://doi.org/10.4213/tmf9835.
29. Aldaghfag S. A., Berrada K., Abdel-Khalek S. Entanglement and photon statistics of two dipole-dipole coupled superconducting qubits with Kerr-like nonlinearities // *Results in Phys.*, 2020. vol. 16, 102978. EDN: DSKEYY. DOI: https://doi.org/10.1016/j.rinp.2020.102978.
30. Kirchmair G., Vlastakis B., Leghtas Z., et al. Observation of quantum state collapse and revival due to the single-photon Kerr effect // *Nature*, 2013. vol. 495, no. 7440. pp. 205–209. DOI: https://doi.org/10.1038/nature11902.
31. Evseev M. M., Bashkirov E. K. Thermal entanglement in Tavis–Cummings model with Kerr nonlinearity / *2020 International Conference on Information Technology and Nanotechnology (ITNT)* (26–29 May 2020, Samara, Russia), 2020. 9253347. EDN: YCMKXI. DOI: https://doi.org/10.1109/ITNT49337.2020.9253347.
32. Bashkirov E. K. Dynamics of two-photon Tavis–Cummings model with Kerr media / *2022 VIII International Conference on Information Technology and Nanotechnology (ITNT)* (23–27 May 2022, Samara, Russia), 2022. 9848606. EDN: ZAMPVK. DOI: https://doi.org/10.1109/ITNT55410.2022.9848606.
33. Mlynek J. A., Abdumalikov A. A., Fink J. M., et al. Demonstrating W-type entanglement of Dicke states in resonant cavity quantum electrodynamics // *Phys. Rev. A*, 2012. vol. 86, no. 5, 053838. DOI: https://doi.org/10.1103/PhysRevA.86.053838.

34. Peres A. Separability criterion for density matrices // *Phys. Rev. Lett.*, 1996. vol. 77, no. 8. pp. 1413–1415. DOI: https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.77.1413.
35. Horodecki M., Horodecki P., Horodecki R. Separability of mixed states: necessary and sufficient conditions // *Phys. Lett. A*, 1996. vol. 223, no. 1–2. pp. 1–8. EDN: ANQBTF. DOI: https://doi.org/10.1016/S0375-9601(96)00706-2.

Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2023, vol. 27, no. 2, pp. 250–269
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu1992

MSC: 81Q05, 82C23, 81V80

Dynamics of an exactly solvable model of cavity quantum electrodynamics

E. K. Bashkirov

Samara National Research University,
34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russian Federation.

Abstract

A system consisting of two identical qubits not-resonantly interacting with a thermal quantum field of a lossless resonator with a Kerr media via degenerate two-photon transition is considered. An exact solution of the quantum Liouville equation for the total density matrix of the considered system is obtained. To solve the quantum evolution equation we used the dressed states representation. The complete set of dressed states is found. The exact solution of the quantum Liouville equation is used to calculate the time dependencies of qubit-qubit entanglement parameter (negativity) for Bell type entangled qubits states. The results showed that Kerr nonlinearity can diminish the amplitudes of the Rabi oscillations of entanglement parameter and suppress the effect of sudden death of entanglement.

Keywords: qubits, quantum Liouville equation, exact solution in dressed-state representations, thermal field, entanglement, sudden death of entanglement.

Received: 17th January, 2023 / Revised: 15th May, 2023 / Accepted: 25th May, 2023 / First online: 19th June, 2023

Competing interests. I have no competing interests.

Author's Responsibilities. I take full responsibility for submitting the final version of the manuscript for publication. The final version of the manuscript has been approved by me.

Funding. The research was conducted without funding.

Acknowledgments. The author expresses gratitude to the reviewer for carefully reading the article and providing valuable suggestions and comments.

Differential Equations and Mathematical Physics
Research Article

© Authors, 2023
© Samara State Technical University, 2023 (Compilation, Design, and Layout)
The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License (http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)

Please cite this article in press as:
Bashkirov E. K. Dynamics of an exactly solvable model of cavity quantum electrodynamics, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2023, vol. 27, no. 2, pp. 250–269. EDN: TXGRQG. DOI: 10.14498/vsgtu1992 (In Russian).

Author's Details:
Eugene K. Bashkirov https://orcid.org/0000-0001-8682-4956
Dr. Phys. & Math. Sci., Professor; Professor; Dept. of General and Theoretical Physics;
e-mail: bashkirov.ek@ssau.ru

References

1. Buluta I., Ashhab S., Nori F. Natural and artificial atoms for quantum computation, *Rep. Prog. Phys.*, 2011, vol. 74, no. 10, 104401, pp. 1–34, arXiv: 1002.1871 [quant-ph]. EDN: PHMQQN. DOI: https://doi.org/10.1088/0034-4885/74/10/104401.
2. Walther H., Varcoe B. T. H., Englert B.-G., Becker T. Cavity quantum electrodynamics, *Rep. Prog. Phys*, 2011, vol. 69, no. 5, pp. 1325–1382. EDN: WMZYEX. DOI: https://doi.org/10.1088/0034-4885/69/5/R02.
3. Leibfried D., Blatt R., Monroe C., Wineland D. Quantum dynamics of single trapped ions, *Rev. Mod. Phys.*, 2003, vol. 75, no. 1, pp. 281–324. EDN: YJDLXU. DOI: https://doi.org/10.1103/RevModPhys.75.281.
4. Xiang Z.-L., Ashhab S., You J. Q., Nori F. Hybrid quantum circuits: Superconducting circuits interacting with other quantum systems, *Rev. Mod. Phys.*, 2013, vol. 85, no. 2, pp. 623–653. EDN: RJQAMF. DOI: https://doi.org/10.1103/RevModPhys.85.623.
5. Georgescu I. M., Ashhab S., Nori F. Quantum simulation, *Rev. Mod. Phys.*, 2014, vol. 88, no. 1, pp. 153–185. EDN: SQCURV. DOI: https://doi.org/10.1103/RevModPhys.86.153.
6. Gu X., Kockum A.F., Miranowicz A., et al. Microwave photonics with superconducting quantum circuits, *Phys. Repts.*, 2017, vol. 718–719, pp. 1–102. EDN: TECRZL. DOI: https://doi.org/10.1016/j.physrep.2017.10.002.
7. Wendin G. Quantum information processing with super-conducting circuits: a review, *Rep. Prog. Phys.*, 2017, vol. 80, no. 10, 106001. DOI: https://doi.org/10.1088/1361-6633/aa7e1a.
8. Li G.-Q., Pan X.-Y. Quantum information processing with nitrogen–vacancy centers in diamond, *Chinese Phys. B*, 2018, vol. 27, no. 2, pp. 1–13, 020304. DOI: https://doi.org/10.1088/1674-1056/27/2/020304.
9. Kim M. S., Lee J., Ahn D., Knight P. L. Entanglement induced by a single-mode heat environment, *Phys. Rev. A*, 2002, vol. 65, no. 4, 040101(R). EDN: YIXDNM. DOI: https://doi.org/10.1103/PhysRevA.65.040101.
10. Zhou L., Song H. S. Entanglement induced by a single-mode thermal field and criteria for entanglement, *J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt.*, 2002, vol. 4, no. 6, pp. 425–429. EDN: BFJLSP. DOI: https://doi.org/10.1088/1464-4266/4/6/310.
11. Bashkirov E. K. Entanglement induced by the two-mode thermal noise, *Laser Phys. Lett.*, 2006, vol. 3, no. 3, pp. 145–150. EDN: LJNXSZ. DOI: https://doi.org/10.1002/lapl.200510081.
12. Bashkirov E. K., Stupatskaya M. P. The entanglement of two dipole-dipole coupled atoms induced by nondegenerate two-mode thermal noise, *Laser Phys.*, 2009, vol. 19, no. 3, pp. 525–530. EDN: LLXFEF. DOI: https://doi.org/10.1134/S1054660X09030281.
13. Bashkirov E. K., Mastyugin M. S. The influence of the dipole-dipole interaction and atomic coherence on the entanglement of two atoms with degenerate two-photon transitions, *Opt. Spectrosc.*, 2014, vol. 116, no. 4, pp. 630–634. EDN: SKTKWP. DOI: https://doi.org/10.1134/S0030400X14040067.
14. Bashkirov E. K., Mangulova E. G. Entanglement induced by two-mode thermal noise taking into account the dipole-dipole interaction and atomic coherence, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2013, no. 2(31), pp. 177–184 (In Russian). EDN: RAVQJB. DOI: https://doi.org/10.14498/vsgtu1160.
15. Zhang B. Entanglement between two qubits interacting with a slightly detuned thermal field, *Opt. Commun.*, 2010, vol. 283, no. 23, pp. 4676–4679. DOI: https://doi.org/10.1016/j.optcom.2010.06.094.
16. Aguiar L. S., Munhoz P. P., Vidiella-Barranco A., Roversi J. The entanglement of two dipole-dipole coupled in a cavity interacting with a thermal field, *J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt.*, 2005, vol. 7, no. 12, pp. S769–S771. DOI: https://doi.org/10.1088/1464-4266/7/12/049.

17. Bashkirov E. K., Mastyugin M. S. Entanglement of two qubits interacting with one-mode quantum field, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2015, vol. 19, no. 2, pp. 205–220 (In Russian). EDN: UGXNVL. DOI: https://doi.org/10.14498/vsgtu1377.
18. Yu T., Eberly J. H. Finite-time disentanglement via spontaneous emission, *Phys. Rev. Lett.*, 2004, vol. 93, no. 14, 140404, arXiv: quant-ph/0404161. DOI: https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.93.140404.
19. Yu T., Eberly J. H. Sudden death of entanglement, *Science*, 2009, vol. 323, no. 5914, pp. 598–601, arXiv: 0910.1396 [quant-ph]. DOI: https://doi.org/10.1126/science.1167343.
20. Wang F., Hou P.-Y., Huang Y. Y., et al. Observation of entanglement sudden death and rebirth by controlling a solid-state spin bath, *Phys. Rev. B*, 2018, vol. 98, no. 6, 064306, arXiv: 1801.02729 [quant-ph]. DOI: https://doi.org/10.1103/PhysRevB.98.064306.
21. Sun G., Zhou Z., Mao B., et al. Entanglement dynamics of a superonducting phase qubit coupled to a two-level system, *Phys. Rev. B*, 2012, vol. 86, no. 6, 064502, arXiv: 1111.3016 [cond-mat.mes-hall]. DOI: https://doi.org/10.1103/PhysRevB.86.064502.
22. Bashkirov E. K. Entanglement in Tavis-Cummings model with Kerr nonlinearity induced by a thermal noise, In: *Saratov Fall Meeting 2020: Laser Physics, Photonic Technologies, and Molecular Modeling* (Saratov, Russia), Proc. SPIE, 11846, 2021, 118460W. DOI: https://doi.org/10.1117/12.2588673.
23. Salles A., de Melo F., Almeida M. P., et al. Experimental investigation of the dynamics of entanglement: Sudden death, complementarity, and continuous monitoring of the environment, *Phys. Rev. A*, 2008, vol. 78, no. 2, 022322, arXiv: 0804.4556 [quant-ph]. DOI: https://doi.org/10.1103/PhysRevA.78.022322.
24. Puri S, Boutin S., Blais A. Engineering the quantum states of light in a Kerr-nonlinear resonator by two-photon driving, *Quantum Inf.*, 2017, vol. 3, no. 1, 18. DOI: https://doi.org/10.1038/s41534-017-0019-1.
25. Manosh T. M., Ashefas M., Thayyullathil R. B. Effects of Kerr medium in coupled cavities on quantum state transfer, *J. Nonlinear Opt. Phys. Mater.*, 2018, vol. 27, no. 3, 1850035. EDN: LFUINC. DOI: https://doi.org/10.1142/S0218863518500352.
26. Al Naim A. F., Khan J. Y., Khalil E. M., Abdel-Khalek S. Effects of Kerr medium and Stark shift parameter on Wehrl entropy and the field puruty for two-photon Jaynes–Cummings model under dispersive approximation, *J. Russ. Laser Res.*, 2019, vol. 40, no. 1, pp. 20–29. DOI: https://doi.org/10.1007/s10946-019-09764-w.
27. Anwar S. J., Ramzan M., Khan M. K. Effect of Stark- and Kerr-like medium on the entanglement dynamics of two three-level atomic systems, *Quant. Inform. Proc.*, 2019, vol. 18, no. 192, pp. 1–14. EDN: YXEFGH. DOI: https://doi.org/10.1007/s11128-019-2277-7.
28. Adanmitonde A. J., Avossevou G. Y. H., Dossa F. A. Quantization of some generalized Jaynes–Cummings models in a Kerr-like medium, *Theoret. and Math. Phys.*, 2020, vol. 203, no. 3, pp. 824–836. EDN: VQTJGW. DOI: https://doi.org/10.1134/S0040577920060082.
29. Aldaghfag S. A., Berrada K., Abdel-Khalek S. Entanglement and photon statistics of two dipole-dipole coupled superconducting qubits with Kerr-like nonlinearities, *Results in Phys.*, 2020, vol. 16, 102978. EDN: DSKEYY. DOI: https://doi.org/10.1016/j.rinp.2020.102978.
30. Kirchmair G., Vlastakis B., Leghtas Z., et al. Observation of quantum state collapse and revival due to the single-photon Kerr effect, *Nature*, 2013, vol. 495, no. 7440, pp. 205–209. DOI: https://doi.org/10.1038/nature11902.
31. Evseev M. M., Bashkirov E. K. Thermal entanglement in Tavis–Cummings model with Kerr nonlinearity, In: *2020 International Conference on Information Technology and Nanotechnology (ITNT)* (26–29 May 2020, Samara, Russia), 2020, 9253347. EDN: YCMKXI. DOI: https://doi.org/10.1109/ITNT49337.2020.9253347.
32. Bashkirov E. K. Dynamics of two-photon Tavis–Cummings model with Kerr media, In: *2022 VIII International Conference on Information Technology and Nanotechnology (ITNT)* (23–27 May 2022, Samara, Russia), 2022, 9848606. EDN: ZAMPVK. DOI: https://doi.org/10.1109/ITNT55410.2022.9848606.

33. Mlynek J. A., Abdumalikov A. A., Fink J. M., et al. Demonstrating W-type entanglement of Dicke states in resonant cavity quantum electrodynamics, *Phys. Rev. A*, 2012, vol. 86, no. 5, 053838. DOI: https://doi.org/10.1103/PhysRevA.86.053838.
34. Peres A. Separability criterion for density matrices, *Phys. Rev. Lett.*, 1996, vol. 77, no. 8, pp. 1413–1415. DOI: https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.77.1413.
35. Horodecki M., Horodecki P., Horodecki R. Separability of mixed states: necessary and sufficient conditions, *Phys. Lett. A*, 1996, vol. 223, no. 1–2, pp. 1–8. EDN: ANQBTF. DOI: https://doi.org/10.1016/S0375-9601(96)00706-2.

Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2023. Т. 27, № 2. С. 270–291
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu2006
EDN: LHFXZB

УДК 519.853.53

Метод равномерной оптимизации нелинейных управляемых систем с распределенными параметрами

Э. Я. Рапопорт

Самарский государственный технический университет,
Россия, 443100, Самара, ул. Молодогвардейская, 244.

Аннотация

Задача оптимизации нелинейной управляемой системы с распределенными параметрами в условиях равномерной оценки целевых множеств сводится к управлению линейной моделью объекта с дополнительным априори неизвестным пространственно-временным возмущением, компенсирующим влияние невязки между линейным и нелинейным дифференциальными операторами соответствующих начально-краевых задач, описываемых уравнениями в частных производных параболического типа. Конкретная форма зависимости возмущения от его аргументов опознается при заданном начальном приближении на каждом шаге предлагаемой сходящейся итерационной процедуры по результатам решения на предыдущей итерации разработанным ранее альтернансным методом линейно-квадратичной задачи программного оптимального управления с детерминированным внешним воздействием в условиях промежуточного вычисления управляемой функции состояния нелинейного объекта на цифровой модели.

Показывается, что искомые уравнения оптимальных регуляторов находятся по известным результатам итерационного процесса отыскания программного управления в виде линейных алгоритмов обратной связи по измеряемому состоянию объекта с нестационарными коэффициентами передачи.

Ключевые слова: нелинейная система с распределенными параметрами, линейно-квадратичная задача оптимизации, итерационная процедура, альтернансный метод, параметризация управляющих воздействий, программное оптимальное управление, синтез оптимального управления.

Дифференциальные уравнения и математическая физика
Научная статья

© Коллектив авторов, 2023
© СамГТУ, 2023 (составление, дизайн, макет)
Контент публикуется на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru)

Образец для цитирования
Рапопорт Э. Я. Метод равномерной оптимизации нелинейных управляемых систем с распределенными параметрами // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2023. Т. 27, № 2. С. 270–291. EDN: LHFXZB. DOI: 10.14498/vsgtu2006.

Сведения об авторе
Эдгар Яковлевич Рапопорт https://orcid.org/0000-0002-0604-8801
доктор технических наук, профессор; профессор каф. автоматики и управления в технических системах; e-mail: edgar.rapoport@mail.ru

Получение: 10 марта 2023 г. / Исправление: 17 мая 2023 г. /
Принятие: 25 мая 2023 г. / Публикация онлайн: 20 июня 2023 г.

Введение

Полное аналитическое решение задачи оптимального управления (ЗОУ) системами с распределенными параметрами (СРП) оказывается возможным лишь применительно к типовым линейным моделям управляемого объекта и критериям оптимальности простейшего вида. За рамками этих модельных представлений решения ЗОУ СРП могут быть получены только с помощью специальных численных методов, что в полной мере относится к СРП, описываемым нелинейными уравнениями в частных производных параболического типа. В настоящее время разработан целый ряд таких методов, общие схемы применения которых используются в ЗОУ объектами как с сосредоточенными, так и с распределенными параметрами [1–7].

Один из основных подходов в этом направлении заключается в применении различных модификаций метода вариаций в пространстве управлений [1–7], реализующих итерационную процедуру построения минимизирующих последовательностей малых изменений управляющих воздействий, которые обеспечивают на каждом шаге убывающие с учетом заданных ограничений значения линейных приближений соответствующих приращений минимизируемого критерия оптимальности, оцениваемых по величине его градиента. В итоге производится редукция исходной ЗОУ к пошаговой процедуре решения ряда специальных задач линейного программирования (ЛП) [6].

Реализация метода вариаций в пространстве управлений связана с необходимостью совместного численного интегрирования уравнений нелинейных моделей объекта и сопряженных систем в целях вычисления производных Фреше минимизируемого функционала по управляющему воздействию, выступающих в роли его градиента, а также со значительным возрастанием трудностей решения соответствующих задач ЛП в условиях фиксации требований к конечному состоянию объекта, учитываемых соответствующими ограничениями на искомые переменные [5–7]. Эти затруднения существенно увеличиваются в задачах равномерной оптимизации при характерных для приложений оценках заданных целевых множеств в равномерной метрике, учет которых приводит к необходимости использования специальных достаточно сложных способов решения ЗОУ ОРП даже применительно к задачам управления линейными моделями управляемого объекта [7–9].

В настоящей работе предлагается конструктивный метод равномерной оптимизации нелинейных управляемых СРП параболического типа с типовым квадратичным функционалом качества, сводимый к сходящейся итерационной процедуре аналитического решения линейных ЗОУ на каждом шаге итераций с промежуточным численным интегрированием уравнений нелинейной модели СРП при предварительно фиксируемом управляющем воздействии. Подобная технология оказывается свободной от ряда недостатков общего метода вариаций в пространстве управлений.

1. Математические модели объекта управления

Пусть объект управления (ОРП) описывается нелинейным пространственно-одномерным уравнением в частных производных параболического типа

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = L\big(Q(x,t)\big) + u_V(x,t), \quad x \in (x_0, x_1), \quad t > 0 \tag{1}$$

относительно управляемой функции состояния $Q(x,t)$, изменяющейся в зависимости от пространственной координаты $x \in [x_0, x_1]$ и времени t, с начальными и граничными условиями

$$Q(x_0, 0) = Q_0(x) = Q_0 = \text{const} \geqslant 0, \quad x \in [x_0, x_1]; \tag{2}$$

$$\frac{\partial Q(x_0,t)}{\partial x} = 0; \quad L_1\big(Q(x_1,t)\big) = u_S(t), \quad t > 0, \tag{3}$$

допустимыми в классе кусочно-непрерывных функций внутренним пространственно-распределенным (u_V) и граничным сосредоточенным (u_S) управляющими воздействиями. Всюду далее рассматривается общий случай одновременного использования u_V и u_S.

В (1), (3) L и L_1 — заданные нелинейные параболические дифференциальные операторы по пространственной координате, рассматриваемые далее для большей определенности и наглядности без потери общности основных последующих результатов в следующей характерной форме [9, 10]:

$$L\big(Q(x,t)\big) = C(Q)\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + B(Q)\frac{\partial Q}{\partial x} + B_1(Q)\Big(\frac{\partial Q}{\partial x}\Big)^2 + D(Q)Q; \tag{4}$$

$$L_1\big(Q(x_1,t)\big) = \alpha_1\big(Q(x_1,t)\big)Q(x_1,t) + \alpha_2\big(Q(x_1,t)\big)\frac{\partial Q(x_1,t)}{\partial x}, \tag{5}$$

где C, B, B_1, D, α_1, α_2 — заданные достаточно гладкие функции своих аргументов.

К виду (4) приводится, в частности, фундаментальное уравнение диффузии и теплопроводности в декартовых и цилиндрических координатах [10], а L_1 в виде (5) аналогичен по форме типовым граничным условиям в линейных уравнениях математической физики.

Всюду далее предполагается, что при заданных начальных условиях каждому допустимому управляющему воздействию соответствует единственное решение краевой задачи (1)–(3), понимаемое в обобщенном смысле [11–13].

Начально-краевая задача (1)–(5) может быть записана в следующем виде [9, 10]:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial Q(x,t)}{\partial t} = L_0\big(Q(x,t)\big) + u_V(x,t) + F(x,t), \quad x \in (x_0, x_1), \quad t > 0; \\ Q(x,0) = Q_0(x) = Q_0 = \text{const} \geqslant 0, \quad x \in [x_0, x_1]; \\ \dfrac{\partial Q(x_0,t)}{\partial x} = 0; \quad L_{10}\big(Q(x_1,t)\big) = u_S(t) + F_1(t), \quad t > 0. \end{cases} \tag{6}$$

Здесь

$$L_0\big(Q(x,t)\big) = C_0\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + B_0\frac{\partial Q}{\partial x} + D_0 Q, \quad x \in (x_0, x_1), \quad t > 0; \tag{7}$$

$$L_{10}\big(Q(x_1,t)\big) = \alpha_{10}Q(x_1,t) + \alpha_{20}\frac{\partial Q(x_1,t)}{\partial x}, \tag{8}$$

— линейные дифференциальные операторы, определяемые в форме линейных приближений к L, L_1 в (1), (3), где C_0, B_0, D_0, α_{10}, α_{20} — некоторые константы, получаемые, например, путем усреднения соответствующих коэффициентов в (4), (5) и

$$F(x,t) = L\big(Q(x,t)\big) - L_0\big(Q(x,t)\big), \tag{9}$$

$$F_1(t) = L_{10}\big(Q(x_1,t)\big) - L_1\big(Q(x_1,t)\big). \tag{10}$$

Всюду далее предполагается, что $F(x,t)$ и $F_1(t)$ являются кусочно-непрерывными функциями своих аргументов. Если их считать заданными в (6), где они фигурируют в роли детерминированных внешних возмущений, то модель ОРП (6)–(8) становится линейной и аналитическое решение краевой задачи (6)–(8) может быть получено известными способами [14, 15].

Однако согласно (9), (10), явная форма зависимостей $F(x,t)$, $F_1(t)$ от x и t априори неизвестна и к их определению в целях перехода от исходной к линейной модели (6)–(8) сводится дальнейшая проблема.

Применение метода конечных интегральных преобразований по пространственному аргументу $x \in [x_0, x_1]$ [16, 17] к уравнениям линейной начально-краевой задачи (6)–(8) с ядром, равным ее собственным функциям $\varphi_n(\mu_n, x)$, $n = 1, 2, \ldots$, где μ_n^2 — собственные числа, приводит к описанию рассматриваемого объекта бесконечной системой обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка для временных мод $\bar{Q}_n(t)$ разложения $Q(x,t)$ в сходящийся в среднем ряд по ортонормированной с весом $r(x)$ системе $\varphi_n(\mu_n, x)$ [7–9]:

$$Q(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{Q}_n(t)\varphi_n(\mu_n, x); \tag{11}$$

$$\frac{d\bar{Q}_n}{dt} = -\mu_n^2\bar{Q}_n + \bar{u}_{Vn}(t) + \bar{F}_n(\mu_n, t) + g_n u_S(t) + g_n F_1(t); \tag{12}$$

$$\bar{Q}_n(0) = \bar{Q}_0(\mu_n), \quad n = 1, 2, \ldots,$$

с автономными сосредоточенными внутренними управляющими воздействиями $\bar{u}_{Vn}(t)$, $n = 1, 2, \ldots$, и граничным управлением $u_S(t)$. Здесь

$$\begin{aligned} \bar{u}_{Vn}(t) &= \int_{x_0}^{x_1} u_V(x,t)r(x)\varphi_n(\mu_n, x)dx; \\ \bar{F}_n(\mu_n, t) &= \int_{x_0}^{x_1} F(x,t)r(x)\varphi_n(\mu_n, x)dx, \quad n = 1, 2, \ldots \end{aligned} \tag{13}$$

представляют собой модальные составляющие разложения в ряд вида (11) внутреннего управления $u_V(x,t)$ и функции $F(x,t)$:

$$u_V(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{u}_{Vn}(t)\varphi_n(\mu_n, x), \quad F(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{F}_n(\mu_n, t)\varphi_n(\mu_n, x), \tag{14}$$

g_n — известные коэффициенты [17].

Подставляя $Q(x,t)$ в виде (11) в выражения (9), (10), где предполагается допустимым почленное дифференцирование ряда (11) по пространственной координате, и интегрируя в (13), получим $\bar{F}_n(\mu_n,t)$ и $F_1(t)$ в форме вполне определенных нелинейных зависимостей от $\bar{Q}=(\bar{Q}_n)$, $n=1,2,\ldots$, что приводит к преобразованию соотношений (12) в замкнутую относительно $\bar{Q}$ бесконечную нелинейную систему уравнений объекта [9, 10]:

$$\begin{aligned} &\frac{d\bar{Q}_n}{dt}=-\mu_n^2\bar{Q}_n+\Phi_n(\bar{Q})+\bar{u}_{Vn}(t)+g_nu_S(t), \quad n=1,2,\ldots,\\ &\Phi_n(\bar{Q})=\bar{F}_n(\bar{Q})+g_nF_1(\bar{Q}). \end{aligned} \tag{15}$$

Последующие подстановки решения этой системы в (11) и выражения (11) для $Q(x,t)$ в правую часть равенств (9), (10) позволяют найти $F(x,t)$ и $F_1(t)$, однако такое решение может быть получено с требуемой точностью даже при использовании известных способов конечномерного усечения системы (15) [18–20] только численными методами, сложность реализации которых оказывается сравнимой с трудностями непосредственного применения численных методов вариаций в пространстве управлений в задачах оптимального управления исходной нелинейной моделью (1)–(5).

Значительно более простым и конструктивным оказывается предлагаемый в последующих разделах статьи итерационный алгоритм вычисления $F(x,t)$ и $F_1(t)$ по известному начальному приближению, реализуемый в процессе решения на каждом шаге итераций рассматриваемых задач оптимального управления с линейной моделью ОРП вида (6)–(8).

2. Постановка задачи оптимального управления

Пусть объект управления с распределенными параметрами описывается линейной начально-краевой задачей (6)–(8).

Управляющие воздействия в (6) стесняются ограничениями

$$u_{V_{\min}}\leqslant u_V(x,t)\leqslant u_{V_{\max}};\quad u_{S_{\min}}\leqslant u_S(t)\leqslant u_{S_{\max}} \tag{16}$$

с заданными пределами их допустимых значений.

Будем считать, что, согласно типовым в приложениях требованиям, необходимо обеспечить за фиксируемое конечное время t_1 заданную точность ε равномерного приближения пространственного распределения управляемой величины $Q(x,t_1)$ к требуемому $Q^{**}(x)>Q_0$ для всех $x\in[x_0,x_1]$ согласно соотношению

$$\max_{x\in[x_0,x_1]}\bigl|Q(x,t_1)-Q^{**}(x)\bigr|\leqslant\varepsilon, \tag{17}$$

определяющему оцениваемое в равномерной метрике целевое множество конечных состояний ОРП [7–9].

Пусть далее эффективность процесса управления объектом (6)–(8) оценивается квадратичным функционалом качества, определяемым в следующей типичной частной форме:

$$I(u_V,u_S)=\int_0^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\bigl[\rho_1(x)Q^2(x,t)+\rho_2(x)u_V^2(x,t)\bigr]dxdt+$$

$$+\int_0^{t_1} \rho_S u_S^2(t)dt \to \min_{u_V,u_S} \quad (18)$$

с заданными весовыми коэффициентами $\rho_1(x)$, $\rho_2(x)$ и $\rho_S = \mathrm{const} > 0$.

Переход к описанию объекта (11), (12) в терминах модальных переменных приводит при $\rho_1(x) = \rho_2(x) = r(x)$ в силу ортонормированности семейства собственных функций к представлению критерия (18) в следующем виде:

$$I_1(\bar{u}_V, u_S) = \int_0^{t_1} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \bar{Q}_n^2(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{u}_{Vn}^2(t) + \rho_S u_S^2(t)\right] dt \to \min_{\bar{u}_V,u_S}; \qquad (19)$$
$$\bar{u}_V = (\bar{u}_{Vn}), \quad n = 1, 2, \ldots,$$

а требования (17) к конечному состоянию ОРП представляются условием

$$\max_{x\in[x_0,x_1]} \left|\sum_{n=1}^{\infty} \bar{Q}_n(t_1)\varphi_n(\mu_n, x) - Q^{**}(x)\right| \leqslant \varepsilon. \qquad (20)$$

Здесь и всюду далее в условиях выполнения усиленных условий Коши—Липшица [20] будем учитывать N_1 слагаемых бесконечных сумм в (19), (20), где $N_1 = \infty$ или $N_1 = N < \infty$ в зависимости от используемой схемы анализа и возможностей практической реализации исследуемых алгоритмов управления, ограничиваясь в случае $N_1 = N$ с любой требуемой точностью решением «укороченной» системы N первых уравнений в (12) при достаточно большой величине N и полагая при этом $\bar{Q}_n(t) = 0$ при $n > N$ [18–20]. При использовании усеченной модели объекта с $N_1 = N < \infty$ все получаемые далее результаты следует считать субоптимальными.

Теперь рассматриваемая линейно-квадратичная задача оптимизации сводится к определению программного оптимального управления $u_S^*(t)$ и $\bar{u}_V^*(t)$, по которому $u_V^*(x,t)$ восстанавливается в форме ряда (14), и алгоритмов обратной связи $u^*(\bar{Q}, x, t) = \big(u_V^*(\bar{Q}, x, t), u_S^*(\bar{Q}, t)\big)$, $\bar{Q} = (\bar{Q}_n)$, $n = \overline{1, N_1}$, обеспечивающих при $N_1 = \infty$ перевод объекта (11), (12) за заданное время t_1 в требуемое конечное состояние (20) при минимальном значении критерия оптимальности (19) в условиях ограничений (16).

3. Программное оптимальное управление при заданных зависимостях $F(x,t)$ и $F_1(t)$

3.1. Структура управляющего воздействия. На сформулированную бесконечномерную при $N_1 = \infty$ задачу оптимального управления распространяется принцип максимума Понтрягина [7, 21].

Основное условие

$$H\big(\bar{Q}^*(t), \bar{u}^*(t), \psi^*(t)\big) = \max_{\bar{u}} H\big(\bar{Q}^*(t), \bar{u}, \psi^*(t)\big), \quad t \in [0, t_1] \qquad (21)$$

достижения на соответствующих оптимальному процессу величинах $\bar{Q}^*(t)$, $\bar{u}^*(t)$, $\psi^*(t)$ максимума функции Понтрягина

$$H\big(\bar{Q}(t), \bar{u}(t), \psi(t)\big) = -\sum_{n=1}^{N_1} \bar{Q}_n^2(t) - \sum_{n=1}^{N_1} \bar{u}_{Vn}^2(t) - \rho_S u_S^2(t) +$$

$$+\sum_{n=1}^{N_1}\psi_n(t)\big(-\mu_n^2\bar{Q}_n(t)+\bar{u}_{Vn}(t)+\bar{F}_n(\mu_n,t)+g_nu_S(t)+g_nF_1(t)\big) \quad (22)$$

по векторному аргументу $\bar{u}(t)=(\bar{u}_V(t),u_S(t))$ позволяет найти $\bar{u}^*(t)$ в форме явных функций от $\psi^*(t)$ для рассматриваемой задачи оптимизации (11), (12), (16), (19), (20). Здесь $\bar{Q}(t)=\big(\bar{Q}_n(t)\big)$ и вектор сопряженных переменных $\psi(t)=\big(\psi_n(t)\big)$ связаны системой уравнений

$$\frac{d\psi_n}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial\bar{Q}_n}=2\bar{Q}_n(t)+\mu_n^2\psi_n(t),\quad n=\overline{1,N_1}. \quad (23)$$

Ограничимся далее для простоты типичной постановкой линейно-квадратичной задачи оптимизации с не стесняемыми ограничениями (16) управляющими воздействиями в целях достижения максимального эффекта по величине критерия оптимальности (19) и последующего выбора предельно допустимых значений $u_S(t)$ и $\bar{u}_{Vn}(t)$, связываемых условиями (16), на основании получаемых результатов.

В открытой области изменения $\bar{u}(t)$ оптимальное управление $\bar{u}^*(t)$ при любой конкретной форме допустимых зависимостей $F(x,t)$ и $F_1(t)$ в (6) от своих аргументов и требований к конечному состоянию объекта принимает, согласно (21)–(23), следующий вид [15, 23]:

$$\bar{u}^*_{Vn}(t)=\frac{1}{2}\psi^*_n(t),\quad n=\overline{1,N_1};\quad u^*_S(t)=\frac{1}{2\rho_S}\sum_{p=1}^{N_1}g_p\psi^*_p(t). \quad (24)$$

3.2. Краевая задача принципа максимума. Уравнения (12) с подстановкой управляющих воздействий вида (24) образуют совместно с (23) линейную программно-управляемую систему (П-систему [6, 9]), замыкаемую относительно неизвестных $\bar{Q}(t)$ и $\psi(t)$ требованиями (20) к конечному состоянию объекта:

$$\begin{aligned}
&\frac{d\psi_n}{dt}=2\bar{Q}_n+\mu_n^2\psi_n, && n=\overline{1,N_1};\\
&\frac{d\bar{Q}_n}{dt}=-\mu_n^2\bar{Q}_n+\frac{1}{2}\psi_n+\frac{1}{2\rho_S}g_n\sum_{p=1}^{N_1}g_p\psi_p+\\
&\qquad+\bar{F}_n(\mu_n,t)+g_nF_1(t), && n=\overline{1,N_1}.
\end{aligned} \quad (25)$$

Решение этой системы может быть представлено в векторно-матричной форме:

$$\begin{bmatrix}\psi(t)\\ \bar{Q}(t)\end{bmatrix}=e^{At}\begin{bmatrix}\psi(0)\\ \bar{Q}(0)\end{bmatrix}+\int_0^t e^{A(t-\tau)}\omega(\tau)d\tau. \quad (26)$$

Здесь

$$\begin{aligned}
&\omega(\tau)=\begin{bmatrix}0\\ \bar{F}(\tau)+gF_1(\tau)\end{bmatrix},\\
&\bar{F}(\tau)+gF_1(\tau)=\big(\bar{F}_n(\mu_n,\tau)+g_nF_1(\tau)\big),\quad n=\overline{1,N_1};
\end{aligned} \quad (27)$$

$\bar{F}(\tau) + gF_1(\tau)$ — вектор-столбец; $g = (g_n)$, $n = \overline{1, N_1}$; A — матрица коэффициентов системы (25); e^{At} — матричная экспонента, столбцами которой являются линейно независимые решения однородной системы (25) при $\bar{F}_n(\mu_n, t) = F_1(t) = 0$.

Матричная экспонента представляется в блочном виде

$$e^{At} = \begin{bmatrix} A_{11}(t) & A_{12}(t) \\ A_{21}(t) & A_{22}(t) \end{bmatrix}, \tag{28}$$

где блоки $A_{ij}(t)$ — известные $N_1 \times N_1$ матрицы в соответствии со структурой системы уравнений (25).

3.3. $\psi^{(M)}$-параметризация управляющих воздействий. Согласно (26) $\psi(t)$, а следовательно, и программное управление (24) определяются при известной величине $\bar{Q}(0)$ с точностью до вектора $\psi(0)$ начальных значений сопряженных функций, выступающих, таким образом, в роли параметрического представления $\bar{u}^*(t)$ [2, 6]. Однако для СРП подобный способ параметризации оказывается неконструктивным в силу бесконечной размерности этого вектора при $N_1 = \infty$. В работе [24] применительно к требованиям (20), предъявляемым к $\bar{Q}^*(t_1)$, предложен метод последовательной конечномерной параметризации управляющих воздействий («ψ-параметризация») на множестве M-мерных векторов $\psi^{(M)}$ финишных значений $\psi_i(t_1)$, $i = \overline{1, M}$, первых $M < N_1$ сопряженных функций в (25) при равных нулю остальных величинах $\psi_i(t_1) = 0$, $i > M$:

$$\psi^{(M)} = \big(\psi_i(t_1)\big) = (\tilde{\psi}_i), \quad i = \overline{1, M}; \qquad \psi_i(t_1) = 0, \quad i > M \geqslant 1. \tag{29}$$

Интегрирование уравнений П-системы (25) в условиях ψ-параметризации (29) позволяет получить конечное состояние управляемой величины, управляющие воздействия и значения критерия оптимальности в форме явных функций $Q(x, \psi^{(M)})$, $\bar{u}_{Vn}(t, \psi^{(M)})$, $u_S(t, \psi^{(M)})$ и $I_1(\psi^{(M)})$ от своих аргументов.

При этом минимально достижимые в классе параметризуемых управлений $\bar{u}(t, \psi^{(M)})$ значения $\varepsilon_{\min}^{(M)}$ ошибки ε равномерного приближения $Q(x, t_1)$ к $Q^{**}(x)$ определяются в соответствии с (17) соотношением

$$\varepsilon_{\min}^{(M)} = \min_{\psi^{(M)} \in E^M} \Big\{ \max_{x \in [x_0, x_1]} \big| Q(x, \psi^{(M)}) - Q^{**}(x) \big| \Big\}. \tag{30}$$

Как показано в [22], в типичных условиях существования отрицательной производной функции максимума в (30) по некоторому направлению в $E^{(M+1)}$ ошибки минимакса в (30) уменьшаются с возрастанием M, образуя строго убывающую цепочку неравенств

$$\varepsilon_{\min}^{(1)} > \varepsilon_{\min}^{(2)} > \dots > \varepsilon_{\min}^{(j)} > \varepsilon_{\min}^{(j+1)} > \dots > \varepsilon_{\min}^{(\rho)} = \varepsilon_{\inf}, \tag{31}$$

где $\varepsilon_{\inf}$ — точная нижняя грань возможных значений ε в (17) и $\rho = \infty$ при $\varepsilon_{\inf} = 0$ и $\rho < \infty$ при $\varepsilon_{\inf} > 0$ соответственно для управляемых и неуправляемых относительно $Q^{**}(x)$ моделей объекта [8, 9]. При $\varepsilon < \varepsilon_{\inf}$ решение

рассматриваемой задачи оптимального управления не существует. Неравенства (31) характеризуют сужающиеся к $Q^{**}(x)$ с возрастанием M семейства целевых множеств для $\varepsilon = \varepsilon_{\min}^{(j)}$ в (20), создавая возможности обеспечения достижимой точности равномерного приближения к $Q^{**}(x)$ при $\varepsilon \geqslant \varepsilon_{\inf}$ в (20) в процессе последовательной ψ-параметризации управляющих воздействий с конечномерным вектором параметров $\psi^{(M)}$, $M < N_1$, для ряда возрастающих значений M в (29).

Искомое ψ-параметризуемое оптимальное управление $\bar{u}(t, \psi_*^{(M_0)})$ характеризуется вектором параметров $\psi_*^{(M_0)} = (\tilde{\psi}_i^*)$, $i = \overline{1, M_0}$, размерностью $M = M_0$, нижняя граница которой в силу определения (30) отвечает в условиях (31) в зависимости от величины ε в (20) неравенствам

$$M_0 \geqslant \upsilon \quad \forall \varepsilon \ : \ \varepsilon_{\min}^{(\upsilon)} \leqslant \varepsilon < \varepsilon_{\min}^{(\upsilon-1)}, \quad \upsilon \in \{\overline{1, \rho}\}. \tag{32}$$

Соотношения (29) представляют собой условия трансверсальности на правом конце траекторий в бесконечномерном фазовом пространстве переменных $\bar{Q}_n$, $n = 1, 2, \ldots$, с некоторыми (заранее неизвестными для каждого вектора $\psi^{(M)}$) фиксированными конечными значениями $\bar{Q}_{nk}$, $n = \overline{1, M}$, первых M мод $\bar{Q}_n(t_1)$, $n = \overline{1, M}$, и свободными величинами $\bar{Q}_n(t_1)$ при $n > M$ для остальных модальных переменных:

$$\bar{Q}_n(t_1) = \bar{Q}_{nk}, \quad n = \overline{1, M}; \qquad \bar{Q}_n(t_1) \in E^1, \quad n > M. \tag{33}$$

Заменим требование (20) к конечному состоянию объекта в рассматриваемой задаче оптимального управления краевыми условиями (33) для заданных величин $\bar{Q}_{nk}$, $n = \overline{1, M}$, при некотором фиксированном значении $M = M_1$. Пусть решение соответствующей П-системы (25), замыкаемой соотношениями (33), позволяет найти вектор $\psi^{(M_1)} = (\tilde{\psi}_i)$, $i = \overline{1, M_1}$, сопряженных переменных, параметрические зависимости управляющего воздействия $\bar{u}(t, \psi^{(M_1)})$ и отвечающие ему конечные значения $\bar{Q}_{nk}$ для $n > M_1$. Предположим, что на некотором множестве всех возможных по набору M_1 вариантов величин $\bar{Q}_{nk}$, $n = \overline{1, M_1}$, удовлетворяется условие (20), и выделим такой из этих вариантов, для которого достигается наименьшее значение $I_{1\min}(\psi^{(M_1)})$ критерия оптимальности (19). В итоге оказывается решенной исходная задача оптимизации, если искомое управление $\bar{u}^*(t)$ действительно принадлежит классу $\psi^{(M_1)}$-параметризуемых функций $\bar{u}(t, \psi^{(M_1)})$.

Рассмотрим далее $\psi^{(M_2)}$-параметризованное управление $\bar{u}(t, \psi^{(M_2)})$ с $M = M_2 > M_1$ в (33), где $\psi^{(M_2)} = (\tilde{\psi}_i)$, $i = \overline{1, M_2}$, и $\tilde{\psi}_i \neq 0$ хотя бы для одного из значений $i \in \{\overline{M_1 + 1, M_2}\}$.

В классе таких управляющих воздействий число фиксируемых в (33) величин $\bar{Q}_{nk}$ превышает M_1. Так как при $M = M_1$ согласно (29) $\tilde{\psi}_i = 0$ для всех $i \in \{\overline{M_1 + 1, M_2}\}$, достигаемое при рассматриваемом управлении $\bar{u}(t, \psi^{(M_2)})$ значение $I_{1\min}(\psi^{(M_2)})$ критерия оптимальности (19) для любого одинакового с $\bar{u}(t, \psi^{(M_1)})$ набора первых M_1 величин $\bar{Q}_{nk}$ отвечает неравенству $I_{1\min}(\psi^{(M_1)}) < I_1(\psi^{(M_2)})$ за счет свободы выбора большего числа составляющих $\bar{Q}_n(t_1)$, $n > M$ в (33) при $M = M_1$ по сравнению со случаем $M = M_2$, которые автоматически устанавливаются из условий минимизации

функционала качества (19). Если управление $u(t,\psi^{(M_2)})$ реализуется в условиях $\tilde{\psi}_i = 0$ для всех $i \in \{\overline{M_1+1, M_2}\}$, то в таком случае $\psi^{(M_2)} = \psi^{(M_1)}$ согласно определению (29), и последнее неравенство уточняется следующим образом: $I_{1\min}(\psi^{(M_1)}) \leqslant I_1(\psi^{(M_2)})$.

Отсюда следует, что размерность M_0 вектора $\psi_*^{(M_0)}$, характеризующего искомое оптимальное управление, совпадает со своей нижней границей в (32) и находится по правилу

$$M_0 = \upsilon \ \ \forall\varepsilon \ : \ \varepsilon_{\min}^{(\upsilon)} \leqslant \varepsilon < \varepsilon_{\min}^{(\upsilon-1)}, \quad \upsilon \in \{1, \rho\}, \tag{34}$$

однозначно устанавливающему величину M_0 в зависимости от заданного значения ε в (20) и характеризующему структуру оптимальных программных управлений минимальной сложности в условиях (20).

3.4. Явная форма $\psi^{(M)}$-параметризуемых оптимальных управлений. Перенос («прогонка») начальных условий в (26) в конечный момент времени приводит к следующему выражению для сопряженных функций в оптимальном процессе в зависимости от конечной величины $\psi^*(t_1)$, начального состояния объекта $\bar{Q}(0)$ и внешнего воздействия $\omega(\tau)$ в (26), (27) [15,23]:

$$\begin{aligned}\psi^*(t) = \big[\hat{A}_{11}(t_1-t) + \hat{A}_{12}(t_1-t)K(t_1)\big]\psi^*(t_1) + \\ + \hat{A}_{12}(t_1-t)K_1(t_1)\bar{Q}(0) + \hat{A}_{12}(t_1-t)D_\omega(t_1) + D_{\omega 1}(t,t_1),\end{aligned} \tag{35}$$

где $\hat{A}_{ij}$ — подобные (28) блоки обратной матрицы $e^{-A(t_1-t)}$,

$$K(t_1) = A_{21}(t_1)A_{11}^{-1}(t_1), \quad K_1(t_1) = A_{22}(t_1) - A_{21}(t_1)A_{11}^{-1}(t_1)A_{12}(t_1),$$

$$\begin{aligned}D_\omega(t_1) = \int_0^{t_1} A_{22}(t_1-\tau)\big(\bar{F}(\tau) + gF_1(\tau)\big)d\tau - \\ - A_{21}(t_1)A_{11}^{-1}(t_1)\int_0^{t_1} A_{12}(t_1-\tau)\big(\bar{F}(\tau) + gF_1(\tau)\big)d\tau,\end{aligned}$$

$$D_{\omega 1}(t,t_1) = -\int_t^{t_1} \hat{A}_{12}(\tau-t)\big(\bar{F}(\tau) + gF_1(\tau)\big)d\tau.$$

Подстановка (35) в (24) приводит к явной форме ψ-параметризованных оптимальных программных управлений $\bar{u}^*_{Vn}(t)$ и $u^*_S(t)$.

3.5. $\Delta^{(M)}$-параметризация управляющих воздействий. В рассматриваемой ЗОУ искомые оптимальные управления находятся, согласно (24), непосредственно в терминах сопряженных переменных, позволяя получить в достаточно простом виде (24), (35) их $\psi^{(M)}$-параметризованное представление. Однако при отличном от (19) критерии оптимальности базовое условие оптимальности (21) приводит к гораздо более сложным зависимостям $\bar{u}^*(t)$ от $\psi^*(t)$, краевая задача принципа максимума становится нелинейной [7–9,24] и задача определения в явной форме $\psi^{(M)}$-параметризованного управления $\bar{u}^*(t)$ оказывается трудноразрешимой.

Тем не менее в подобной ситуации процедура принципа максимума в совокупности с базовыми закономерностями предметной области во многих случаях позволяет найти оптимальные управляющие воздействия с точностью

до вектора $\Delta^{(M)} = (\Delta_i^{(M)})$, $i = \overline{1, M}$, параметров отличной от $\psi^{(M)}$ природы, который непосредственно характеризует их поведение в заданной пространственно-временной области ($\Delta^{(M)}$-параметризация $\bar{u}(t)$) [7–9, 24].

Типичным примером является классическая задача оптимального по быстродействию управления, для которой оптимальное управляющее воздействие заведомо определяется, согласно (21), в классе кусочно-постоянных функций с точностью до вектора $\Delta^{(M)}$ длительностей $\Delta_i^{(M)}$, $i = \overline{1, M}$, M интервалов постоянства управляющих воздействий, попеременно принимающих только свои предельно допустимые максимальное и минимальное значения в соответствии с (16) [7–9]. Интегрирование системы уравнений (12) модели объекта с $\Delta^{(M)}$-параметризованным управлением $\bar{u}(t, \Delta^{(M)})$ позволяет найти конечные значения модальных переменных $\bar{Q}_n(t_1, \Delta^{(M)})$, $n = \overline{1, N_1}$, по которым $Q(x, t_1) = Q(x, \Delta^{(M)})$ восстанавливается в форме ряда (11), и значение критерия оптимальности $I_1(\Delta^{(M)})$ в форме явных функций от $\Delta^{(M)}$. Процедура $\Delta^{(M)}$-параметризации характеризуется величинами $\tilde{\varepsilon}_{\min}^{(j)}$ минимакса, определяемыми соотношениями (30), (31) после замены в них $\psi^{(M)}$ на $\Delta^{(M)}$.

Поскольку в результате $\psi^{(M)}$-параметризации рассматриваемая задача оптимизации сводится к управлению объектом (12) с заданными конечным состоянием $\bar{Q}_{nk}$, $n = \overline{1, M}$, первых M мод управляемой величины при свободных значениях $\bar{Q}_n(t_1)$, $n > M$ остальных модальных составляющих согласно (33), вектор $\Delta_*^{(M)}$, характеризующий оптимальное управление $u^*(t, \Delta_*^{(M)})$, может быть найден путем решения системы M уравнений

$$\bar{Q}_{nk} = \bar{Q}_n(t_1, \Delta^{(M)}), \quad n = \overline{1, M} \tag{36}$$

относительно M неизвестных $\Delta_i^{(M)}$, $i = \overline{1, M}$, при каждом заданном наборе M величин $\bar{Q}_{nk}$, $n = \overline{1, M}$, и найденных зависимостях $\bar{Q}_n(t_1, \Delta^{(M)})$, $n = \overline{1, M}$.

Ввиду полной управляемости укороченной модели объекта, описываемой первыми M уравнениями в (12) для $n = \overline{1, M}$ [25], система уравнений (36) всегда имеет решение относительно $\Delta^{(M)}$, если искомое оптимальное управление существует в классе $\Delta^{(M)}$-параметризуемых управляющих воздействий.

Дальнейший анализ в этих условиях по схеме для $\psi^{(M)}$-параметризованного управления приводит к подобному (34) правилу выбора размерности M_0 вектора $\Delta_*^{(M_0)}$, характеризующего оптимальное управление $\bar{u}^*(x, \Delta_*^{(M_0)})$ в зависимости от заданного ε в (20):

$$M_0 = \upsilon \ \ \forall \varepsilon \ : \ \tilde{\varepsilon}_{\min}^{(\upsilon)} \leqslant \varepsilon < \tilde{\varepsilon}_{\min}^{(\upsilon-1)}, \quad \upsilon \in \{1, \rho\},$$

где значения $\tilde{\varepsilon}_{\min}^{(\upsilon)}$ отличаются от $\varepsilon_{\min}^{(\upsilon)}$ в (34).

Всюду далее продолжается исследование поставленной в разделе 2 задачи оптимизации с критерием оптимальности (19) применительно к поиску $\psi^{(M)}$-параметризованных управляющих воздействий.

3.6. Редукция к задаче полубесконечной оптимизации. После интегрирования уравнений системы (12) с ψ-параметризованным управлением $\bar{u}^*(t, \psi_*^{(M_0)})$ вида (24), (35) находятся при заданном детерминированном воздействии $\omega(\tau)$ в (26), (27) зависимости $Q(x, \psi_*^{(M_0)})$ управляемой величины

в конце процесса управления для каждого значения $\bar{Q}(0)$ и критерия оптимальности $I_1(\psi_*^{(M_0)})$ в (11), (19) в форме явных функций своих аргументов. В результате осуществляется точная редукция исходной задачи оптимального управления к задаче полубесконечной оптимизации (ЗПО) [7–9, 24]:

$$I_1(\psi_*^{(M_0)}) \to \min_{\psi_*^{(M_0)}}; \qquad \max_{x\in[x_0,x_1]} \left|Q(x,\psi_*^{(M_0)}) - Q^{**}(x)\right| \leqslant \varepsilon \tag{37}$$

на экстремум функции $I_1(\psi_*^{(M_0)})$ конечного числа M_0 переменных $\tilde{\psi}_i^*$, $i = \overline{1, M_0}$, в (29) с бесконечным числом ограничений, порождаемых требованием выполнения условия (17) для всех $x \in [x_0, x_1]$ и заменяемых одним ограничением на функцию максимума в (37). Здесь размерность $M = M_0$ оптимального вектора параметров $\psi_*^{(M_0)}$ определяется согласно (30), (31), (34).

Решение ЗПО (37) относительно вектора параметров $\psi_*^{(M_0)}$, а также заведомо неизвестной величины $\varepsilon_{\min}^{(M_0)}$ в случае, когда $\varepsilon = \varepsilon_{\min}^{(M_0)}$ в (37), может быть получено альтернансным методом параметрической оптимизации в условиях малостеснительных для прикладных задач допущений [7–9].

Метод базируется на специальных альтернансных свойствах искомой оптимальной величины вектора $\psi_*^{(M_0)} = (\psi_i^*)$, $i = \overline{1, M_0}$, в (37), являющихся аналогом условий экстремума в теории нелинейных чебышевских приближений, и дополнительной информации о форме кривой пространственного распределения результирующего состояния $Q(x, \psi_*^{(M_0)})$, определяемой закономерностями предметной области. Согласно альтернансным свойствам, равные допустимой величине ε одинаковые значения максимальных отклонений $\max\limits_{x\in[x_0,x_1]} \left|Q(x,\psi_*^{(M_0)}) - Q^{**}(x)\right|$ достигаются в некоторых точках x_j^0, $j = \overline{1, R}$, на отрезке $[x_0, x_1]$. Общее число R этих точек

$$R = \begin{cases} M, & \text{если } \varepsilon_{\min}^{(M_0)} < \varepsilon < \varepsilon_{\min}^{(M_0-1)}; \\ M+1, & \text{если } \varepsilon = \varepsilon_{\min}^{(M_0)}, \end{cases}$$

согласно [7–9] равно числу искомых неизвестных в ЗПО (37) и порождает замкнутую относительно этих неизвестных систему отношений

$$\left|Q(x_j^0, \psi_*^{(M_0)}) - Q^{**}(x_j^0)\right| = \varepsilon, \quad j = \overline{1, R}. \tag{38}$$

При наличии дополнительной информации из предметной области о форме кривой $Q(x, \psi_*^{(M_0)}) - Q^{**}(x)$ на отрезке $[x_0, x_1] \ni x$, позволяющей при известной функции $\omega(\tau)$ в (26), (27) идентифицировать координаты x_j^0 и знаки $Q(x_j^0, \psi_*^{(M_0)})$, равенства (38), дополненные условиями существования экстремума функции $Q(x, \psi_*^{(M_0)})$ в точках $x_{jg}^0 \in \operatorname{int}[x_0, x_1]$, $g = \overline{1, R_1}$, где $R_1 \leqslant R$ и $x_{jg}^0 \in \{x_j^0\}$, переводятся в систему уравнений

$$\begin{aligned} &Q(x_j^0, \psi_*^{(M_0)}) - Q^{**}(x_j^0) = \pm\varepsilon, && j = \overline{1, R}; \\ &\frac{\partial}{\partial x}\left[Q(x_{jg}^0, \psi_*^{(M_0)}) - Q^{**}(x_{jg}^0)\right] = 0, && g = \overline{1, R_1} \end{aligned} \tag{39}$$

с однозначно определяемым знаком ε в каждой точке x_j^0, которая разрешается известными численными методами относительно ψ_i^*, $i=\overline{1,M_0}$, значений x_{jg}^0, $g=\overline{1,R_1}$, а также $\varepsilon_{\min}^{(M_0)}$, если $\varepsilon=\varepsilon_{\min}^{(M_0)}$ в (37).

Явное выражение для зависимости $Q(x_j^0,\psi_*^{(M_0)})$ от своих аргументов в системе уравнений (39) представляется в форме бесконечной или укороченной суммы вида (20) разложения в ряд (11):

$$Q(x_j^0,\psi_*^{(M_0)})=\sum_{n=1}^{N_1}\bar{Q}_n(\psi_*^{(M_0)})\varphi_n(\mu_n,x_j^0),$$

где значения модальных переменных $\bar{Q}_n(\psi_*^{(M_0)})$ в конце оптимального процесса находятся в подобном (35) виде [15,23]:

$$\bar{Q}(\psi_*^{(M_0)})=\big(\bar{Q}_n(\psi_*^{(M_0)})\big)=K(t_1)\psi^*(t_1)+K_1(t_1)\bar{Q}(0)+D_\omega(t_1). \qquad (40)$$

В итоге решение системы уравнений (39) относительно $\psi_*^{(M_0)}$ определяет, согласно (29), вектор $\psi^*(t_1)$, подстановка которого в (35) приводит к явной форме описания в оптимальном процессе сопряженных переменных $\psi^*(t)$ и управляющих воздействий $\bar{u}_{Vn}^*(t)$, $u_S^*(t)$ в (24), завершая тем самым решение задачи программного управления в условиях детерминированных воздействий $\omega(\tau)$ вида (27) в (26).

В исходных условиях неопределенности $\omega(\tau)$ далее предлагается итерационная процедура вычисления $F(x,t)$ и $F_1(t)$ в (6), а следовательно, и $\omega(\tau)$ в (26), (27), по известному начальному приближению.

4. Численный метод решения задачи программного управления

Пусть $F^{(k)}(x,t)$, $F_1^{(k)}(t)$, $k=1,2,\ldots,$ — известные приближения к $F(x,t)$, $F_1(t)$ в (6) на k-том шаге итерационной процедуры поиска этих функций при заданных начальных значениях

$$F^{(1)}(x,t)=F_1^{(1)}(t)=0. \qquad (41)$$

Тогда k-тое приближение $\bar{u}^{(k)}(t)=\big(\bar{u}_{Vn}^{(k)}(t),\ n=\overline{1,N_1};\ u_S^{(k)}(t)\big)$ к оптимальному управлению $\bar{u}^*(t)$ в (24) находится при фиксируемых зависимостях $F^{(k)}(x,t)$, $F_1^{(k)}(t)$ по описанному в разд. 3 алгоритму, определяющему непрерывное отображение

$$\Lambda: F^{(k)},\ F_1^{(k)}\to\bar{u}^{(k)}\ :\ \bar{u}^{(k)}(t)=\Lambda\big(F^{(k)}(x,t),F_1^{(k)}(t)\big),\quad k=1,2,\ldots. \qquad (42)$$

Построим $(k+1)$-е приближение $F^{(k+1)}(x,t)$, $F_1^{(k+1)}(t)$ с учетом базовых соотношений (9), (10), позволяющих осуществить переход к линейно квадратичной задаче оптимизации (11), (12), (19), (20):

$$\begin{aligned}&F^{(k+1)}(x,t)=F^{(k)}(x,t)+\delta F^{(k)}(x,t);\\&\delta F^{(k)}(x,t)=L\big(Q^{(k)}(x,t)\big)-L_0\big(Q^{(k)}(x,t)\big);\end{aligned} \qquad (43)$$

$$\begin{aligned} &F_1^{(k+1)}(t) = F_1^{(k)}(t) + \delta F_1^{(k)}(t); \\ &\delta F_1^{(k)}(t) = L_{10}\big(Q^{(k)}(x_1,t)\big) - L_1\big(Q^{(k)}(x_1,t)\big). \end{aligned} \tag{44}$$

Здесь $Q^{(k)}(x,t)$ являются численным или аналитическим решением уравнений соответственно (1)–(3) или (6) при предварительно найденном управлении $\bar{u}^{(k)}(t)$ в (42), описываемым известным отображением Φ: $\bar{u}^{(k)} \to Q^{(k)}(x,t)$ из множества $\bar{u}^{(k)}$:

$$Q^{(k)}(x,t) = Q^{(k)}(x,t,u^{(k)}) = \Phi(\bar{u^{(k)}}). \tag{45}$$

Ограничимся здесь и далее достаточно общим случаем возможности выбора отображения $\Phi(\bar{u}^{(k)})$, обеспечивающего представление операторов L, L_0, L_1, L_{10} с требуемой точностью в классе непрерывных функций переменных x и t с использованием применительно к нелинейным уравнениям (1)–(3) известных методов численного интегрирования, разностной аппроксимации пространственных производных $\partial Q^{(k)}/\partial x$, $\partial^2 Q^{(k)}/\partial x^2$ и интерполяции сеточных функций на пространственно-временной плоскости при вычислении L и L_1.

Рассмотрим далее типичную и наиболее характерную для приложений ситуацию, когда на компактном множестве переменных ($x \in [x_0, x_1]$; $t \in [0, t_1]$) в двумерном евклидовом пространстве E^2 операторы Λ и Φ в (42), (45) вместе с L, L_1, L_0, L_{10} являются ограниченными [1]. Ограниченные на этом основании последовательности $\{F^{(k)}(x,t)\}$, $\{F_1^{(k)}(t)\}$, $\{\bar{u}^{(k)}(t)\}$, $\{Q^{(k)}(x,t)\}$, $k = 1, 2, \ldots$, содержат в силу теоремы Больцано—Вейерштрасса [1, 26] подпоследовательности, сходящиеся к некоторым пределам, соответственно $\tilde{F}(x,t)$, $\tilde{F}_1(t)$, $\tilde{\bar{u}}(t)$, $\tilde{Q}(x,t)$, единственность которых устанавливается по указанной в [1] схеме.

Тогда

$$\tilde{\bar{u}}(t) = \Lambda\big(\tilde{F}(x,t), \tilde{F}_1(t)\big); \quad \tilde{Q}(x,t) = \Phi\big(\tilde{\bar{u}}(t)\big);$$

и для сходящихся последовательностей $\{F^{(k)}(x,t)\}$, $\{F_1^{(k)}(t)\}$ на основании (43), (44) будем иметь, что

$$\begin{aligned} &\lim_{k\to\infty}\big(F^{(k+1)}(x,t) - F^{(k)}(x,t)\big) = \lim_{k\to\infty}\big(\delta F^{(k)}(x,t)\big) = \\ &\qquad = \lim_{k\to\infty}\big(L(Q^{(k)}(x,t)) - L_0(Q^{(k)}(x,t))\big) = L\big(\tilde{Q}(x,t)\big) - L_0\big(\tilde{Q}(x,t)\big) = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\lim_{k\to\infty}\big(F_1^{(k+1)}(t) - F_1^{(k)}(t)\big) = \lim_{k\to\infty}\big(\delta F_1^{(k)}(t)\big) = \\ &\qquad = \lim_{k\to\infty}\big(L_{10}(Q^{(k)}(x_1,t)) - L_1(Q^{(k)}(x_1,t))\big) = \\ &\qquad\qquad = L_{10}\big(\tilde{Q}(x_1,t)\big) - L_1\big(\tilde{Q}(x_1,t)\big) = 0, \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$L\big(\tilde{Q}(x,t)\big) = L_0\big(\tilde{Q}(x,t)\big), \quad L_1\big(\tilde{Q}(x_1,t)\big) = L_{10}\big(\tilde{Q}(x_1,t)\big). \tag{46}$$

Полученные соотношения (46) с учетом (43), (44) означают, что нелинейные уравнения (1)–(3) объекта управления сводятся к линейной модели (6) в линейно-квадратичной задаче оптимизации (11)–(14), (19), (20) при зависимостях $F(x,t) = \tilde{F}(x,t)$, $F_1(t) = \tilde{F}_1(t)$, получаемых вместе с оптимальным программным управлением $\bar{u}^*(t) = \tilde{\bar{u}}(t)$ в сходящемся к $F(x,t)$, $F_1(t)$, $\bar{u}^*(t)$ итерационном процессе вычисления $F^{(k)}$, $F_1^{(k)}$ и $\bar{u}^{(k)}$.

В итоге предлагаемый итерационный алгоритм решения задачи оптимального управления нелинейной моделью ОРП реализуется путем выполнения следующей последовательности вычислительных операций.

1. На первом шаге при начальном приближении $F^{(1)}(x,t)$, $F_1^{(1)}(t)$, выбираемом согласно (41) (или каким-либо другим способом при наличии дополнительной информации), определяется решение $\bar{u}^{(1)}(t)$ линейно-квадратичной задачи (11)–(14), (19), (20) по алгоритму, описанному в разд. 3.
2. При найденном управлении $\bar{u}^{(1)}$ находятся аналитическое (в форме (11)) и численное решение соответственно линейной и нелинейной начально-краевых задач (1)–(3) и (6) по алгоритму (45) для $k = 1$ с последующим вычислением операторов $L\big(Q^{(1)}(x,t)\big)$, $L_0\big(Q^{(1)}(x,t)\big)$, $L_1\big(Q^{(1)}(x_1,t)\big)$, $L_{10}\big(Q^{(1)}(x_1,t)\big)$.
3. На втором и последующих шагах при $k = 2, 3, \ldots$ вычисляются по правилам (43), (44) следующие приближения $F^{(k)}(x,t)$, $F_1^{(k)}(t)$; находятся $\bar{u}^{(k)}(t)$ согласно (42); определяются $Q^{(k)}(x,t)$ по алгоритму (45) и на этом приближении фиксируются значения операторов L, L_0, L_1, L_{10}.
4. Описанная процедура продолжается с возрастанием k до некоторого значения k^*, при котором с требуемой точностью соблюдается приближенное равенство

$$F^{(k^*+1)}(x,t) \approx F^{(k^*)}(x,t), \quad F_1^{(k^*+1)}(t) \approx F_1^{(k^*)}(t),$$

выполнение которого гарантируется в силу сходимости рассматриваемого итерационного процесса.

Таким образом, известная технология численного решения задачи оптимизации нелинейной СРП заменяется более простой итерационной процедурой аналитического решения ряда линейно-квадратичных задач оптимального управления с внешними возмущениями, предварительно опознаваемыми на каждом шаге итерационного процесса, и промежуточными вычислениями управляемой функции состояния нелинейного объекта на его цифровой модели при известных управляющих воздействиях.

Преимуществом подобного подхода является возможность получения алгоритмов оптимального программного управления нелинейной СРП в аналитической форме решения линейно-квадратичной задачи оптимизации.

5. Аналитическое конструирование оптимального регулятора

Перенос граничных условий при $t = t_1$ в произвольный момент времени $t \in (0, t_1)$ определяет в краевой задаче (25) по описанной в [15] схеме следующие зависимости конечных величин $\psi^*(t_1)$, $\bar{Q}^*(t_1)$ векторов сопряженных

и управляемых переменных от их текущих значений $\psi^*(t)$, $\bar{Q}^*(t)$ в оптимальном процессе управления:

$$\psi^*(t_1) = A_{11}(t_1 - t)\psi^*(t) + A_{12}(t_1 - t)\bar{Q}^*(t) + D_{\omega 2}(t, t_1), \tag{47}$$
$$\bar{Q}^*(t_1) = A_{21}(t_1 - t)\psi^*(t) + A_{22}(t_1 - t)\bar{Q}^*(t) + D_{\omega 3}(t, t_1). \tag{48}$$

Здесь

$$\begin{aligned} D_{\omega 2}(t, t_1) &= \int_t^{t_1} A_{12}(t_1 - \tau)\big(\bar{F}(\tau) + gF_1(\tau)\big)d\tau, \\ D_{\omega 3}(t, t_1) &= \int_t^{t_1} A_{22}(t_1 - \tau)\big(\bar{F}(\tau) + gF_1(\tau)\big)d\tau; \end{aligned} \tag{49}$$

$A_{ij}(t_1 - \tau)$ — блоки матричной экспоненты $e^{A(t_1-\tau)}$ в (28); функции $F(x, t)$, $F_1(t)$ в (6) и вместе с ними $\omega(\tau)$ в (27) считаются уже найденными при предварительном решении задачи программного управления описанным в разд. 4 численным методом.

После умножения слева векторных равенств (47) и (48) соответственно на известные по результатам решения задачи программного управления $(N_1 \times N_1)$-матрицы $\operatorname{diag}\big[\bar{Q}_j^*(t_1)\big]$, $\bar{Q}^*(t_1) = \big(\bar{Q}_j^*(t_1)\big)$, и $\operatorname{diag}\big[\psi_j^*(t_1)\big]$, $\psi^*(t_1) = \big(\psi_j^*(t_1)\big)$, $j = \overline{1, N_1}$ (левые части соотношений (47) и (48)) становятся одинаковыми. Последующее вычитание этих уравнений приводит к следующему результату:

$$\begin{aligned} &\psi^*\big(t, \psi^*(t_1), \bar{Q}(0), \bar{Q}(t)\big) = \\ &\quad = T_1\big(t, t_1, \psi^*(t_1), \bar{Q}^*(t_1), \bar{Q}(0)\big)T_2\big(t, t_1, \psi^*(t_1), \bar{Q}^*(t_1), \bar{Q}(0)\big)\bar{Q}(t) + \\ &\quad + T_1\big(t, t_1, \psi^*(t_1), \bar{Q}^*(t_1), \bar{Q}(0)\big)D_\Sigma\big(t, t_1, \psi^*(t_1), \bar{Q}^*(t_1), \bar{Q}(0), \omega(t)\big). \end{aligned} \tag{50}$$

Здесь

$$\begin{aligned} T_1 &= \big[W_1 A_{11}(t_1 - t) - W_2 A_{21}(t_1 - t)\big]^{-1}, \\ T_2 &= \big[W_2 A_{22}(t_1 - t) - W_1 A_{12}(t_1 - t)\big]; \\ W_1 &= \operatorname{diag}\big[\bar{Q}_j^*(t_1)\big], \quad W_2 = \operatorname{diag}\big[\psi_j^*(t_1)\big]; \\ D_\Sigma &= W_2 D_{\omega 3} - W_1 D_{\omega 2} \end{aligned} \tag{51}$$

и конечное состояние объекта $\bar{Q}^*(t_1) = \bar{Q}^*(\psi_*^{(M)})$ находится в форме (40).

Подстановка (50) в выражения (24) для программного управления приводит к линейным алгоритмам синтеза оптимального регулятора с нестационарными коэффициентами обратных связей в системе управления с полным измерением состояния $\bar{Q}(t)$:

$$\bar{u}_{Vn}^*(\bar{Q}, t) = \frac{1}{2}\big(T_1 T_2 \bar{Q}(t) + T_1 D_\Sigma\big)_n, \quad n = \overline{1, N_1}; \tag{52}$$

$$\begin{aligned} \bar{u}_V^*(\bar{Q}, t, x) &= \sum_{n=1}^{N_1} \bar{u}_{Vn}^*(\bar{Q}, t)\varphi_n(\mu_n, x), \\ u_S^*(\bar{Q}, t) &= \frac{1}{2\rho_S} g\big(T_1 T_2 \bar{Q}(t) + T_1 D_\Sigma\big). \end{aligned} \tag{53}$$

Матрицы T_1 и T_2 вместе с D_Σ представляются в (52), (53) известными функциями времени (49), (51) с фиксируемыми на протяжении процесса управления значениями $\bar{Q}(0)$, которые находятся по результатам наблюдения $\bar{Q}(t)$ в начальный момент $t = 0$.

Переход в (52), (53) от $\bar{Q}(t)$ к измеряемому выходу объекта $Q_u(x_u, t) = \big(Q(x_{uj}, t)\big)$ в h точках $x_{uj} \in [x_0, x_1]$, $j = \overline{1, h}$, определяется, согласно (11), векторно-матричным уравнением неполного наблюдения состояния объекта

$$Q(x_u, t) = S_u \bar{Q}(t), \quad S_u = \big[\varphi_n(\mu_n, x_{uj})\big], \quad n = \overline{1, N_1},\ j = \overline{1, h}, \tag{54}$$

требующим построения наблюдателя полного или пониженного порядка [25]. Если по условиям необходимой точности моделирования объекта (11), (12) можно ограничиться учетом только M первых составляющих $\bar{Q}(t)$ с минимальным их числом, необходимым для решения системы уравнений (39) относительно представляемого в форме (29) вектора $\psi^*(t_1)$, то $\bar{Q}(t)$ непосредственно определяется решением системы уравнений (54) при $h = M$, $N_1 = N = M$:

$$\bar{Q}(t) = S_u^{-1} Q_u(x_u, t). \tag{55}$$

Подстановка (55) в (52), (53) приводит к линейному алгоритму синтеза оптимального регулятора с обратными связями по измеряемому выходу объекта:

$$\bar{u}^*_{Vn}(Q_u, t) = \frac{1}{2}\big(T_1 T_2 S_u^{-1} Q_u(x_u, t) + T_1 D_\Sigma\big)_n, \quad n = \overline{1, N_1};$$

$$\bar{u}^*_V(Q_u, t, x) = \sum_{n=1}^{N_1} \bar{u}^*_{Vn}(Q_u, t)\varphi_n(\mu_n, x),$$

$$u^*_S(Q_u, t) = \frac{1}{2\rho_S} g\big(T_1 T_2 S_u^{-1} Q_u(x_u, t) + T_1 D_\Sigma\big).$$

Заключение

Предложен численный алгоритм решения задачи оптимального программного управления нелинейной системой с распределенными параметрами параболического типа в условиях равномерной оценки целевых множеств, сводимый к специальной итерационной процедуре решения на каждом ее шаге альтернансным методом линейно-квадратичной задачи оптимизации с определенным на предыдущей итерации внешним детерминированным пространственно-временным возмущением, компенсирующим влияние невязки между дифференциальными операторами уравнений линейной и нелинейной моделей объекта. На базе полученных результатов определены уравнения оптимальных регуляторов в форме линейных алгоритмов обратной связи по измеряемому состоянию системы с фиксируемыми предварительным расчетом нестационарными коэффициентами передачи.

В отличие от известных численных методов вариаций в пространстве управляющих воздействий предлагаемый подход характеризуется аналитической формой представления искомых алгоритмов программного и позиционного управления.

Конкурирующие интересы. Конкурирующих интересов не имею.

Авторский вклад и ответственность. Я несу полную ответственность за предоставление окончательной версии рукописи в печать. Окончательная версия рукописи мною одобрена.

Финансирование. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22–29–00180, https://rscf.ru/project/22-29-00180/, Самарский государственный технический университет.

Благодарность. Автор благодарен рецензенту за тщательное прочтение статьи и ценные предложения и комментарии.

Библиографический список

1. Васильев Ф. П. *Методы оптимизации.* М.: Факториал Пресс, 2002. 824 с.
2. Моисеев Н. Н. *Элементы теории оптимальных систем.* М.: Наука, 1975. 526 с.
3. Афанасьев В. Н., Колмановский В. Б., Носов В. Р. *Математическая теория конструирования систем управления.* М.: Высш. шк., 1998. 574 с.
4. Тятюшкин А. Н. *Многометодная технология оптимизации управляемых систем.* Новосибирск: Наука, 2006. 343 с. EDN: QJQNJV.
5. Бутковский А. Г. *Методы управления системами с распределенными параметрами.* М.: Наука, 1975. 564 с.
6. Федоренко Р. П. *Приближенное решение задач оптимального управления.* М.: Наука, 1978. 488 с.
7. Рапопорт Э. Я. *Оптимальное управление системами с распределенными параметрами.* М.: Высш. шк., 2009. 677 с. EDN: QMTFRZ.
8. Рапопорт Э. Я. *Альтернансный метод в прикладных задачах оптимизации.* М.: Наука, 2000. 336 с. EDN: TTRVMB.
9. Рапопорт Э. Я., Плешивцева Ю. Э. *Методы полубесконечной оптимизации в прикладных задачах управления системами с распределенными параметрами.* М.: Наука, 2021. 286 с. EDN: QADDYA.
10. Рапопорт Э. Я. Аналитическое конструирование агрегированных регуляторов в системах с распределенными параметрами // *Изв. РАН. Теор. сист. управл.*, 2012. № 3. С. 38–54. EDN: OXXFNV.
11. Ладыженская О. А. *Краевые задачи математической физики.* М.: Наука, 1973. 407 с.
12. Владимиров В. С. *Уравнения математической физики.* М.: Наука, 1981. 512 с.
13. Егоров А. И., Знаменская Л. Н. *Введение в теорию управления системами с распределенными параметрами.* СПб.: Лань, 2017. 292 с. EDN: ZBUMBZ.
14. Полянин А. Д. *Справочник по линейным уравнениям математической физики.* М.: Физматлит, 2001. 576 с. EDN: MVANPN.
15. Рапопорт Э. Я. Аналитическое конструирование оптимальных регуляторов в линейно-квадратичных задачах управления системами с распределенными параметрами при равномерных оценках целевых множеств // *Изв. РАН. Теор. сист. управл.*, 2021. № 3. С. 23–38. EDN: NXVBOH. DOI: https://doi.org/10.31857/S0002338821030148.
16. Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М. *Уравнения в частных производных математической физики.* М.: Высш. шк., 1970. 712 с.
17. Рапопорт Э. Я. *Структурное моделирование объектов и систем управления с распределенными параметрами.* М.: Высш. шк., 2003. 302 с. EDN: QMMNDD.
18. Валеев Г. К., Жаутыков О. А. *Бесконечные системы дифференциальных уравнений.* Алма-Ата: Наука, 1974. 415 с.
19. Персидский К. П. Об устойчивости решений счетной системы дифференциальных уравнений // *Изв. АН КазССР. Сер. мат. мех.*, 1948. № 2. С. 2–35.
20. Коваль В. А. *Спектральный метод анализа и синтеза распределенных управляемых систем.* Саратов: Саратов. гос. техн. ун-т, 1997. 192 с.

21. Егоров Ю. В. Необходимые условия оптимальности управления в банаховых пространствах // *Матем. сб.*, 1964. Т. 64(106), № 1. С. 79–101.
22. Рапопорт Э. Я. Равномерная оптимизация управляемых систем с распределенными параметрами // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2022. Т. 26, № 3. С. 419–445. EDN: WJCOQD. DOI: https://doi.org/10.14498/vsgtu1943.
23. Плешивцева Ю. Э., Рапопорт Э. Я. Пространственно-временное управление системами с распределенными параметрами в линейно-квадратичных задачах оптимизации с равномерными оценками целевых множеств // *Изв. РАН. Теор. сист. управл.*, 2022. № 4. С. 49–65. EDN: ENOBZI. DOI: https://doi.org/10.31857/S0002338822030118.
24. Плешивцева Ю. Э., Рапопорт Э. Я. Метод последовательной параметризации управляющих воздействий в краевых задачах оптимального управления системами с распределенными параметрами // *Изв. РАН. Теор. сист. управл.*, 2009. № 3. С. 22–33. EDN: KFPCXJ.
25. Рапопорт Э. Я. *Анализ и синтез систем автоматического управления с распределенными параметрами.* М.: Высш. шк., 2005. 292 с. EDN: QMOYRB.
26. Кудрявцев Л. Д. *Курс математического анализа.* Т. 1. М.: Высш. шк., 1988. 712 с.

Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2023, vol. 27, no. 2, pp. 270–291
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu2006

MSC: 90C47, 65K10

Uniform optimization method for nonlinear control systems with distributed parameters

E. Ya. Rapoport

Samara State Technical University,
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russian Federation.

Abstract

The problem of optimization of a nonlinear controlled system with distributed parameters, and uniformly estimated target sets is reduced to controlling a linear model of the object. This linear model incorporates an additional, a priori unknown spatiotemporal disturbance that compensates for the influence of discrepancies between the linear and nonlinear differential operators in the corresponding initial-boundary value problems. Partial differential equations of the parabolic type describe these problems. The specific form of the disturbance's dependence on its arguments is identified based on the initial approximation at each step of the proposed convergent iterative procedure. This procedure is based on the results obtained in the previous step from solving the linear-quadratic programming optimal control problem using the developed alternance method. This problem includes a deterministic external input and requires the intermediate computation of the controlled state function of the nonlinear object using a digital model.

It has been shown that the desired equations for the optimal regulators can be obtained from the known results of the iterative process used to find the program control. The control is represented as linear feedback algorithms based on the measured state of the object, which uses nonstationary transfer coefficients.

Keywords: nonlinear system with distributed parameters, linear-quadratic optimization problem, iterative procedure, alternance method, parameterization of control actions, software optimal control, optimal control synthesis.

Received: 10th March, 2023 / Revised: 17th May, 2023 /
Accepted: 25th May, 2023 / First online: 20th June, 2023

Differential Equations and Mathematical Physics
Research Article

© Authors, 2023
© Samara State Technical University, 2023 (Compilation, Design, and Layout)
The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License (http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)

Please cite this article in press as:
Rapoport E. Ya. Uniform optimization method for nonlinear control systems with distributed parameters, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2023, vol. 27, no. 2, pp. 270–291. EDN: LHFXZB. DOI: 10.14498/vsgtu2006 (In Russian).

Author's Details:
Edgar Ya. Rapoport https://orcid.org/0000-0002-0604-8801
Dr. Techn. Sci., Professor; Dept. of Automation and Control in Technical Systems;
e-mail: edgar.rapoport@mail.ru

Competing interests. I have no conflicting interests.

Authorship contribution and responsibility.. I take full responsibility for submitting the final version of the manuscript for publication. The final version of the manuscript has been approved by me.

Funding. The research was funded by the Russian Science Foundation grant no. 22–29–00180, https://rscf.ru/project/22-29-00180/, Samara State Technical University.

Acknowledgments. The author is grateful to the reviewer for the thorough reading of the article and valuable suggestions and comments.

References

1. Vasilev F. P. *Metody optimizatsii* [Optimization Methods]. Moscow, Faktorial Press, 2002, 824 pp. (In Russian)
2. Moiseev N. N. *Elementy teorii optimal'nykh sistem* [Elements of the Theory of Optimal Systems]. Moscow, Nauka, 1975, 526 pp. (In Russian)
3. Afanas'ev V. N., Kolmanovsky V. B., Nosov V. R. *Matematicheskaia teoriia konstruirovaniia sistem upravleniia* [Mathematical Theory of Control Systems Design]. Moscow, Vyssh. shk., 1998, 574 c. (In Russian)
4. Tyatyushkin A. N. *Mnogometodnaia tekhnologiia optimizatsii upravliaemykh sistem* [Multimethod Technology for Optimization of Control Systems]. Novosibirsk, Nauka, 2006, 343 pp. (In Russian). EDN: QJQNJV
5. Butkovsky A. G. *Metody upravleniia sistemami s raspredelennymi parametrami* [Methods of Control by Systems with Distributed Parameters]. Moscow, Nauka, 1975, 564 pp. (In Russian)
6. Fedorenko R. P. *Priblizhennoe reshenie zadach optimal'nogo upravleniia* [Approximate Solution of Optimal Control Problems]. Moscow, Nauka, 1978, 488 pp. (In Russian)
7. Rapoport E. Ya. *Optimal'noe upravlenie sistemami s raspredelennymi parametrami* [Optimal Control of Systems with Distributed Parameters]. Moscow, Vyssh. shk., 2009, 677 pp. (In Russian). EDN: QMTFRZ
8. Rapoport E. Ya. *Al'ternansnyi metod v prikladnykh zadachakh optimizatsii* [Alternance Method in Applied Optimization Problems]. Moscow, Nauka, 2000, 336 pp. (In Russian). EDN: TTRVMB
9. Rapoport E. Ya., Pleshivceva Yu. E. *Metody polubeskonechnoi optimizatsii v prikladnykh zadachakh upravleniia sistemami s raspredelennymi parametrami* [Methods of Semi-Infinite Optimization in Applied Problems of Control of Systems with Distributed Parameters]. Moscow, Nauka, 2021, 286 pp. (In Russian). EDN: QADDYA
10. Rapoport E. Ya. Analytical construction of aggregated controllers in systems with distributed parameters, *J. Comput. Syst. Sci. Int.*, 2012, vol. 51, no. 3, pp. 375–390. EDN: RGNSPF. DOI: https://doi.org/10.1134/S1064230712020104.
11. Ladyzhenskaya O. A. *Kraevye zadachi matematicheskoi fiziki* [Boundary Value Problems of Mathematical Physics]. Moscow, Nauka, 1973, 407 pp. (In Russian)
12. Vladimirov V. S. *Uravneniia matematicheskoi fiziki* [Equations of Mathematical Physics]. Moscow, Nauka, 1981, 512 pp. (In Russian)
13. Egorov A. I., Znamenskaya L. N. *Vvedenie v teoriiu upravleniia sistemami s raspredelennymi parametrami* [Introduction to the Theory of Control Systems with Distributed Parameters]. St. Petersburg, Lan', 2017, 292 pp. (In Russian). EDN: ZBUMBZ
14. Polyanin A. D. *Spravochnik po lineinym uravneniiam matematicheskoi fiziki* [Handbook of Linear Equations of Mathematical Physics]. Moscow, Fizmatlit, 2001, 576 pp. (In Russian). EDN: MVANPN
15. Rapoport E. Ya. Analytical design of the optimal controllers in linear-quadratic problems of controlling systems with distributed parameters under uniform estimates of target sets, *J. Comput. Syst. Sci. Int.*, 2021, vol. 60, no. 3, pp. 364–378. EDN: BBXAQM. DOI: https://doi.org/10.1134/S1064230721030138.

16. Koshliakov N. S., Gliner E. B., Smirnov M. M. *Uravneniia v chastnykh proizvodnykh matematicheskoi fiziki* [Partial Differential Equations of Mathematical Physics]. Moscow, Vyssh. shk., 1970, 712 pp. (In Russian)
17. Rapoport E. Ya. *Strukturnoe modelirovanie ob"ektov i sistem upravleniia s raspredelennymi parametrami* [Structural Modeling of Objects and Control Systems with Distributed Parameters]. Moscow, Vyssh. shk., 2003, 302 pp. (In Russian). EDN: QMMNDD
18. Valeev G. K., Zhautykov O. A. *Beskonechnye sistemy differentsial'nykh uravnenii* [Infinite Systems of Differential Equations]. Alma-Ata, Nauka, 1974, 415 pp. (In Russian)
19. Persidsky K. P. On the stability of solutions of a countable system of differential equations, *Izv. AN KazSSR. Ser. Mat. Mekh.*, 1948, no. 2, pp. 2–35 (In Russian).
20. Koval' V. A. *Spektral'nyi metod analiza i sinteza raspredelennykh upravliaemykh sistem* [Spectral Method of Analysis and Synthesis of Distributed Control Systems]. Saratov, Saratov State Techn. Univ., 1997, 192 pp. (In Russian)
21. Egorov Yu. V. Necessary conditions for optimal control in Banach spaces, *Mat. Sb. (N.S.)*, 1964, vol. 64(106), no. 1, pp. 79–101 (In Russian).
22. Rapoport E. Ya. Uniform optimization of controlled systems with distributed parameters, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2022, vol. 26, no. 3, pp. 419–445 (In Russian). EDN: WJCOQD. DOI: https://doi.org/10.14498/vsgtu1943.
23. Pleshivtseva Yu. E., Rapoport E. Yu. Spatiotemporal control of systems with distributed parameters in linear-quadratic optimization problems with uniform estimates of target sets, *J. Comput. Syst. Sci. Int.*, 2022, vol. 61, no. 4, pp. 523–538. DOI: https://doi.org/10.1134/S106423072203011X.
24. Pleshivtseva Yu. E., Rapoport E. Ya. The successive parameterization method of control actions in boundary value optimal control problems for distributed parameter systems, *J. Comput. Syst. Sci. Int.*, 2009, vol. 48, no. 3, pp. 351–362. EDN: LLQZJH. DOI: https://doi.org/10.1134/S1064230709030034.
25. Rapoport E. Ya. *Analiz i sintez sistem avtomaticheskogo upravleniia s raspredelennymi parametrami* [Analysis and Synthesis of Automatic Control Systems with Distributed Parameters]. Moscow, Vyssh. shk., 2005, 292 pp. (In Russian). EDN: QMOYRB
26. Kudryavtsev L. D. *Kurs matematicheskogo analiza* [Course of Mathematical Analysis], vol. 1. Moscow, Vyssh. shk., 1988, 712 pp. (In Russian)

Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2023. Т. 27, № 2. С. 292–308
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu2001
EDN: EPOTNP

УДК 519.248:531

Прогнозирование высокотемпературной реологической деформации и длительной прочности вязкопластического материала по образцу-лидеру

В. П. Радченко, Е. А. Афанасьева, М. Н. Саушкин

Самарский государственный технический университет,
Россия, 443100, Самара, ул. Молодогвардейская, 244.

Аннотация

Предложен и реализован метод прогнозирования ползучести и длительной прочности в условиях вязкого механизма разрушения. Вводится предположение, что у материала при нагружении отсутствуют мгновенно-пластическая деформация и первая стадия ползучести, выполняется гипотеза несжимаемости. В разработанном методе показано, что если для заранее испытанного образца (образец-лидер) известны кривая ползучести при постоянном напряжении и время до ее разрушения, то для получения диаграммы реологического деформирования и длительной прочности материала при других уровнях напряжений достаточно знать лишь начальную минимальную скорость деформации ползучести (в начальный момент времени) образцов для этих уровней напряжений.

Выполнена проверка адекватности разработанного метода экспериментальным данным для ряда сплавов в условиях растяжения и кручения образцов. Показано, что результаты прогнозирования не зависят от выбора образца-лидера из ряда образцов, испытанных при различных напряжениях.

Результаты исследования показывают, что с помощью разработанного метода возможно не только прогнозирование кривых ползучести и длительной прочности (в асимптотической постановке), но и оптимальное планирование экспериментальных исследований для получения серии стационарных кривых ползучести при постоянных напряжениях.

Механика деформируемого твердого тела
Научная статья

© Коллектив авторов, 2023
© СамГТУ, 2023 (составление, дизайн, макет)
Контент публикуется на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru)

Образец для цитирования
Радченко В. П., Афанасьева Е. А., Саушкин М. Н. Прогнозирование высокотемпературной реологической деформации и длительной прочности вязкопластического материала по образцу-лидеру // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2023. Т. 27, № 2. С. 292–308. EDN: EPOTNP. DOI: 10.14498/vsgtu2001.

Сведения об авторах

Владимир Павлович Радченко https://orcid.org/0000-0003-4168-9660
доктор физико-математических наук, профессор; заведующий кафедрой; каф. прикладной математики и информатики; e-mail: radchenko.vp@samgtu.ru

Елена Андреевна Афанасьева https://orcid.org/0000-0001-7815-2723
аспирант; каф. прикладной математики и информатики; e-mail: afanasieva.ea@samgtu.ru

Михаил Николаевич Саушкин https://orcid.org/0000-0002-8260-2069
кандидат физико-математических наук, доцент; доцент; каф. прикладной математики и информатики; e-mail: saushkin.mn@samgtu.ru

Ключевые слова: прогнозирование, ползучесть, длительная прочность, вязкое разрушение, образец-лидер.

Получение: 1 марта 2023 г. / Исправление: 18 мая 2023 г. / Принятие: 25 мая 2023 г. / Публикация онлайн: 28 июня 2023 г.

Введение. Проблема прогнозирования неупругой деформации и длительной прочности материалов в условиях ползучести является одной из актуальных задач современного машиностроения при проектировании элементов конструкций, эксплуатируемых в условиях высоких температур, что отмечается в необозримом количестве монографий и публикаций, в частности в [1–13]. Одной из основных задач в области реологического деформирования является разработка феноменологических моделей поведения материалов — уравнений состояния ползучести и длительной прочности. Современное состояние данного научного направления изложено в монографии А. М. Локощенко [7] и его обзоре с соавторами [14]. Феноменологические уравнения состояния реологического деформирования являются основой для решения соответствующих краевых задач, однако построение этих моделей является сложным и трудоемким процессом из-за реализации технически сложного эксперимента при высоких температурах и длительности испытаний. Поэтому на первый план выходит оптимизация экспериментальных исследований для получения кривых стационарной ползучести при постоянных напряжениях, являющихся основой для серии построенных реологических моделей материала.

Разнообразие свойств реологической деформации и характеристик длительной прочности (наличие трех стадий ползучести или их комбинаций меньшей размерности, обратимая деформация при полной разгрузке, существенный разброс деформации ползучести, различные механизмы деформирования и разрушения материала в зависимости от диапазонов изменения температуры и напряжений и другие эффекты) не позволяют построить универсальные теории ползучести и длительной прочности для всех возможных значений температур и напряжений. Более-менее достоверные результаты дают реологические модели, построенные в рамках одного механизма разрушения (вязкого, хрупкого или смешанного) с соответствующими ограничениями на диапазон изменения параметров температурно-силового нагружения.

В настоящей работе рассматривается построение модели ползучести и длительной прочности частного вида в рамках принятия гипотезы вязкого механизма разрушения, которая позволяет получить не только кривую ползучести, но и время до разрушения образцов при различных постоянных напряжениях по экспериментально известной информации о диаграмме деформирования некоторого одиночного образца-лидера (прототипа). Предполагается, что в рамках принятой гипотезы отсутствует упрочнение материала (на кривой деформирования при постоянном напряжении не наблюдается первая стадия ползучести).

1. Метод прогнозирования ползучести и длительной прочности по образцу-лидеру. Метод базируется на возможности по установленным параметрам длительной прочности определять параметры установившейся

ползучести (и наоборот) на основе феноменологической зависимости

$$(\dot{p}_{\min})^k t^* = a, \tag{1}$$

где $\dot{p}_{\min}$ — скорость установившейся ползучести, t^* — время до разрушения, k и a — параметры материала (в частном случае $k = 1$).

Соотношение (1) получено на основе обработки экспериментальных данных для различных материалов [17–20]. Однако оно может быть получено и теоретически из схемы вязкого разрушения. Для этого случая вводятся следующие гипотезы:

– разрушение образца происходит при большом удлинении и сопровождается появлением шейки;
– у материала отсутствует первая стадия ползучести;
– в момент нагружения пренебрегаем мгновенно-упругой и пластической деформацией;
– деформация ползучести по длине образца является однородной вплоть до образования шейки;
– выполняется гипотеза несжимаемости материала.

Исходя из этих гипотез в [2] получена связь между номинальным $\sigma_0 = Q/F_0$ и истинным $\sigma = Q/F$ напряжениями вида

$$\sigma(t) = \sigma_0 \exp[p(t)],$$

где F и F_0 — текущая и первоначальная площади поперечного сечения цилиндрического образца, $Q = \mathrm{const}$ — приложенная к образцу нагрузка, $p = p(t)$ — деформация ползучести. Исходя из степенной зависимости для скорости деформации ползучести

$$\dot{p} = a\sigma^n,$$

a и n — постоянные величины, в [2] получены следующие зависимости:

$$\frac{\sigma(t)}{\sigma_0} = (1 - ant\sigma_0^n)^{-1/n}, \quad p(t) = -\frac{1}{n}\ln|1 - ant\sigma_0^n|. \tag{2}$$

Из (2) следует, что зависимость $p = p(t)$ имеет вертикальную асимптоту. На заключительной стадии деформирования в некоторой точке кривой ползучести при $\sigma_0 = \mathrm{const}$ образуется шейка, и время разрушения $t = t^*$ можно определить, полагая $\sigma(t^*) = \infty$, а значит, и $p(t^*) = \infty$. Тогда из (2) имеем

$$t^*(\sigma_0) = \frac{1}{an\sigma_0^n}. \tag{3}$$

Учитывая, что $a\sigma_0^n$ — значение мгновенной (и минимальной) скорости установившейся ползучести в начальный момент времени ($t = 0$), т.е. $a\sigma_0^n = \dot{p}_0(\sigma_0) = \dot{p}_{\min}$, из (3) находим зависимость

$$\dot{p}_{\min} t^* = n^{-1},$$

которая является частным случаем (1) при $k = 1$. Из (3) следует, что при $\sigma_0 = \mathrm{const}$ эта зависимость описывает диаграмму длительной прочности.

Зависимости (2) и (3) получены в предположении реализации схемы вязкого разрушения в «чистом» виде. В этом случае увеличение истинного напряжения связано лишь с геометрическим уменьшением площади поперечного сечения образца в соответствии с гипотезой несжимаемости материала. Однако при вязком механизме разрушения наблюдается внутризеренное накопление повреждений, которое приводит к дополнительному снижению эффективной площади поперечного сечения, воспринимающего нагрузку. В связи с этим Г. Ф. Лепиным [6] для учета поврежденности была предложена экспериментально обоснованная связь истинного σ и номинального σ_0 напряжений в виде

$$\sigma = \sigma_0 \exp(sp), \tag{4}$$

где $s \geqslant 1$ — феноменологический параметр, значение которого для некоторых материалов может достигать величины нескольких десятков. Из (3) с учетом (4) получаем зависимости

$$p(t) = -\frac{1}{sn} \ln(1 - anst\sigma_0^n), \tag{5}$$

$$t^*(\sigma_0) = \frac{1}{ans\sigma_0^n}, \tag{6}$$

которые в дальнейшем будем использовать для теоретического обоснования разработанного метода прогнозирования по изделию-лидеру.

Предположим, что экспериментально получена кривая деформирования материала вплоть до момента разрушения для образца-лидера при номинальном напряжении σ_0. Перепишем (6) в виде

$$t^*(\sigma_0) = \frac{1}{ns\dot{p}_0(\sigma_0)}, \tag{7}$$

где $\dot{p}_0(\sigma_0) = a\sigma_0^n$ — начальная минимальная скорость установившейся ползучести для образца-лидера. Пусть теперь испытывается исследуемый образец при номинальном напряжении σ_1 и зафиксирована его начальная скорость $\dot{p}_0(\sigma_1) = a\sigma_1^n$. Тогда, записывая для этого образца соотношение аналогично (7), для времени разрушения $t_1(\sigma_1)$ получаем

$$t_1(\sigma_1) = t^*(\sigma_0)\frac{\dot{p}_0(\sigma_0)}{\dot{p}_0(\sigma_1)}. \tag{8}$$

Таким образом, если известны начальная скорость ползучести $\dot{p}_0(\sigma_0)$ образца-лидера и время его разрушения, а также начальная скорость исследуемого образца при напряжении σ_1 любой реализации $\dot{p}_0(\sigma_1)$, то время разрушения исследуемого образца можно получить на основании (8).

Покажем, что можно прогнозировать и кривую деформации исследуемого образца при любом напряжении по известной кривой ползучести образца-лидера. Для этого в соотношении (5) необходимо найти зависимость времени от деформации и напряжения:

$$t(p, \sigma_0) = \frac{1 - e^{-nsp}}{ans\sigma_0^n} = \frac{1 - e^{-nsp}}{ns\dot{p}_0(\sigma_0)}. \tag{9}$$

Аналогичная зависимость для номинального напряжения σ_1 исследуемого образца имеет вид

$$t(p, \sigma_1) = \frac{1 - e^{-nsp}}{ns\dot{p}_0(\sigma_1)}. \tag{10}$$

Тогда из (9) и (10) для времени достижения обеими реализациями при напряжениях σ_0 (для образца-лидера) и σ_1 (для исследуемого образца) одного и того же значения деформации ползучести p получаем

$$t(p, \sigma_1) = t(p, \sigma_0)\frac{\dot{p}_0(\sigma_0)}{\dot{p}_0(\sigma_1)}. \tag{11}$$

Таким образом, из (11) следует, что кривая ползучести исследуемого образца при номинальном напряжении σ_1 может быть получена с помощью преобразования подобия из кривой ползучести образца-лидера при номинальном напряжении σ_0 с коэффициентом подобия, равным отношению начальных скоростей деформации образца-лидера и исследуемого образца $\dot{p}_0(\sigma_0)/\dot{p}_0(\sigma_1)$.

2. Проверка адекватности моделей прогнозирования ползучести и длительной прочности материала экспериментальным данным. Для проверки адекватности разработанного метода использовались экспериментальные данные из независимых источников.

2.1. В работе [8] представлена экспериментальная информация по ползучести и длительной прочности коррозионно-стойкого сплава 12Х18Н10Т при температуре 850 °C. На рис. 1 сплошными линиями приведены экспериментальные кривые ползучести для четырех уровней напряжения $\sigma_0 = \{40, 50, 60, 80\}$ МПа, осредненные по 6, 7, 6 и 2 реализациям соответственно. Для иллюстрации разработанного метода в качестве образца-лидера использовалась реализация при $\sigma_0 = 40$ МПа (кривая *1*). В табл. 1 приведены экспериментальные [8] значения для начальной скорости установившейся ползучести $\dot{p}_0(\sigma_0)$ и времени до разрушения t_1^* для всех четырех уровней номинального напряжения σ_0. С использованием этих экспериментальных значений по формуле (8) получены значения времени до разрушения t_2^* по разработанной методике (см. табл. 1). Для сравнения в табл. 1 приведены расчетные значения времени до разрушения t_3^* по модели авторов [8].

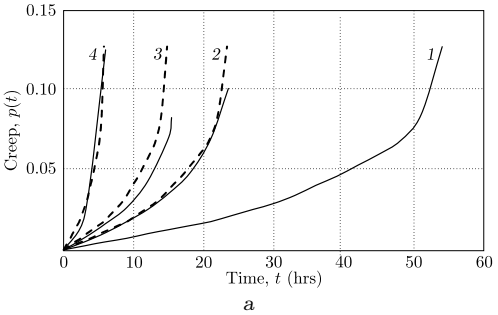


Рис. 1. Экспериментальные (сплошные линии) [8] и расчетные (штриховые линии) кривые ползучести коррозионно-стойкого сплава 12Х18Н10Т при температуре 850 °C, построенные по образцу-лидеру (линия *1*); маркеры (номинальные напряжения): *1* — 40 МПа; *2* — 50 МПа; *3* — 60 МПа; *4* — 80 МПа

[Figure. 1. Experimental (solid lines) [8] and calculated (dashed lines) creep curves of the corrosion-resistant 12Kh18N10T alloy at a temperature of 850 °C constructedbased on the leader sample (line *1*); markers (nominal stresses): *1* — 40 MPa; *2* — 50 MPa; *3* — 60 MPa; *4* — 80 MPa]

Таблица 1

Значения длительной прочности сплава 12Х18Н10Т при температуре 850 °C
[Values of the long-term strength of the 12Kh18N10T alloy at a temperature of 850 °C]

σ_0, MPa	Experimental data [8]		Calculated data			
	$\dot{p}_0(\sigma_0)$, h^{-1}	t_1^*, h	t_2^*, h	t_3^*, h	Δ_2, %	Δ_3, %
40	0.00082	54.0	54.0	51.0	–	5.6
50	0.0019	23.5	23.3	25.2	0.85	7.2
60	0.0030	15.4	14.8	14.1	3.9	8.4
80	0.0077	6.0	5.75	5.7	4.2	5.0

В двух последних столбцах табл. 1 приведены значения относительных погрешностей Δ_2 и Δ_3 (%), вычисленных по формуле

$$\Delta_i = \left| \frac{t_i^* - t_1^*}{t_1^*} \right| \cdot 100\,\%, \quad i = 2, 3 \tag{12}$$

для моделей (12) и модели авторов [8] соответственно. Согласно этим данным, погрешность вычисления времени до разрушения по модели (8) для стационарных кривых ползучести меньше, чем по более сложной модели [8].

На рис. 1 штриховыми линиями показаны расчетные зависимости для деформации ползучести, полученные на основании (11), при этом использовались лишь экспериментальные данные для образца-лидера (линия *1*) и начальные скорости деформации ползучести для остальных реализаций (линии *2–4*).

2.2. В работе [16] приведены экспериментальные данные по деформации ползучести титанового сплава при температуре 600 °C (представлены на рис. 2 сплошными линиями). По ним определялись начальные скорости деформации ползучести $\dot{p}_0$ (σ_0) и время до разрушения t_1^*, значения которых приведены в табл. 2. С целью вариативности разработанного подхода для одних и тех же экспериментальных данных использовались различные реализации в качестве образца-лидера: на рис. 2, *a* в качестве образца-лидера использовался образец *3*, а на рис. 2, *b* — образец *1*. На рис. 2 штриховыми линиями пока-

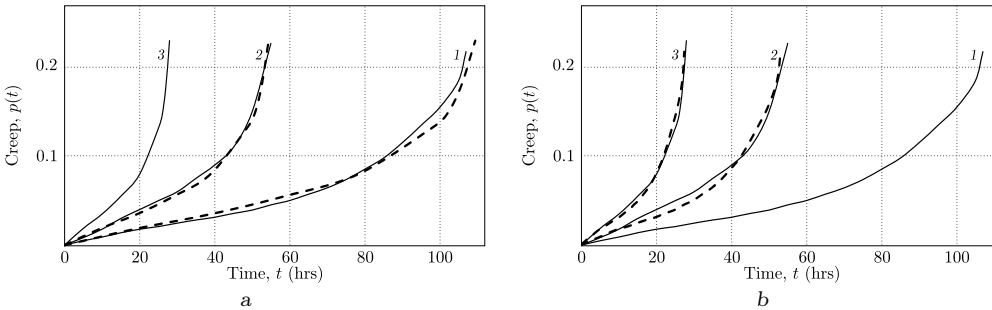


Рис. 2. Экспериментальные (сплошные линии) [16] и расчетные (штриховые линии) кривые ползучести титанового сплава при температуре 600 °C, построенные по образцу-лидеру *3* (*a*) и образцу-лидеру *1* (*b*); маркеры (номинальные напряжения): *1* — 300 МПа; *2* — 350 МПа; *3* — 400 МПа

[Figure. 2. Experimental (solid lines) [16] and calculated (dashed lines) creep curves of a titanium alloy at a temperature of 600 °C constructed based on the leader sample *3* (*a*) and the leader sample *1* (*b*); markers (nominal stresses): *1* — 300 MPa; *2* — 350 MPa; *3* — 400 MPa]

Таблица 2

Значения длительной прочности титанового сплава при температуре 600 °C
[Values of the long-term strength of titanium alloy at a temperature of 600 °C]

σ_0, MPa	$\dot{p}_0(\sigma_0)$, h^{-1}	t_1^*, h	the leader sample *3*		the leader sample *1*	
			t_2^*, h	Δ_2, %	t_2^*, h	Δ_2, %
300	0.00059	107	109.2	2.1	107	–
350	0.0012	55	53.7	2.4	52.6	4.4
400	0.0023	28	28	–	27.4	2.1

заны расчетные зависимости для деформации ползучести по формуле (11), а в табл. 2 приведены расчетные значения времени разрушения t_2^* по (8) и погрешности Δ_2 величины t_2^* относительно экспериментального значения t_1^* в соответствии с (12). Из представленных на рис. 2 и в табл. 2 данных следует, что результаты расчетов по (8) и (11) практически не зависят от выбора образца-лидера.

2.3. Применим разработанный подход к экспериментальным данным [9] по ползучести для образцов при одноосном растяжении (рис. 3, *a*) и кручении (рис. 3, *b*). В работе [9] диаграммы деформирования представлены в координатах «время – удельная работа напряжений на деформациях», т.е. по оси абсцисс на рис. 3 приведены значения работы $A(t) = \int_0^t \sigma_{ij} dp_{ij}$. Поэтому формальное применение основных расчетных соотношений (8) и (11) в данном случае сводится к замене начальных скоростей деформации $\dot{p}_0$ на начальные значения скорости $\dot{A}_0$ (фактически — удельной мощности) в начальный момент времени ($t = 0$). В качестве образца-лидера в данном случае рассматривается реализация при номинальном напряжении $\sigma_0 = 70$ МПа (линия *4* на рис. 3, *a*).

С использованием экспериментальных данных, представленных на рис. 3, вычислены начальные скорости $\dot{A}_0$ для обоих видов нагружения, значения

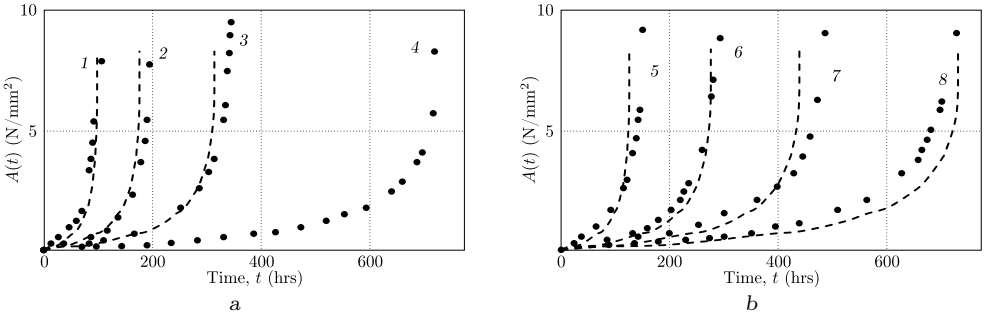


Рис. 3. Экспериментальные (точки) [9] и расчетные (штриховые линии) диаграммы для удельной работы напряжений на деформациях ползучести сплава Д16Т при температуре 250 °C, построенные по образцу-лидеру (линия *4*) в условиях одноосного растяжения (*a*) и кручения (*b*); маркеры (номинальные напряжения): *1* — 100 МПа; *2* — 90 МПа; *3* — 80 МПа; *4* — 70 МПа *5* — 46.2 МПа; *6* — 40.5 МПа; *7* — 37.0 МПа; *4* — 34.6 МПа

[Figure. 3. Experimental (points) [9] and calculated (dashed lines) diagrams for specific work of stresses on creep deformations of D16T alloy at a temperature of 250 °C constructed based on the leader sample (line *4*) under conditions of uniaxial tension (*a*) and torsion (*b*); markers (nominal stresses): *1* — 100 MPa; *2* — 90 MPa; *3* — 80 MPa; *4* — 70 MPa; *5* — 46.2 MPa; *6* — 40.5 MPa; *7* — 37.0 MPa; *8* — 34.6 MPa]

Таблица 3

Значения длительной прочности сплава Д16Т при температуре 250 °C
[Values of the long-term strength of D16T alloy at a temperature of 250 °C]

Uniaxial tension				
σ_0, MPa	$\dot{A}_0$, (N/mm^2) $\cdot$ h	t_1^*, h	t_2^*, h	Δ_2, %
70	$1.65 \cdot 10^{-3}$	719	719	–
80	$3.78 \cdot 10^{-3}$	345	314	9.0
90	$6.74 \cdot 10^{-3}$	195	176	9.7
100	$1.21 \cdot 10^{-2}$	107	98	8.4
Torsion				
τ_0, MPa	$\dot{A}_0$, (N/mm^2) $\cdot$ h	t_1^*, h	t_2^*, h	Δ_2, %
34.6	$1.62 \cdot 10^{-3}$	730	732.3	0.3
37.0	$2.7 \cdot 10^{-3}$	487	439.4	9.8
40.5	$4.3 \cdot 10^{-3}$	293	276	5.8
46.2	$9.46 \cdot 10^{-3}$	150	125.4	16.4

которых приведены в табл. 3. Расчетные значения времени разрушения t_2^* по (8) с соответствующей заменой $\dot{p}_0$ (для случая растяжения) и $\dot{\tau}_0$ (для случая сжатия) на $\dot{A}_0$ даны для всех вариантов при различных постоянных значениях номинальных растягивающих и касательных напряжений в табл. 3. Здесь же представлены и относительные погрешности Δt_2 (%) отклонения расчетных данных t_2^* от экспериментальных t_1^*. Штриховыми линиями на рис. 3 показаны расчетные диаграммы для работы $A = A(t)$, полученные с использованием (11).

Из приведенного примера следует, что прогнозирование по одному образцу-лидеру возможно и для разных видов напряженного состояния. В целом здесь наблюдается хорошее соответствие расчетных и экспериментальных данных как для длительной прочности, так и для диаграмм деформирования.

2.4. В работе [9] приведены экспериментальные диаграммы деформирования титанового сплава ВТ-9 при температуре 600 °C, представленные на рис. 4. В качестве образцов-лидеров рассматриваются реализации при номинальных напряжениях $\sigma_0 = 250$ МПа (линия *3* на рис. 4, *a*) и $\sigma_0 = 450$ МПа (линия *1* на рис. 4, *b*).

С использованием экспериментальных данных, представленных на рис. 4, вычислены начальные скорости $\dot{A}_0$, значения которых приведены в табл. 4. Расчетные значения времени разрушения t_2^* по (8) с соответствующей заменой $\dot{p}_0$ на $\dot{A}_0$ даны для всех вариантов в табл. 4. Здесь же представлены и относительные погрешности Δt_2 (%) отклонения расчетных данных t_2^* от экспериментальных t_1^*. Штриховыми линиями на рис. 4 показаны расчетные диаграммы для работы $A = A(t)$, полученные с использованием (11).

Как следует из приведенного примера, прогнозирование по одному образцу-лидеру возможно и для разных видов напряженного состояния. В целом здесь наблюдается хорошее соответствие расчетных и экспериментальных данных как для длительной прочности, так и для диаграмм деформирования.

2.5. Рассмотрим теперь диаграммы испытаний на ползучесть для сплава ОТ-4 при температуре 550 °C [9], представленные на рис. 5. В табл. 5 приве-

дены расчетные значения времени разрушения t_2^* по (8) и погрешности Δ_2 величины t_2^* относительно экспериментального значения t_1^* в соответствии с (12). Из приведенных данных следует, что результаты расчетов по (8) и (11) практически не зависят от выбора образца-лидера.

2.6. Рассмотрим экспериментальные данные [9], представленные в виде диаграмм деформирования титанового сплава ВТ-5 при температурах 450 °C и 550 °C на рис. 6.

С использованием экспериментальных данных, представленных на рис. 6, вычислены начальные скорости $\dot{A}_0$, значения которых приведены в табл. 6. Расчетные значения времени разрушения t_2^* по (8) с соответствующей заменой $\dot{p}_0$ на $\dot{A}_0$ даны для всех вариантов в табл. 6. Здесь же представлены и относительные погрешности Δt_2 (%) отклонения расчетных данных t_2^* от экспериментальных t_1^*. Для сравнения в табл. 6 приведены расчетные значения времени до разрушения t_3^* по модели, предложенной в [9], и относительные погрешности Δt_3 (%) отклонения расчетных данных t_3^* от экспериментальных t_1^*. Штриховыми линиями на рис. 6 показаны расчетные диаграммы для работы $A = A(t)$, полученные с использованием (11).

2.7. Рассмотрим диаграммы испытаний на ползучесть сплава 09Г2С [21], представленные на рис. 7–9. По диаграммам определялись начальные скорости деформации ползучести $\dot{p}_0$ (σ_0) и время до разрушения t_1^*, значения которых приведены в табл. 7. С целью вариативности разработанного подхода для одних и тех же экспериментальных данных использовались различные реализации в качестве образца-лидера: на рис. 7, *a*, 8, *a* и 9, *a* в качестве образца-лидера использовался образец *1*, а на рис. 7, *b*, 8, *b* и 9, *b* — образец *2*. На рис. 7–9 штриховыми линиями показаны расчетные зависимости для деформации ползучести по формуле (1), а в табл. 7 приведены расчетные значения времени разрушения t_2^* по (8) и погрешности Δ_2 величины t_2^* относительно экспериментального значения t_1^* в соответствии с (12). Из представленных на рис. 7–9 и в табл. 7 данных следует, что результаты расчетов по (8) и (11) также практически не зависят от выбора образца-лидера.

Заключение. Таким образом, разработан метод прогнозирования кривых стационарной ползучести и времени разрушения материала для исследуемых образцов по начальной (минимальной) скорости ползучести на начальном участке деформирования исследуемых образцов и известной кривой ползучести образца-лидера в условиях механизма вязкого разрушения. Проведена проверка адекватности моделей на экспериментальных данных из независимых источников в широком диапазоне материалов и параметров температурно-силового нагружения.

Коснемся прикладных вопросов применимости полученных в работе результатов к планированию экспериментальных исследований по получению информации о стационарных кривых ползучести. Строго говоря, все результаты данной статьи применимы лишь в рамках реологического вязкопластического деформирования материала (гипотеза вязкого разрушения) при выполнении сформулированных выше ограничений. Одним из «диагностических» признаков можно считать отсутствие первой стадии ползучести. Тогда, если имеется экспериментальная кривая ползучести образца-лидера (при известном номинальном значении напряжения σ_0), то, измерив начальную скорость деформации ползучести конкретного исследуемого образца при другом

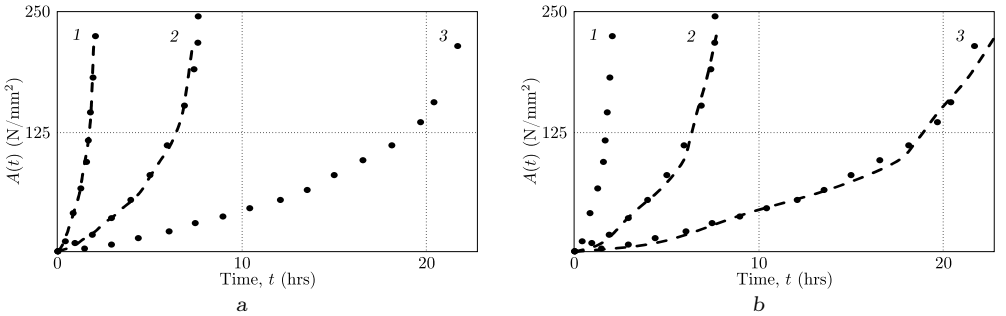


Рис. 4. Экспериментальные (точки) [9] и расчетные (штриховые линии) диаграммы для удельной работы напряжений на деформациях ползучести сплава ВТ-9 при температуре 600 °C, построенные по образцу-лидеру *3* (*a*) и образцу-лидеру *1* (*b*); маркеры (номинальные напряжения): *1* — 450 МПа; *2* — 350 МПа; *3* — 250 МПа

[Figure. 4. Experimental (points) [9] and calculated (dashed lines) diagrams for specific work of stresses on creep deformations of VT-9 alloy at a temperature of 600 °C constructed based on the leader sample *3* (*a*) and the leader sample *1* (*b*); markers (nominal stresses): *1* — 450 MPa; *2* — 350 MPa; *3* — 250 MPa]

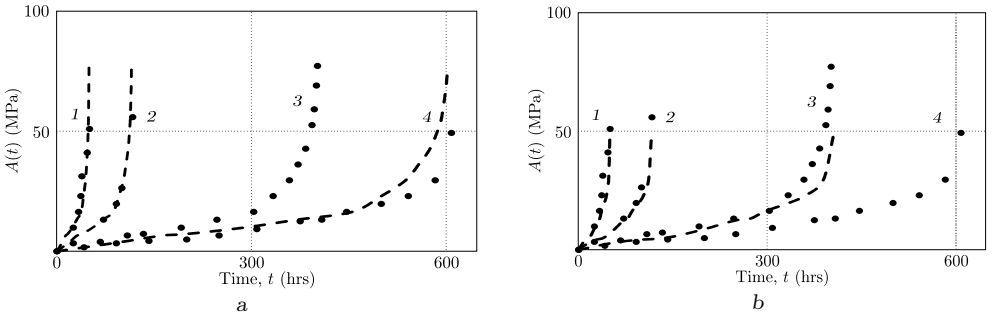


Рис. 5. Экспериментальные (точки) [9] и расчетные (штриховые линии) диаграммы для удельной работы напряжений на деформациях ползучести сплава ОТ-4 при температуре 550 °C, построенные по образцу-лидеру *3* (*a*) и по образцу-лидеру *4* (*b*); маркеры (номинальные напряжения): *1* — 80 МПа; *2* — 60 МПа; *3* — 50 МПа; *4* — 40 МПа

[Figure. 5. Experimental (points) [9] and calculated (dashed lines) diagrams for specific work of stresses on creep deformations of OT-4 alloy at a temperature of 550 °C constructed based on the leader sample *3* (*a*) and the leader sample *4* (*b*); markers (nominal stresses): *1* — 80 MPa; *2* — 60 MPa; *3* — 50 MPa; *3* — 40 MPa]

Таблица 4

Значения длительной прочности сплава ВТ-9 при температуре 600 °C
[Values of the long-term strength of VT-9 alloy at a temperature of 600 °C]

σ_0, MPa	$\dot{A}_0$, (N/mm^2) · h	t_1^*, h	the leader sample *3*		the leader sample *1*	
			t_2^*, h	Δ_2, %	t_2^*, h	Δ_2, %
250	3.07	21.7	22.8	5.1	21.7	–
350	9.11	7.6	7.7	1.3	7.3	3.95
450	34.2	2.05	2.05	–	1.95	4.88

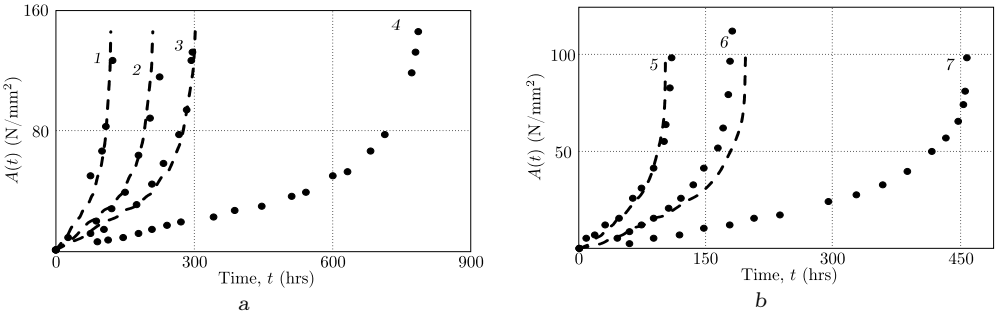


Рис. 6. Экспериментальные (точки) [9] и расчетные (штриховые линии) диаграммы для удельной работы напряжений на деформациях ползучести сплава ВТ-5 при температуре 450 °C, построенные по образцу-лидеру *4* (*a*), и при температуре 550 °C, построенные по образцу-лидеру *7* (*b*); маркеры (номинальные напряжения): *1* — 370 МПа; *2* — 350 МПа; *3* — 330 МПа; *4* — 300 МПа; *5* — 150 МПа; *6* — 130 МПа; *7* — 110 МПа

[Figure. 6. Experimental (points) [9] and calculated (dashed lines) diagrams for specific work of stresses on creep deformations of VT-5 alloy at a temperature of 450 °C constructed based on the leader sample *4* (*a*) and at a temperature of 550 °C on the leader sample *7* (*b*); markers (nominal stresses): *1* — 370 MPa; *2* — 350 MPa; *3* — 330 MPa; *4* — 300 MPa; *5* — 150 MPa; *6* — 130 MPa; *7* — 110 MPa]

Таблица 5

Значения длительной прочности сплава ОТ-4 при температуре 550 °C
[Values of the long-term strength of the OT-4 alloy at a temperature of 550 °C]

σ_0, MPa	$\dot{A}_0$, MPa · h	t_1^*, h	the leader sample *3*		the leader sample *4*	
			t_2^*, h	Δ_2, %	t_2^*, h	Δ_2, %
40	0.0189	608.3	601.5	1.12	608.3	–
50	0.0283	401.7	401.7	–	406.2	1.12
60	0.099	116.7	114.8	1.6	116.1	0.51
80	0.23	50	49.4	1.2	50	0

Таблица 6

Значения длительной прочности сплава ВТ-5 при различных температурах
[Values of the long-term strength of VT-5 alloy at various temperatures]

T, °C	σ_0, MPa	$\dot{A}_0$, (N/mm^2) · h	t_1^*, h	t_2^*, h	Δ_2, %	t_3^*, h	Δ_3, %
450	300	0.05	785	785	–	777	1.02
450	330	0.13	296	302	2.03	335	13.17
450	350	0.187	225	210	6.67	192	14.67
450	370	0.33	123	119	3.25	123	–
550	110	0.06	460	460	–	471	2.39
550	130	0.14	182	197	8.24	229	25.82
550	150	0.27	110	102	7.27	104	5.45

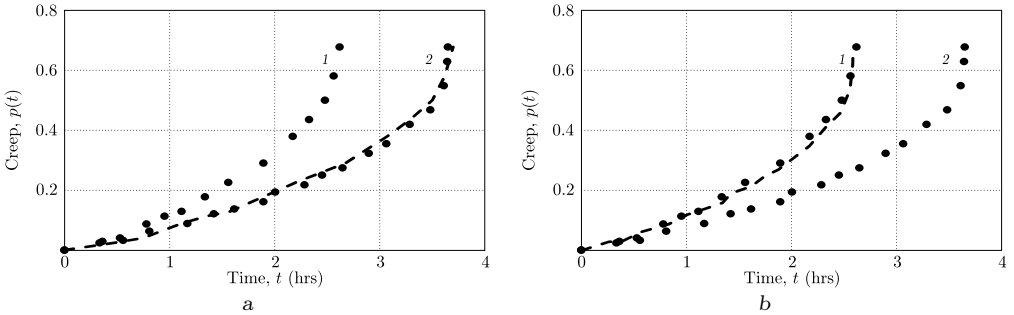


Рис. 7. Экспериментальные (точки) [21] и расчетные (штриховые линии) кривые ползучести сплава 09Г2С при температуре 700 °C, построенные по образцу-лидеру *1* (*a*) и по образцу-лидеру *2* (*b*); маркеры (номинальные напряжения): *1* — 69.67 МПа; *2* — 58.86 МПа

[Figure. 7. Experimental (points) [21] and calculated (dashed lines) diagrams for specific work of stresses on creep deformations of 09G2S alloy at a temperature of 700 °C constructed based on the leader sample *a* (*a*) and the leader sample *2* (*b*); markers (nominal stresses): *1* — 69.67 MPa; *2* — 58.86 MPa]

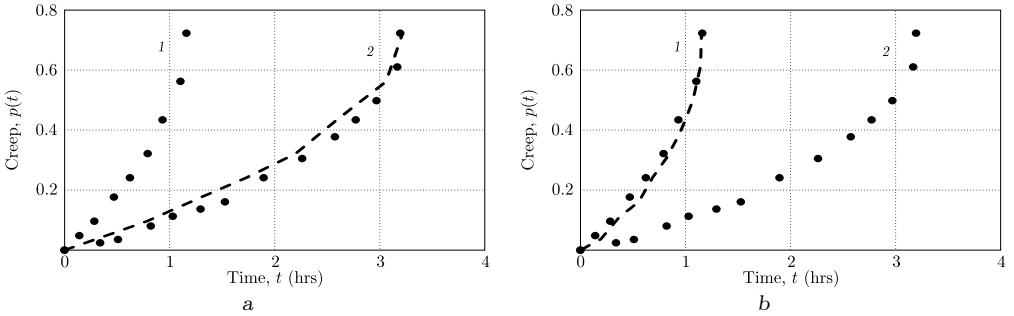


Рис. 8. Экспериментальные (точки) [21] и расчетные (штриховые линии) кривые ползучести сплава 09Г2С при температуре 730 °C, построенные по образцу-лидеру *1* (*a*) и по образцу-лидеру *2* (*b*); маркеры (номинальные напряжения): *1* — 58.86 МПа; *2* — 49.05 МПа

[Figure. 8. Experimental (points) [21] and calculated (dashed lines) diagrams for specific work of stresses on creep deformations of 09G2S alloy at a temperature of 730 °C constructed based on the leader sample *a* (*a*) and the leader sample *2* (*b*); markers (nominal stresses): *1* — 58.86 MPa; *2* — 49.05 MPa]

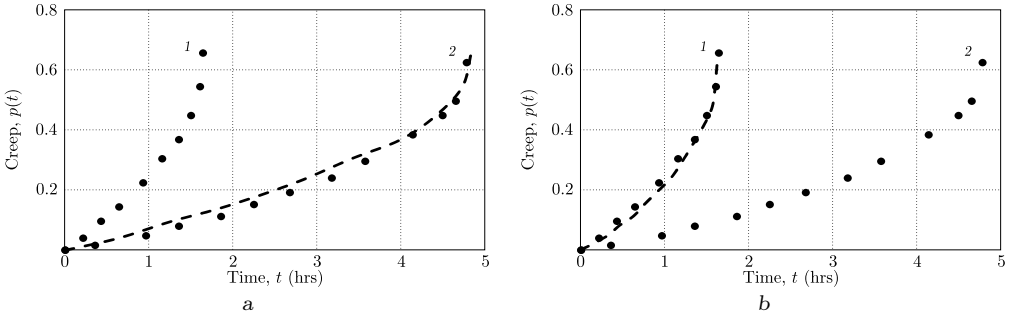


Рис. 9. Экспериментальные (точки) [21] и расчетные (штриховые линии) кривые ползучести сплава 09Г2С при температуре 750 °C, построенные по образцу-лидеру *1* (*a*) и по образцу-лидеру *2* (*b*); маркеры (номинальные напряжения): *1* — 49.05 МПа; *2* — 38.24 МПа

[Figure. 9. Experimental (points) [21] and calculated (dashed lines) diagrams for specific work of stresses on creep deformations of 09G2S alloy at a temperature of 750 °C constructed based on the leader sample *a* (*a*) and the leader sample *2* (*b*); markers (nominal stresses): *1* — 49.05 MPa; *2* — 38.24 MPa]

Таблица 7

Значения длительной прочности сплава 09Г2С при различных температурах
[Values of the long-term strength of the 09G2S alloy at various temperatures]

T, °C	σ_0, MPa	$\dot{A}_0$, MPa · h	t_1^*, h	the leader sample *1*		the leader sample *2*	
				t_2^*, h	Δ_2, %	t_2^*, h	Δ_2, %
700	69.67	0.075	2.61	2.61	–	2.57	1.5
700	58.86	0.053	3.64	3.69	1.37	3.64	–
730	58.86	0.195	1.14	1.14	–	1.13	0.88
730	49.05	0.070	3.14	3.18	1.27	3.14	–
750	49.05	0.088	1.64	1.64	–	1.63	0.61
750	39.24	0.030	4.79	4.81	0.42	4.79	–

значении напряжения, можно спрогнозировать и кривую ползучести, и время до его разрушения. Эта информация позволяет оптимальным образом планировать «загрузку» испытательного оборудования, что важно в силу длительности и технической сложности экспериментальных исследований в области высокотемпературной ползучести.

Конкурирующие интересы. Конфликта интересов в отношении авторства и публикации этой статьи нет.

Авторский вклад и ответственность. Все авторы принимали участие в разработке концепции статьи и в написании рукописи. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

Финансирование. Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (тема № FSSE-2023-0003) в рамках государственного задания Самарского государственного технического университета.

Библиографический список

1. Качанов Л. М. *Теория ползучести.* М.: Физматлит, 1960. 455 с.
2. Работнов Ю. Н. *Ползучесть элементов конструкций.* М.: Наука, 1966. 752 с.
3. Гольденблат И. И., Баженов В. Л., Копнов В. А. *Длительная прочность в машиностроении.* М.: Машиностроение, 1977. 246 с.
4. Никитенко А. Ф. *Ползучесть и длительная прочность металлических материалов.* Новосибирск: НГАСУ, 1997. 278 с.
5. Радченко В. П., Еремин Ю. А. *Реологическое деформирование и разрушение материалов и элементов конструкций.* М.: Машиностроение-1, 2004. 264 с. EDN: QNATSX.
6. Лепин Г. Ф. *Ползучесть металлов и критерии жаропрочности.* М.: Металлургия, 1976. 344 с.
7. Локощенко А. М. *Ползучесть и длительная прочность металлов.* М.: Физматлит, 2016. 489 с.
8. *Закономерности ползучести и длительной прочности* / ред. С. А. Шестериков. М.: Машиностроение, 1983. 102 с.
9. Соснин О. В., Горев Б. В., Никитенко А. Ф. *Энергетический вариант теории ползучести.* Новосибирск: ИГиЛ СО РАН, 1986. 95 с.
10. Loktionov V., Lyubashevskaya I., Terentyev E. The regularities of creep deformation and failure of the VVER's pressure vessel steel 15Kh2NMFA-A in air and argon at temperature range 500–900 °C // *Nucl. Mat. Energy*, 2021. vol. 28, 101019. EDN: YNXXTF. DOI: https://doi.org/10.1016/j.nme.2021.101019.

11. Loktionov V., Lyubashevskaya I., Sosnin O., Terentyev E. Short-term strength properties and features of high-temperature deformation of VVER reactor pressure vessel steel 15Kh2NMFA-A within the temperature range 20–1200 °C // *Nucl. Eng. Des.*, 2019. vol. 352, 110188. EDN: LATTSR. DOI: https://doi.org/10.1016/j.nucengdes.2019.110188.
12. Банщикова И. А., Никитенко А.Ф. Ползучесть осесимметрично нагруженных пластин с учетом накопления повреждений в их материале // *ПМТФ*, 2006. Т. 47, № 5. С. 157–168. EDN: NXKWMT.
13. Никитенко А. Ф., Любашевская И. В. Долговечность сосудов высокого давления // *ПМТФ*, 2007. Т. 48, № 5. С. 173–182. EDN: ONMFXH.
14. Локощенко А. М., Фомин Л. В., Терауд В. В., Басалов Ю. Г., Агабабян В. С. Ползучесть и длительная прочность металлов при нестационарных сложных напряженных состояниях (обзор) // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2020. Т. 24, № 2. С. 275–318. EDN: OQCCVC. DOI: https://doi.org/10.14498/vsgtu1765.
15. Robinson E. L. Effect of temperature variation on the long-time rupture strength of steels // *Trans. ASME*, 1952. vol. 74, no. 5. pp. 777–780. DOI: https://doi.org/10.1115/1.4015916.
16. Omprakash C. M., Kumar A., Srivathsa B., Satyanarayana D. V. V. Prediction of creep curves of high temperature alloys using θ-projection concept // *Procedia Engineering*, 2013. vol. 55. pp. 756–759. DOI: https://doi.org/10.1016/j.proeng.2013.03.327.
17. Lundin C. D., Aronson A. H., Jackman L. A., Clough W. R. Very-short-time, very-high-temperature creep rupture of type 347 stainless steel and correlation of data // *J. Basic Eng.*, 1969. vol. 91, no. 1. pp. 32–38. DOI: https://doi.org/10.1115/1.3571023.
18. Hoff N. J. The necking and the rupture of rods subjected to constant tensile loads // *J. Appl. Mech.*, 1953. vol. 20, no. 1. pp. 105–108. DOI: https://doi.org/10.1115/1.4010601.
19. Можаровская Т. Н. О зависимости времени до разрушения при длительном нагружении в условиях плоского напряженного состояния от минимальной скорости деформаций ползучести // *Пробл. прочн*, 1982. № 12. С. 51–54.
20. Волков И. А., Коротких Ю. Г. *Уравнения состояния вязкоупругопластических сред с повреждениями.* М.: Физматлит, 2008. 424 с. EDN: RYRTNT.
21. Бойко С.В. *Моделирование формообразования элементов конструкций в условиях нестационарной ползучести*: Дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.02.04. Новосибирск: ИГиЛ СО РАН, 2020. 133 с.

Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2023, vol. 27, no. 2, pp. 292–308
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu2001

MSC: 74S60

Predicting high-temperature rheological deformation and long-term strength of a viscoplastic material using a leader sample

V. P. Radchenko, E. A. Afanaseva, M. N. Saushkin

Samara State Technical University,
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russian Federation.

Abstract

A method for predicting creep and long-term strength in conditions of viscous failure mechanism has been proposed and implemented. It is assumed that when the material is loaded, there is no instant plastic deformation or the first stage of creep, and the hypothesis of incompressibility is satisfied. In the developed method, it is shown that if the creep curve under constant stress and the time to failure are known for a pre-tested sample (leader sample), then to obtain the rheological deformation diagram and long-term strength of the material at other stress levels, it is sufficient to know only the initial minimum creep deformation rate (at the initial moment of time) for the samples at these stress levels.

The adequacy of the developed method to experimental data for a range of alloys under conditions of tension and torsion of samples has been tested. It has been shown that the prediction results do not depend on the choice of a leader sample from the series of samples tested at different stress levels.

The research results demonstrate that the developed method allows not only predicting creep curves and long-term strength (in the asymptotic formulation), but also optimizing the planning of experimental studies to obtain a series of steady-state creep curves under constant stresses.

Mechanics of Solids
Research Article

© Authors, 2023
© Samara State Technical University, 2023 (Compilation, Design, and Layout)
The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License (http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)

Please cite this article in press as:
Radchenko V. P., Afanaseva E. A., Saushkin M. N. Predicting high-temperature rheological deformation and long-term strength of a viscoplastic material using a leader sample, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2023, vol. 27, no. 2, pp. 292–308. EDN: EPOTNP. DOI: 10.14498/vsgtu2001 (In Russian).

Authors' Details:

Vladimir P. Radchenko https://orcid.org/0000-0003-4168-9660
Dr. Phys. & Math. Sci., Professor; Head of Dept; Dept. of Applied Mathematics & Computer Science; e-mail: radchenko.vp@samgtu.ru

Elena A. Afanaseva https://orcid.org/0000-0001-7815-2723
Postgraduate Student; Dept. of Applied Mathematics & Computer Science;
e-mail: afanasieva.ea@samgtu.ru

Mikhail N. Saushkin https://orcid.org/0000-0002-8260-2069
Cand. Phys. & Math. Sci.; Associate Professor; Dept. of Applied Mathematics & Computer Science; e-mail: saushkin.mn@samgtu.ru

Keywords: prediction, creep, long-term strength, viscous fracture, leader sample.

Received: 1st March, 2023 / Revised: 18th May, 2023 /
Accepted: 25th May, 2023 / First online: 28th June, 2023

Competing interests. We do not have any conflict of interest regarding the authorship and publication of this article.

Authors' contributions and responsibilities. All authors participated in the development of the article's concept and in writing the manuscript. Authors bear full responsibility for submitting the final manuscript for publication. The final version of the manuscript was approved by all authors.

Funding. This work was supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (project no. FSSE-2023-000) under the state order of the Samara State Technical University.

References

1. Kachanov L. M. *Teoriia polzuchesti* [Creep Theory]. Moscow, Fizmatlit, 1960, 455 pp. (In Russian)
2. Rabotnov Yu. N. *Creep Problems in Structural Members*, North-Holland Series in Applied Mathematics and Mechanics, vol. 7. Amsterdam, London, North-Holland Publ., 1969, xiv+822 pp.
3. Gol'denblat I. I., Bazhenov V. L., Kopnov V. A. *Dlitel'naia prochnost' v mashinostroenii* [Long-Term Strength in Machine Building]. Moscow, Mashinostroenie, 1977, 246 pp. (In Russian)
4. Nikitenko A. F. *Polzuchest' i dlitel'naia prochnost' metallicheskikh materialov* [Creep and Long-Term Strength of Metallic Materials]. Novosibirsk, NGASU, 1997, 278 pp. (In Russian)
5. Radchenko V. P., Eremin Yu. A. *Reologicheskoe deformirovanie i razrushenie materialov i elementov konstruktsii* [Rheological Deformation and Fracture of Materials and Structural Elements]. Moscow, Mashinostroenie-1, 2004, 264 pp. (In Russian). EDN: QNATSX
6. Lepin G. F. *Polzuchest' metallov i kriterii zharoprochnosti* [Creep of Metals and Heat-Resistance Criteria]. Moscow, Metallurgiya, 1976, 344 pp. (In Russian)
7. Lokoshchenko A. M. *Creep and Long-Term Strength of Metals*. Boca, Raton, CRC Press, 2018, xviii+545 pp. EDN: YKQNZJ. DOI: https://doi.org/10.1201/b22242.
8. *Zakonomernosti polzuchesti i dlitel'noi prochnosti* [Regularities of Creep and Long-Term Strength], ed. S. A. Shesterikov. Moscow, Mashinostroenie, 1983, 102 pp. (In Russian)
9. Sosnin O. V., Gorev B. V. Nikitenko A. F. *Energeticheskii variant teorii polzuchesti* [Enegry Variant of Theory of Creep]. Novosibirsk, Lavrentyev Institute of Hydrodynamics, 1986, 95 pp. (In Russian)
10. Loktionov V., Lyubashevskaya I., Terentyev E. The regularities of creep deformation and failure of the VVER's pressure vessel steel 15Kh2NMFA-A in air and argon at temperature range 500–900 °C, *Nucl. Mat. Energy*, 2021, vol. 28, 101019. EDN: YNXXTF. DOI: https://doi.org/10.1016/j.nme.2021.101019.
11. Loktionov V., Lyubashevskaya I., Sosnin O., Terentyev E. Short-term strength properties and features of high-temperature deformation of VVER reactor pressure vessel steel 15Kh2NMFA-A within the temperature range 20–1200 °C, *Nucl. Eng. Des.*, 2019, vol. 352, 110188. EDN: LATTSR. DOI: https://doi.org/10.1016/j.nucengdes.2019.110188.
12. Banshchikova I. A., Nikitenko A. F. Creep of axisymmetrically loaded plates with allowance for damage accumulation in their material, *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2006, vol. 47, no. 5, pp. 747–756. EDN: KGLJUZ. DOI: https://doi.org/10.1007/s10808-006-0111-3.

13. Nikitenko A. F., Lyubashevskaya I. V. Service life of pressurized vessels, *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2007, vol. 48, no. 5, pp. 766–773. EDN: LKOBVH. DOI: https://doi.org/10.1007/s10808-007-0099-3.
14. Lokoshchenko A. M., Fomin L. V., Teraud W. V., Basalov Yu. G., Agababyan V. S. Creep and long-term strength of metals under unsteady complex stress states (Review), *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2020, vol. 24, no. 2, pp. 275–318 (In Russian). EDN: OQCCVC. DOI: https://doi.org/10.14498/vsgtu1765.
15. Robinson E. L. Effect of temperature variation on the long-time rupture strength of steels, *Trans. ASME*, 1952, vol. 74, no. 5, pp. 777–780. DOI: https://doi.org/10.1115/1.4015916.
16. Omprakash C. M., Kumar A., Srivathsa B., Satyanarayana D. V. V. Prediction of creep curves of high temperature alloys using θ-projection concept, *Procedia Engineering*, 2013, vol. 55, pp. 756–759. DOI: https://doi.org/10.1016/j.proeng.2013.03.327.
17. Lundin C. D., Aronson A. H., Jackman L. A., Clough W. R. Very-short-time, very-high-temperature creep rupture of type 347 stainless steel and correlation of data, *J. Basic Eng.*, 1969, vol. 91, no. 1, pp. 32–38. DOI: https://doi.org/10.1115/1.3571023.
18. Hoff N. J. The necking and the rupture of rods subjected to constant tensile loads, *J. Appl. Mech.*, 1953, vol. 20, no. 1, pp. 105–108. DOI: https://doi.org/10.1115/1.4010601.
19. Mozharovskaya T. N. Relationship of the time until failure in long-term loading under conditions of the plane stressed state to the minimum rate of creep deformations, *Strength Mater.*, 1982, vol. 14, no. 12, pp. 1635–1639. EDN: XLUTEH. DOI: https://doi.org/10.1007/BF00768650.
20. Volkov I. A., Korotkikh Yu. G. *Uravneniia sostoianiia viazkouprugoplasticheskikh sred s povrezhdeniiami* [Equations of State for Viscoelastic-Plastic Media with Damage]. Moscow, Fizmatlit, 2008, 424 pp. (In Russian). EDN: RYRTNT
21. Boyko S.V. *Modeling the Formation of Structural Elements under Unsteady Creep Conditions*, Thesis of Dissertation (Cand. Phys. & Math. Sci.). Novosibirsk, Lavrentyev Institute of Hydrodynamics, 133 pp. (In Russian)

Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2023. Т. 27, № 2. С. 309–335
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu1994
EDN: HZRAJS

УДК 519.635.4

Подавление пилообразных осцилляций при использовании разностной схемы для моделирования массопереноса в высыхающей на подложке капле в приближении тонкого слоя

К. С. Колегов[1,2]

[1] Астраханский государственный университет имени В. Н. Татищева, Россия, 414056, Астрахань, ул. Татищева, 20 а.
[2] Тюменский государственный университет, Россия, 625003, Тюмень, ул. Ленина, 25.

Аннотация

Испаряющиеся капли и пленки используются в приложениях из разных областей. Особый интерес представляют различные методы испарительной самосборки. В работе описана математическая модель массопереноса в высыхающей на подложке капле на базе приближения тонкого слоя. Модель учитывает перенос растворенного или взвешенного вещества капиллярным потоком, диффузию этого вещества, испарение жидкости, формирование твердого осадка, зависимость вязкости и плотности потока пара от концентрации примеси.

Рассматривается случай, когда трехфазная граница «жидкость–подложка–воздух» закреплена. Для уравнений модели разработаны явные и неявные разностные схемы. Предложена модификация численного метода, в которой комбинируется расщепление по физическим процессам, итерационный метод явной релаксации и метод прогонки. Описан практический рецепт подавления пилообразных осцилляций на примере конкретной задачи.

Разработан программный модуль на языке C++, который в дальнейшем можно использовать для задач испарительной литографии. С помощью этого модуля проведены численные расчеты, результаты которых сравнивались с результатами, полученными в пакете Maple.

Численное моделирование предсказало случай, когда направление капиллярного потока с течением времени меняется на противоположное из-за изменения знака градиента плотности потока пара. Это может

Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ
Научная статья

© Коллектив авторов, 2023
© СамГТУ, 2023 (составление, дизайн, макет)
Контент публикуется на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru)

Образец для цитирования
Колегов К. С. Подавление пилообразных осцилляций при использовании разностной схемы для моделирования массопереноса в высыхающей на подложке капле в приближении тонкого слоя // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2023. Т. 27, № 2. С. 309–335. EDN: HZRAJS. DOI: 10.14498/vsgtu1994.

Сведения об авторе
Константин Сергеевич Колегов https://orcid.org/0000-0002-9742-1308
кандидат физико-математических наук; старший научный сотрудник; лаб. математического моделирования и информационных технологий в науке и образовании[1]; центр природовдохновленного инжиниринга[2]; e-mail: konstantin.kolegov@asu.edu.ru

приводить к замедлению выноса вещества на периферию, что в результате будет способствовать формированию более или менее равномерного осадка по всей площади контакта капли с подложкой. Данное наблюдение полезно для совершенствования методов подавления кольцевых осадков, связанных с эффектом кофейных колец и нежелательных для некоторых приложений, как, например, струйная печать или нанесение покрытий.

Ключевые слова: испаряющаяся капля, массоперенос, капиллярный поток, разностная схема, пилообразная осцилляция, подавление эффекта кофейных колец.

Получение: 18 января 2023 г. / Исправление: 29 апреля 2023 г. / Принятие: 3 мая 2023 г. / Публикация онлайн: 27 июня 2023 г.

Введение. Испаряющиеся капли и пленки используются в приложениях из разных областей, например, охлаждение нагретых поверхностей электронных приборов, диагностика в медицине, формирование прозрачных электропроводных покрытий на гибкой подложке, структурирование поверхности [1, 2]. Метод испарительной литографии появился после выяснения связи возникающего при испарении капель коллоидных растворов эффекта кофейных колец [3] с естественным образом формирующимися неоднородными потоками пара с поверхности капли (см. обзор [2]). В методе испарительной литографии контролируемое создание пространственных структур в осадках, остающихся на подложке после высыхания жидкости, достигается при помощи внешних условий, индуцирующих неравномерное испарение с поверхности коллоидной жидкости. Осадки могут оставаться не только на подложке, но и на стенке ячейки [4]. Испарительная литография является частью более широкого направления. Речь идет о самосборке, вызванной испарением (evaporative-induced self-assembly (EISA)). К этому обширному направлению относятся методы на основе процессов, связанных с контактной линией (граница трех фаз «жидкость–подложка–воздух»), методы на основе сил межчастичного взаимодействия и испарительная литография. Как правило, испарительная литография является гибким и одноступенчатым процессом, преимущества которого связаны с простотой, дешевизной и применимостью практически к любой подложке без предварительной обработки. В такой литографии отсутствует механическое воздействие на шаблон, поэтому его целостность в процессе работы не нарушается. Также этот метод полезен для создания материалов с локализованными функциями, такими как скользкость и самовосстановление. По этим причинам испарительная литография привлекает все большее внимание и к настоящему времени имеет ряд достижений. В [2] также проанализированы имеющиеся ограничения рассматриваемого метода и пути его дальнейшего развития.

Методы испарительной литографии можно разделить на активные и пассивные. Их отличие в том, что первая подгруппа характеризуется наличием ключевых параметров, которые регулируются в режиме реального времени, а вторая подгруппа подразумевает наличие статических ключевых параметров, которые настраиваются до начала процесса [2]. К отдельной подгруппе относятся гибридные методы, которые также могут быть как пассивными, так

и активными. Эти методы сочетают в себе испарительную литографию с другими методами, относящимися и не относящимися к испарительной самосборке [2]. Испарительная литография предоставляет больше возможностей для формирования структур различной геометрической формы на микро- и наноуровне по сравнению с испарительной самосборкой. Но, с другой стороны, испарительная самосборка позволяет получать структуры, меньшие по размеру. Разработка новых гибридных методов в испарительной литографии позволит получать структуры осадков или рельефных твердых пленок требуемой формы и морфологии еще меньших размеров для относительно больших площадей. Такие покрытия будут устойчивы к внешним механическим воздействиям, в них будут отсутствовать трещины [5]. Кроме того, эти покрытия можно наделить некоторыми требуемыми функциональными свойствами.

К примеру, для разработки гибридных методов можно использовать дополнительное воздействие через различные факторы: пропускание электрического тока через подложку с испаряющейся каплей [6], воздействие магнитным полем на частицы [7], локальный нагрев подложки [8], направление вектора силы тяжести относительно расположения капли и влажность окружающего воздуха [9, 10]. Напряжение электрического тока в подложке влияет на ее смачиваемость жидкостью и на режим контактной линии: пиннинг (закрепление границы) или режим постоянного краевого угла (скольжение границы) [6]. Эти факторы влияют на геометрию капли, пространственную неоднородность испарения вдоль ее свободной поверхности и поле скорости потока жидкости. Такой способ управления можно использовать в режиме реального времени, получая при этом требуемую форму осадка. Еще один дополнительный способ контроля заключается в создании магнитного поля в области капли [7]. В эксперименте [7] в отсутствие магнитного поля формировался кольцевой осадок частиц. Увеличение силы магнитного поля приводило к увеличению количества частиц, осаждающихся в центральной области в виде пятна. Сидячие и висячие капли на подложке изучались в эксперименте при разной влажности воздуха [9]. Направление вектора силы тяжести относительно расположения капли влияет на то, будут ли поток Марангони и объемная тепловая конвекция сонаправлены или нет. В сидячей капле эти потоки противодействуют друг другу, а в висячей капле, наоборот, усиливают друг друга. Также не стоит забывать о капиллярном потоке. Влажность воздуха влияет на скорость испарения. Комбинации этих параметров приводили к возникновению разных структур осадков: кольцо, равномерное пятно, диск или центральное пятно [9]. Коллоидную литографию возможно комбинировать с испарительной литографией [11]. Для получения масок из микрочастиц на подложке можно использовать испарительную литографию, а затем на их основе с помощью коллоидной литографии получать упорядоченные осадки наночастиц. Эксперимент с сохнущими каплями [11] показал, что равномерная упорядоченная морфология осадка лучше получается на гидрофильных подложках, чем на гидрофобных. Это связано с отличием поведения контактной линии, что зависит от смачиваемости поверхности.

Еще одно важное направление заключается в использовании смесей частиц. Эти смеси могут состоять из частиц разного размера [12,13], формы [14], материала и т.д. Частицы Януса состоят из двух частей, материалы которых отличаются по физико-химическим свойствам [15]. Разделение частиц

по размеру вблизи трехфазной границы высыхающей капли моделировалось в [13]. В бинарных смесях частиц разного размера могут возникать силы исключенного объема (энтропийные силы), которые способствуют притяжению крупных частиц друг к другу [16, 17]. Химическое воздействие на частицы с помощью поверхностно-активных веществ также позволяет контролировать форму осадка и его морфологию [18].

Испарение коллоидной жидкости из ячейки Хелли—Шоу также можно отнести к испарительной литографии [19, 20]. Такая ячейка состоит из двух параллельно расположенных пластин, между которыми есть узкая щель, в которой заключен коллоидный раствор. Все боковые стороны ячейки, кроме одной, закрыты. Жидкость испаряется через открытое боковое отверстие, поэтому этот процесс называют направленным испарением. Частицы переносятся капиллярным потоком в сторону направленного испарения. Возможно образование как сплошного осадка [19], так и периодических полос [20]. В [20] изучались такие параметры, как степень адсорбции частиц к подложке и скорость испарения, влияющие на морфологию осадка. Сложная структура возникающих потоков жидкости была показана в эксперименте [19].

На примере капли солевого раствора показана возможность управлять формированием кристаллического осадка с помощью точечного лазерного нагрева локального участка свободной поверхности жидкости [21]. В эксперименте изучалось влияние таких параметров, как мощность лазера и смачиваемость/несмачиваемость подложки. Комбинации значений этих параметров приводили к таким кристаллическим паттернам, как кольцо, спираль, пятно и прочее. Визуализация структуры потока показала, что течение направлено в сторону центральной зоны нагрева от подложки к границе жидкости и воздуха. Вдоль свободной поверхности поток направлен от центра к периферии капли. На перенос растворенного вещества в этом эксперименте в большей степени влиял тепловой поток Марангони и капиллярный поток [21]. Во-первых, неравномерный нагрев поверхности приводит к неравномерной локальной плотности потока пара. Во-вторых, перепад температуры влияет на возникновение градиента поверхностного натяжения вдоль свободной поверхности жидкости. Эти два фактора объясняют наблюдаемую структуру потока жидкости. Концентрация соли растет в области нагрева поверхности не только за счет переноса потоком, но и благодаря интенсивному испарению, происходящему в зоне воздействия лазера [21]. Для сравнения в эксперименте [22] при испарении капли солевого раствора без какого-либо внешнего воздействия преобладал концентрационный поток Марангони. С помощью метода PIV (Particle Image Velocimetry) была изучена динамика структуры потока. Исследование показало, что зарождение кристаллов и их рост в процессе испарения жидкости приводит к нарушению осесимметричного потока. Вокруг кристаллов возникают симметричные вихри [22].

Теоретический интерес к упомянутым выше процессам связан с различными практическими приложениями. К примеру, в недавней работе [23] проведен эксперимент по управлению формированием осадка, содержащего бактерии, через локальное воздействие на испарение, что важно для приложений в медицине и биотехнологиях. Испарительная литография может использоваться для нанесения функциональных чернил на поверхность и получения необходимого паттерна [24]. Формирование периодических структур из ме-

таллических наночастиц важно для разработки плазмонных сенсоров [25].

Моделирование массопереноса в высыхающих каплях важно, так как численные результаты позволяют подобрать необходимые параметры для проведения экспериментальных исследований. Это дает возможность совершенствовать существующие методы и разрабатывать новые приложения. Континуальные модели позволяют описать форму осадка, но не его морфологию [26–28]. Полудискретные модели, в которых частицы описываются точками, тоже не в состоянии предсказывать морфологию осадка [29–32]. Решеточные модели описывают лишь частицы в форме кубоидов [33–37]. Методы молекулярной динамики и диссипативной динамики частиц позволяют делать прогнозы лишь для относительно малого числа частиц [38–40]. Безрешеточные модели на основе метода Монте—Карло, в которых явно отслеживается динамика каждой частицы, лишены упомянутых недостатков [13, 41–45]. Но эти модели либо не учитывают гидродинамику, либо используют простые аналитические решения для частного случая. Для улучшения этих моделей, алгоритмов и программ необходимо разрабатывать дополнительные модули, позволяющие учесть различные эффекты, влияющие на формирование осадков, в том числе и гидродинамику. В коммерческом пакете `Comsol Multiphysics` есть модули, позволяющие рассчитывать динамику частиц и гидродинамику [46], но цена на этот пакет относительно высокая. Это касается и дополнительных тулбоксов к `Matlab` [47]. Недавно для нашей страны был ограничен доступ к официальному сайту свободного пакета для молекулярной динамики `LAMMPS` (`https://www.lammps.org/`). Зарубежные коммерческие пакеты в любой момент могут оказаться недоступными из-за политической ситуации. К примеру, на момент написания данной статьи приостановлены продажи пакета `Ansys` в РФ. В условиях импортозамещения очень важной является разработка отечественного программного обеспечения для моделирования, написание своих кодов и библиотек. Для проведения исследований в области испарительной литографии требуется разработка программного комплекса, включающего ряд модулей (рис. 1). Пустой прямоугольник на схеме обозначает дополнительные модули, которые необходимо создать. К примеру, в случае необходимости учета таких важных факторов, как взаимодействие частиц с подложкой (адсорбция или адгезия) или со свободной поверхностью капли (капиллярные силы).

Разработка модулей для моделирования диффузии и капиллярного притяжения сферических частиц обсуждалась ранее в [42, 44, 45]. Также был рассмотрен случай для бинарной смеси частиц разного размера [13]. Цель текущей работы — разработать численный алгоритм и программный модуль для расчета гидродинамики в высыхающей капле для дальнейшего использования в программном комплексе, ориентированном на решение задач в области испарительной литографии. Но при разработке необходимо учитывать одно требование. Алгоритм должен быть рассчитан на большое количество предельно малых временных шагов (минимальные вычислительные затраты на каждом временном шаге), что позволит корректно работать уже имеющемуся модулю «Диффузия частиц», основанному на методе Монте—Карло, для явного предсказания динамики частиц, так как в этом случае выполняется соотношение Эйнштейна—Смоулховского [45]. Величина временного шага Δt косвенно зависит от размера частиц, например, для частиц с радиусом

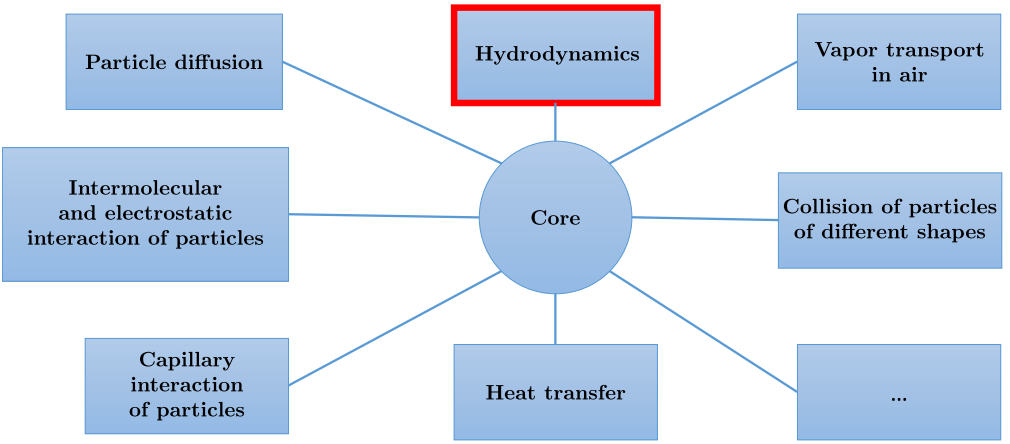


Рис. 1. Схема планируемого программного комплекса для решения задач в области испарительной литографии [Figure 1. Scheme of the planned software complex for solving problems in the field of evaporative lithography]

0.35 мкм в [45] использовался шаг $\Delta t = 10^{-4}$ с.

Также здесь стоит отметить, по какой причине не подходят существующие готовые решения. Описанное в [48] аналитическое решение базируется на смеси кинематического подхода и приближения смазки, которое еще известно как приближение тонкого слоя. Под кинематическим подходом здесь понимается нахождение усредненной радиальной скорости потока из закона сохранения массы. Такой подход не объясняет природу возникновения потока, как например, капиллярные силы, когда в задаче явным образом учитывают градиент давления Лапласа и кривизну свободной поверхности. Как видно из полученного решения [48], оно явным образом не зависит от ряда физических параметров, как, например, вязкость жидкости. Кроме того, это решение опирается на частный случай с определенным видом функции плотности потока пара $J(r,t)$, что не позволяет решать задачи, связанные с испарительной литографией. Здесь r — радиальная координата и t — время. Различные маски, излучатели и прочее внешнее воздействие оказывают влияние на концентрацию пара вблизи свободной поверхности, что в итоге влияет на капиллярный поток жидкости [2]. Таким образом, для определения $J(r,t)$ необходимо численно моделировать перенос пара в воздухе. Предложенная в [49] неявная разностная схема является неустойчивой. Вблизи границ появляются осцилляции, которые со временем разрастаются на всю область. Авторы [49] подробно не разъясняют способ численной реализации граничных условий, ссылаясь на приложенный код в дополнении. Но восстановить некоторые граничные условия из кода крайне сложно. В программе [49] на каждом временном шаге выполняется искусственное сглаживание осциллирующих точек с помощью специального фильтра. Кроме того, на каждом шаге необходимо выполнять такие вычислительно затратные операции, как нахождение обратной матрицы и умножение матрицы на вектор. По этим причинам данный программный модуль [49] нам не подходит. В отличие от [27, 28, 49] здесь дополнительно будет описана численная реализация расчета поля скорости потока жидкости, а не только усредненной по толщине жидкого слоя радиальной компоненты скорости.

1. Физическая постановка задачи. Капля жидкости испаряется на твердом горизонтальном непромокаемом основании при нормальных комнатных условиях. Считаем, что жидкость несжимаема. Трехфазная граница закреплена, поэтому радиус контакта капли и подложки R — постоянная величина. Рассматриваем случай относительно малого объема жидкости, когда сила поверхностного натяжения преобладает над силой тяжести, число Бонда $\mathsf{Bo} = \rho h_0^2 g/\sigma \approx 1.4 \cdot 10^{-3} \ll 1$, где g — ускорение свободного падения, ρ — плотность жидкости, σ — коэффициент поверхностного натяжения и $h_0 = h(0,0)$ — начальная высота капли. Здесь функция $h = h(r,t)$ задает профиль свободной поверхности жидкости (граница «жидкость – воздух»). В этом случае форма капли близка форме сферического сегмента. По причине осевой симметрии удобно использовать цилиндрическую систему координат (r,z). Движение жидкости вызывает локальные изменения кривизны поверхности в процессе испарения жидкости, приводящие к возникновению градиента давления Лапласа (капиллярный поток). В случае малых значений краевого угла смачивания θ капиллярный поток преобладает над потоком Марангони (см. оценку в [44]). Здесь речь идет о тонких каплях, для которых аспектное отношение $\varepsilon = h_0/R \ll 1$. Значения параметров задачи приведены в табл. 1.

Распределение растворенного или взвешенного в жидкости вещества будем описывать функцией $\langle C\rangle(r,t)$. Предполагаем, что массовая доля вещества $\langle C\rangle$ не зависит от координаты z. Если время диффузионной релаксации вещества много меньше времени полного испарения, т.е. $t_d \ll t_f$, то устанавливается равномерная концентрация вещества вдоль вертикального направления. Здесь время $t_d = h_0^2/D = 100$ с и время $t_f = 450$ с. Таким образом, величина $\langle C\rangle$ является усредненной по высоте жидкого слоя.

2. Математическая модель. Запишем уравнение неразрывности и стационарные уравнения Навье—Стокса без учета инерционных слагаемых в цилиндрической системе координат:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial(ru)}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\Big(\frac{\eta}{r}\frac{\partial(ru)}{\partial r}\Big) + \frac{\partial}{\partial z}\Big(\eta\frac{\partial u}{\partial z}\Big) = \frac{\partial P}{\partial r}, \tag{2}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\Big(\eta r\frac{\partial w}{\partial r}\Big) + \frac{\partial}{\partial z}\Big(\eta\frac{\partial w}{\partial z}\Big) = \frac{\partial P}{\partial z}, \tag{3}$$

где $\eta = \eta(\langle C\rangle)$ — динамическая вязкость жидкости. Давление P, горизонтальная и вертикальная компоненты вектора скорости $\mathbf{v} = (u,w)$ являются функциями, зависящими от t, r и z. Система уравнений (1)–(3) справедлива для несжимаемой жидкости и малых значений числа Рейнольдса $\mathsf{Re} = \rho u_c h_0/\eta_0$. Как правило, характерная скорость потока жидкости $u_c \approx 1$ мкм/с в испаряющейся при комнатных условиях капле воды. В таком случае число Рейнольдса $\mathsf{Re} \approx 10^{-4} \ll 1$.

Для перехода к безразмерным записям рассмотрим масштабные соотношения: $\eta = \eta_0\tilde{\eta}$, $J = \tilde{J}J_c$, $u = u_c\tilde{u}$, $w = \varepsilon u_c\tilde{w}$, $t = t_c\tilde{t}$, $P = P_c\tilde{P}$, $r = R\tilde{r}$ и $z = h_0\tilde{z}$. Здесь знаком «тильда» помечаем безразмерные величины. Заметим, что горизонтальные и вертикальные составляющие (размер, скорость)

Таблица 1

Физические и геометрические параметры задачи [Physical and geometric parameters of the problem]

Обозначение [Designation]	Расшифровка [Description]	Величина [Value]	Единицы измерения [Units of Measurement]
h_0	высота капли [drop height]	10^{-4}	m
R	радиус основания капли [drop base radius]	10^{-3}	m
h_f	толщина жидкого слоя в районе контактной линии [thickness of the liquid layer in the area of the contact line]	$0.01h_0$	m
$\varepsilon = h_0/R$	аспектное отношение [aspect ratio]	0.1	–
$\theta \approx 2\varepsilon$	краевой угол смачивания [contact angle]	0.2	radians
C_0	начальная массовая доля [initial mass fraction]	0.05	–
C_g	концентрация фазового перехода, например, гелеобразования [phase transition concentration, e.g. gelation]	0.7	–
D	коэффициент диффузии растворенного или взвешенного вещества [diffusion coefficient of a dissolved or suspended matter]	10^{-10}	$\mathrm{m^2/s}$
η_0	вязкость чистой жидкости [viscosity of a pure liquid]	10^{-3}	$\mathrm{Pa \cdot s}$
ρ	плотность жидкости [liquid density]	10^3	$\mathrm{kg/m^3}$
σ	коэффициент поверхностного натяжения [surface tension coefficient]	0.072	N/m
t_f	время полного испарения [total evaporation time]	450	s
D_v	коэффициент диффузии пара [vapor diffusion coefficient]	$2.4 \cdot 10^{-5}$	$\mathrm{m^2/s}$
C_v	плотность насыщенного пара [saturated steam density]	$2.32 \cdot 10^{-2}$	$\mathrm{kg/m^3}$
H	относительная влажность [relative humidity]	0.4	–

масштабируются по-разному. Такой подход лежит в основе приближения смазки.

Зададим характерные величины: скорость $u_c = \eta_0/(\rho h_0) \approx 0.01$ м/с, время $t_c = R/u_c \approx 0.1$ с, плотность потока пара $J_c = \varepsilon u_c \rho \approx 1$ кг/(м$^2 \cdot$ с) и давление $P_c = R u_c \eta_0 / h_0^2 \approx 1$ Па. Запишем уравнение неразрывности (1) в безразмерном виде:

$$\frac{1}{\tilde r}\frac{\partial(\tilde r \tilde u)}{\partial \tilde r} + \frac{\partial \tilde w}{\partial \tilde z} = 0. \tag{4}$$

Заметим, что уравнение (4) не отличается по форме записи от (1). Уравнения (2) и (3) записываются так:

$$\varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial \tilde r}\Big(\frac{\tilde\eta}{\tilde r}\frac{\partial(\tilde r \tilde u)}{\partial \tilde r}\Big) + \frac{\partial}{\partial \tilde z}\Big(\tilde\eta \frac{\partial \tilde u}{\partial \tilde z}\Big) = \frac{\partial \tilde P}{\partial \tilde r}, \tag{5}$$

$$\varepsilon^3 \frac{1}{\tilde r}\frac{\partial}{\partial \tilde r}\Big(\tilde\eta \tilde r \frac{\partial \tilde w}{\partial \tilde r}\Big) + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial \tilde z}\Big(\tilde\eta \frac{\partial \tilde w}{\partial \tilde z}\Big) = \frac{\partial \tilde P}{\partial \tilde z}. \tag{6}$$

Пренебрегая слагаемыми, при которых стоят ε^2 и ε^3, в (5) и (6), получаем

$$\frac{\partial \tilde P}{\partial \tilde r} - \frac{\partial}{\partial \tilde z}\Big(\tilde\eta \frac{\partial \tilde u}{\partial \tilde z}\Big) = 0, \tag{7}$$

$$\frac{\partial \tilde P}{\partial \tilde z} = 0. \tag{8}$$

В результате получена упрощенная система уравнений (4), (7) и (8).

Из (8) следует, что давление $\tilde P$ не зависит от $\tilde z$, тогда вместо $\tilde P$ будем рассматривать усредненную по высоте жидкого слоя величину $\langle \tilde P \rangle = \langle \tilde P \rangle(\tilde r, \tilde t)$. Интегрируя левую и правую части (7) и учитывая, что вязкость $\tilde\eta$ здесь не зависит явно или косвенно от $\tilde z$,

$$\frac{\partial \langle \tilde P \rangle}{\partial \tilde r}\int d\tilde z - \tilde\eta \int \frac{\partial^2 \tilde u}{\partial \tilde z^2}\, d\tilde z = \int 0\, d\tilde z,$$

получаем

$$\frac{\partial \langle \tilde P \rangle}{\partial \tilde r}(\tilde z + C_1) - \tilde\eta\Big(\frac{\partial \tilde u}{\partial \tilde z} + C_2\Big) = C_3.$$

Как было отмечено ранее, термокапиллярные потоки здесь не рассматриваются, поэтому на свободной границе $\tilde z = \tilde h$ выполняется баланс касательных напряжений $\partial \tilde u/\partial \tilde z = 0$, тогда

$$\frac{\partial \langle \tilde P \rangle}{\partial \tilde r}\tilde h + \frac{\partial \langle \tilde P \rangle}{\partial \tilde r} C_1 = C_3 + \tilde\eta C_2.$$

Для $\tilde r = 0$ выполняется условие осевой симметрии $\partial \langle \tilde P \rangle/\partial \tilde r = 0$, тогда $C_3 = -\tilde\eta(0, \tilde t) C_2$. В действительности вязкость $\tilde\eta$ зависит от $\tilde r$ и $\tilde t$ неявным образом, через массовую долю $\langle C \rangle$, но здесь для краткости пишем $\tilde\eta(\tilde r, \tilde t)$. На границе $\tilde r = \tilde R$ горизонтальная компонента скорости является постоянной величиной, не зависящей от $\tilde z$ (в силу прилипания к подложке $\tilde u = 0$).

Тогда в этой точке $\partial^2\tilde{u}/\partial\tilde{z}^2 = 0$. Учитывая это, из (7) получаем граничное условие $\partial\langle\tilde{P}\rangle/\partial\tilde{r} = 0$ для $\tilde{r} = \tilde{R}$. С таким условием приходим к соотношению $C_3 = -\tilde{\eta}(\tilde{R},\tilde{t})C_2$. На разных границах получили одно и то же соотношение, хотя в общем случае $\tilde{\eta}(0,\tilde{t}) \neq \tilde{\eta}(\tilde{R},\tilde{t})$. Приходим к выводу, что $C_2 = C_3 = 0$. В таком случае константа интегрирования $C_1 = -\tilde{h}$ и последнее выражение принимает вид

$$\frac{\partial\langle\tilde{P}\rangle}{\partial\tilde{r}}(\tilde{z}-\tilde{h}) - \tilde{\eta}\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\tilde{z}} = 0.$$

Интегрируем полученное еще раз:

$$\frac{\partial\langle\tilde{P}\rangle}{\partial\tilde{r}}\int\tilde{z}\,d\tilde{z} - \frac{\partial\langle\tilde{P}\rangle}{\partial\tilde{r}}\tilde{h}\int d\tilde{z} - \tilde{\eta}\int\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\tilde{z}}\,d\tilde{z} = \int 0\,d\tilde{z},$$

получаем

$$\frac{\partial\langle\tilde{P}\rangle}{\partial\tilde{r}}\Big(\frac{\tilde{z}^2}{2} + C_4 - \tilde{h}\tilde{z} + C_5\Big) - \tilde{\eta}(\tilde{u} + C_6) = C_7.$$

Учитывая, что для $\tilde{z} = 0$ выполняется условие прилипания $\tilde{u} = 0$ и для $\tilde{r} = 0$ выполняется условие $\partial\langle\tilde{P}\rangle/\partial\tilde{r} = 0$, получаем $C_7 = -\tilde{\eta}(0,\tilde{t})C_6$. Учитывая аналогичные граничные условия для $\tilde{r} = \tilde{R}$, получаем $C_7 = -\tilde{\eta}(\tilde{R},\tilde{t})C_6$. Приходим к выводу, что $C_6 = C_7 = 0$. Затем, учитывая лишь условие $\tilde{u} = 0$ для $\tilde{z} = 0$, получаем $C_4 = -C_5$. В итоге выражаем горизонтальную компоненту вектора скорости:

$$\tilde{u} = \frac{H_a(x)}{\tilde{\eta}}\frac{\partial\langle\tilde{P}\rangle}{\partial\tilde{r}}\Big(\frac{\tilde{z}^2}{2} - \tilde{h}\tilde{z}\Big). \tag{9}$$

В некоторых уравнениях модели, в том числе и в (9), дополнительно используется аналитическое приближение функции Хевисайда H_a, чтобы исключить некоторые виды массопереноса при возникновении фазового перехода, как, например, «золь–гель», «жидкость–стекло» и т.п.:

$$H_a(x) = \frac{1}{1+\exp(-2k_h x)},$$

где $x = C_g - \langle C\rangle - \delta x$, $k_h = 10/\delta x$, δx — ширина области перехода. Теперь, подставляя (9) в (4) и интегрируя полученное:

$$\int\frac{1}{\tilde{r}}\frac{\partial}{\partial\tilde{r}}\Big(\frac{\tilde{r}H_a(x)}{\tilde{\eta}}\frac{\partial\langle\tilde{P}\rangle}{\partial\tilde{r}}\Big(\frac{\tilde{z}^2}{2} - \tilde{h}\tilde{z}\Big)\Big)\,d\tilde{z} + \int\frac{\partial\tilde{w}}{\partial\tilde{z}}\,d\tilde{z} = \int 0\,d\tilde{z},$$

получаем

$$\frac{1}{\tilde{r}}\frac{\partial}{\partial\tilde{r}}\Big(\frac{\tilde{r}H_a(x)}{\tilde{\eta}}\frac{\partial\langle\tilde{P}\rangle}{\partial\tilde{r}}\Big(\frac{\tilde{z}^3}{6} - \frac{\tilde{h}\tilde{z}^2}{2} + C_8\Big)\Big) + \tilde{w} + C_9 = 0.$$

Запишем полученное выражение в развернутом виде:

$$\frac{H_a(x)}{\tilde{r}\tilde{\eta}}\frac{\partial\langle\tilde{P}\rangle}{\partial\tilde{r}}\Big(\frac{\tilde{z}^3}{6} - \frac{\tilde{h}\tilde{z}^2}{2}\Big) + \frac{H_a(x)}{\tilde{\eta}}\Big(\frac{\tilde{z}^3}{6} - \frac{\tilde{h}\tilde{z}^2}{2}\Big)\frac{\partial^2\langle\tilde{P}\rangle}{\partial\tilde{r}^2} - \frac{H_a(x)\tilde{z}^2}{2\tilde{\eta}}\frac{\partial\langle\tilde{P}\rangle}{\partial\tilde{r}}\frac{\partial\tilde{h}}{\partial\tilde{r}} +$$

$$+\frac{C_8 H_a(x)}{\tilde r\tilde\eta}\frac{\partial\langle\tilde P\rangle}{\partial\tilde r}+\frac{C_8 H_a(x)}{\tilde\eta}\frac{\partial^2\langle\tilde P\rangle}{\partial\tilde r^2}+$$
$$+\frac{\partial H_a(x)}{\partial\tilde r}\frac{1}{\tilde\eta}\frac{\partial\langle\tilde P\rangle}{\partial\tilde r}\Big(\frac{\tilde z^3}{6}-\frac{\tilde h\tilde z^2}{2}+C_8\Big)+\tilde w+C_9=0.$$

Учитывая условие непротекания $\tilde w=0$ для $\tilde z=0$ и условие $\partial\langle\tilde P\rangle/\partial\tilde r=0$ для $\tilde r=0$ и $\tilde r=\tilde R$, получаем два соотношения:

$$\frac{C_8 H_a(x)}{\tilde\eta(0,\tilde t)}\frac{\partial^2\langle\tilde P\rangle(0,\tilde t)}{\partial\tilde r^2}+C_9=0 \quad \text{и} \quad \frac{C_8 H_a(x)}{\tilde\eta(\tilde R,\tilde t)}\frac{\partial^2\langle\tilde P\rangle(\tilde R,\tilde t)}{\partial\tilde r^2}+C_9=0.$$

Из чего следует, что $C_8=C_9=0$. В таком случае получаем выражение для вертикальной компоненты вектора скорости:

$$\tilde w=-\frac{1}{\tilde r}\frac{\partial}{\partial\tilde r}\Big(\frac{\tilde r H_a(x)}{\tilde\eta}\frac{\partial\langle\tilde P\rangle}{\partial\tilde r}\Big(\frac{\tilde z^3}{6}-\frac{\tilde h\tilde z^2}{2}\Big)\Big). \tag{10}$$

Движение свободной поверхности капли в процессе испарения описывается законом сохранения (см. ссылки в [28])

$$\frac{\partial h}{\partial t}+\frac{1}{r}\frac{\partial(rh\langle u\rangle)}{\partial r}=-\frac{J}{\rho}\sqrt{1+\Big(\frac{\partial h}{\partial r}\Big)^2}, \tag{11}$$

где $\langle u\rangle$ — усредненная по высоте жидкого слоя скорость радиального потока жидкости. В безразмерном виде (11) записывается так:

$$\frac{\partial\tilde h}{\partial\tilde t}+\frac{1}{\tilde r}\frac{\partial(\tilde r\tilde h\langle\tilde u\rangle)}{\partial\tilde r}=-\tilde J, \tag{12}$$

где пренебрегаем $\sqrt{1+\varepsilon^2(\partial\tilde h/\partial\tilde r)^2}$ в правой части как величиной второго порядка малости. С учетом (9) для усредненной радиальной скорости $\langle\tilde u\rangle$ имеем

$$\langle\tilde u\rangle=\frac{1}{\tilde h}\int_0^{\tilde h}\tilde u\,d\tilde z=-H_a(x)\frac{\tilde h^2}{3\tilde\eta}\frac{\partial\langle\tilde P\rangle}{\partial\tilde r}. \tag{13}$$

Капиллярное давление зависит от локальной кривизны поверхности:

$$\langle\tilde P\rangle=-\frac{1}{\mathsf{Ca}}\frac{1}{\tilde r}\frac{\partial}{\partial\tilde r}\Big(\tilde r\frac{\partial\tilde h}{\partial\tilde r}\Big), \tag{14}$$

что следует из формулы для давления Лапласа [28] с учетом приближения смазки. Здесь капиллярное число $\mathsf{Ca}=\eta_0 u_c/(\sigma\varepsilon^3)=\eta^2/(\varepsilon^3\rho h_0\sigma)\approx 0.14$. В [49] выражения (13) и (14) подставляются в уравнение (12) и затем строится разностная схема для уравнения с производной четвертого порядка по r относительно h. Чтобы избежать таких громоздких разностных схем, здесь (13) и (14) рассматриваются как отдельные уравнения.

Для описания переноса растворенного или взвешенного вещества используем уравнение конвекции–диффузии [28]

$$\frac{\partial\langle C\rangle}{\partial t}+\langle u\rangle\frac{\partial\langle C\rangle}{\partial r}=\frac{D}{rh}\frac{\partial}{\partial r}\Big(rh\frac{\partial\langle C\rangle}{\partial r}\Big)+\frac{J\langle C\rangle}{\rho h}\sqrt{1+\Big(\frac{\partial h}{\partial r}\Big)^2}, \tag{15}$$

где D — коэффициент диффузии растворенного или взвешенного вещества. Подробный вывод уравнения (15) описан в [50]. В безразмерном виде уравнение (15) с учетом приближения смазки принимает вид

$$\frac{\partial\langle C\rangle}{\partial\tilde t}+\langle\tilde u\rangle\frac{\partial\langle C\rangle}{\partial\tilde r}=\frac{H_a(x)}{\mathsf{Pe}}\frac{1}{\tilde r\tilde h}\frac{\partial}{\partial\tilde r}\Big(\tilde r\tilde h\frac{\partial\langle C\rangle}{\partial\tilde r}\Big)+\frac{\tilde J\langle C\rangle}{\tilde h}, \tag{16}$$

где Pe — число Пекле, $\mathsf{Pe}\approx Ru_c/D\approx 10^5$. В итоге система уравнений включает в себя уравнения (9), (10), (12), (13), (14) и (16).

3. Вязкость и плотность потока пара. Теперь необходимо ввести замыкающие соотношения для некоторых величин. В предложенной здесь модели вязкость зависит от массовой доли вещества. Для описания этой зависимости используем формулу Муни

$$\tilde\eta=\exp\Big(\frac{S\langle C\rangle}{1-K\langle C\rangle}\Big),$$

где значения эмпирических параметров $S=1.692$ и $K=1.236$ возьмем из [51]. Также считаем, что плотность потока пара зависит от концентрации вещества и толщины жидкого слоя:

$$\tilde J=\tilde J_0\frac{1-\langle C\rangle^2/C_g^2}{\kappa+\tilde h},$$

где C_g — критическая массовая доля, при которой происходит фазовый переход [27] (золь–гель, стеклообразование, кристаллизация и т. п.), полагаем $C_g\approx 0.7$ [51]. Для расчетов будем использовать значение параметра $\kappa=1$. Это некоторая аппроксимация для учета испарения, поэтому в дальнейшем планируется разработать модуль численного расчета переноса пара в воздухе (рис. 1). Величина $\tilde J_0$ рассчитывается так:

$$\tilde J_0=\frac{D_vC_v(1-H)}{J_cR}(0.27\theta^2+1.3)(0.6381-0.2239(\theta-\pi/4)^2),$$

где H — относительная влажность, D_v — коэффициент диффузии пара и C_v — плотность насыщенного пара [48].

4. Начальные и граничные условия. Запишем начальные условия задачи. Для тонких капель, размер которых меньше капиллярной длины, допустимо использовать параболическое приближение начальной формы свободной поверхности $\tilde h(\tilde r,0)=1-\tilde r^2$ [48]. Начальную массовую долю вещества опишем с помощью выражения [27]

$$\langle C\rangle(\tilde r,0)=C_g\frac{2-C_0+2(C_0-1)}{1+\exp(w_c(\tilde r-1))},$$

где параметр w_c регулирует начальную ширину кольцевого осадка (здесь в расчетах используем $w_c = 30$). Такое условие предполагает, что вещество в начале процесса распределено практически равномерно вдоль радиальной координаты, за исключением района периферии ($\tilde{r} \approx \tilde{R} = 1$), где концентрация устремляется к пороговому значению C_g, что обеспечивает закрепление трехфазной границы «жидкость–подложка–воздух».

Для $\tilde{r} = 0$ по причине осевой симметрии задаются следующие граничные условия:

$$\frac{\partial\langle\tilde{P}\rangle}{\partial\tilde{r}}\Big|_{\tilde{r}=0} = \frac{\partial\tilde{h}}{\partial\tilde{r}}\Big|_{\tilde{r}=0} = \frac{\partial\langle C\rangle}{\partial\tilde{r}}\Big|_{\tilde{r}=0} = \frac{\partial\tilde{w}}{\partial\tilde{r}}\Big|_{\tilde{r}=0} = \tilde{u}\big|_{\tilde{r}=0} = \langle\tilde{u}\rangle\big|_{\tilde{r}=0} = 0.$$

На границе $\tilde{r} = \tilde{R}$ выполняются условия

$$\frac{\partial\langle\tilde{P}\rangle}{\partial\tilde{r}}\Big|_{\tilde{r}=\tilde{R}} = \tilde{w}\big|_{\tilde{r}=\tilde{R}} = \tilde{u}\big|_{\tilde{r}=\tilde{R}} = \langle\tilde{u}\rangle\big|_{\tilde{r}=\tilde{R}} = 0, \quad \tilde{h}\big|_{\tilde{r}=\tilde{R}} = \tilde{h}_f, \quad \langle C\rangle\big|_{\tilde{r}=\tilde{R}} = C_g.$$

Условие для $\langle\tilde{P}\rangle$ уже обсуждалось в п. 2. Вертикальная и горизонтальная компоненты вектора скорости потока жидкости записываются из соображений непротекания и прилипания. Здесь $\tilde{h}_f$ — толщина жидкого слоя в районе контактной линии.

Граничные условия вдоль подложки следующие:

$$\tilde{w}\big|_{\tilde{z}=0} = \tilde{u}\big|_{\tilde{z}=0} = 0,$$

по причине непротекания и прилипания. Вдоль свободной границы жидкости условия принимают вид

$$\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\tilde{z}}\Big|_{\tilde{z}=\tilde{h}} = \tilde{w}\big|_{\tilde{z}=\tilde{h}} = 0$$

в предположении, что на этой границе нет вязкого трения и отсутствует поток жидкости через границу «жидкость–воздух» (из-за медленного испарения влияние подвижной границы и отдачи пара не учитываем). В приближении смазки на этой границе $\tilde{w}$ и $\tilde{u}$ соответствуют нормальной и касательной компонентам вектора скорости. Последние условия для скорости потока на свободной поверхности капли являются излишними, так как значения $\tilde{u}$ и $\tilde{w}$ на этой границе несложно рассчитать с использованием выражений (9) и (10).

5. Численный метод решения задачи. В этом пункте рассматриваются только безразмерные величины, поэтому знак «тильда» опускаем для краткости. Для дискретной аппроксимации уравнений модели с помощью разностных схем введем пространственно-временную сетку с координатами $r_n = n\Delta r$, $z_m = m\Delta z$ и $t_k = k\Delta t$, где $n = 0, 1, \ldots, N$; $m = 0, 1, \ldots, M$; $k = 0, 1, \ldots, K$. Параметры Δt, Δr и Δz обозначают шаги по времени и пространству соответственно. Кроме того, сетка характеризуется такими величинами, как количество отрезков (N, M и K) и узлов ($N+1$, $M+1$ и $K+1$). Параметр $K = [t_f/\Delta t]$, здесь квадратные скобки обозначают целочисленное деление. Шаги по пространству определяются как $\Delta r = R/N$ и $\Delta z = h_0/M$.

Перепишем уравнения (9), (10), (12), (13), (14) и (16) в дискретном виде:

$$u^k_{n,m} = \frac{H_a(x_n)}{\eta^k_n}\,\frac{\langle P\rangle^k_{n+1} - \langle P\rangle^k_{n-1}}{2\,\Delta r}\Big(\frac{z^2_m}{2} - h^k_n z_m\Big), \tag{17}$$

$$w_{n,m}^k = -\frac{H_a(x_{n+1/2})}{r_n\,\Delta r}\frac{r_{n+1/2}}{\eta_{n+1/2}^k}\frac{\langle P\rangle_{n+1}^k - \langle P\rangle_n^k}{\Delta r}\Big(\frac{z_m^3}{6} - \frac{h_{n+1/2}^k z_m^2}{2}\Big) + \\ + \frac{H_a(x_{n-1/2})}{r_n\,\Delta r}\frac{r_{n-1/2}}{\eta_{n-1/2}^k}\frac{\langle P\rangle_n^k - \langle P\rangle_{n-1}^k}{\Delta r}\Big(\frac{z_m^3}{6} - \frac{h_{n-1/2}^k z_m^2}{2}\Big), \quad (18)$$

$$\frac{h_n^{k+1} - h_n^k}{\Delta t} + \frac{1}{r_n}\frac{r_{n+1}h_{n+1}^{k+1}\langle u\rangle_{n+1}^{k+1} - r_{n-1}h_{n-1}^{k+1}\langle u\rangle_{n-1}^{k+1}}{2\Delta r} = -J_n^k, \quad (19)$$

$$\langle u\rangle_n^k = -H_a(x_n)\frac{(h_n^k)^2}{3\eta_n^k}\frac{\langle P\rangle_{n+1}^k - \langle P\rangle_{n-1}^k}{2\Delta r}, \quad (20)$$

$$\frac{\langle C\rangle_n^{k+1} - \langle C\rangle_n^k}{\Delta t} + \frac{|\langle u\rangle_n^{k+1}| + \langle u\rangle_n^{k+1}}{2}\frac{\langle C\rangle_n^k - \langle C\rangle_{n-1}^k}{\Delta r} - \\ - \frac{|\langle u\rangle_n^{k+1}| - \langle u\rangle_n^{k+1}}{2}\frac{\langle C\rangle_{n+1}^k - \langle C\rangle_n^k}{\Delta r} = \\ = \frac{J_n^k\langle C\rangle_n^k}{h_n^{k+1}} + \frac{1}{\mathsf{Pe}}\frac{H_a(x_n)}{r_n h_n^{k+1}\Delta r}\Big(r_{n+1/2}h_{n+1/2}^{k+1}\frac{\langle C\rangle_{n+1}^k - \langle C\rangle_n^k}{\Delta r} - \\ - r_{n-1/2}h_{n-1/2}^{k+1}\frac{\langle C\rangle_n^k - \langle C\rangle_{n-1}^k}{\Delta r}\Big), \quad (21)$$

$$\langle P\rangle_n^k = -\frac{1}{\mathsf{Ca}}\frac{1}{\Delta r r_n}\Big(r_{n+1/2}\frac{h_{n+1}^k - h_n^k}{\Delta r} - r_{n-1/2}\frac{h_n^k - h_{n-1}^k}{\Delta r}\Big), \quad (22)$$

где $x_n = C_g - \langle C\rangle_n^k - \delta x$ и $k_h = 10/\delta x = 2000$. Промежуточные значения между узлами вида $f_{n\pm1/2}$ рассчитываются как $(f_{n\pm1} + f_n)/2$. Стоит заметить, что в (21) для дискретизации конвективного слагаемого используется схема с разностями против потока. Для приближения пространственной производной первого порядка в (17), (19) и (20) используется центральная разностная схема. Это дает второй порядок аппроксимации по Δr, как и аппрокисмация производной второго порядка в (18), (21) и (22). Здесь используется как явная разностная схема (21), так и неявная — (19).

Теперь запишем начальные и граничные условия из п. 4 в дискретном виде. Начальная форма свободной поверхности в дискретном виде задается как $h_n^0 = 1 - r_n^2$. Формула начального распределения массовой доли частиц принимает вид

$$\langle C\rangle_n^0 = C_g\frac{2 - C_0 + 2(C_0 - 1)}{1 + \exp(w_c(r_n - 1))}.$$

С граничными условиями первого рода все просто, $f_{n,m}^k = c$, где f — искомая функция и c — некоторая константа (здесь $n = 0$ или $n = N$). Для граничных условий второго рода вида $\partial f/\partial r = 0$ используются аппроксимации второго порядка точности: $f_{0,m} = (4f_{1,m} - f_{2,m})/3$, $f_{N,m} = 4f_{N-1,m} - 3f_{N-2,m}$. Для величин, не зависящих от z, индекс m в этих формулах отсутствует.

Дискретное уравнение (19) можно расщепить по физическим процессам на два уравнения. Одно из них описывает изменение h в результате испарения

$$\frac{h_n^{\text{tmp}} - h_n^k}{\Delta t} = -J_n^k, \tag{23}$$

другое — в результате конвективного переноса массы:

$$\frac{h_n^{k+1} - h_n^{\text{tmp}}}{\Delta t} + \frac{1}{r_n}\frac{r_{n+1}h_{n+1}^{k+1}\langle u\rangle_{n+1}^{k+1} - r_{n-1}h_{n-1}^{k+1}\langle u\rangle_{n-1}^{k+1}}{2\Delta r} = 0. \tag{24}$$

Здесь (23) и (24) — явная и неявная разностные схемы соответственно. Временное значение высоты капли h_n^{tmp} определяется из (23). Затем, после пересчета давления (22) и усредненной скорости (20), решается (24) и находится итоговое значение h_n^{k+1} на новом временном слое. Уравнение (24) можно переписать в виде

$$a_n h_{n-1}^{k+1} + b_n h_n^{k+1} + c_n h_{n+1}^{k+1} = d_n, \tag{25}$$

где $a_n = -\Delta t r_{n-1}\langle u\rangle_{n-1}^{k+1}/(2r_n\Delta r)$, $b_n = 1$, $c_n = \Delta t r_{n+1}\langle u\rangle_{n+1}^{k+1}/(2r_n\Delta r)$ и $d_n = h_n^{\text{tmp}}$. В совокупности для всех узлов n из (25) получаем СЛАУ, которую можно представить в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} b_0 & c_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_1 & b_1 & c_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & b_2 & c_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{N-1} & b_{N-1} & c_{N-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_N & b_N \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_0^{k+1} \\ h_1^{k+1} \\ \vdots \\ h_{N-1}^{k+1} \\ h_N^{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_0 \\ d_1 \\ \vdots \\ d_{N-1} \\ d_N \end{pmatrix}.$$

Запишем последнее выражением в более компактном виде:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{h} = \mathbf{d},$$

где $\mathbf{A}$ — матрица коэффициентов, $\mathbf{d}$ — вектор правых частей и $\mathbf{h}$ — искомый вектор. Обратим внимание, что коэффициенты a_0 и c_N в вычислениях не задействованы, квадратная матрица $\mathbf{A}$ характеризуется ленточной трехдиагональной структурой ненулевых элементов и такая СЛАУ может быть эффективно решена методом прогонки. На основании граничных условий запишем значения коэффициентов b_0, c_0, d_0, a_N, b_N и d_N. Чтобы не нарушить трехдиагональную структуру матрицы $\mathbf{A}$, для граничного условия на оси симметрии $\partial h/\partial r = 0$ используем аппроксимацию первого порядка $(h_1^{k+1} - h_0^{k+1})/\Delta r \approx 0$. В таком случае получаем коэффициенты $b_0 = 1$, $c_0 = -1$ и $d_0 = 0$. Условие на трехфазной границе $h = h_f$ приводит к коэффициентам $a_N = 0$, $b_N = 1$ и $d_N = h_f$.

Значения h_n^{k+1}, $\langle u\rangle_n^{k+1}$ и $\langle P\rangle_n^{k+1}$ необходимо итеративно уточнять. На первой итерации ($i = 1$) задаем отправное значение $h_n^{k+1,1} = h_n^{\text{tmp}}$. Относительно резкое изменение давления за дискретный временной шаг в результате испарения согласно уравнению (23) приводит к неустойчивости вычислений. По этой причине здесь используется метод явной релаксации

$$\langle P\rangle_n^{k+1,i} = \langle P\rangle_n^{k+1,i-1} + \alpha(\langle P\rangle_n^{k+1,i} - \langle P\rangle_n^{k+1,i-1}),$$

где i — номер итерации, а α — фактор релаксации. Предварительно $\langle P\rangle_n^{k+1,i}$ рассчитывается по формуле (22). Значение фактора релаксации подобрано эмпирическим путем. Здесь в расчетах использовалось значение $\alpha = 10^{-3}$. Малое значение этого параметра улучшает устойчивость численного счета, но при этом увеличивает количество итераций, необходимых для сходимости решения. Вблизи границ при расчете усредненной скорости $\langle u\rangle$ по формуле (20) возникают осцилляции, которые за несколько временных шагов приводят к «разрушению» вычислений. С целью предотвращения таких осцилляций для приграничных узлов использовалась линейная интерполяция. Учитывая, что $\langle u\rangle \to 0$ при $r \to 0$ или при $r \to R$, получаем $\langle u\rangle_1 = \langle u\rangle_2/2$ и $\langle u\rangle_{N-1} = \langle u\rangle_{N-2}/2$.

Механизм остановки итераций включает два возможных события: достигнуто максимальное число итераций $I_{\max} = 100$ или максимальная невязка стала меньше заданной погрешности $r_{\max} < \epsilon_{\lim}$, где $\epsilon_{\lim} = 10^{-17}$ и

$$r_{\max} = \left|\max_n\left(h_n^{k+1} - h_n^{\text{tmp}} + \frac{\Delta t}{r_n}\frac{r_{n+1}h_{n+1}^{k+1}\langle u\rangle_{n+1}^{k+1} - r_{n-1}h_{n-1}^{k+1}\langle u\rangle_{n-1}^{k+1}}{2\Delta r}\right)\right|$$

согласно уравнению (24).

После того как итерации завершились, полученные значения h_n^{k+1}, $\langle u\rangle_n^{k+1}$ и $\langle P\rangle_n^{k+1}$ используются для нахождения $\langle C\rangle_n^{k+1}$, $u_{n,m}^{k+1}$ и $w_{n,m}^{k+1}$ через явные зависимости (21), (17) и (18). Но предварительно необходимо подавить пилообразные осцилляции, возникающие при расчете давления. Этот вид осцилляций не приводит к «разрушению» численного счета со временем, но поле скорости потока жидкости получается некорректным. Чтобы разрешить эту проблему, сделаем следующее. Выражение (13) запишем в виде

$$\frac{\partial\langle P\rangle}{\partial r} = -3\frac{\langle u\rangle\eta}{h^2}$$

и проинтегрируем его по r:

$$\langle P\rangle\big|_r - \langle P\rangle\big|_0 = -3\int_0^r \frac{\langle u\rangle\eta}{h^2}\,dr.$$

Слагаемое с интегралом аппроксимируем методом прямоугольников и получим формулу для восстановления давления:

$$\langle P\rangle_n^{\text{repair}} = -3\Delta r\sum_{n=0}^{N-1}\frac{\langle u\rangle\eta}{h^2} + \langle P\rangle_0^{\text{repair}}. \tag{26}$$

Учитывая пилообразную форму осцилляций, $\langle P\rangle_0^{\text{repair}}$ можно аппроксимировать следующим образом:

$$\langle P\rangle_0^{\text{repair}} \approx (\langle P\rangle_1 + \langle P\rangle_2)/2.$$

Со временем такие пилообразные осцилляция могут передаваться усредненной скорости $\langle u\rangle$ и профилю капли h. Здесь эта проблема решена за счет использования сглаживающего фильтра:

$$f_n^{\text{filt}} = \beta f_{n+1} + \gamma f_n + \delta f_{n-1}. \tag{27}$$

Параметры подобраны эмпирическим путем: $\beta = \delta = 0.25$ и $\gamma = 0.5$. В отличие от [49] используемый здесь фильтр прост в реализации, занимает в разы меньше памяти и вычислительных ресурсов. Кроме того, количество итераций фильтра из [49] заранее неизвестно. В нашем случае достаточно одного прохода по узлам $n = 1, 2, \ldots, N-1$. Узлы $n = 0$ и $n = N$ рассчитываются из граничных условий.

Блок-схема с алгоритмом[1] расчета представлена на рис. 2. В ней используются следующие дополнительные обозначения: p_c — счетчик временных периодов, p_n — количество временных периодов, p_s — размер временного периода во временных шагах и $H_n = H_a(x_n)$. Записи вида $f_n^k = f_n^{k+1}$ следует трактовать как векторные операции.

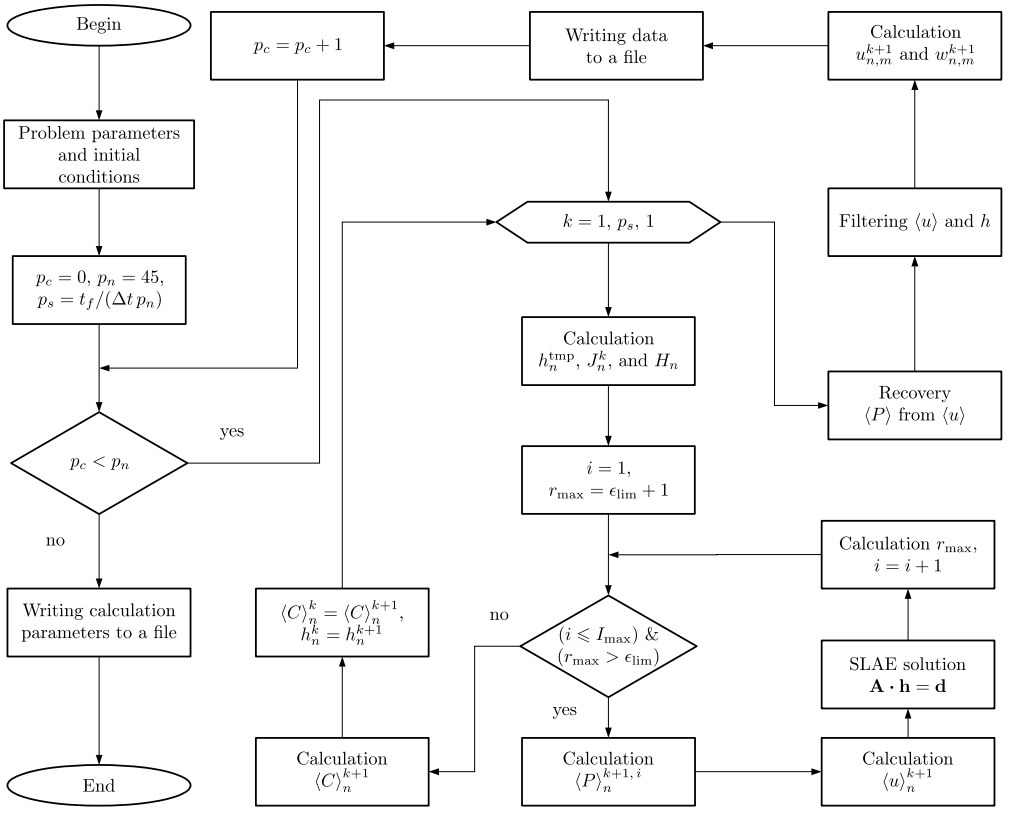


Рис. 2. Алгоритм численного расчета [Figure 2. Numerical calculation algorithm]

Для сравнения численный расчет также выполнялся в коммерческом пакете `Maple 18` с помощью модуля `pdsolve` с параметром `method` = `Theta`[1] (неявная разностная схема). Для того чтобы `pdsolve` справился с задачей, систему уравнений пришлось переписать в другом виде. Вместо (13) и (14) использовались уравнения

$$\psi = -\frac{1}{\mathsf{Ca}}\frac{\partial h}{\partial r}, \tag{28}$$

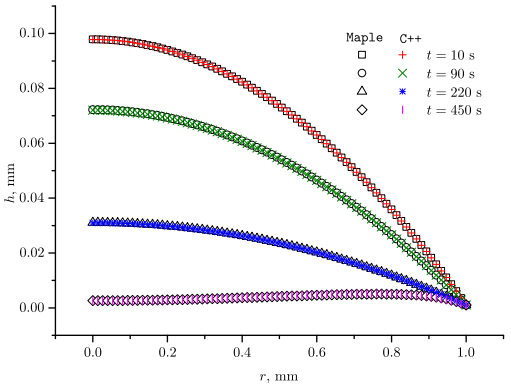
[1]Код программы на языке `C++` доступен по ссылке https://github.com/kolegovk/Suppression-of-sawtooth-oscillations.git

$$\langle u \rangle = -H_a(x)\frac{h^2}{3\eta}\frac{\partial}{\partial r}\Big(\frac{1}{r}\frac{\partial(r\psi)}{\partial r}\Big), \tag{29}$$

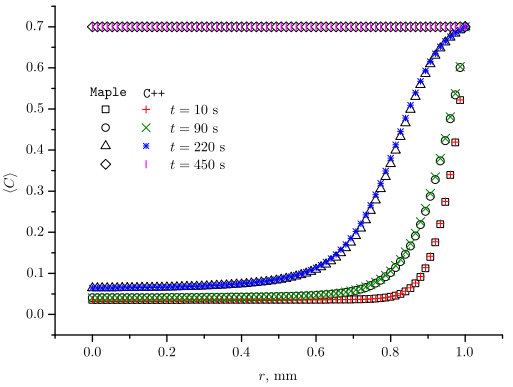
где ψ — вспомогательная функция. Причем модуль `pdsolve` не требует граничных условий для (28). Скорее всего, модуль определяет их автоматически из заданных условий для h. Для уравнения (29) на границах задается равенство скорости нулю (см. п. 4). Таким образом, в `Maple` решалась система уравнений (12), (16), (28) и (29).

6. Результаты и обсуждение. Результаты расчетов средствами двух программ сравниваются на рис. 3. На большинстве графиков расхождение практически незаметно. Максимальное отличие результата, полученного с помощью программы, написанной на `C++`, от результата, полученного с помощью модуля `pdsolve` в `Maple 18`, наблюдается для $\langle u \rangle$ на времени $t = 220$ с (рис. 3, c). В абсолютных величинах наибольшее расхождение соответствует точке $r \approx 0.75$ мм и составляет примерно 0.046 мкм/с, в относительных величинах это около 10 %.

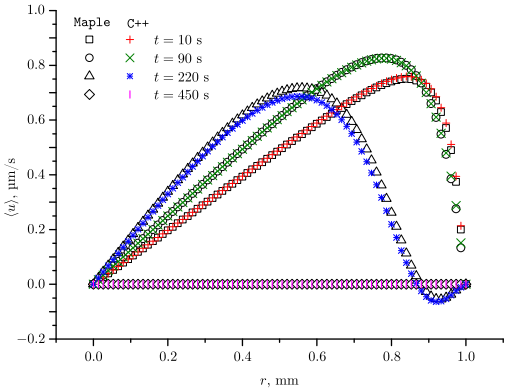
Расчет выполнялся для $N = 75$. Значения временных шагов для разработанной программы и для модуля `pdsolve` брались разные, так как в них используются разные алгоритмы расчета, соответственно и требования к временным шагам накладываются тоже разные. В `Maple 18` для численного решения СЛАУ используется итерационный метод Ньютона, но технические



a



b



c

Рис. 3. Сравнение результатов расчетов в двух программах для нескольких последовательных моментов времени: (a) высота капли, (b) массовая доля растворенного или взвешенного вещества и (c) радиальная скорость потока, усредненная по толщине жидкого слоя

[Figure 3. Comparison of the calculation results in two programs for several consecutive time points: (a) drop height, (b) mass fraction of dissolved or suspended matter, and (c) radial flow velocity averaged over the thickness of the liquid layer]

детали реализации закрыты для пользователя, есть лишь краткая справка по разностным схемам. Скорость вычислений с относительно малым временным шагом, конечно же, ниже, но это частично компенсируется тем, что `C++` является компилируемым языком, а язык `Maple` — интерпретируемый. Для расчетов в `Maple` использовалось значение $\Delta t = 0.1$ с, в разработанной программе — $\Delta t = 10^{-6}$ с. Кроме того, для программы на `C++` выполнены тестовые расчеты для $N = 25$ и $N = 50$ с целью проверки сходимости по сетке (во всех расчетах $M = N$). Для $N = 25$ приближенно подобрано максимальное значение временного шага $\Delta t = 10^{-4}$ с, при котором расчет не «разрушается». Значению $N = 50$ соответствует $\Delta t = 5 \cdot 10^{-6}$ с. Таким образом, небольшое уменьшение $\Delta r = R/N$ приводит к тому, что необходимо значительно уменьшать временной шаг. Эти наблюдения в вычислительных экспериментах косвенно свидетельствуют о том, что предложенная разностная схема является условно устойчивой. Длительность расчета в `Maple` составила около 10 мин для $N = 75$ (объем занимаемой памяти ≈ 217 Мб). Время расчета в программе на `C++` примерно составило 10 мин для $N = 25$, 5 ч для $N = 50$ и 29 ч для $N = 75$ (объем занимаемой памяти ≈ 3 Мб). Расчеты проводились на компьютере с ЦП `Intel Xeon CPU E3-1230 v3` с максимальной частотой 3.6 ГГц под управлением ОС `Windows 10`. Для получения исполняемого файла программы на `C++` использовался компилятор, встроенный в `Visual Studio 2022 Community Edition`.

Проверка закона сохранения массы для растворенного или взвешенного вещества для $N = 75$ показала погрешность около 0.27 %, что экспериментально подтверждает свойство консервативности в предложенной разностной схеме. Для этого были рассчитаны и сопоставлены значения

$$\sum_{n=0}^{N} h_n \langle C \rangle_n$$

на моментах времени $t = 0$ и $t = t_f$. Для расчетов в `Maple` также проводилась проверка закона сохранения массы. Выполнены тестовые расчеты и определены погрешности для разных временных шагов в диапазоне, для которого численное решение итерационно сходится: $\Delta t = 0.01$ с — 0.43 %, $\Delta t = 0.1$ с — 0.1 %, $\Delta t = 1$ с — 3.11 % и для $\Delta t = 10$ с — 32.54 %. Минимальная погрешность в 0.1 % соответствует временному шагу $\Delta t = 0.1$ с, который и был выбран для расчетов в `Maple`.

Толщина жидкого слоя с течением времени уменьшается (рис. 3, *a*). Из-за пространственно неравномерного испарения происходит отклонение формы капли от равновесного состояния, возникает градиент капиллярного давления, что порождает капиллярный поток (рис. 3, *c*), переносящий вещество к периферии капли. В связи с этим массовая доля вещества, содержащегося в жидкости, увеличивается вблизи трехфазной границы со временем (рис. 3, *b*). Под конец процесса массовая доля $\langle C \rangle$ распределена равномерно, так как достигнуто критическое значение C_g, при котором произошел фазовый переход. Дальнейшее испарение жидкости из твердой фазы здесь не рассматривается.

Финальная расчетная толщина слоя h является почти равномерной в пространстве. Вблизи $r \approx 0.9$ мм наблюдается незначительное возвышение, которое связано с эффектом кофейных колец [3]. Возникающий под конец про-

цесса обратный поток жидкости, направленный в центральную область, смазывает этот эффект. Это можно использовать для улучшения существующих методов подавления эффекта кофейных колец (см. ссылки в [1]).

Также стоит заметить, что поначалу усредненная радиальная скорость потока с течением времени увеличивается в связи с увеличением градиента капиллярного давления в процессе неравномерого испарения, преобладающего вблизи периферии. Затем в области роста массовой доли вещества, приводящего к увеличению вязкости, поток начинает замедляться. Вблизи трехфазной границы появляется противоток (рис. 3, *c* для $t = 220$ с), что ранее наблюдалось в эксперименте [52]. Далее по времени направление потока постепенно меняется во всей области (рис. 4, a). Это связано с тем, что в начале процесса плотность потока пара преобладает в районе периферии, но со временем J начинает увеличиваться в центральной области из-за понижения h и уменьшаться вблизи контактной линии из-за роста $\langle C \rangle$ (рис. 4, *b*). Когда во всей области достигается значение $\langle C \rangle \approx C_g$, модель предсказывает отсутствие потока и испарения. Поле скорости потока для различных моментов времени представлено на рис. 5. В отличие от результатов расчетов [53] здесь на поздних временных этапах наблюдается изменение направления потока. Это связано с тем, что в настоящей работе учитывается зависимость J и η от массовой доли $\langle C \rangle$. Кроме этого, здесь при заданных параметрах градиент плотности потока пара с течением времени меняет знак. Технические детали численного решения в [53] не раскрыты. В [27, 28, 49] поле скорости потока не рассчитывалось.

Здесь поле скорости потока удалось рассчитать по формулам (17) и (18) лишь после того, как была решена проблема с пилообразными осцилляциями, возникающими при расчете капиллярного давления и постепенно с временными шагами накапливающимися в $\langle u \rangle$ и h. Для этого использовались формулы (26) и (27). Восстановленное из скорости потока $\langle u \rangle$ по формуле (26)

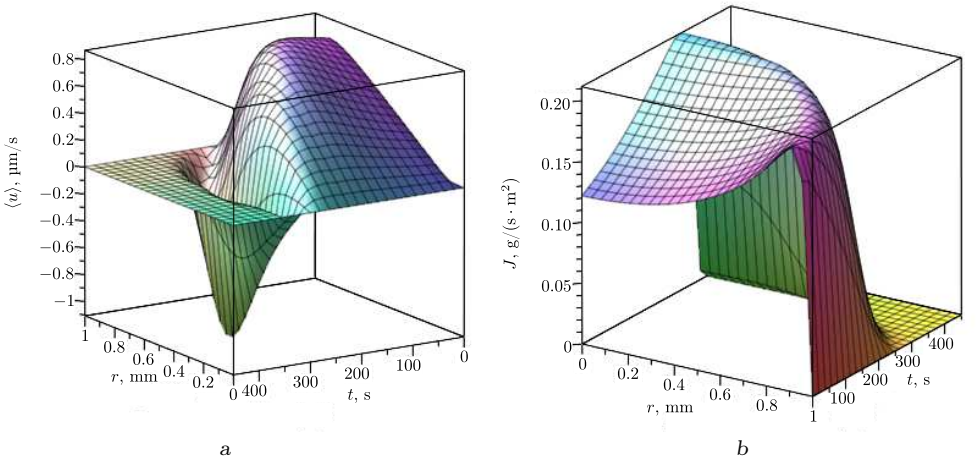


Рис. 4. Результаты расчета в `Maple`: пространственно-временная зависимость (*a*) усредненной по толщине жидкого слоя скорости радиального потока и (*b*) плотности потока пара

[Figure 4. The results of the calculation in `Maple`: the spatial-temporal dependence of (`a`) the radial flow velocity averaged over the thickness of the liquid layer and (`b`) the vapor flux density]

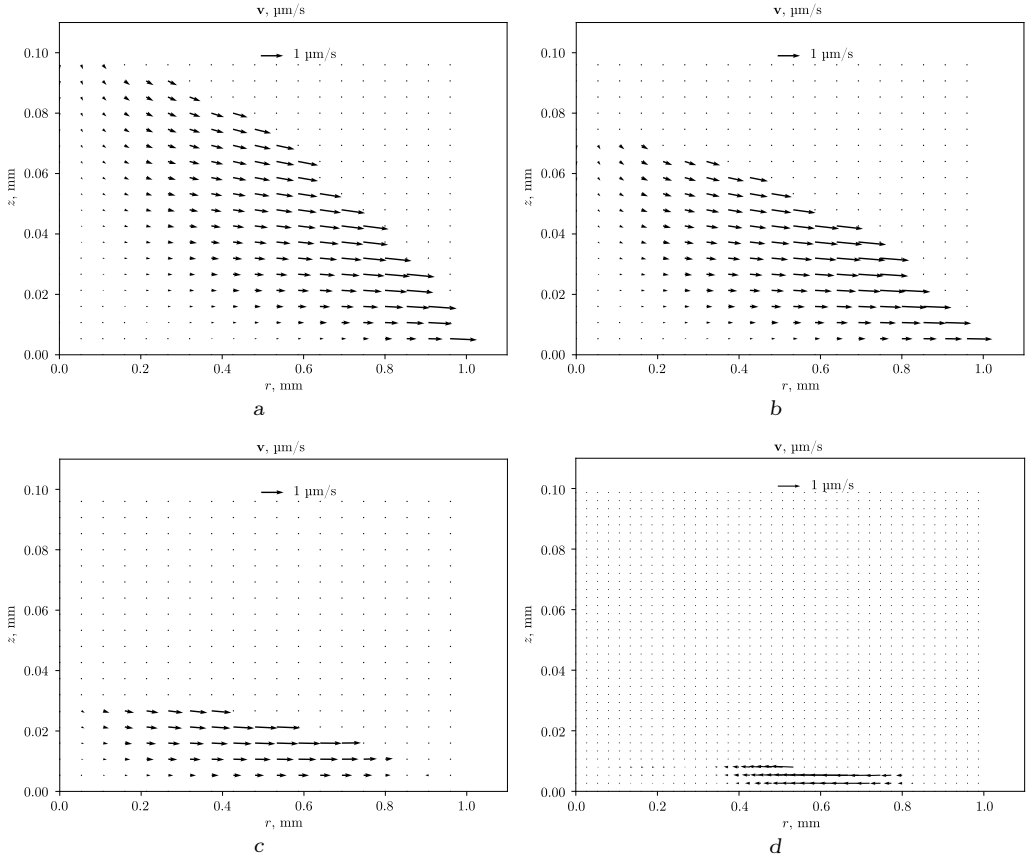


Рис. 5. Векторное поле скорости потока жидкости по результатам, полученным с использованием программы, написанной на C++, для следующих времен: (a) $t = 10$ с, (b) $t = 90$ с, (c) $t = 220$ с и (d) $t = 300$ с

[Figure 5. Velocity vector field of fluid flow according results obtained with using the program written in C++ for the following times: (a) $t = 10$ s, (b) $t = 90$ s, (c) $t = 220$ s, and (d) $t = 300$ s]

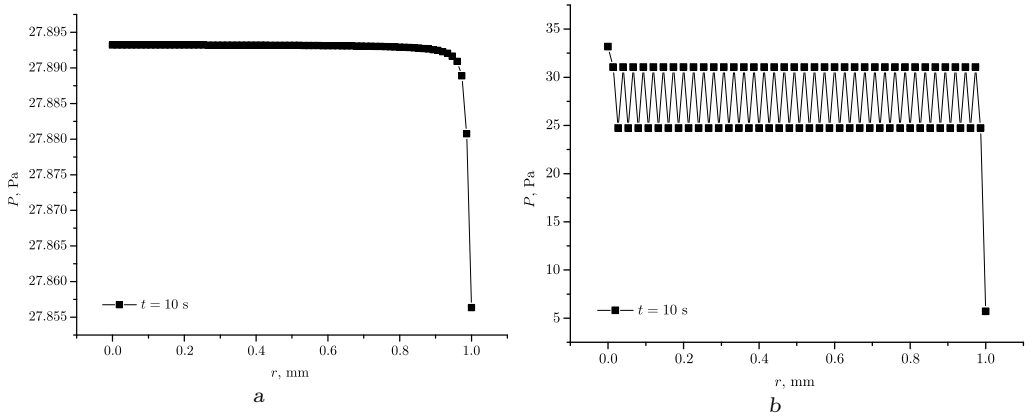


Рис. 6. Результаты расчета в программе, написанной на C++: (a) капиллярное давление и (b) возможные пилообразные осцилляции

[Figure 6. The results of the calculation in program written with C++: (a) capillary pressure and (b) possible sawtooth oscillations]

капиллярное давление представлено на рис. 6, *a*. Если такое восстановление не проводить, то получаем осцилляции, представленные на рис. 6, *b*. Особенность этих осцилляций заключается в стабильности на временных шагах, то есть они не приводят к полному «разрушению» расчета. Пилообразные осцилляции теоретически изучаются в [54], но здесь предложено практическое решение проблемы на конкретном примере.

Заключение. Для решения практических (прикладных) задач в области испарительной самосборки и испарительной литографии требуется разработка математических моделей, численных методов и комплекса программ. При разработке необходимо учитывать особенности таких задач, ведь сопутствующие процессы весьма сложны. Вязкость раствора, градиент плотности потока пара и локальная кривизна свободной поверхности влияют на структуру потока в сидячей капле. В работе показан случай, когда направление потока жидкости может меняться со временем в процессе испарения даже в отсутствие эффекта Марангони и какого-либо внешнего воздействия на систему. Это может приводить к замедлению выноса вещества на периферию, что в результате будет способствовать формированию более или менее равномерного осадка по всей площади контакта капли с подложкой. Данное наблюдение полезно для совершенствования методов подавления кольцевых осадков, связанных с эффектом кофейных колец и нежелательных для некоторых приложений, как, например, струйная печать или нанесение покрытий. Моделирование гидродинамических потоков важно, так как это один из основных механизмов, влияющих на массоперенос растворенного или взвешенного вещества. При численной реализации подобных задач может появиться проблема, связанная с возникновением пилообразных осцилляций, устойчивых на временных шагах, но создающих проблему в расчете поля скорости потока жидкости. Здесь предложены практические рецепты, позволяющие эффективно бороться с такими осцилляциями при разработке программного обеспечения для вычислительной гидродинамики.

Конкурирующие интересы. Заявляю, что в отношении авторства и публикации этой статьи конфликта интересов не имею.

Авторская ответственность. Я несу полную ответственность за предоставление окончательной версии рукописи в печать. Окончательная версия рукописи мною одобрена.

Финансирование. Часть работы, относящаяся к разработке математической модели, выполнена при поддержке программы развития университета «Приоритет 2030» проект № 122112500011–0 «Природовдохновленные оптические технологии» (Центр природовдохновленного инжиниринга ТюмГУ). Исследование, связанное с разработкой численного метода и программы для ЭВМ, выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22–79–10216 в АГУ им. В. Н. Татищева, https://rscf.ru/project/22-79-10216/.

Благодарность. Автор выражает благодарность профессору, доктору физико-математических наук Ю. Ю. Тарасевичу за полезные рекомендации по оформлению графического материала.

Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2023, vol. 27, no. 2, pp. 309–335
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu1994

MSC: 65M06, 80A20

Suppression of sawtooth oscillations when using a finite-difference scheme for mass transport simulation in a drying droplet on a substrate in the thin layer approximation

K. S. Kolegov[1,2]

[1] Astrakhan Tatishchev State University,
20 a, Tatischev st., Astrakhan, 414056, Russian Federation.
[2] Tyumen State University,
25, Lenin st., Tyumen, 625003, Russian Federation.

Abstract

Evaporating droplets and films are used in applications from different fields. Various methods of evaporative self-assembly are of particular interest. The paper describes a mathematical model of mass transfer in a droplet drying on a substrate based on the lubrication approximation. The model takes into account the transfer of a dissolved or suspended substance by a capillary flow, the diffusion of this substance, the evaporation of liquid, the formation of solid deposit, the dependence of the viscosity and the vapor flux density on the admixture concentration.

The case with pinning of the three-phase boundary ("liquid–substrate–air") is considered here. Explicit and implicit finite-difference schemes have been developed for the model equations. A modification of the numerical method is proposed, in which splitting by physical processes, the iterative method of explicit relaxation and Thomas algorithm are combined. A practical recipe for suppressing sawtooth oscillations is described using the example of a specific problem.

A software module in `C++` has been developed, which can be used for evaporative lithography problems in the future. With the help of this module, numerical calculations were carried out, the results of which were compared with the results obtained in the `Maple` package.

Numerical simulation predicted the case in which the direction of the capillary flow changes to the opposite over time due to a change in the sign

Mathematical Modeling, Numerical Methods and Software Complexes
Research Article

© Authors, 2023
© Samara State Technical University, 2023 (Compilation, Design, and Layout)
The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License (http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)

Please cite this article in press as:
Kolegov K. S. Suppression of sawtooth oscillations when using a finite-difference scheme for mass transport simulation in a drying droplet on a substrate in the thin layer approximation, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2023, vol. 27, no. 2, pp. 309–335. EDN: HZRAJS. DOI: 10.14498/vsgtu1994 (In Russian).

Author's Details:
Konstantin S. Kolegov https://orcid.org/0000-0002-9742-1308
Cand. Phys. & Math. Sci.; Senior Researcher; Lab. of Mathematical Modeling and Information Technologies in Science and Education[1]; Center for Nature-inspired Engineering[2];
e-mail: konstantin.kolegov@asu.edu.ru

of the gradient of the vapor flux density. This can lead to a slowdown in the transfer of the substance to the periphery, which as a result will contribute to the formation of a more or less uniform precipitation over the entire contact area of the droplet with the substrate. This observation is useful for improving methods of annular deposit suppression associated with the coffee-ring effect and undesirable for some applications, such as inkjet printing or coating.

Keywords: evaporating droplet, mass transfer, capillary flow, finite-difference scheme, sawtooth oscillation, suppression of the coffee-ring effect.

Received: 18th January, 2023 / Revised: 29th April, 2023 / Accepted: 3rd May, 2023 / First online: 27th June, 2023

Competing interests. I declare that I have no conflicts of interest regarding the authorship and publication of this article.

Author's Responsibilities. I take full responsibility for submitting the final version of the manuscript for printing. The final version of the manuscript has been approved by me.

Funding. Part of the work related to the development of the mathematical model was carried out with the support of the University Development Program "Priority 2030", project no. 122112500011–0 "Nature-inspired optical technologies" (Center for Nature-inspired Engineering, Tyumen State University). The research related to the development of the numerical method and computer program was supported by the grant from the Russian Science Foundation, project no. 22–79–10216 at Astrakhan Tatishchev State University, https://rscf.ru/en/project/22-79-10216/.

Acknowledgments. The author is grateful to Prof. Yu. Yu. Tarasevich, Dr. Phys. & Math. Sci., for valuable recommendations regarding the presentation of graphic material.

References

1. Zang D., Tarafdar S., Tarasevich Yu. Yu., et al. Evaporation of a droplet: From physics to applications, *Phys. Rep.*, 2019, vol. 804, pp. 1–56. EDN: HMEGXP. DOI: https://doi.org/10.1016/j.physrep.2019.01.008.
2. Kolegov K. S., Barash L. Yu. Applying droplets and films in evaporative lithography, *Adv. Colloid Interf. Sci.*, 2020, vol. 285, 102271. EDN: BEBGWV DOI: https://doi.org/10.1016/j.cis.2020.102271.
3. Deegan R. D., Bakajin O., Dupont T F., et al. Capillary flow as the cause of ring stains from dried liquid drops, *Nature*, 1997, vol. 389, no. 6653, pp. 827–829. DOI: https://doi.org/10.1038/39827.
4. Kim H., Yang J., Kim S., et al. Numerical simulation of the coffee-ring effect inside containers with time-dependent evaporation rate, *Theor. Comput. Fluid Dyn.*, 2022, vol. 36, no. 3, pp. 423–433. DOI: https://doi.org/10.1007/s00162-021-00602-x.
5. Baba H., Yoshioka R., Takatori S., et al. Transitions among cracking, peeling and homogenization on drying of an aqueous solution containing glucose and starch, *Chem. Let.*, 2021, vol. 50, no. 5, pp. 1011–1014. DOI: https://doi.org/10.1246/cl.210009.
6. Wang W., Wang Q., Zhang K., et al. On-demand contact line pinning during droplet evaporation, *Sens. Act. B: Chem.*, 2020, vol. 312, 127983. DOI: https://doi.org/10.1016/j.snb.2020.127983.
7. Saroj S. K., Panigrahi P. K. Magnetophoretic control of diamagnetic particles inside an evaporating droplet, *Langmuir*, 2021, vol. 37, no. 51, pp. 14950–14967. DOI: https://doi.org/10.1021/acs.langmuir.1c02968.

8. Al-Muzaiqer M. A., Kolegov K. S., Ivanova N. A., Fliagin V. M. Nonuniform heating of a substrate in evaporative lithography, *Phys. Fluids*, 2021, vol. 33, no. 9, 092101. DOI: https://doi.org/10.1063/5.0061713.
9. Du F., Zhang L., Shen W. Controllable dried patterns of colloidal drops, *J. Col. Int. Sci.*, 2022, vol. 606, pp. 758–767. DOI: https://doi.org/10.1016/j.jcis.2021.08.089.
10. Cedeno R., Grossier R., Lagaize M., et al. Nucleation in sessile saline microdroplets: Induction time measurement via deliquescence-recrystallization cycling, *Faraday Discuss.*, 2022, vol. 235, pp. 183–197. DOI: https://doi.org/10.1039/d1fd00090j.
11. Perkins-Howard B., Walker A. R., Do Q., et al. Surface wettability drives the crystalline surface assembly of monodisperse spheres in evaporative colloidal lithography, *J. Phys. Chem. C*, 2022, vol. 126, no. 1, pp. 505–516. DOI: https://doi.org/10.1021/acs.jpcc.1c07098.
12. Jose M., Mayarani M., Basavaraj M. G., Satapathy D. K. Evaporative self-assembly of the binary mixture of soft colloids, *Phys. Chem. Chem. Phys.*, 2021, vol. 23, no. 12, pp. 7115–7124. DOI: https://doi.org/10.1039/d1cp00440a.
13. Zolotarev P. A., Kolegov K. S. Monte Carlo simulation of particle size separation in evaporating bi-dispersed colloidal droplets on hydrophilic substrates, *Phys. Fluids*, 2022, vol. 34, no. 1, 017107. DOI: https://doi.org/10.1063/5.0072083.
14. Kirner F., Sturm E. V. Advances of nonclassical crystallization toward self-purification of precious metal nanoparticle mixtures, *Cryst. Growth Des.*, 2021, vol. 21, no. 9, pp. 5192–5197. DOI: https://doi.org/10.1021/acs.cgd.1c00544.
15. Hossain M. T., Gates I. D., Natale G. Dynamics of Brownian Janus rods at a liquid-liquid interface, *Phys. Fluids*, 2022, vol. 34, no. 1, 012117. DOI: https://doi.org/10.1063/5.0076148.
16. Mustakim M., Anil Kumar A. V. Depletion induced demixing and crystallization in binary colloids subjected to an external potential barrier, *J. Phys. Chem. B*, 2021, vol. 126, no. 1, pp. 327–335. DOI: https://doi.org/10.1021/acs.jpcb.1c08591.
17. Nozawa J., Uda S., Toyotama A., et al. Heteroepitaxial fabrication of binary colloidal crystals by a balance of interparticle interaction and lattice spacing, *J. Col. Int. Sci.*, 2022, vol. 608, pp. 873–881. DOI: https://doi.org/10.1016/j.jcis.2021.10.041.
18. Galy P. E., Guitton-Spassky T., Sella C., et al. Redox control of particle deposition from drying drops, *ACS Appl. Mater. Interfaces*, 2022, vol. 14, no. 2, pp. 3374–3384. DOI: https://doi.org/10.1021/acsami.1c18933.
19. Inoue K., Inasawa S. Drying-induced back flow of colloidal suspensions confined in thin unidirectional drying cells, *RSC Adv.*, 2020, vol. 10, no. 27, pp. 15763–15768. DOI: https://doi.org/10.1039/d0ra02837a.
20. Homede E., Manor O. Deposition of nanoparticles from a volatile carrier liquid, *J. Col. Int. Sci.*, 2020, vol. 562, pp. 102–111. DOI: https://doi.org/10.1016/j.jcis.2019.11.062.
21. Li D., Chen R., Zhu X., et al. Light-fueled beating coffee-ring deposition for droplet evaporative crystallization, *Anal. Chem.*, 2021, vol. 93, no. 25, pp. 8817–8825. DOI: https://doi.org/10.1021/acs.analchem.1c00605.
22. Shao X., Hou Y., Zhong X. Intense jet flow with symmetric vortices induced by saline concentration gradient at free surface of a drying saline droplet, *Int. Comm. Heat Mass Transf.*, 2021, vol. 128, 105573. DOI: https://doi.org/10.1016/j.icheatmasstransfer.2021.105573.
23. Hegde O., Chatterjee R., Rasheed A., et al. Multiscale vapor-mediated dendritic pattern formation and bacterial aggregation in complex respiratory biofluid droplets, *J. Col. Int. Sci.*, 2022, vol. 606, pp. 2011–2023. DOI: https://doi.org/10.1016/j.jcis.2021.09.158.
24. Corletto A., Shapter J. G. Thickness/morphology of functional material patterned by topographical discontinuous dewetting, *Nano Select*, 2021, no. 9, pp. 1723–1740. DOI: https://doi.org/10.1002/nano.202000301.
25. Bayat F., Tajalli H. Nanosphere lithography: the effect of chemical etching and annealing sequence on the shape and spectrum of nano-metal arrays, *Heliyon*, 2020, vol. 6, no. 2, e03382. DOI: https://doi.org/10.1016/j.heliyon.2020.e03382.

26. Bhardwaj R., Fang X., Somasundaran P., Attinger D. Self-assembly of colloidal particles from evaporating droplets: role of DLVO interactions and proposition of a phase diagram, *Langmuir*, 2010, vol. 26, no. 11, pp. 7833–7842. DOI: https://doi.org/10.1021/la9047227.
27. Tarasevich Yu. Yu., Vodolazskaya I. V., Isakova O. P. Desiccating colloidal sessile drop: Dynamics of shape and concentration, *Coll. Pol. Sci.*, 2011, vol. 289, no. 9, pp. 1015–1023. EDN: OHRMJP. DOI: https://doi.org/10.1007/s00396-011-2418-8.
28. Kolegov K. S., Lobanov A. I. Numerical study of mass transfer in drop and film systems using a regularized finite difference scheme in evaporative lithography, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2018, vol. 22, no. 2, pp. 344–363 (In Russian). EDN: XWXSMX. DOI: https://doi.org/10.14498/vsgtu1601.
29. Petsi A. J., Kalarakis A. N., Burganos V. N. Deposition of Brownian particles during evaporation of two-dimensional sessile droplets, *Chem. Eng. Sci.*, 2010, vol. 65, no. 10, pp. 2978–2989. DOI: https://doi.org/10.1016/j.ces.2010.01.028.
30. Hu S., Wang Y., Man X., Doi M. Deposition patterns of two neighboring droplets: Onsager variational principle studies, *Langmuir*, 2017, vol. 33, no. 23, pp. 5965–5972. DOI: https://doi.org/10.1021/acs.langmuir.7b01354.
31. Yang J., Kim H., Lee C., et al. Phase-field modeling and computer simulation of the coffee-ring effect, *Theor. Comput. Fluid Dyn.*, 2020, vol. 34, no. 5–6, pp. 679–692. DOI: https://doi.org/10.1007/s00162-020-00544-w.
32. Seo H. W., Jung N., Yoo C. S. Oscillation dynamics of colloidal particles caused by surfactant in an evaporating droplet, *J. Mech. Sci. Technol.*, 2020, vol. 34, no. 2, pp. 801–808. DOI: https://doi.org/10.1007/s12206-020-0128-1.
33. Kim H.-S., Park S. S., Hagelberg F. Computational approach to drying a nanoparticle-suspended liquid droplet, *J. Nanopart. Res.*, 2010, vol. 13, no. 1, pp. 59–68. DOI: https://doi.org/10.1007/s11051-010-0062-8.
34. Crivoi A., Duan F. Three-dimensional Monte Carlo model of the coffee-ring effect in evaporating colloidal droplets, *Sci. Rep.*, 2014, vol. 4, no. 1, 4310. DOI: https://doi.org/10.1038/srep04310.
35. Zhang H., Shan Y. G., Li L., et al. Modeling the self-assembly of nanoparticles into branched aggregates from a sessile nanofluid droplet, *Appl. Therm. Eng.*, 2016, vol. 94, pp. 650–656. DOI: https://doi.org/10.1016/j.applthermaleng.2015.10.160.
36. Ren J., Crivoi A., Duan Fe. Disk-ring deposition in drying a sessile nanofluid droplet with enhanced Marangoni effect and particle surface adsorption, *Langmuir*, 2020, vol. 36, no. 49, pp. 15064–15074. DOI: https://doi.org/10.1021/acs.langmuir.0c02607.
37. Ren J., Crivoi A., Duan F. Dendritic nanoparticle self-assembly from drying a sessile nanofluid droplet, *Phys. Chem. Chem. Phys.*, 2021, vol. 23, no. 29, pp. 15774–15783. DOI: https://doi.org/10.1039/d1cp01181b.
38. Lebedev-Stepanov P., Vlasov K. Simulation of self-assembly in an evaporating droplet of colloidal solution by dissipative particle dynamics, *Colloids Surf. A Physicochem. Eng. Asp.*, 2013, vol. 432, pp. 132–138. EDN: RFHBFJ. DOI: https://doi.org/10.1016/j.colsurfa.2013.05.012.
39. Breinlinger T., Kraft T. A simple method for simulating the coffee stain effect, *Powder Technol.*, 2014, vol. 256, pp. 279–284. DOI: https://doi.org/10.1016/j.powtec.2014.02.024.
40. Liu W., Midya J., Kappl M., et al. Segregation in drying binary colloidal droplets, *ACS Nano*, 2019, vol. 13, no. 5, pp. 4972–4979. DOI: https://doi.org/10.1021/acsnano.9b00459.
41. Andac T., Weigmann P., Velu S. K. P., et al. Active matter alters the growth dynamics of coffee rings, *Soft Matter*, 2019, vol. 15, no. 7, pp. 1488–1496. DOI: https://doi.org/10.1039/c8sm01350k.
42. Kolegov K. S. Monte Carlo simulation of colloidal particles dynamics in a drying drop, *J. Phys.: Conf. Ser.*, 2019, vol. 1163, 012043. EDN: MSBXPO. DOI: https://doi.org/10.1088/1742-6596/1163/1/012043.

43. Lebovka N. I., Tarasevich Yu. Yu., Bulavin L. A., et al. Sedimentation of a suspension of rods: Monte Carlo simulation of a continuous two-dimensional problem, *Phys. Rev. E*, 2019, vol. 99, no. 5, 052135. EDN: XNZLXM. DOI: https://doi.org/10.1103/physreve.99.052135.
44. Kolegov K. S., Barash L. Yu. Joint effect of advection, diffusion, and capillary attraction on the spatial structure of particle depositions from evaporating droplets, *Phys. Rev. E*, 2019, vol. 100, no. 3, 033304. EDN: RUWORY. DOI: https://doi.org/10.1103/physreve.100.033304.
45. Zolotarev P. A., Kolegov K. S. Average cluster size inside sediment left after droplet desiccation, *J. Phys.: Conf. Ser.*, 2021, vol. 1740, 012029. EDN: OPMGGJ. DOI: https://doi.org/10.1088/1742-6596/1740/1/012029.
46. Song R., Lee M., Moon H., et al. Particle dynamics in drying colloidal solution using discrete particle method, *Flex. Print. Electron.*, 2021, vol. 6, no. 4, 044007. DOI: https://doi.org/10.1088/2058-8585/ac428e.
47. Marinaro G., Riekel C., Gentile F. Size-exclusion particle separation driven by micro-flows in a quasi-spherical droplet: Modelling and experimental results, *Micromachines*, 2021, vol. 12, no. 2, 185. DOI: https://doi.org/10.3390/mi12020185.
48. Hu H., Larson R. G. Analysis of the microfluid flow in an evaporating sessile droplet, *Langmuir*, 2005, vol. 21, no. 9, pp. 3963–3971. DOI: https://doi.org/10.1021/la047528s.
49. Park Y., Park Y, Lee J., Lee C. Simulation for forming uniform inkjet-printed quantum dot layer, *J. Appl. Phys.*, 2019, vol. 125, no. 6, 065304. DOI: https://doi.org/10.1063/1.5079863.
50. Kolegov K. S. *Simulation of mass transfer in droplet-film systems using a regularized difference scheme in evaporative lithography*, Thesis of Dissertation (Cand. Phys. & Math. Sci.). Astrakhan, Astrakhan State University, 2018, 162 pp. (In Russian). DOI: https://doi.org/10.13140/RG.2.2.29663.97446
51. Kolegov K. S. Simulation of patterned glass film formation in the evaporating colloidal liquid under IR heating, *Microgravity Sci. Technol.*, 2018, vol. 30, no. 1–2, pp. 113–120. EDN: UXPYTS. DOI: https://doi.org/10.1007/s12217-017-9587-0.
52. Bodiguel H., Leng J. Imaging the drying of a colloidal suspension, *Soft Matter*, 2010, vol. 6, pp. 5451–5460. DOI: https://doi.org/10.1039/C0SM00323A.
53. Fischer B. J. Particle convection in an evaporating colloidal droplet, *Langmuir*, 2002, vol. 18, no. 1, pp. 60–67. DOI: https://doi.org/10.1021/la015518a.
54. Dorodnitsyn L. V. Grid oscillations in finite-difference scheme and a method for their approximate analysis, *Comput. Math. Model.*, 2016, vol. 27, no. 4, pp. 472–488. EDN: YUUJUV. DOI: https://doi.org/10.1007/s10598-016-9337-y.

Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2023. Т. 27, № 2. С. 336–356
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu1999
EDN: EYOBZI

УДК 517.958:531.332

Построение автомодельного решения системы уравнений газовой динамики, описывающей истечение политропного газа в вакуум с косой стенки в несогласованном случае

Е. И. Понькин

Снежинский физико-технический институт НИЯУ МИФИ,
Россия, 456776, Снежинск, ул. Комсомольская, 8.

Аннотация

Рассматривается начально-краевая задача для системы уравнений газовой динамики в постановке характеристической задачи Коши стандартного вида, описывающая при $t > 0$ разлет политропного газа в вакуум на косой стенке в пространстве физических автомодельных переменных $\xi = x/t$, $\eta = y/t$, а при $t < 0$ — сильное сжатие газа в призматическом объеме.

Решение начально-краевой задачи строится в виде рядов функций $c(\xi, \vartheta)$, $u(\xi, \vartheta)$ и $v(\xi, \vartheta)$ по степеням ϑ, где ϑ — известная функция независимых переменных. Нахождение неизвестных коэффициентов $c_1(\xi)$, $u_1(\xi)$ и $v_1(\xi)$ рядов функций $c(\xi, \vartheta)$, $u(\xi, \vartheta)$ и $v(\xi, \vartheta)$ сводится к решению транспортного уравнения для коэффициента $c_1(\xi)$.

В настоящей работе построено аналитическое решение транспортного уравнения для коэффициента $c_1(\xi)$ решения системы уравнений газовой динамики, описывающего изэнтропическое истечение политропного газа с косой стенки, в общем несогласованном случае, когда $\operatorname{tg}^2\alpha \neq (\gamma+1)/(3-\gamma)$. Когда $\gamma = 5/3$ — случай водорода, для коэффициента $c_1(\xi)$ впервые построено аналитическое решение транспортного уравнения в явном виде.

Полученное решение применено к описанию сжатия специального призматического объема, представляющего собой в сечении правильный треугольник. Указана особенность полученного решения $c_1(\xi)$: значение $c_1 \to \infty$ при $\xi \to \xi_*$, где значение ξ_* задается уравнением $c_0(\xi_*) = 3.9564$. Сделан вывод, что на звуковой характеристике, через которую стыкуются течения вида центрированная и двойная волна, в точке с координатами $\xi = \xi_*$ и $\vartheta = 0$ наступает градиентная катастрофа, что приводит

Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ
Научная статья

© Коллектив авторов, 2023
© СамГТУ, 2023 (составление, дизайн, макет)
Контент публикуется на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru)

Образец для цитирования
Понькин Е. И. Построение автомодельного решения системы уравнений газовой динамики, описывающей истечение политропного газа в вакуум с косой стенки в несогласованном случае // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2023. Т. 27, № 2. С. 336–356. EDN: EYOBZI. DOI: 10.14498/vsgtu1999.

Сведения об авторе
Евгений Игоревич Понькин https://orcid.org/0000-0002-7848-3167
аспирант; e-mail: epnk@rambler.ru

к возникновению в безударном течении сильного разрыва и формированию ударной волны.

Ключевые слова: характеристическая задача Коши стандартного вида, аналог теоремы Ковалевской, косая стенка, транспортное уравнение.

Получение: 9 февраля 2023 г. / Исправление: 18 мая 2023 г. / Принятие: 25 мая 2023 г. / Публикация онлайн: 26 июня 2023 г.

Введение. Рассмотрим политропный газ, покоящийся в клиновидной области BOF плоскости xOy (выделено серым цветом и отмечено цифрой *0* на рис. 1, *a*), образованной двумя непроницаемыми стенками OB и OF. Полубесконечная вертикальная стенка OB задается уравнением $x = 0$ (при $y \geqslant 0$). Бесконечная косая стенка OF задается уравнением $y = x \operatorname{tg} \alpha$. Линия BF не является непроницаемой стенкой, поэтому на ней никакие условия на газ не накладываются. Часть плоскости xOy слева от вертикальной стенки OB и выше косой стенки OF — вакуум (отмечено цифрой *3* на рис. 1, *a*).

Газодинамические параметры в покоящемся газе (значения функций $c(t, x, y)$, $u(t, x, y)$ и $v(t, x, y)$) следующие:

$$c = 1, \quad u = 0, \quad v = 0.$$

В момент времени $t = 0$ вертикальная стенка OB убирается, после чего начинается истечение газа в вакуум вдоль косой стенки OF.

На рис. 1, *b* приведена конфигурация течения газа в момент времени $t > 0$. В области ABF находится покоящийся однородный газ, который отделен звуковой характеристикой AB от области центрированной волны Римана — $ABCD$, помеченной на рис. 1, *b* цифрой *1*. Звуковая характеристика AB является вертикальной прямой, уравнение которой в координатах t, x, y имеет следующий вид [1, 2]:

$$x = t.$$

Звуковая характеристика AB двигается по покоящемуся газу слева направо со скоростью, равной 1. Центрированная волна примыкает к вакууму через свободную границу, являющуюся вертикальной прямой CD. Движение границы CD в вакуум описывается по закону [1, 2]

$$x = -\frac{2t}{\gamma - 1}.$$

Скорость движения границы CD равна $-2/(\gamma - 1)$. Значения газодинамических параметров течения в области центрированной волны задаются следующими формулами [1, 2]:

$$c = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}\frac{x}{t} + \frac{2}{\gamma + 1}, \quad u = \frac{2}{(\gamma + 1)}\frac{x}{t} - \frac{2}{(\gamma + 1)}, \quad v = 0.$$

В области ADE, помеченной на рис. 1, *b* цифрой *2*, находится двойная волна — искомое двумерное течение. Это течение отделено от центрированной волны звуковой характеристикой C^+ — линия AD. Область двойной волны примыкает к вакууму через свободную границу — линия DE. Стенка AE

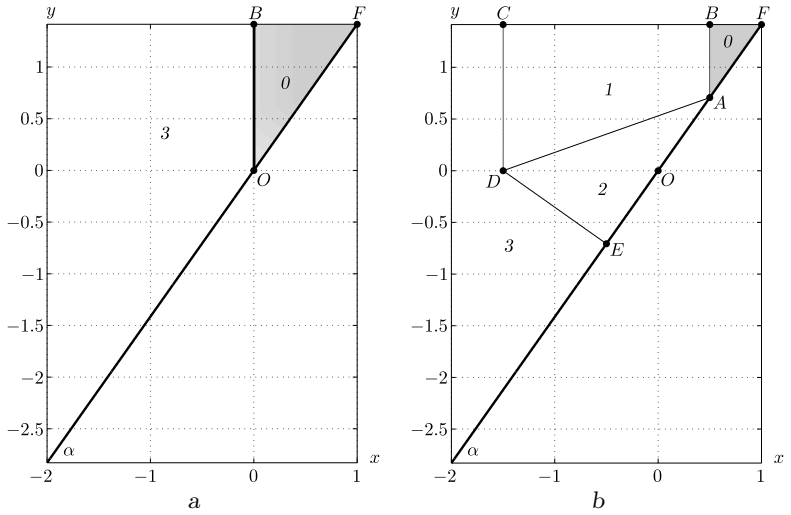


Рис. 1. Начальная конфигурация в момент $t = 0$ (a) и конфигурация потока в момент $t > 0$ (b): *0* — область, в которой находится покоящийся газ; *1* — область течения в виде центрированной волны; *2* — область течения в виде двойной волны; *3* — область вакуума

[Figure 1. (a) Initial configuration ($t = 0$); (b) the flow configuration at $t > 0$: *0* — the quiescent gas region; *1* — the flow region in the form of a centered wave; *2* — the flow region in the form of a double wave; *3* — the vacuum region]

является непроницаемой, поэтому на этой стенке выполняется условие непротекания:

$$v\big|_{AE} = u \operatorname{tg} \alpha\big|_{AE}.$$

Закон движения газа в области двойной волны неизвестен, требуется найти параметры течения газа в области двойной волны как решение следующей начально-краевой задачи:

$$\begin{cases} c_t + uc_x + vc_y + \varkappa c(u_x + v_y) = 0, \\ u_t + uu_x + vu_y + \dfrac{c}{\varkappa} c_x = 0, \\ v_t + uv_x + vv_y + \dfrac{c}{\varkappa} c_y = 0, \\ c\big|_{C^+} = c_0, \quad u\big|_{C^+} = u_0, \quad v\big|_{C^+} = 0, \\ v\big|_{y=x \operatorname{tg} \alpha} = u \operatorname{tg} \alpha\big|_{y=x \operatorname{tg} \alpha}, \end{cases} \tag{1}$$

где c — скорость звука в газе, отн.ед.; u — горизонтальная компонента скорости газа, отн.ед.; v — вертикальная компонента скорости газа, отн.ед; $\varkappa = (\gamma - 1)/2$; γ — показатель политропы газа, отн.ед. Значения c_0 и u_0 — параметры газа на характеристике C^+:

$$c_0 = \frac{\varkappa}{\varkappa + 1} \frac{x}{t} + \frac{1}{\varkappa + 1}, \quad u_0 = \frac{1}{\varkappa + 1} \frac{x}{t} - \frac{1}{\varkappa + 1},$$

соответствующие параметрам газа в плоском течении.

Традиционно для этой и аналогичных задач с целью уменьшения объема выкладок искомое двумерное течение строится как решение уравнения для

функции $\Phi(t, x_1, x_2)$ — потенциала скорости газа в двумерном случае [1,2]. То есть, чтобы описать разлет газа в вакуум, в качестве независимых переменных выбираются

$$t, \quad u_1 = \Phi_{x_1}, \quad u_2 = \Phi_{x_2} \tag{2}$$

и в результате замены (2) первые три уравнения системы (1) сводятся к одному уравнению:

$$\Phi_{tt} + 2\sum_{i=1}^{2}\Big[\Phi_{x_i}\Phi_{x_i t} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2}(1-\delta_{ik})\Phi_{x_i}\Phi_{x_k}\Phi_{x_i x_k} - \frac{1}{2}(c^2 - \Phi_{x_i}^2)\Phi_{x_i x_i}\Big] = 0, \tag{3}$$

где

$$c^2 = (\gamma - 1)\Big[M - \Phi_t - \frac{1}{2}(\Phi_{x_1}^2 + \Phi_{x_2}^2)\Big], \quad M = \mathrm{const}.$$

Далее с помощью преобразования Лежандра

$$\Psi(t, u_1, u_2) = x_1 u_1 + x_2 u_2 - \Phi(t, x_1, x_2) + Mt \tag{4}$$

делается переход к новой неизвестной функции $\Psi(t, u_1, u_2)$. Уравнение для $\Psi(t, u_1, u_2)$ строится из (3) с учетом (4) и введенных обозначений $u = u_1$, $v = u_2$:

$$\Psi_{tt}(\Psi_{uu}\Psi_{vv} - \Psi_{uv}^2) + [c^2 - (\Psi_{ut} - u)^2]\Psi_{vv} + \\ + 2(\Psi_{ut} - u)(\Psi_{vt} - v)\Psi_{uv} + [c^2 - (\Psi_{vt} - v)^2]\Psi_{uu} = 0, \tag{5}$$

где $c^2 = 2\varkappa\big(\Psi_t - (u^2 + v^2)/2\big)$.

Начальное и граничное условия задачи (1), записанные для функции $\Psi(t, u, v)$, имеют вид

$$\Psi(t, u, 0) = t\Big\{\frac{u^2}{2} + \frac{\varkappa}{2}\Big[c_0 + \frac{u}{\varkappa}\Big]^2\Big\} \tag{6}$$

и

$$\Psi_v(t, u, u\,\mathrm{tg}\,\alpha) = \Psi_u(t, u, u\,\mathrm{tg}\,\alpha)\,\mathrm{tg}\,\alpha, \tag{7}$$

где $c_0 = \mathrm{const} > 0$.

Решение задачи (5)–(7) строится в пространстве годографа u, v в виде ряда по степеням v. Для нахождения значений газодинамических параметров c, u, v в пространстве физических переменных t, x, y необходимо выполнять обратное преобразование Лежандра (4), а затем обратную замену (2).

В работе [3] получено частное точное решение задачи (5)–(7), описывающее двумерное течение газа при выполнении конкретного соотношения между показателем политропы γ газа и тангенсом угла α наклона косой стенки:

$$\mathrm{tg}^2\,\alpha = \frac{\gamma + 1}{3 - \gamma}. \tag{8}$$

Здесь и далее случай выполнения равенства (8) будем называть случаем согласованного течения, и наоборот, когда соотношение (8) не выполняется, тогда рассматриваемый случай двумерного течения будет несогласованным.

Решение (5)–(7) в согласованном случае (8) в координатах u, v имеет следующий вид [3]:

$$c(u,v) = 1 + \varkappa u + \varkappa\sqrt{\beta}v, \tag{9}$$

где $\beta = (\varkappa+1)/(1-\varkappa)$. Видно, что решение (9) линейно относительно независимой переменной v, то есть коэффициенты $c_i(u) = \partial^i c/\partial v^i\big|_{v=0}$ ряда

$$c(u,v) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i(u)\frac{v^i}{i!}$$

при $i \geqslant 2$ равны 0.

С. П. Баутиным и С. Л. Дерябиным [2, с. 196–214] в пространстве специальных независимых переменных (решение строилось для функции Ψ в пространстве годографа) рассмотрена задача об истечении газа в вакуум при произвольном значении угла α: $0 < \alpha < \pi/2$ — наклона косой стенки, не связанным со значением γ (несогласованный случай). Доказано существование и единственность локально-аналитических решений соответствующих начально-краевых задач, построено решение (5)–(7) для функции $\Psi(t,u,v)$ в виде ряда по степеням v. Значения коэффициентов ряда для функции $\Psi(t,u,v)$ в явном виде не были найдены, значения газодинамических параметров c, u, v течения газа в пространстве физических переменных t, x, y не построены.

В цикле работ [4–6] автора настоящей статьи решение исходной системы уравнений газовой динамики (СУГД) рассматриваемой начально-краевой задачи (1) строится для компонент вектора $\mathbf{U} = (c,u,v)^\top$ в виде бесконечного ряда по степеням ϑ, где ϑ — известная функция независимых физических автомодельных переменных $\xi = x/t$, $\eta = y/t$. В работе [4] построено транспортное уравнение для коэффициента $c_1(\xi)$ и найдено решение СУГД в согласованном случае. В работе [5] решение В. А. Сучкова применено к описанию двух способов газодинамического воздействия на специальный призматический объем. В работе [6] исходная начально-краевая задача (1) в результате двух невырожденных замен сводится к характеристической задаче Коши стандартного вида. Для этой новой начально-краевой задачи доказана теорема существования и единственности решения СУГД в виде сходящихся бесконечных рядов. Описан алгоритм построения коэффициентов ряда.

В настоящей работе впервые построено аналитическое решение транспортного уравнения для коэффициента $c_1(\xi)$ решения СУГД, описывающего изэнтропическое истечение политропного газа с косой стенки в общем несогласованном случае в пространстве физических автомодельных переменных $\xi = x/t$, $\eta = y/t$. Для газа с показателем политропы $\gamma = 5/3$ (водород) решение транспортного уравнения для коэффициента $c_1(\xi)$ также впервые построено в явном виде. Построенное решение начально-краевой задачи применено к описанию сильного сжатия газа в объеме с непроницаемыми стенками, представляющего собой в поперечном сечении правильный треугольник ($\alpha = \pi/3$).

1. Начально-краевая задача Коши стандартного вида для описания истечения газа в вакуум на косой стенке. В результате невырожденной замены $\xi = x/t$, $\eta = y/t$ исходная начально-краевая задача (1)

для СУГД, решение которой при $t > 0$ описывает разлет политропного газа в вакуум на косой стенке, записывается в векторно-матричном виде (см. работу [4]) для вектора $\mathbf{U} = (u_1, u_2, u_3)^\top = (c, u, v)^\top$:

$$\begin{cases} A\mathbf{U}_\xi + B\mathbf{U}_\eta = \mathbf{0}, \\ \mathbf{U}\big|_{C^+} = \mathbf{U}_0, \\ u_3\big|_{\eta=\xi\operatorname{tg}\alpha} = u_2\operatorname{tg}\alpha\big|_{\eta=\xi\operatorname{tg}\alpha}. \end{cases} \tag{10}$$

Начальное условие задачи (10) задается значением вектора $\mathbf{U}$ на характеристике C^+ — $\mathbf{U}_0 = (c_0, u_0, 0)^\top$. Звуковая характеристика C^+ задается уравнением $\eta = f(\xi)$, где $f(\xi)$ — неизвестная функция независимой переменной ξ. Краевое условие (граничное условие) задачи (10) задается в виде условия непротекания газа на косой стенке, определяемой уравнением $\eta = \xi\operatorname{tg}\alpha$.

Матрицы A и B задачи (10) следующие:

$$A = \begin{pmatrix} u-\xi & \varkappa c & 0 \\ c/\varkappa & u-\xi & 0 \\ 0 & 0 & u-\xi \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} v-\eta & 0 & \varkappa c \\ 0 & v-\eta & 0 \\ c/\varkappa & 0 & v-\eta \end{pmatrix}.$$

Начально-краевые условия, коэффициенты матриц A и B задачи (10) предполагаются аналитическими функциями.

Для приведения задачи (10) к характеристической задаче Коши стандартного вида сделаем замену переменных

$$\vartheta = \eta - f(\xi), \quad \xi' = \xi, \tag{11}$$

где линия $\vartheta = 0$ задает звуковую характеристику C^+. Якобиан J замены (11) следующий:

$$J = \begin{vmatrix} \vartheta_\eta & \vartheta_\xi \\ \xi'_\eta & \xi'_\xi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -f' \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 0\cdot f' = 1,$$

т.е. при выполнении условия $|f'| < \infty$ замена (11) невырожденная.

В результате замены (11) задача (10) преобразуется к виду

$$\begin{cases} [B - f'(\xi)A]\mathbf{U}_\vartheta + A\mathbf{U}_\xi = \mathbf{0}, \\ \mathbf{U}\big|_{\vartheta=0} = \mathbf{U}_0, \\ u_3\big|_{\vartheta=\xi\operatorname{tg}\alpha - f(\xi)} = u_2\operatorname{tg}\alpha\big|_{\vartheta=\xi\operatorname{tg}\alpha - f(\xi)}. \end{cases} \tag{12}$$

Задача (12) эквивалентна задаче (10). Новая замена переменных ξ, ϑ на переменные ϑ, ζ по формулам

$$\vartheta' = \vartheta, \quad \zeta = \vartheta + f(\xi) - \xi\operatorname{tg}\alpha \tag{13}$$

приводит задачу (12) к следующему виду:

$$\begin{cases} [B - f'(\xi)A]\mathbf{U}_\vartheta + [B - \operatorname{tg}\alpha A]\,\mathbf{U}_\zeta = \mathbf{0}, \\ \mathbf{U}\big|_{\vartheta=0} = \mathbf{U}_0, \\ u_3\big|_{\zeta=0} = u_2\operatorname{tg}\alpha\big|_{\zeta=0}. \end{cases} \tag{14}$$

Из соотношения (13), неявно задающего функцию ξ от $(\zeta - \vartheta)$, с учетом неравенства (16) однозначно определяется функция

$$\xi = \varphi(\zeta - \vartheta). \tag{15}$$

Далее для простоты записи будут сохраняться обозначения $f(\xi)$, $f'(\xi)$, $c_0(\xi)$, естественно, с учетом наличия связи (15).

Исходное уравнение косой стенки $y = x \operatorname{tg} \alpha$ в координатах ϑ, ζ имеет вид $\zeta = 0$, т.е. косая стенка берется за новую координатную ось. Якобиан замены переменных (13) следующий:

$$J_2 = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \zeta}{\partial \vartheta} & \dfrac{\partial \zeta}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial \vartheta'}{\partial \vartheta} & \dfrac{\partial \vartheta'}{\partial \xi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & f'(\xi) - \operatorname{tg} \alpha \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = \operatorname{tg} \alpha - f'(\xi).$$

Чтобы замена (13) была невырожденной, необходимо выполнение неравенства

$$J_2 = \operatorname{tg} \alpha - f'(\xi) \neq 0, \tag{16}$$

т.е. наклон косой стенки не равен наклону звуковой характеристики, разделяющей области центрированной и двойной волны. Неравенство (16) доказывается в работе [6].

Таким образом, начально-краевая задача (14) для вектора $\mathbf{U}$ записана в координатах ϑ, ζ. Начально-граничные условия (14) определены на прямых, задаваемых уравнениями $\vartheta = 0$ и $\zeta = 0$. Далее для построения локально-аналитического решения в окрестности точки $(\zeta = 0, \vartheta = 0)$ задачу (14) необходимо привести к форме характеристической задачи Коши стандартного вида. Для этого СУГД из задачи (14) слева умножается на матрицу T_1, а вектор $\mathbf{U}$ заменяется новым вектором:

$$\mathbf{W} = T_2^{-1}\mathbf{U} = (w_1, w_2, w_3)^\top = \left(c + v\frac{\varkappa}{c_0}(c_0 f' - f), u + v f', -\frac{\varkappa}{c_0} v\right)^\top.$$

Невырожденные матрицы T_1, T_2, элементы которых есть аналитические функции независимой переменной ξ, имеют вид

$$T_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ c_0 f' - f & \varkappa c_0 f' & -\varkappa c_0 \end{pmatrix}, \quad T_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & c_0 f' - f \\ 0 & 1 & c_0 f'/\varkappa \\ 0 & 0 & -c_0/\varkappa \end{pmatrix}.$$

Начальное условие для вектора $\mathbf{U}$ заменяется начальным условием для вектора $\mathbf{W}$:

$$\mathbf{W}|_{\vartheta=0} = \mathbf{W}_0 = \begin{pmatrix} w_{1,0}, w_{2,0}, w_{3,0} \end{pmatrix}^\top = \begin{pmatrix} c_0, u_0, 0 \end{pmatrix}^\top.$$

Краевое условие задачи (14)

$$u_3\big|_{\zeta=0} = u_2 \operatorname{tg} \alpha\big|_{\zeta=0}$$

переписывается через компоненты вектора $\mathbf{W}$ и преобразуется к виду

$$w_3\big|_{\zeta=0} = g(\vartheta) w_2\big|_{\zeta=0},$$

где $g(\vartheta) = -\left[\frac{\varkappa}{c_0(\varphi(\zeta-\vartheta))} \frac{\operatorname{tg} \alpha}{[1+f'_\xi(\varphi(\zeta-\vartheta)) \operatorname{tg} \alpha]}\right]_{\zeta=0}$.

Окончательно начально-краевая задача (14) имеет вид

$$\begin{cases} T_1[B - f'A]T_2\mathbf{W}_\vartheta + T_1[B - \operatorname{tg}\alpha A]T_2\mathbf{W}_\zeta + \\ \qquad\qquad + T_1[B - \operatorname{tg}\alpha A]\frac{\partial T_2}{\partial \xi}\frac{\mathbf{W}}{f' - \operatorname{tg}\alpha} = \mathbf{0}, \\ \mathbf{W}\Big|_{\vartheta=0} = \mathbf{W}_0, \\ w_3\Big|_{\zeta=0} = g(\vartheta)w_2\Big|_{\zeta=0}. \end{cases} \tag{17}$$

Задача (17) эквивалентна задаче (12), а та, в свою очередь, задаче (10), так как замены (11) и (13) невырожденные. Для того чтобы задача (17) была характеристической задачей Коши стандартного вида, необходимо выполнение следующего условия при $\vartheta = 0$ (см. работу [7]):

$$\det\left(T_1[B - f'(\xi)A]T_2\right)\Big|_{\substack{\mathbf{W}=\mathbf{W}_0 \\ \vartheta=0}} \equiv 0.$$

Известно, что определитель произведения матриц равен произведению определителей каждой из матриц, отсюда

$$\det T_1\Big|_{\substack{\mathbf{W}=\mathbf{W}_0 \\ \vartheta=0}} \cdot \det\left[B - f'(\xi)A\right]\Big|_{\substack{\mathbf{W}=\mathbf{W}_0 \\ \vartheta=0}} \cdot \det T_2\Big|_{\substack{\mathbf{W}=\mathbf{W}_0 \\ \vartheta=0}} \equiv 0,$$

т. к. матрицы T_1 и T_2 невырожденные, их определители отличны от нуля. В результате получаем матричное уравнение

$$\det\left[B - f'(\xi)A\right]\Big|_{\substack{\mathbf{U}=\mathbf{U}_0 \\ \vartheta=0}} \equiv 0, \tag{18}$$

решение которого дает выражение для функции $f(\xi)$ в явном виде:

$$f(\xi) = \pm\begin{cases} c_0\sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha - 2\ln c_0}, & \varkappa = 1 \quad (\gamma = 3), \\ c_0\sqrt{\beta + c_0^{\frac{1-\varkappa}{\varkappa}}(\operatorname{tg}^2\alpha - \beta)}, & \varkappa \neq 1 \quad (\gamma \neq 3). \end{cases}$$

В работе [6] для задачи (17) доказывается

Теорема. *Поставленная задача (17) при найденной функции $f(\xi)$ является характеристической задачей Коши стандартного вида и поэтому у нее в некоторой окрестности точки $(\zeta = 0, \vartheta = 0)$ существует единственное локально-аналитическое решение, представимое в виде сходящегося ряда*

$$\mathbf{W}(\zeta,\vartheta) = \sum_{k=0}^{\infty}\mathbf{W}_k(\zeta)\frac{\vartheta^k}{k!}, \quad \mathbf{W}_k(\zeta) = \frac{\partial^k\mathbf{W}}{\partial\vartheta^k}\Big|_{\vartheta=0}.$$

Алгоритм построения решения задачи (17) в пространстве специальных переменных ϑ, ζ подробно описан в работе [6]. Для построения решения задачи (17) в пространстве физических автомодельных переменных ξ, η необходимо осуществлять обратное преобразование согласно заменам (11) и (13), что в общем (несогласованном) случае выполнить в явном виде затруднительно. Поэтому искомое двумерное течение будет строиться как решение задачи (12) в пространстве переменных ξ, ϑ в виде сходящегося ряда по степеням ϑ:

$$\mathbf{U}(\xi,\vartheta) = \sum_{k=0}^{\infty}\mathbf{U}_k(\xi)\frac{\vartheta^k}{k!}, \quad \mathbf{U}_k(\xi) = \frac{\partial^k\mathbf{U}}{\partial\vartheta^k}\Big|_{\vartheta=0}, \tag{19}$$

так как задачи (17) и (12) эквивалентны. Начальное условие для транспортного уравнения задачи (12) будет строиться из граничного условия задачи (17).

2. Построение транспортного уравнения и уравнения начальных условий для коэффициента $c_1(\xi)$ рассматриваемой начально-краевой задачи. При подстановке в СУГД задачи (12) значения $\vartheta = 0$ получаем соотношения между функциями $c_1(\xi)$, $u_1(\xi)$ и $v_1(\xi)$:

$$u_1 = \frac{c_1}{\varkappa}\frac{c_0 f'}{c_0 f' - f}, \quad v_1 = -\frac{c_1}{\varkappa}\frac{c_0}{c_0 f' - f}. \tag{20}$$

Для построения транспортного уравнения (дифференциальное уравнение для нахождения коэффициента $c_1(\xi)$) необходимо систему (12) продифференцировать по переменной ϑ и подставить значение $\vartheta = 0$. При этом в соответствии с (19) будут справедливы следующие соотношения:

$$\begin{array}{lllll}
c\big|_{\vartheta=0} = c_0, & c_\xi\big|_{\vartheta=0} = c_0', & c_\vartheta\big|_{\vartheta=0} = c_1, & c_{\xi\vartheta}\big|_{\vartheta=0} = c_1', & c_{\vartheta\vartheta}\big|_{\vartheta=0} = c_2, \\
u\big|_{\vartheta=0} = u_0, & u_\xi\big|_{\vartheta=0} = u_0', & u_\vartheta\big|_{\vartheta=0} = u_1, & u_{\xi\vartheta}\big|_{\vartheta=0} = u_1', & u_{\vartheta\vartheta}\big|_{\vartheta=0} = u_2, \\
v\big|_{\vartheta=0} = 0, & v_\xi\big|_{\vartheta=0} = 0, & v_\vartheta\big|_{\vartheta=0} = v_1, & v_{\xi\vartheta}\big|_{\vartheta=0} = v_1', & v_{\vartheta\vartheta}\big|_{\vartheta=0} = v_2,
\end{array}$$

в результате система (12) принимает следующий вид:

$$\begin{cases}
u_1 c_0' - c_0 c_1' + \varkappa c_1 u_0' + \varkappa c_0 u_1' + (v_1 - 1 - u_1 f')c_1 + (c_0 f' - f)c_2 - \\
\qquad\qquad - \varkappa f' c_1 u_1 - \varkappa f' c_0 u_2 + \varkappa c_1 v_1 + \varkappa c_0 v_2 = 0, \\
c_1 c_0' + c_0 c_1' + \varkappa u_1 u_0' - \varkappa c_0 u_1' - c_1^2 f' - c_0 f' c_2 + \varkappa(c_0 f' - f)u_2 + \\
\qquad\qquad + \varkappa(v_1 - 1 - u_1 f')u_1 = 0, \\
-\varkappa c_0 v_1' + c_1^2 + c_0 c_2 + \varkappa(v_1 - 1 - u_1 f')v_1 + \varkappa(c_0 f' - f)v_2 = 0.
\end{cases} \tag{21}$$

Из второго и третьего уравнения системы (21) выразим $u_2(\xi)$ и $v_2(\xi)$:

$$u_2 = -\frac{c_1 c_0' + c_0 c_1' + \varkappa u_1 u_0' - \varkappa c_0 u_1' - c_1^2 f' - c_0 f' c_2 + \varkappa(v_1 - 1 - u_1 f')u_1}{\varkappa(c_0 f' - f)},$$
$$v_2 = -\frac{c_1^2 + c_0 c_2 + \varkappa(v_1 - 1 - u_1 f')v_1 - \varkappa c_0 v_1'}{\varkappa(c_0 f' - f)}.$$

Подставим выражения для $u_2(\xi)$ и $v_2(\xi)$ в первое уравнение системы (21), в нем сгруппируем слагаемые, содержащие коэффициент $c_2(\xi)$, в результате получим следующее уравнение:

$$\begin{aligned}
&u_1 c_0' + \varkappa c_1 u_0' - c_0 c_1' + \varkappa c_0 u_1' + [v_1 - 1 - u_1 f']c_1 - \varkappa f' c_1 u_1 + \varkappa c_1 v_1 - \\
&\quad - \varkappa c_0 f'\Big[\frac{c_1^2}{\varkappa}\frac{f'}{c_0 f' - f} - \frac{(v_1 - 1 - u_1 f')u_1}{c_0 f' - f} + \frac{c_0 u_1'}{c_0 f' - f} - \frac{c_0}{\varkappa}\frac{c_1'}{c_0 f' - f}\Big] - \\
&\quad - \varkappa c_0 f'\Big[-\frac{u_1 u_0'}{c_0 f' - f} - \frac{c_0'}{\varkappa}\frac{c_1}{c_0 f' - f}\Big] + \varkappa c_0\Big[\frac{c_0 v_1'}{c_0 f' - f} - \frac{c_1^2}{\varkappa}\frac{1}{c_0 f' - f}\Big] - \\
&\qquad - \varkappa c_0 v_1 \frac{v_1 - 1 - u_1 f'}{c_0 f' - f} + c_2 \frac{(c_0 f' - f)^2 - (c_0 f')^2 - c_0^2}{c_0 f' - f} = 0.
\end{aligned}$$

Множитель при коэффициенте $c_2(\xi)$ тождественно равен нулю, так как справедливо соотношение (18). В результате получаем дифференциальное уравнение относительно коэффициентов $c_1(\xi)$, $u_1(\xi)$ и $v_1(\xi)$:

$$\begin{aligned} u_1c_0' + \varkappa c_1u_0' - c_0c_1' + \varkappa c_0u_1' + [v_1 - 1 - u_1f']c_1 - \varkappa f'c_1u_1 + \varkappa c_1v_1 - \\ - \varkappa c_0f'\Big[\frac{c_1^2}{\varkappa}\frac{f'}{c_0f'-f} - \frac{(v_1-1-u_1f')u_1}{c_0f'-f} + \frac{c_0u_1'}{c_0f'-f} - \frac{c_0}{\varkappa}\frac{c_1'}{c_0f'-f}\Big] - \\ - \varkappa c_0f'\Big[-\frac{u_1u_0'}{c_0f'-f} - \frac{c_0'}{\varkappa}\frac{c_1}{c_0f'-f}\Big] + \varkappa c_0\Big[\frac{c_0v_1'}{c_0f'-f} - \frac{c_1^2}{\varkappa}\frac{1}{c_0f'-f}\Big] - \\ - \varkappa c_0v_1\frac{v_1-1-u_1f'}{c_0f'-f} = 0. \end{aligned} \tag{22}$$

Используя соотношения (20), можно свести уравнение (22) к дифференциальному уравнению относительно неизвестной функции $c_1(\xi)$ и построить таким образом транспортное уравнение. После упрощений в результате элементарных преобразований исходное уравнение (22) записывается в нормализованном виде:

$$c_1' - \Big[\frac{c_0^2}{f^2} - 1 - \frac{4}{\varkappa+1}\frac{c_0^2}{c_0^2+f^2}\Big]\frac{c_1}{2c_0} - \frac{\varkappa+1}{\varkappa}\frac{(c_0^2+f^2)^2}{4c_0^2f^3}c_1^2 = 0. \tag{23}$$

Рассмотрим общий несогласованный случай, когда $\varkappa \neq 1$, $\gamma \neq 3$, тогда функцию $f(\xi)$ можно записать в виде произведения

$$f(\xi) = c_0(\xi)R(\xi), \tag{24}$$

где $R(\xi) = \sqrt{\beta + c_0^{(1-\varkappa)/\varkappa}(\operatorname{tg}^2\alpha - \beta)}$. Тогда уравнение (23) можно упростить до следующего вида:

$$c_1' - \Big[\frac{1}{R^2} - 1 - \frac{4}{\varkappa+1}\frac{1}{R^2+1}\Big]\frac{c_1}{2c_0} - \frac{\varkappa+1}{\varkappa}\frac{(1+R^2)^2}{4R^3}\frac{c_1^2}{c_0} = 0. \tag{25}$$

Построим начальное условие для транспортного уравнения (25). Для этого краевое условие из задачи (17) продифференцируем по ϑ и в получившееся соотношение

$$w_{3\vartheta}\big|_{\zeta=0} = \big[g'(\vartheta)w_2 + g(\vartheta)w_{2\vartheta}\big]_{\zeta=0}$$

подставим значение $\vartheta = 0$:

$$w_{3,1}\big|_{\zeta=0} = g_\vartheta'(0)w_{2,0}\big|_{\zeta=0} + g(0)w_{2,1}\big|_{\zeta=0}.$$

Здесь $g(0)$ и $g'(0)$ — значения функции $g(\vartheta)$ и ее производной по ϑ при $\vartheta = 0$. Так как $w_{2,0}\big|_{\zeta=0} = u_0\big|_{\zeta=0} = 0$, выполняется

$$w_{3,1}\big|_{\zeta=0} = g(0)w_{2,1}\big|_{\zeta=0}. \tag{26}$$

По определению $w_{3,1}\big|_{\zeta=0} = -\frac{\varkappa}{c_0}v_1\big|_{\zeta=0}$. Для определения начального условия для уравнения (25) необходимо найти явный вид для выражения $w_{2,1}\big|_{\zeta=0}$.

Для этого в систему из задачи (17) подставим значение $\vartheta = 0$. С учетом вида функций w_1, w_2, w_3 и $w'_{1\zeta}$, $w'_{2\zeta}$, $w'_{3\zeta}$ и $w'_{1\vartheta}$, $w'_{2\vartheta}$, $w'_{3\vartheta}$ при $\vartheta = 0$ система (17) принимает вид

$$\begin{cases} -\dfrac{c_0}{\varkappa} f' w_{1,1} + (c_0 f' - f) w_{2,1} = \dfrac{u'_0 f}{f' - \operatorname{tg}\alpha}, \\ (c_0 f' - f) w_{1,1} - \varkappa c_0 f' w_{2,1} = \dfrac{c'_0 f}{f' - \operatorname{tg}\alpha}. \end{cases} \tag{27}$$

Система (27) представляет собой систему линейных алгебраических уравнений, решив которую, найдем функции $w_{1,1}$, $w_{2,1}$:

$$w_{1,1} = -\frac{c'_0}{f' - \operatorname{tg}\alpha}, \quad w_{2,1} = -\frac{u'_0}{f' - \operatorname{tg}\alpha}.$$

Подставим в (26) выражения для $w_{3,1}$, $w_{2,1}$, $g(0)$:

$$v_1\big|_{\zeta=0} = -\frac{u'_0}{f' - \operatorname{tg}\alpha} \frac{\operatorname{tg}\alpha}{1 + f' \operatorname{tg}\alpha}\Big|_{\zeta=0}.$$

С учетом связи (20) между функциями $c_1(\xi)$ и $v_1(\xi)$ и уравнением характеристики (24) получим начальное условие для $c_1(\xi)$ в случае, когда $\varkappa \neq 1$, $\gamma \neq 3$:

$$c_1\big|_{\zeta=0} = -\frac{2c'_0 R(1 + R^2)}{R^2 - 2R\operatorname{tg}\alpha - 1} \frac{\operatorname{tg}\alpha}{2R + \operatorname{tg}\alpha(R^2 - 1)}\Big|_{\zeta=0}.$$

При $\zeta = 0$ и $\vartheta = 0$, т. е. когда $\xi = 1$, значение $c_0(1) = 1$, а значение $R(\xi = 1) = \operatorname{tg}\alpha$; отсюда

$$c_1\big|_{\xi=1} = \frac{2c'_0 \operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha + 1}. \tag{28}$$

Таким образом, с учетом (25) и (28) задача Коши для транспортного уравнения рассматриваемой СУГД в общем несогласованном случае при $\varkappa \neq 1$, $\gamma \neq 3$ будет иметь вид

$$\begin{cases} c'_1 - P(\xi) c_1 - Q(\xi) c_1^2 = 0, \\ c_1\big|_{\xi=1} = \dfrac{2c'_0 \operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha + 1}, \end{cases} \tag{29}$$

где

$$P(\xi) = \frac{1}{2c_0}\Big[\frac{1}{R^2} - 1 - \frac{4}{\varkappa + 1}\frac{1}{R^2 + 1}\Big], \quad Q(\xi) = \frac{(1 + R^2)^2}{4c'_0 c_0 R^3}.$$

Первое уравнение задачи (29) — дифференциальное уравнение Бернулли, решение которого можно выписать в квадратурах.

3. Решение транспортного уравнения для коэффициента $c_1(\xi)$ в несогласованном случае при $\varkappa \neq 1$, $\gamma \neq 3$. Запишем функцию $c_1(\xi)$ как произведение двух неизвестных функций $c_1(\xi) = q(\xi)p(\xi)$ и подставим в первое уравнение задачи (29):

$$p'q + (q' - P(\xi)q)p - Q(\xi)p^2 q^2 = 0. \tag{30}$$

Коэффициент при $p(\xi)$ в уравнении (30) зануляется и значение $q(\xi)$ находится из решения дифференциального уравнения

$$q' - P(\xi)q = 0. \tag{31}$$

Решением (31) будет функция

$$q(\xi) = \exp\left(\int P(\xi)d\xi\right).$$

Найдем значение интеграла, стоящего в показателе экспоненты:

$$\int P(\xi)d\xi = \frac{1}{2c_0'}\int \frac{dc_0}{c_0(\beta + c_0^{1/\varkappa-1}(\operatorname{tg}^2\alpha - \beta))} - \frac{1}{2c_0'}\int \frac{dc_0}{c_0} - \\ - \frac{2}{\varkappa}\int \frac{dc_0}{c_0(\beta + 1 + c_0^{1/\varkappa-1}(\operatorname{tg}^2\alpha - \beta))}.$$

Сделаем замену переменных:

$$z = c_0^{1/\varkappa}, \quad c_0 = z^{\varkappa}, \quad dc_0 = \varkappa z^{\varkappa-1}dz. \tag{32}$$

Здесь и далее предполагается, что $\varkappa \in \mathbb{Q}$. В результате будем иметь

$$\int P(\xi)d\xi = \frac{\varkappa+1}{2}\int \frac{z^{\varkappa-2}dz}{\beta z^{\varkappa-1} + \operatorname{tg}^2\alpha - \beta} - 2\int \frac{z^{\varkappa-2}dz}{(\beta+1)z^{\varkappa-1} + \operatorname{tg}^2\alpha - \beta} - \\ - \frac{1}{2c_0'}\ln c_0 = \ln\left(\frac{c_0^{(\varkappa-1)/\varkappa}(\beta + 1 + c_0^{(1-\varkappa)/\varkappa}(\operatorname{tg}^2\alpha - \beta))}{c_0\sqrt{\beta + c_0^{(1-\varkappa)/\varkappa}(\operatorname{tg}^2\alpha - \beta)}}\right).$$

В результате

$$q(\xi) = \frac{c_0^{(\varkappa-1)/\varkappa}(\beta + 1 + c_0^{(1-\varkappa)/\varkappa}(\operatorname{tg}^2\alpha - \beta))}{c_0\sqrt{\beta + c_0^{(1-\varkappa)/\varkappa}(\operatorname{tg}^2\alpha - \beta)}} = \frac{c_0^2 + f^2}{c_0^{(\varkappa+1)/\varkappa}f} = \frac{1+R^2}{c_0^{1/\varkappa}R}. \tag{33}$$

Функция $p(\xi)$ является решением уравнения

$$\frac{dp}{p^2} = \frac{1}{c_0'}Q(c_0)q(c_0)dc_0,$$

отсюда

$$\tilde{C} - \frac{1}{p} = \left(\frac{\varkappa+1}{2\varkappa}\right)^2 \int \frac{(1+R^2)^3}{c_0^{(\varkappa+1)/\varkappa}R^4}dc_0, \tag{34}$$

где $\tilde{C}$ — константа интегрирования.

Вычислим интеграл, стоящий в правой части выражения (34). После замены (32) интеграл переписывается следующим образом:

$$\int \frac{(1+R^2)^3}{c_0^{(\varkappa+1)/\varkappa}R^4}dc_0 = \int \frac{dc_0}{c_0^{(\varkappa+1)/\varkappa}R^4} + 3\int \frac{dc_0}{c_0^{(\varkappa+1)/\varkappa}R^2} + 3\int \frac{dc_0}{c_0^{(\varkappa+1)/\varkappa}} +$$
$$+ \int \frac{R^2 dc_0}{c_0^{(\varkappa+1)/\varkappa}} = -\frac{\operatorname{tg}^2\alpha - \beta}{c_0} + 3\varkappa \int \frac{z^{\varkappa-3}dz}{(z^{\varkappa-1}\beta + (\operatorname{tg}^2\alpha - \beta))} -$$
$$- \frac{\varkappa(\beta+3)}{c_0^{1/\varkappa}} + \varkappa \int \frac{dz}{z^{4-2\varkappa}(z^{\varkappa-1}\beta + (\operatorname{tg}^2\alpha - \beta))^2}. \quad (35)$$

Последний интеграл в выражении (35) берется по частям:

$$\int \frac{dz}{z^{4-2\varkappa}(z^{\varkappa-1}\beta + (\operatorname{tg}^2\alpha - \beta)\ )^2} = \frac{1}{\beta(\varkappa-1)} \int \frac{z^{\varkappa-2}d\beta z^{\varkappa-1}}{(z^{\varkappa-1}\beta + (\operatorname{tg}^2\alpha - \beta))^2} =$$
$$= \frac{1}{\varkappa+1}\Big[-\frac{z^{\varkappa-2}}{z^{\varkappa-1}\beta + (\operatorname{tg}^2\alpha - \beta)} + (\varkappa-2)\int \frac{z^{\varkappa-3}dz}{z^{\varkappa-1}\beta + (\operatorname{tg}^2\alpha - \beta)}\Big]. \quad (36)$$

Выражение (36) подставим в (35):

$$\int \frac{(1+R^2)^3}{c_0^{(\varkappa+1)/\varkappa}R^4}dc_0 = -\frac{\varkappa(\beta+3)}{c_0^{1/\varkappa}} - \frac{(\operatorname{tg}^2\alpha - \beta)}{c_0} +$$
$$+ \frac{\varkappa}{\varkappa+1}\frac{z^{\varkappa-2}}{z^{\varkappa-1}\beta + (\operatorname{tg}^2\alpha - \beta)} + \frac{\varkappa(2\varkappa+5)}{\varkappa+1}\int \frac{z^{\varkappa-3}dz}{z^{\varkappa-1}\beta + (\operatorname{tg}^2\alpha - \beta)}. \quad (37)$$

Введем обозначение $I(\xi) = \displaystyle\int \frac{dz}{z^2(\beta + z^{1-\varkappa}(\operatorname{tg}^2\alpha - \beta))}$ и подставим выражение (37) в (34):

$$\tilde{C}_1 - \frac{1}{p}\Big(\frac{2\varkappa}{\varkappa+1}\Big)^2 = -\frac{1}{c_0^{1/\varkappa}}\Big(2\varkappa - 1 + \frac{f^2}{c_0^2} - \frac{\varkappa}{\varkappa+1}\frac{c_0^2}{f^2}\Big) + \frac{\varkappa(2\varkappa+5)}{\varkappa+1}I(\xi), \quad (38)$$

где $\tilde{C}_1 = \tilde{C}(2\varkappa/(\varkappa+1))^2$. Из выражения (38) выразим функцию $p(\xi)$:

$$p(\xi) = \Big(\frac{2\varkappa}{\varkappa+1}\Big)^2\Big[\tilde{C}_1 + \Big(2\varkappa - 1 + \frac{f^2}{c_0^2} - \frac{\varkappa}{\varkappa+1}\frac{c_0^2}{f^2}\Big)c_0^{-1/\varkappa} -$$
$$- \frac{\varkappa(2\varkappa+5)}{\varkappa+1}I(\xi)\Big]^{-1}. \quad (39)$$

С учетом (33) и (39) запишем выражение для функции $c_1(\xi)$:

$$c_1(\xi) = \frac{c_0^2 + f^2}{c_0 f}\Big(\frac{2\varkappa}{\varkappa+1}\Big)^2\Big[\tilde{C}_1 c_0^{1/\varkappa} + \Big(2\varkappa - 1 + \frac{f^2}{c_0^2} - \frac{\varkappa}{\varkappa+1}\frac{c_0^2}{f^2}\Big) -$$
$$- \frac{\varkappa(2\varkappa+5)}{\varkappa+1}c_0^{1/\varkappa}I(\xi)\Big]^{-1}. \quad (40)$$

Найдем значение константы интегрирования $\tilde{C}$ из начального условия, для этого приравняем выражение для $c_1(\xi)$ из (28) и (40) при $\xi = 1$:

$$\tilde{C} = \frac{\varkappa+1}{2\varkappa}\Big(\frac{\varkappa-1}{2\varkappa}\operatorname{tg}^2\alpha + \frac{3}{2\operatorname{tg}^2\alpha} + \frac{3}{2} - \varkappa + \frac{1}{2\varkappa} + \frac{2\varkappa+5}{2}I(1)\Big).$$

Подставим $\tilde{C}$ в (40) и окончательно получим выражение для $c_1(\xi)$ в рассматриваемом случае:

$$c_1(\xi) = \frac{2\varkappa}{\varkappa+1}\frac{c_0^2+f^2}{c_0 f}M(\xi)^{-1},$$

где

$$M(\xi) = c_0^{1/\varkappa}\Big(\frac{\varkappa-1}{2\varkappa}\operatorname{tg}^2\alpha + \frac{3}{2\operatorname{tg}^2\alpha} + \frac{3}{2} - \varkappa + \frac{1}{2\varkappa}\Big) + \varkappa + \frac{1}{2} - \frac{1}{2\varkappa} + \\ + \frac{\varkappa+1}{2\varkappa}\frac{f^2}{c_0^2} - \frac{1}{2}\frac{c_0^2}{f^2} - \frac{2\varkappa+5}{2}c_0^{1/\varkappa}\big(I(\xi)-I(1)\big).$$

Зная $c_1(\xi)$, можно найти $u_1(\xi)$ и $v_1(\xi)$, используя соотношения (20):

$$u_1(\xi) = \frac{2}{\varkappa+1}\frac{c_0^2-f^2}{c_0 f}M(\xi)^{-1}, \quad v_1(\xi) = \frac{4}{\varkappa+1}M(\xi)^{-1}.$$

Используя построенное решение (функции $c_1(\xi)$, $u_1(\xi)$ и $v_1(\xi)$), рассмотрим квазисогласованное приближение, когда условие согласования (8) не выполняется, но коэффициенты рядов c_i, u_i и v_i равны нулю при $i \geqslant 2$:

$$c = c_0 + c_1\vartheta, \quad u = u_0 + u_1\vartheta, \quad v = v_1\vartheta. \tag{41}$$

Можно показать, что решение (41) в координатах u, v будет иметь вид

$$c = 1 + \varkappa u + \varkappa\frac{f}{c_0}v, \tag{42}$$

где $f(\xi) = c_0\sqrt{\beta + c_0^{1/\varkappa-1}(\operatorname{tg}^2\alpha - \beta)}$. Из сравнения формул (9) и (42) видно, что в согласованном случае поверхность функции $c(\xi)$ есть плоскость в переменных u, v, а в квазисогласованном случае это криволинейная поверхность, так как коэффициент при переменной v есть функция независимой переменной ξ.

4. Решение транспортного уравнения для коэффициента $c_1(\xi)$ в несогласованном случае при $\gamma = 5/3$. При произвольном значении $\varkappa \in \mathbb{Q}$ интеграл $I(\xi)$ в элементарных функциях не берется. Рассмотрим случай, когда $\gamma = 5/3$ ($\varkappa = 1/3$, $\beta = 2$ — водород), тогда интеграл $I(\xi)$ принимает вид, который допускает его интегрирование в элементарных функциях:

$$I(\xi)\big|_{\varkappa=1/3} = \int \frac{dz}{z^2(2+z^{2/3}(\operatorname{tg}^2\alpha - 2))}. \tag{43}$$

После замены $z = t^3$ интеграл (43) преобразуется к виду

$$I(\xi)\big|_{\varkappa=1/3} = 3\int \frac{dt}{t^4(2+t^2(\operatorname{tg}^2\alpha - 2))}.$$

Дробь, стоящая под знаком интеграла, дважды раскладывается на сумму простейших дробей, и после интегрирования имеем

$$I(\xi)\big|_{\varkappa=1/3} = -\frac{1}{2c_0^3} + \frac{3(\operatorname{tg}^2\alpha - 2)}{4c_0} + \frac{3(\operatorname{tg}^2\alpha - 2)^{3/2}}{4\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{c_0}{\sqrt{2/(\operatorname{tg}^2\alpha - 2)}}.$$

При этом

$$I(1)\big|_{\varkappa=1/3} = -\frac{1}{2} + \frac{3(\operatorname{tg}^2\alpha - 2)}{4} + \frac{3(\operatorname{tg}^2\alpha - 2)^{3/2}}{4\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{2/(\operatorname{tg}^2\alpha - 2)}}.$$

Подставим выражение для $I(\xi)\big|_{\varkappa=1/3}$ и $I(1)\big|_{\varkappa=1/3}$ в (40), получим выражение для функции $c_1(\xi)$ в явном виде при $\gamma = 5/3$ ($\varkappa = 1/3$):

$$c_1(\xi)\big|_{\varkappa=1/3} = \frac{3 + c_0^2(\operatorname{tg}^2\alpha - 2)}{\sqrt{2 + c_0^2(\operatorname{tg}^2\alpha - 2)}} \frac{1}{M(\xi)\big|_{\varkappa=1/3}}, \tag{44}$$

где

$$\begin{aligned} M(\xi)\big|_{\varkappa=1/3} = {} & -6c_0^3 + 2.25c_0^3 \operatorname{tg}^2\alpha + \frac{3c_0^3}{\operatorname{tg}^2\alpha} + 9\frac{1}{2} - \frac{1}{4}c_0^2(\operatorname{tg}^2\alpha - 2) + \\ & + \frac{17\sqrt{2}}{8}c_0^3(\operatorname{tg}^2\alpha - 2)^{3/2} \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1}{2}(\operatorname{tg}^2\alpha - 2)} - \frac{1}{2 + c_0^2(\operatorname{tg}^2\alpha - 2)} - \\ & - \frac{17\sqrt{2}}{8}c_0^3(\operatorname{tg}^2\alpha - 2)^{3/2} \operatorname{arctg}\frac{c_0}{\sqrt{2/(\operatorname{tg}^2\alpha - 2)}}. \end{aligned}$$

Из выражения для $c_1(\xi)\big|_{\varkappa=1/3}$ легко найти выражения для $u_1(\xi)\big|_{\varkappa=1/3}$ и $v_1(\xi)\big|_{\varkappa=1/3}$ также в явном виде:

$$\begin{aligned} u_1(\xi)\big|_{\varkappa=1/3} &= -\frac{3(1 + c_0^2(\operatorname{tg}^2\alpha - 2))}{2\sqrt{2 + c_0^2(\operatorname{tg}^2\alpha - 2)}} \frac{1}{M(\xi)\big|_{\varkappa=1/3}}, \\ v_1(\xi)\big|_{\varkappa=1/3} &= \frac{3}{M(\xi)\big|_{\varkappa=1/3}}. \end{aligned} \tag{45}$$

Применим построенное решение (функции $c_1(\xi)$, $u_1(\xi)$ и $v_1(\xi)$ при $\gamma = 5/3$ ($\varkappa = 1/3$)) к описанию течения сжатия специального призматического объема в квазисогласованном приближении.

5. Описание течения сжатия в квазисогласованном случае при $\gamma = 5/3$ и $\alpha = \pi/3$. В работах [1, 2, 4–6] было показано, что результаты решения задачи о разлете газа на косой стенке в вакуум при $t > 0$ можно использовать для описания сжатия газа в специальном призматическом объеме для $t < 0$.

Рассмотрим объем, ограниченный непроницаемыми стенками, представляющий собой в поперечном сечении правильный треугольник $\triangle EFG$ (см.

рис. 2, *a*), в котором находится покоящийся газ. В момент времени $t = t_0 < 0$ в результате внешнего воздействия внешние стенки EF, FG и EG треугольника $\triangle EFG$ начинают движение к центру пересечения биссектрис — точке O на рис. 2.

В силу симметричности внешнего воздействия и самого объема $\triangle EFG$ течение газа в областях $\triangle FGO$ и $\triangle EGO$ подобно течению в $\triangle EFO$. Далее отдельно рассматривается фрагмент $\triangle EFO$ треугольника $\triangle EFG$ (см. рис. 2, *b*).

На рис. 2, *b* показана конфигурация течения сжатия в момент времени $t_0 < t < 0$ для фрагмента $\triangle EOF$. Линии EO и FO в нашей задаче являются непроницаемыми стенками треугольника $\triangle EOF$ в силу симметричности течения в объеме $\triangle EFG$. В работе [5] показано, что в течении сжатия возникают три области: область покоящегося газа (*0*); область течения в виде центрированной волны (*1*); область течения в виде двойной волны (*2*).

Для описания течения сжатия в области двойной волны (*2*) используется построенное решение (44)–(45) задачи об истечении газа в вакуум с косой стенки при $\alpha = \pi/3$.

Найдем выражение для функции $c_1(\xi)$ для рассматриваемого специального объема. При $\gamma = 5/3$ и $\alpha = \pi/3$ значение $\varkappa = 1/3$, $\beta = 2$ и функция $f(\xi) = c_0\sqrt{c_0^2 + 2}$. Подставим данные значения $\varkappa$, β, $f(\xi)$ в формулы (44)–(45), в результате получим

$$M(\xi)\Big|_{\substack{\varkappa=1/3\\ \alpha=\pi/3}} = 9.5 + 3.5996c_0^3 - 0.25c_0^2 - \frac{1}{c_0^2+2} - \frac{17\sqrt{2}}{8}c_0^3 \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2}c_0,$$

$$c_1(\xi)\Big|_{\substack{\varkappa=1/3\\ \alpha=\pi/3}} = \frac{3+c_0^2}{\sqrt{2+c_0^2}}\frac{1}{M(\xi)\Big|_{\substack{\varkappa=1/3\\ \alpha=\pi/3}}}, \tag{46}$$

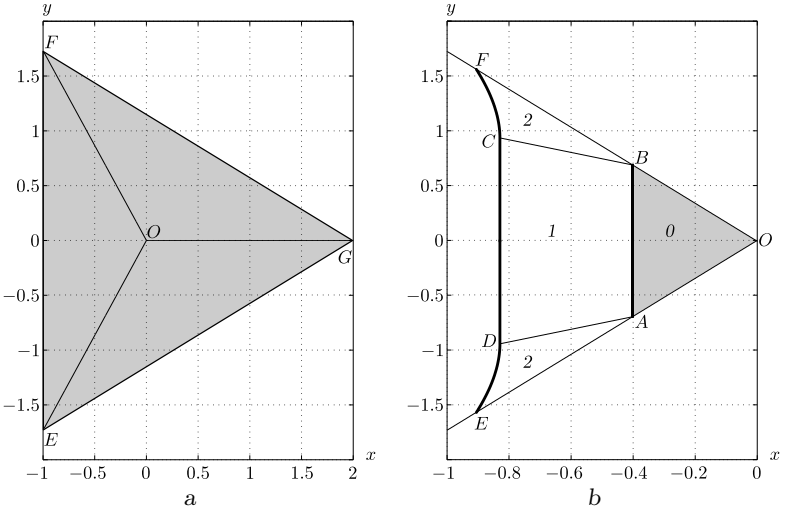


Рис. 2. Начальная конфигурация в момент $t_0 < 0$ (*a*) и конфигурация потока в момент $t_0 < t < 0$ (*b*): *0* — область, в которой находится покоящийся газ; *1* — область течения в виде центрированной волны; *2* — область течения в виде двойной волны

[Figure 2. (*a*) Initial configuration $t_0 < 0$; (*b*) the flow configuration at $t_0 < t < 0$: *0* — the quiescent gas region; *1* — the flow region in the form of a centered wave; *2* — the flow region in the form of a double wave]

$$u_1(\xi)\Big|_{\substack{\varkappa=1/3\\ \alpha=\pi/3}} = -\frac{c_0^2+1}{2\sqrt{c_0^2+2}}\frac{3}{M(\xi)\Big|_{\substack{\varkappa=1/3\\ \alpha=\pi/3}}}, \quad v_1(\xi)\Big|_{\substack{\varkappa=1/3\\ \alpha=\pi/3}} = \frac{3}{M(\xi)\Big|_{\substack{\varkappa=1/3\\ \alpha=\pi/3}}}.$$

Функции $M(\xi)\Big|_{\substack{\varkappa=1/3\\ \alpha=\pi/3}}$ и $c_1(\xi)\Big|_{\substack{\varkappa=1/3\\ \alpha=\pi/3}}$ определены на интервале, где $c_0(\xi) \geqslant 0$. При описании сжатия газа в специальном призматическом объеме область определения $M(\xi)\Big|_{\substack{\varkappa=1/3\\ \alpha=\pi/3}}$ и $c_1(\xi)\Big|_{\substack{\varkappa=1/3\\ \alpha=\pi/3}}$ есть интервал $c_0(\xi) \geqslant 1$. При описании разлета газа с косой стенки в вакуум, имеющей наклон $\alpha = \pi/3$, область определения функций $M(\xi)\Big|_{\substack{\varkappa=1/3\\ \alpha=\pi/3}}$ и $c_1(\xi)\Big|_{\substack{\varkappa=1/3\\ \alpha=\pi/3}}$ есть интервал $0 \leqslant c_0(\xi) \leqslant 1$.

Найдем нули функции, стоящей в знаменателе дроби (46) при $c_0 \geqslant 1$. Так как справедливо неравенство $c_0^2 + 2 > 0$ при любых $c_0 \geqslant 0$, второй сомножитель в знаменателе дроби равен нулю:

$$M(\xi)\Big|_{\substack{\varkappa=1/3\\ \alpha=\pi/3}} = 9.5 + 3.5996c_0^3 - 0.25c_0^2 - \frac{1}{c_0^2+2} - \frac{17\sqrt{2}}{8}c_0^3 \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2}c_0 = 0. \quad (47)$$

Численное решение уравнения (47) при $c_0(\xi) \geqslant 1$ дает единственное значение $c_0^* = 3.9564$ ($\xi_* = 12.8257$), при котором значение функции $M(\xi)\Big|_{\substack{\varkappa=1/3\\ \alpha=\pi/3}}$ равно нулю. Отсюда

$$\lim_{\xi\to\xi_*} c_1(\xi) = \lim_{\xi\to\xi_*} \frac{\partial c}{\partial \vartheta}\Big|_{\vartheta=0} = \infty. \quad (48)$$

Значение предела (48) означает, что в течении типа двойная волна при сильном сжатии газа, находящегося в рассматриваемом призматическом объеме, наступает градиентная катастрофа, функция $c(\xi, \vartheta)$ в точке ξ_* при $\vartheta = 0$ (точка D на рис. 3, b) испытывает сильный разрыв, что приводит к образованию ударной волны.

Необходимо отметить следующее. Транспортное уравнение (29) — нелинейное дифференциальное уравнение, поэтому его решение содержит найденную в точке ξ_* особенность. Все последующие дифференциальные уравнения для нахождения коэффициентов c_i при $i \geqslant 2$ будут линейными, поэтому других особенностей решение задачи (12) не содержит.

Построим поверхность функции $c(\xi, \vartheta)$ при приближении переменной ξ к значению ξ_* для квазисогласованного случая (рис. 3, a) и для согласованного случая (рис. 3, b). Согласованный случай рассматривается для $\gamma = 2$, когда угол наклона косой стенки равен $\pi/3$.

Обозначения на рис. 3 повторяют обозначения рис. 1, 2. Черным цветом выделена область максимального сжатия, белым цветом — область покоящегося газа.

На рис. 3, a красным цветом отмечена точка D, в которой при $\xi = \xi_*$ и $\vartheta = 0$ обнаружена особенность найденного решения, где $c_1 \to \infty$ при $\xi \to \xi_*$.

Для остальной области сжатия значение $c(\xi, \vartheta)$ в квазисогласованном случае значительно меньше, чем в согласованном случае. Приведенная картина распределения $c(\xi, \vartheta)$ не полностью отражает рассматриваемое течение сжатия, так как члены ряда при $i \geqslant 2$ искусственно отброшены. Различия в значениях $c(\xi, \vartheta)$ также обусловлены тем, что на правом рисунке газ имеет показатель политропы $\gamma = 2$, а на левом $\gamma = 5/3$.

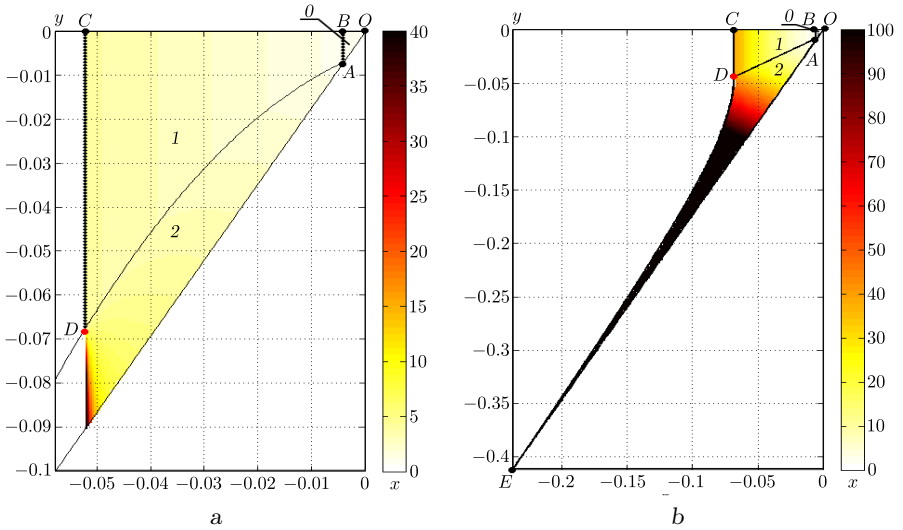


Рис. 3. Поверхность функции $c(\xi, \vartheta)$ при приближении к точке ξ_* в квазисогласованном (a) и согласованном (b) случаях: *0* — область, в которой находится покоящийся газ; *1* — область течения в виде центрированной волны; *2* — область течения в виде двойной волны (онлайн в цвете)

[Figure 3. (color online) The surface of the function $c(\xi, \vartheta)$ when approaching the point ξ_* in the quasi-consistent (a) and consistent (b) cases: *0* — the quiescent gas region; *1* — the flow region in the form of a centered wave; *2* — the flow region in the form of a double wave]

Заключение.

1. Построено аналитическое решение начально-краевой задачи об истечении политропного газа с косой стенки в вакуум в постановке характеристической задачи Коши стандартного вида в пространстве физических автомодельных переменных $\xi = x/t$, $\eta = y/t$ в общем несогласованном случае.
2. Построено аналитическое решение транспортного уравнения для коэффициента ряда $c_1(\xi)$ в общем несогласованном случае, и для частного случая $\gamma = 5/3$ — случай водорода — для коэффициента $c_1(\xi)$ построено аналитическое решение в явном виде.
3. Полученное решение применено к описанию сжатия специального призматического объема, представляющего собой в сечении правильный треугольник. Найдена особенность полученного решения в точке $\xi_* = 12.8257$ на характеристике $\vartheta = 0$, когда значение $c_1 \to \infty$ при $\xi \to \xi_*$. Таким образом, функция $c_1(\xi)$ в точке ξ_* при $\vartheta = 0$ испытывает сильный разрыв, что означает образование ударной волны сжатия и изменение режима течения газа в области двойной волны с безударного сжатия на «ударное» сжатие.

Конкурирующие интересы. Конкурирующих интересов не имею.

Авторская ответственность. Я несу полную ответственность за предоставление окончательной версии рукописи в печать. Окончательная версия рукописи мною одобрена.

Финансирование. Исследование выполнялось без финансирования.

Благодарность. Автор выражает благодарность и признательность своему научному руководителю профессору С.П. Баутину за внимание, помощь и поддержку.

Библиографический список

1. Баутин С. П. *Математическое моделирование сильного сжатия газа.* Новосибирск: Наука, 2007. 312 с. EDN: QJSOSJ.
2. Баутин С. П., Дерябин С. Л. *Математическое моделирование истечения идеального газа в вакуум.* Новосибирск: Наука, 2005. 390 с. EDN: QJPIDD.
3. Сучков В. А. Истечение в вакуум на косой стенке // *ПММ*, 1963. Т. 27, № 4. С. 739–740.
4. Баутин С. П., Понькин Е. И. Автомодельные решения задачи об истечении политропного газа в вакуум с косой стенки // *ПМТФ*, 2021. Т. 62, № 1. С. 32–40. EDN: KCQUYF. DOI: https://doi.org/10.15372/PMTF20210104.
5. Понькин Е. И. Математическое описание двух способов газодинамического воздействия на мишень с использованием решения Сучкова // *Вопр. атомн. науки и техн. Сер. Матем. модел. физ. проц.*, 2022. № 2. С. 27–39. EDN: YPTVJH. DOI: https://doi.org/10.53403/24140171_2022_2_27.
6. Понькин Е. И. Характеристическая задача Коши стандартного вида для описания истечения политропного газа в вакуум с косой стенки // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2022. Т. 26, № 2. С. 322–338. EDN: QYHKRK. DOI: https://doi.org/10.14498/vsgtu1922.
7. Баутин С. П. *Характеристическая задачи Коши и ее приложения в газовой динамике.* Новосибирск: Наука, 2009. 368 с.

Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2023, vol. 27, no. 2, pp. 336–356
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu1999

MSC: 76N15, 35C06, 35Q35

Construction of a self-similar solution to the system of gas dynamics equations describing the outflow of polytropic gas into vacuum from an inclined wall in the inconsistent case

E. I. Pon'kin

Snezhinsk Physic Institute of the National Research Nuclear University MEPhI,
8, Komsomolskay st., Snezhinsk, 456776, Russian Federation.

Abstract

The present paper is devoted to an initial-boundary value problem for the system of gas dynamics equations in the formulation of the characteristic Cauchy problem of standard form, which describes, at $t > 0$, the expansion of a polytropic gas into vacuum on an inclined wall in the space of physical self-similar variables $\xi = x/t$, $\eta = y/t$, and at $t < 0$, strong compression of gas in the prismatic volume.

The solution of the initial-boundary value problem is constructed in the form of series of functions $c(\xi, \vartheta)$, $u(\xi, \vartheta)$ and $v(\xi, \vartheta)$ with powers ϑ, where ϑ is the known function of independent variables. Finding the unknown coefficients $c_1(\xi)$, $u_1(\xi)$ and $v_1(\xi)$ of the series of functions $c(\xi, \vartheta)$, $u(\xi, \vartheta)$ and $v(\xi, \vartheta)$ is reduced to solving the transport equation for the coefficient $c_1(\xi)$.

The study deals with construction of an analytical solution of the transport equation for the coefficient $c_1(\xi)$ of the solution of the system of gas dynamics equations, which describes the isentropic outflow of a polytropic gas from an inclined wall, in the general inconsistent case, when $\operatorname{tg}^2 \alpha \neq (\gamma + 1)/(3 - \gamma)$. When $\gamma = 5/3$, which is the case of hydrogen, an analytical solution of the transport equation is constructed for the coefficient $c_1(\xi)$ in explicit form for the first time.

The obtained solution has been applied to the description of the compression of a special prismatic volume, which is a regular triangle in cross section. The specific feature of the obtained solution $c_1(\xi)$ indicated in the article is that the value $c_1 \to \infty$ as $\xi \to \xi_*$, where the value ξ_* is given by the equation $c_0(\xi_*) = 3.9564$. It is concluded that at the sound characteristic, which is the interface between the flows of centered and double wave types, a gradient catastrophe occurs at the point with coordinates $\xi = \xi_*$ and $\vartheta = 0$,

Mathematical Modeling, Numerical Methods and Software Complexes
Research Article

© Authors, 2023
© Samara State Technical University, 2023 (Compilation, Design, and Layout)
The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License (http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)

Please cite this article in press as:
Pon'kin E. I. Construction of a self-similar solution to the system of gas dynamics equations describing the outflow of polytropic gas into vacuum from an inclined wall in the inconsistent case, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2023, vol. 27, no. 2, pp. 336–356. EDN: EYOBZI. DOI: 10.14498/vsgtu1999 (In Russian).

Author's Details:
Eugeny I. Pon'kin https://orcid.org/0000-0002-7848-3167
Postgraduate Student; e-mail: epnk@rambler.ru

which results in development of strong discontinuity in the shock-free flow and formation of a shock wave.

Keywords: characteristic Cauchy problem of standard form, analog of the Kovalevskaya's theorem, inclined wall, transport equation.

Received: 9th February, 2023 / Revised: 18th May, 2023 / Accepted: 25th May, 2023 / First online: 26th June, 2023

Competing interests. No competing interests.

Author's Responsibilities. I take full responsibility for submitting the final version of the manuscript for printing. The final version of the manuscript has been approved by me.

Funding. The research was conducted without funding.

Acknowledgments. The author expresses gratitude and appreciation to their academic supervisor, Professor S. P. Bautin, for their attention, assistance, and support.

References

1. Bautin S. P. *Matematicheskoe modelirovanie sil'nogo szhatiia gaza* [Mathematical Modeling of Strong Gas Compression]. Novosibirsk, Nauka, 2007, 312 pp. (In Russian). EDN: QJSOSJ
2. Bautin S. P., Deryabin S. L. *Matematicheskoe modelirovanie istecheniia ideal'nogo gaza v vakuum* [Mathematical Modeling of Ideal Gas Flow into Vacuum]. Novosibirsk, Nauka, 2005, 390 pp. (In Russian). EDN: QJPIDD
3. Suchkov V. A. Flow into a vacuum along an oblique wall, *J. Appl. Math. Mech.*, 1963, vol. 27, no. 4, pp. 1132–1134. DOI: https://doi.org/10.1016/0021-8928(63)90195-3.
4. Bautin S. P., Pon'kin E. I. Self-similar solutions of the problem of polytropic gas flow along an oblique wall into vacuum, *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2021, vol. 62, no. 1, pp. 27–37. EDN: YQXWVA. DOI: https://doi.org/10.1134/S0021894421010041.
5. Pon'kin E. I. Mathematical description of two methods of gas-dynamic impact on the target using the Suchkov solution, *Vopr. Atomn. Nauki Tekhn. Ser. Matem. Model. Fiz. Prots.*, 2022, no. 2, pp. 27–39 (In Russian). EDN: YPTVJH. DOI: https://doi.org/10.53403/24140171_2022_2_27.
6. Pon'kin E. I. The characteristic Cauchy problem of standard form for describing the outflow of a polytropic gas into vacuum from an obligue wall, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2022, vol. 26, no. 2, pp. 322–338 (In Russian). EDN: QYHKRK. DOI: https://doi.org/10.14498/vsgtu1922.
7. Bautin S. P. *Kharakteristicheskaia zadachi Koshi i ee prilozheniia v gazovoi dinamike* [The Characteristic Cauchy Problem and its Applications in Gas Dynamics]. Novosibirsk, Nauka, 2009, 368 pp. (In Russian)

Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2023. Т. 27, № 2. С. 357–374
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu1978
EDN: MXEZAB

УДК 517.925

Оценивание множеств решений линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений с возмущениями на основе оператора Коши

А. А. Рогалев

Институт космических и информационных технологий
Сибирского федерального университета
Россия, 660074, Красноярск, ул. Академика Киренского, 26 к/1.

Аннотация

Излагается метод численного анализа множеств решений линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений, содержащих возмущения в правой части. Метод определяет экстремальные значения решений, которые составляют множества решений по осям координат или в заданном направлении. Получены оценки на основе использования оператора Коши, записанного символьными формулами вариации произвольных постоянных. Дополнительно реализован контроль отклонения решений при расчете пучка траекторий. Приведены примеры оценивания множеств достижимости систем при воздействии управляющих воздействий и возмущений.

Ключевые слова: возмущающие воздействия; пучок траекторий; символьные алгоритмы.

Получение: 30 декабря 2022 г. / Исправление: 14 апреля 2023 г. / Принятие: 25 мая 2023 г. / Публикация онлайн: 23 июня 2023 г.

Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ
Научная статья

© Коллектив авторов, 2023
© СамГТУ, 2023 (составление, дизайн, макет)
Контент публикуется на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru)

Образец для цитирования
Рогалев А. А. Оценивание множеств решений линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений с возмущениями на основе оператора Коши // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2023. Т. 27, № 2. С. 357–374. EDN: MXEZAB. DOI: 10.14498/vsgtu1978.

Сведения об авторе
Александр Алексеевич Рогалев https://orcid.org/0000-0003-2176-9639
старший преподаватель; каф. информационных систем; e-mail: gogoba88@mail.ru

Введение. Рассматривается задача оценки множества решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) с возмущениями. Такие задачи возникают при исследовании устойчивости с постоянно действующими возмущениями на конечном интервале времени [1–3], множеств достижимости (МД) управляемых систем [4–11], оценке выживаемости систем [12]. Оценка множеств решений для линейных систем ОДУ с возмущениями актуальна в наше время во многих современных практических сферах, к которым относятся различные системы управления реальными объектами, оценка характеристик объектов в баллистике при массовых вычислениях, управление беспилотными летательными аппаратами и автомобилями [13–14]. Постановка задачи оценки множества решений системы ОДУ с возмущающими воздействиями обусловлена тем, что для рассматриваемой модели отсутствует достаточное описание всех параметров, включающих действующие возмущения (управления) [1, 4, 9–10], а известны только границы изменения возмущений (управлений). В подобных случаях необходимо оценивать все множество решений, соответствующих возмущениям.

Универсального метода получения оценок не существует ввиду многообразия и сложности задач [9]. Существующие методы основаны на различных подходах (например, метод оптимальных двусторонних оценок МД на основе операций над эллипсоидами [4–9], подход работы [10]), в основе которых лежит многократное решение систем ОДУ с измененными значениями параметров, что позволяет учитывать все возможные значения коэффициентов этих систем под воздействием возмущений. В последние годы развиваются исследования в области разработки и применения методов адаптивной интерполяции в задачах с интервальными неопределенностями [15–17], в которых для каждого момента времени строятся кусочно-полиномиальные функции, интерполирующие зависимость решения задачи от точечных значений интервальных параметров с заданной точностью. Авторы метода адаптивной интерполяции применяют k-d-деревья для хранения информации о найденных значениях численного решения. С помощью этого метода решены несколько практически важных задач [15–17], в которых требуется определить верхние и нижние границы компонент множества решений.

Следует выделить также работы, описывающие подход, основанный на символьной формуле оператора сдвига вдоль траектории и вычислении множеств значений этой формулы по всем множествам управления и управляющим воздействиям [18] и его применение в ряде задач [19–23].

Иногда возникают трудности, связанные с применением многих методов оценки множеств решений с возмущающими и управляющими параметрами [13–14], которые заключаются в расширении этих оценок независимо от поведения самих решений, а также в возможном увеличении ошибок численных расчетов. Вычисление границы МД может иметь большую вычислительную сложность для систем высокой размерности как в линейном, так и нелинейном случаях. Некоторые методы не позволяют установить параметры и управление, ведущие на границу [13]. В настоящее время разработка надежных вычислительных алгоритмов для оценки МД остается актуальной [14].

В данной статье развиваются методы решения задачи оценки множеств решений системы ОДУ с возмущающими воздействиями, основанные на сим-

вольных вычислениях [18]. Предложен и описан новый подход, основанный на символьной формуле Коши и учитывающий особенности интегральной кривой поставленной задачи, то есть свойства решений. В построенных на основе данного подхода численно-символьных алгоритмах вычисление максимальных и минимальных значений границ множеств решений выполняется независимо от предыдущих шагов на каждом шаге по времени. Ошибка вычислений границ множеств решений от шага к шагу не накапливается. Это является преимуществом рассматриваемого метода.

К достоинствам метода относится также использование для оценки множеств достижимости на входе возмущающих или управляющих воздействий как произвольных функций широкого класса.

1. Постановка задачи. Рассматривается следующая начальная задача для системы ОДУ:

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y(t) + u(t), \quad t \in [t_0, T]; \tag{1}$$

$$y(t_0) = y_0 \in Y_0, \tag{2}$$

где $y_0 \in Y_0 \subset \mathbb{R}^n$, $u : [t_0, T] \to [-1, 1]$, $y : [t_0, T] \to \mathbb{R}^n$, $A(t) : [t_0, T] \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $T > t_0$. Пусть для любого вектора начальных данных существует единственное решение этой задачи $y(t)$ на интервале $[t_0, T]$, $y(t)$ принадлежит соответствующему функциональному пространству (является непрерывной, непрерывно-дифференцируемой или абсолютно непрерывной функцией, в общем случае можно сказать — суммируемой функцией). Требуется найти включение (построить границы) множества решений $Y(t) \subseteq \mathbb{R}^n$ такое, что

$$y(t) \in Y(t) \tag{3}$$

на интервале $[t_0, T]$ для всех решений $y(t) = y(t, t_0, y_0)$ задачи (1) с начальными данными (2) и возмущающим воздействием $u(t)$.

Для построения включения (3) множества решений системы ОДУ с начальными данными воспользуемся оператором Коши $Y(t_0, t) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, сопоставляющим со значением каждого решения $y(t)$ системы ОДУ в точке $t = t_0$ значение этого же решения в точке t:

$$Y(t_0, t)y(t_0) = y(t). \tag{4}$$

Выполняются следующие свойства оператора Коши:

$$Y(t_0, t_0) = 0, \quad Y(t_0, t) = Y^{-1}(t, t_0), \quad Y(t_0, \tau)Y(\tau, t) = Y(t_0, t).$$

Если система ОДУ (1) является линейной системой с суммируемой правой частью, то формула (4) записывается в виде следующих форм:

$$y(t) = y(t, t_0, y_0) = \Phi(t)\left(\Phi^{-1}(t_0)y_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(\tau)u(\tau)d\tau\right), \tag{5}$$

$$y(t) = y(t, t_0, y_0) = \exp(tA)\left(\exp^{-1}(t_0A)y_0 + \int_{t_0}^{t} \exp^{-1}(\tau A)u(\tau)d\tau\right). \tag{6}$$

Формула (5) справедлива для систем линейных ОДУ с переменными коэффициентами, формула (6) выполняется для систем с постоянными матрицами коэффициентов. Здесь $u(\tau) = (u_1(\tau), \ldots, u_n(\tau))$ — вектор внешних воздействий (возмущений); $y_0 = (y_{1,0}, \ldots, y_{n,0})$ — вектор начальных данных; $\Phi(t)$ — матрица фундаментальных решений линейной однородной системы, полученной из системы (1); $\Phi^{-1}(t)$ — обратная матрица к матрице фундаментальных решений; $\exp(tA)$ — матрица фундаментальных решений линейной однородной системы с постоянными коэффициентами; $\exp^{-1}(tA)$ — обратная матрица к матрице фундаментальных решений линейной однородной системы с постоянными коэффициентами.

На основе формул (5) или (6) нельзя сразу же получить числовые значения. Необходимо выбрать алгоритм и организовать вычисления; величины $\exp(tA)$, $\exp^{-1}(tA)$, $\Phi(t)$, $\int \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)$ — символьные величины, для определения значений которых нужно реализовать соответствующие алгоритмы.

Представим формулы (5) и (6) как соотношения, связывающие решение и неопределенные воздействия. На их основе необходимо выбрать алгоритм и организовать вычисления, позволяющие получить верхние и нижние оценки множества всех решений. При этом величины, подобные $\exp(tA)$, $\exp^{-1}(tA)$, $\Phi(t)$, $\int \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)$, воспринимаются как символьная формула — выражение.

Для представления первой части формул (5), (6) в виде структуры, пригодной для организации вычислений на ЭВМ, необходимо записать матрицу фундаментальных решений как символьную формулу, включающую алгебраические величины (переменные и числа), соединенные знаками арифметических операций, знаками извлечения корня и возведения в степень и скобками, указывающими на последовательность применения арифметических операций. Далее необходимо выполнить такую же запись символьной формулы обратной матрицы фундаментальных решений, умножить символьные формулы матриц между собой и умножить произведение на символьный вектор начальных данных. Матрица фундаментальных решений является матричной функцией, в этом отличие от решения обычной системы ОДУ, решение которого есть векторная функция. Для реализации указанного процесса необходимо разработать алгоритм, не приводящий к значительному росту вычислительных затрат, пригодный к использованию для широкого класса систем вида (1), и реализовать его в виде программного комплекса.

2. Описание численно-символьного алгоритма. Первая часть алгоритма описывает построение символьных формул и организацию вычислений по этим формулам включенных в процесс вычисления оценок областей значений. Следует отметить, что оценивать области значений в этой части формулы Коши не требуется, так как полагаем, что начальные данные и все коэффициенты заданы точно. Далее в описании алгоритма мы не будем ссылаться на номера формул (5) или (6), так как эти действия на всех шагах выполняются как для формул (5), так и для формул (6).

Шаг 1. Определяется символьная формула решений фундаментальной матрицы решений матричной системы ОДУ

$$\frac{d\Phi}{dt} = A(t)\Phi. \tag{7}$$

Для нахождения матричного решения системы (7) используется метод нахождения полиномиального решения линейной функциональной системы либо метод нахождения рационального решения линейной функциональной системы [25], либо метод построения матричной экспоненты, если A — постоянная матрица. В итоге получаем символьные формулы решений. Эти формулы входят как компоненты в первый член формулы Коши $\Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)Y_0$.

Шаг 2. На этом шаге символьная формула $\Phi(t)$ преобразуется к символьным формулам $\Phi(t_0)$, $\Phi^{-1}(t_0)y_0$, выполняется подстановка символьных переменных и их преобразование. Первый член символьной формулы Коши $\Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)y_0$ конструируется на основе выражений, полученных после этой подстановки. Размерность произведения матричных и векторных функций равна размерности решения. Под интеграл во втором члене суммы входит также вектор возмущающих воздействий.

Вторая часть шага 2 алгоритма описывает преобразование подынтегрального выражения $\Phi^{-1}(\tau)u(\tau)$, нахождение первообразной преобразованного выражения, затем подстановку первообразной в символьную формулу Коши и оценивание границ области значений этой формулы.

Это достаточно сложная для реализации часть всего алгоритма. Для внешнего воздействия $u(t)$ известны только границы его значений. Поэтому интегрирование неизвестной функции, зависящей от времени, невыполнимо. Можно преобразовать подынтегральное символьное выражение к виду, для которого определяется первообразная. Затем с использованием этой первообразной, оценивается область значений второй части формулы (1), а значит оценивается область значений формулы (1).

Шаг 3. На этом шаге оценивается область значений формулы

$$\Phi(t)\int_{t_0}^{t}\Phi^{-1}(\tau)u(\tau)d\tau.$$

В ней изменяется один из сомножителей подынтегрального выражения $u(\tau)$, $|u(\tau)| \leqslant 1$ для любого τ, формулы фундаментальной матрицы решений и обратной матрицы не изменяются.

Чтобы вычислить границы множества значений

$$\bigcup_{u(\tau)\in U}\int_{0}^{1}\Phi^{-1}(\tau)u(\tau)d\tau$$

при $u(\tau) \in [u_{\min}, u_{\max}]$, в алгоритме определяются экстремальные значения подынтегрального выражения $\Phi(t)\displaystyle\int_{0}^{t}\Phi^{-1}(\tau)u(\tau)d\tau$ в фиксированных точках времени t_k, $k = 1, \ldots, n$. Выбор значений возмущающих (управляющих) воздействий как решений задач

$$\max_{u_{\min}\leqslant u(\tau)\leqslant u_{\max}}\Phi^{-1}(\tau)u(\tau) \quad \text{и} \quad \min_{u_{\min}\leqslant u(\tau)\leqslant u_{\max}}\Phi^{-1}(\tau)u(\tau)$$

в фиксированные моменты времени эквивалентен тому, что возмущающее воздействие выбирается из условия приближения подынтегрального выражения сверху, затем — из условия приближения снизу. При этом используются методы, в которых применяются только значения целевой функции и не вычисляются производные [26].

Для графического представления границы множества значений и ее оценки строится интерполяционный полином по точкам максимума подынтегрального выражения

$$\Phi(t)\Phi^{-1}(\tau)u(\tau) = \Phi(t_{\text{const}})\Phi^{-1}(\tau)u(\tau),$$

вычисленным в точках t_k; значение $t = t_{\text{const}}$ фиксировано, значения переменной τ изменяются в точках t_k:

$$\max_{u_{\min}\leqslant u(t_1)\leqslant u_{\max}} \Phi^{-1}(t_1)u(t_1), \quad \ldots, \quad \max_{u_{\min}\leqslant u(t_n)\leqslant u_{\max}} \Phi^{-1}(t_n)u(t_n).$$

Для интерполирования максимальных значений применяется кубический интерполяционный сплайн [27], обозначенный здесь как $\mathrm{MaxICS}(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_n$. Кубический интерполяционный сплайн $\mathrm{MinICS}(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_n$, строится аналогично по точкам

$$\min_{u_{\min}\leqslant u(t_1)\leqslant u_{\max}} \Phi^{-1}(t_1)u(t_1), \quad \ldots, \quad \min_{u_{\min}\leqslant u(t_n)\leqslant u_{\max}} \Phi^{-1}(t_n)u(t_n).$$

Так как все входящие в подынтегральное выражение функции векторные, данная процедура повторяется для каждой компоненты построенных векторных функций.

Для многих задач возмущающее воздействие [5] может не быть непрерывной, а также дифференцируемой функцией. Возможные варианты выбора возмущающих (управляющих) воздействий: кусочно-гладкая функция, производная которой интегрируема по Лебегу, либо абсолютно непрерывная функция. Поэтому необходимо оценить точность построения интерполяционной или сглаживающей сплайн-функции $\mathrm{MaxICS}(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_n$, вычисленной по точкам максимальных значений подынтегральных выражений, а также сплайн-функции $\mathrm{MinICS}(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_n$, вычисленной по точкам минимальных значений подынтегральных выражений. Компоненты подынтегрального выражения — непрерывные функции, зависящие от t.

Определение. Для любой функции $f(t)$, заданной на отрезке T, верхняя грань колебаний функции [27] по всем подотрезкам из T длиной меньше δ является модулем непрерывности этой функции:

$$\omega(f,\delta) = \sup\{|f(t_1) - f(t_2)|,\ t_1, t_2 \in T,\ |t_1 - t_2| < \delta\}.$$

Сформулируем утверждение, описывающее сходимость интерполяционных полиномов для непрерывной функции на отрезке.

Утверждение. *Пусть на отрезке $[t_0, T]$ заданы непрерывная функция $y(t)$ и такая последовательность сеток Δ_k, что $\|\Delta_k\| \to 0$ при $k \to \infty$. Если кубический сплайн дефекта 2 интерполирует функцию $y(t)$ в узлах сетки Δ_k и его производная в этих узлах равна нулю, то последовательность $\{S_{\Delta_k(t)}\}$*

сходится к $y(t)$ равномерно на $[t_0, T]$. Выполняется неравенство

$$\|y(t) - S_{\Delta_k(t)}\| \leqslant 2\omega\Big(\frac{\|\Delta\}}{2}, y\Big). \tag{8}$$

Доказательство утверждения и оценки (8) проводится методами из [27]. Дополнительным ограничением интерполяционного сплайна является требование равенства производной сплайна нулю в узлах сетки. Поскольку по сути задачи нас более всего интересуют оценки значений подынтегрального выражения в узлах сетки, равенство производной интерполяционного сплайна нулю в добавленных узлах сетки не оказывает существенного воздействия и не усложняет реализацию алгоритма. В противном случае возможно построение сглаживающего сплайна [27].

В выбранных узлах t_k, $k = 1, \ldots, n$, функции $\mathrm{MaxICS}(t)$ и $\mathrm{MinICS}(t)$ принимают экстремальные значения, совпадающие со значениями какой-либо траектории задачи (1), (2) в этих узлах. В промежуточных точках интерполяции к значениям интерполирующих функций нужно добавить или отнять оценку ошибки интерполяции (вычисляемая величина) согласно (8). Ниже на шаге 4 описан способ контроля за оценкой отклонения решений в пучке траекторий. Поскольку используется символьная формула точного решения, ошибок приближенного интегрирования системы при реализации этого алгоритма нет. Далее в алгоритме строятся формулы первообразных

$$\mathrm{IMaxICS}(t) = \int_{t_0}^{t} \mathrm{MaxICS}(\tau)d\tau, \quad \mathrm{IMinICS}(t) = \int_{t_0}^{t} \mathrm{MinICS}(\tau)d\tau.$$

Шаг 4. Для контроля точности алгоритма оценим максимальные отклонения любых двух решений, принадлежащих пучку траекторий

$$y(t) = \Phi(t)\Big(\Phi^{-1}(t_0)y_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(\tau)u(\tau)d\tau\Big).$$

Изменяющаяся величина в формуле решения — возмущающее воздействие $u(t)$, остальные параметры решений совпадают. Цель шага 4 заключается в демонстрации эквивалентности максимальных отклонений любых двух решений и максимальных отклонений решений, вычисляемых в данном методе по формуле Коши. При этом максимальные отклонения в первом из рассматриваемых примеров не будут превосходить вычисляемые в методе отклонения произвольных значений двух решений.

Преобразуем разность двух решений этого пучка, выходящих из одной начальной точки, но имеющих разные управляющие воздействия:

$$\begin{aligned} y_1(t) - y_2(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)y_0 + \Phi(t)\int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(\tau)u_1(\tau)d\tau - \\ - \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)y_0 - \Phi(t)\int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(\tau)u_2(\tau)d\tau = \\ = \Phi(t)\Big(\int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(\tau)u_1(\tau)d\tau - \int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(\tau)u_2(\tau)d\tau\Big) = \end{aligned}$$

$$= \Phi(t) \int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(\tau)(u_1(\tau) - u_2(\tau))d\tau.$$

Используя свойства интеграла Лебега в этом выражении, оценим покомпонентно модуль разности двух решений:

$$|y_1(t) - y_2(t) \leqslant 2|\Phi(t)| \int_{t_0}^{t} |\Phi^{-1}(\tau)||u_1(\tau) - u_2(\tau)|d\tau.$$

Далее,

$$|\Phi^{-1}(\tau)(u_1(\tau) - u_2(\tau)| \leqslant |\Phi^{-1}(\tau)||u_1(\tau) - u_2(\tau)| \leqslant 2|\Phi^{-1}(\tau)|.$$

В этом неравенстве учтено, что $u_1(t) \in [-1, 1]$, $u_2(t) \in [-1, 1]$. Отсюда для любого t справедлива оценка $|u_1(t) - u_2(t)| \leqslant 2$.

Это означает, что отклонение любых двух решений пучка траекторий покомпонентно оценивается так:

$$|y_1(t) - y_2(t)| \leqslant 2|\Phi(t)| \int_{t_0}^{t} |\Phi^{-1}(\tau)|d\tau. \tag{9}$$

Символьные формулы фундаментальной матрицы решений и обратной к ней матрицы были определены ранее в алгоритме, следовательно, для нахождения отклонений решений необходимо вычислить правую часть неравенства (9). Она применяется для контроля оценок областей решений, полученных в описанном методе.

Метод, представленный в этой статье, оценивает формулу множества точных решений как формулу объединения всех выражений, полученных по формуле Коши:

$$\bigcup_{u \in [-1,1]} y(t, t_0, y_0) = \bigcup_{u \in [-1,1]} \Phi(t) \left(\Phi^{-1}(t_0) y_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(\tau) u(\tau) d\tau \right). \tag{10}$$

Каждый элемент объединения (10) является точным решением задачи (1), (2). Основная сложность реализации алгоритма заключается в оценке области значений на основе символьных формул этого выражения. Эта сложность преодолена — этап описан на шаге 3.

При этом значение оценок выражения вычисляется сразу в выбранный момент времени. Нет необходимости накапливать (суммировать) множества значений выражений, что возникает при реализации любого численного метода оценки множеств решений. Это свойство является важной характеристикой алгоритма, составленного на основе формулы Коши. Явное достоинство методов, основанных на символьных формулах решений (10), заключается также в отсутствии накопления ошибок со всех временных шагов. В (10) отсутствуют какие-либо промежуточные численные значения, появляющиеся в любом численном методе вида

$$y_k + h\Psi(y_k, y_{k-1}, \ldots, y_{k-m}), \quad 0 \leqslant k \leqslant N, \quad 0 \leqslant m \leqslant k.$$

Вычисления максимальных и минимальных значений областей решений на каждом шаге времени в методе, описанном в статье, выполняются независимо от предыдущих шагов. Это и позволяет проверить точность символьных методов оценки множеств решений.

Шаг 5. Печать таблиц значений и построение графиков решений.

Для анализа вычислительной сложности символьного метода на основе оператора Коши отметим следующее. Шаг 3 алгоритма требует пересчета векторной численно-символьной величины $\Phi(t)\Phi(\tau)u(\tau)$ для каждого момента времени t и определения ее экстремальных значений для всех τ, пробегающих узлы сетки от 0 до t. Следовательно, асимптотическая зависимость числа операций от количества узлов сетки будет оцениваться как $O(N(N-1)/2)$, где N — число узлов сетки. Поскольку система является линейной и в методе не используется рекуррентная зависимость решения в каждый момент времени от неопределенных параметров (известна формула решения — формула Коши), в каждом узле сетки выполняется число операций с асимптотикой $O(n)$, где n — размерность системы.

Задача определения экстремумов символьной формулы здесь сводится к линейному программированию на гиперкубе. Сложность этой задачи зависит от числа независимых управляющих воздействий, прилагаемых к системе. Для распространенных практических задач в численных экспериментах подобная оптимизация не превышала сотых долей секунды при использовании `CPU` массового сегмента.

Данный алгоритм требует хранить в памяти на каждом шаге лишь фундаментальную матрицу решений в символьном виде, текущую формулу сплайна и векторы верхних/нижних оценок в численном виде.

3. Примеры вычисления оценок множеств решений. Задачи оценки множеств решений систем ОДУ появляются в случае, когда на систему влияют различные неопределенные внешние возмущения: неуправляемые изменения параметров, погрешности в измерении начальных условий и коэффициентов системы.

Гарантированный (нестохастический) подход оперирует с множествами, в которых лежат неопределенные переменные, при этом предполагается, что неизвестные возмущения локализованы в известных множествах, а в целом — произвольны.

Рассмотрим управляемую систему, описываемую системой ОДУ четвертого порядка

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= y_2, \quad \frac{dy_2}{dt} = -y_1 + y_2 + u, \\ \frac{dy_3}{dt} &= y_4, \quad \frac{dy_4}{dt} = y_1 - y_2 - w. \end{aligned} \tag{11}$$

В системе (11) y_1, y_3 — компоненты вектора состояния, описывающие положение управляемого объекта; y_2, y_4 — компоненты вектора, описывающие величину скорости управляемого объекта; на возмущения $u(t)$ и $w(t)$ наложены ограничения

$$u(t), w(t) \in U = \{|u| \leqslant 1, |w| \leqslant 1\}.$$

Начальные данные для системы (11) следующие: $y_i(t_0) = 1$, $i = 1, 2, 3, 4$.

В уравнения движения справа входит вектор равнодействующей всех сил в системе.

Выбор возмущающих или управляющих воздействий системы (11) заранее неизвестен. Поэтому ставится задача определить включение $Y_h(t)$ для пучка траекторий точных решений системы (11):

$$Y_h(t) \supseteq \{y(t, t_0, u, w) \mid u \in U,\ w \in U\}.$$

Все члены, входящие в уравнение движения, имеют одинаковые размерности, задача (особенно выраженная линейным оператором) безразмерна.

На основе символьного метода проведены оценки множеств достижимости задачи (11).

На рис. 1, 2 изображены верхние и нижние границы включений области достижимости для первой и третьей компоненты вектора решений, то есть в проекциях на оси y_1, y_3. На этих рисунках включены только два объекта: верхняя и нижняя границы множества решений в проекции на координатные плоскости.

Оценка множеств решений выполнена также для управляемой системы четвертого порядка [6]:

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= 2y_2 + y_4, & \frac{dy_2}{dt} &= -2y_1 + y_3 + u_1, \\ \frac{dy_3}{dt} &= y_2 + 10y_4, & \frac{dy_4}{dt} &= y_1 - 2y_3 + u_2 \end{aligned} \tag{12}$$

с возмущающими силами $|u_1(t)| \leqslant 1$, $|u_2(t)| \leqslant 1$. В [6] построены графики роста объема эллипсоида траекторий системы, входящих в пучок точных решений задачи (12). Полученные численно-символьным методом результаты оценки множеств решений всех компонент вектора состояния задачи (12) совпадают с качественными оценками в [6]. Это подтверждает график на рис. 3.

Рассмотрим задачу оценки множества достижимости при плоском движении самолета, при котором траектории его центра масс расположена в некоторой фиксированной вертикальной плоскости, служащей плоскостью материальной симметрии самолета. Силами, действующим на самолет, являются сила тяги винта, направленная по оси винта и составляющая с хордой крыла постоянный угол, сила тяжести и аэродинамические силы. Совокупность последних может быть приведена к главному вектору. Движение летательного аппарата в вертикальной плоскости на некотором интервале времени можно описать следующей линейной системой обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами [28]:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= a_{13}v + a_{14}\theta, & \frac{dx}{dt} &= a_{23}v + a_{24}\theta, \\ \frac{dv}{dt} &= a_{35}|u| + a_{30}, & \frac{d\theta}{dt} &= a_{45}u + a_{40}, \end{aligned} \tag{13}$$

где y, x — координаты местоположения летательного аппарата, v — скорость, θ — угол наклона траектории, a_{ij} — динамические коэффициенты. Система (13) получена в [28] из нелинейных дифференциальных уравнений движения летательного аппарата заменой правых частей функциями линейными

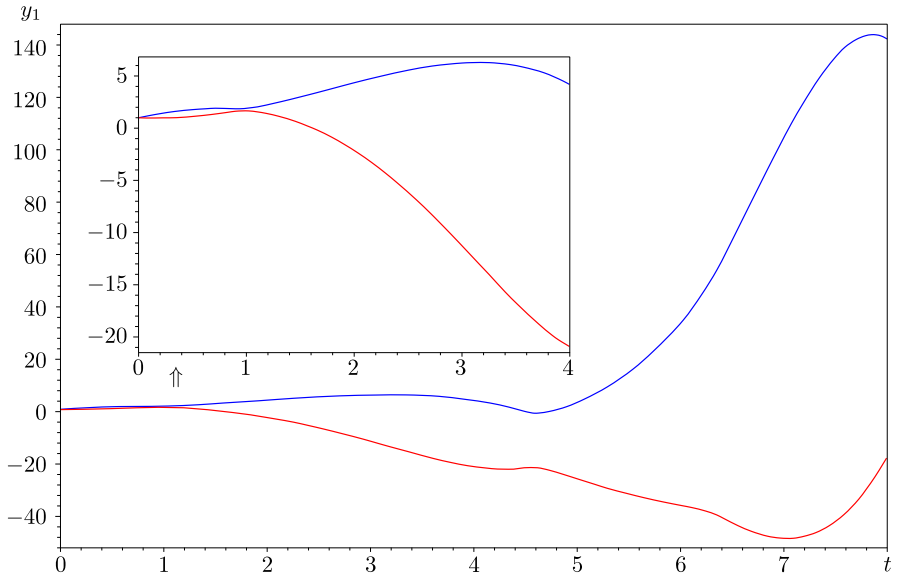


Рис. 1. Верхняя и нижняя границы множества достижимости первой компоненты вектора состояний на интервалах $[0, 4]$ и $[0, 8]$ для управляемой системы с возмущениями (11)

[Figure 1. The upper and lower bounds of the reachable set of the first component of the state vector are defined on the intervals $[0, 4]$ and $[0, 8]$ for the controlled system with perturbations (11)]

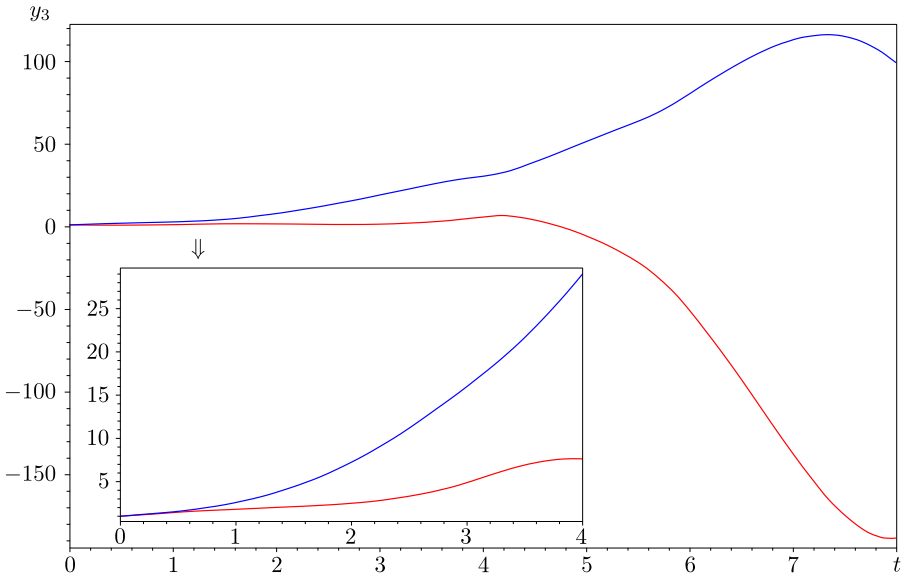


Рис. 2. Верхняя и нижняя границы множества достижимости третьей компоненты вектора состояний на интервалах $[0, 4]$ и $[0, 8]$ для управляемой системы с возмущениями (11)

[Figure 2. The upper and lower bounds of the reachable set of the third component of the state vector are defined on the intervals $[0, 4]$ and $[0, 8]$ for the controlled system with perturbations (11)]

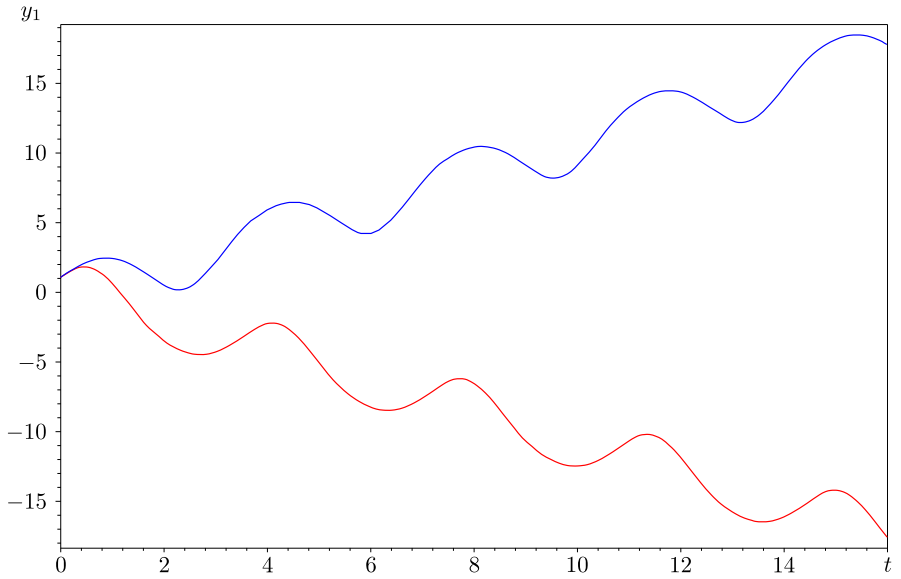


Рис. 3. Верхняя и нижняя границы множества достижимости первой компоненты вектора состояний на интервале $[0, 16]$ для управляемой системы с возмущениями (12)

[Figure 3. The upper and lower bounds of the reachable set of the first component of the state vector are defined on the intervals $[0, 16]$ for the controlled system with perturbations (12)]

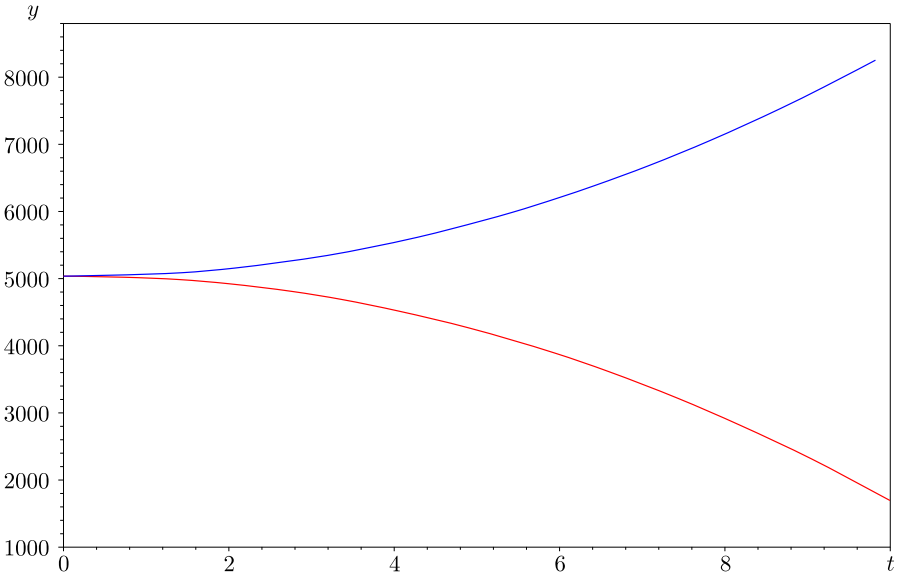


Рис. 4. Верхняя и нижняя границы множества достижимости первой компоненты вектора состояний в задаче вертикального взлета на интервале $[0, 10]$

[Figure 4. The upper and lower bounds of the set of attainable values of the first component of the state vector in the vertical takeoff problem within the interval $[0, 10]$]

относительно фазовых координат и управлений. Управляющее воздействие u — значения угла атаки, удовлетворяющие ограничению

$$-a_{\max} \leqslant u \leqslant a_{\max}, \quad a_{\max} = 0.25.$$

Динамические коэффициенты в работе [28] заданы как величины, имеющие размерности. Они принимают значения $a_{13} = 0$, $a_{14} = 1000$ м/с, $a_{23} = 1$, $a_{24} = -1$ м/с, $a_{35} = -50$ м/с^2, $a_{30} = -20$ м/с^2, $a_{45} = 0.25$ 1/с, $a_{40} = 0$. Требуется построить оценку области достижимости летательного аппарата в вертикальной плоскости Oxy для заданного момента времени.

При построении границ множества достижимости использовался символьный метод, описанный в этой статье. Для символьного приближения интеграла в формуле Коши применялось два алгоритма. Один алгоритм расчета основан на аппроксимации управляющего воздействия кусочно-постоянной функцией, второй — на приближении интеграла символьной квадратурной формулой. Динамические коэффициенты, например скорости, принимают большие значения, что означает возможность быстрого роста границ множества значений координат летательного аппарата. Численные значения границ множества решений этой задачи подтверждаются при сравнении со значениями формул точных решений (рис. 4).

Заключение. В статье описан метод оценки множеств решений систем ОДУ с возмущающими воздействиями. Для оценки границ множеств решений строятся формулы общего решения, формулы фундаментальной матрицы решений системы ОДУ и формулы первообразной от функции, в которую входят неточно заданные компоненты (возмущающие воздействия).

Разработан численно-символьный алгоритм построения формул, описывающих точные решения систем ОДУ, организующий упрощения этих формул и вычисления их экстремальных значений. В алгоритм также входят неравенства (9), связывающие максимальные отклонения решений и возмущающие воздействия на шаге 4 алгоритма. Результаты этого этапа нужны для контроля за точностью численно-символьного алгоритма. Построенный численно-символьный алгоритм применим на всем интервале времени, на котором существуют решения всех систем ОДУ, входящих в поставленную задачу оценки множеств решений.

Принципиальное отличие всех известных ранее методов и построенных численно-символьных алгоритмов заключается в том, что вычисление максимальных и минимальных значений границ множеств решений выполняется независимо от предыдущих шагов на каждом шаге по времени. Для известных методов для каждого шага времени к найденным на предыдущем шаге максимальным и минимальным границам множеств решений добавляются значения некоторых выражений, различных для разных методов, что приводит к накоплению ошибок. Ошибка вычислений границ множеств решений символьно-численным методом от шага к шагу не накапливается, такая возможность роста ошибок отсутствует.

Конкурирующие интересы. Конкурирующих интересов не имею.

Авторский вклад и ответственность. Я несу полную ответственность за предоставление окончательной версии рукописи в печать. Окончательная версия рукописи мною одобрена.

Финансирование. Работа выполнена в рамках проекта, поддержанного за счет средств гранта № 20–41–240002, предоставленного РФФИ, Правительством Красноярского края, Краевым фондом науки.

Библиографический список

1. Абгарян К. А. Об устойчивости движения на конечном промежутке времени // *Докл. АН СССР*, 1968. Т. 183, № 3. С. 527–530.
2. Абгарян К. А. *Введение в теорию устойчивости движения на конечном интервале времени.* М.: Наука, 1991. 160 с.
3. Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Щербаков П.С. Линейные матричные неравенства в системах управления с неопределенностью // *Автомат. и телемех.*, 2021. № 1. С. 3–54. EDN: VNZYOS. DOI: https://doi.org/10.31857/S0005231021010013.
4. Куржанский А. Б. *Управление и наблюдение в условиях неопределенности.* М.: Наука, 1977. 392 с. EDN: YOIHKV.
5. Куржанский А. Б., Филиппова Т. Ф. Об описании пучка выживающих траекторий управляемой системы // *Диффер. уравн.*, 1987. Т. 23, № 8. С. 1303–1315. EDN: YMJYEV.
6. Черноусько Ф. Л. *Оценивание фазового состояния динамических систем. Метод эллипсоидов.* М.: Наука, 1988. 320 с. EDN: TTDUCV.
7. Черноусько Ф. Л. Эллипсоидальные аппроксимации множеств достижимости управляемых линейных систем с неопределенной матрицей // *ПММ*, 1996. Т. 60, № 6. С. 940–950.
8. Куржанский А. Б., Месяц А. И. Управление эллипсоидальными траекториями. Теория и вычисления // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 2014. Т. 54, № 3. С. 404–414. EDN: RWANON. DOI: https://doi.org/10.7868/S0044466914030120.
9. Chernous'ko F. L. Optimal ellipsoidal estimates of control and uncertain systems (survey) // *Applied and Computational Mathematics*, 2009. vol. 8, no. 2. pp. 135–151. EDN: MWVJOL.
10. Ушаков В. Н., Ершов А. А. Множества достижимости и интегральные воронки зависящих от параметра дифференциальных включений // *Докл. РАН. Матем., информ., проц. упр.*, 2021. Т. 499. С. 49–53. EDN: ZMAGQA. DOI: https://doi.org/10.31857/S2686954321040159.
11. Ушаков В. Н., Ершов А. А., Ушаков А. В. Управляемые системы, зависящие от параметра: множества достижимости и интегральные воронки // *ПММ*, 2022. Т. 86, № 1. С. 186–205. EDN: RAXDBK. DOI: https://doi.org/10.31857/S0032823522010088.
12. Aubin J.-P., Frankowska H. The value does not exist! A motivation for extremal analysis // *Probab. Uncertain. Quant. Risk*, 2022. vol. 7, no. 3. pp. 195–214. DOI: https://doi.org/10.3934/puqr.2022013.
13. Althoff M., Frehse G., Girard A. Set propagation techniques for reachability analysis // *Annu. Rev. Control Robot. Auton. Syst.*, 2021. vol. 4. pp. 369–395. DOI: https://doi.org/10.1146/annurev-control-071420-081941.
14. Villegas Pico H. N., Alipantis D. C. Reachability analysis of linear dynamic systems with constant, arbitrary, and Lipschitz continuous inputs // *Automatica*, 2018. vol. 95. pp. 293–305. DOI: https://doi.org/10.1016/j.automatica.2018.05.026.
15. Морозов А.Ю., Ревизников Д. Л. Алгоритм адаптивной интерполяции на разреженных сетках для численного интегрирования систем обыкновенных дифференциальных уравнений с интервальными неопределенностями // *Диффер. уравн.*, 2021. Т. 57, № 7. С. 976–988. EDN: YOGCJE. DOI: https://doi.org/10.31857/S0374064121070104.
16. Гидаспов В. Ю., Морозов А. Ю., Ревизников Д. Л. Алгоритм адаптивной интерполяции с использованием TT-разложения для моделирования динамических систем с интервальными параметрами // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 2021. Т. 61, № 9. С. 1416–1430. EDN: XIHOGZ. DOI: https://doi.org/10.31857/S0044466921090106.
17. Морозов А. Ю., Ревизников Д. Л. Интервальный подход к решению задач параметрической идентификации динамических систем // *Диффер. уравн.*, 2022. Т. 58, № 7. С. 962–976. EDN: CEMWGM. DOI: https://doi.org/10.31857/S0374064122070081.

18. Новиков В. А., Рогалев А. Н. Построение сходящихся верхних и нижних оценок решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений с интервальными начальными данными // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 1993. Т. 33, № 2. С. 219–231.
19. Рогалев А. Н., Рогалев А. А. Численные оценки предельных отклонений летательных аппаратов в атмосфере // *Вестн. СибГАУ*, 2016. Т. 16, № 1. С. 104–112. EDN: TRIUWN.
20. Рогалев А. А. Алгоритмы символьных вычислений на основе корневых деревьев для оценки возможностей управления // *Сибирский журнал науки и технологий*, 2017. Т. 18, № 4. С. 810–819. EDN: YNZVUQ.
21. Rogalev A. N., Rogalev A. A., Feodorova N. A. Numerical computations of the safe boundaries of complex technical systems and practical stability // *J. Phys.: Conf. Ser.*, 2019. vol. 1399, 033112. EDN: VXANUU. DOI: https://doi.org/10.1088/1742-6596/1399/3/033112.
22. Rogalev A. N., Rogalev A. A., Feodorova N. A. Malfunction analysis and safety of mathematical models of technical systems // *J. Phys.: Conf. Ser.*, 2020. vol. 1515, 022064. EDN: GIFBHY. DOI: https://doi.org/10.1088/1742-6596/1515/2/022064.
23. Rogalev A. N. Regularization of inclusions of differential equations solutions based on the kinematics of a vector field in stability problems // *J. Phys.: Conf. Ser.*, 2021. vol. 2099, 012045. EDN: WQZHXJ. DOI: https://doi.org/10.1088/1742-6596/2099/1/012045.
24. Смирнов А. В. О билинейной сложности и практических алгоритмах умножения матриц // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 2013. Т. 53, № 12. С. 1970–1984. EDN: RLWJJV. DOI: https://doi.org/10.7868/S0044466913120168.
25. Абрамов С. А., Рябенко А. А., Хмельнов Д. Е. Регулярные решения линейных обыкновенных дифференциальных уравнений и усеченные ряды // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 2020. Т. 60, № 1. С. 4–17. EDN: AHLUDF. DOI: https://doi.org/10.31857/S0044466920010020.
26. Галеев Э. М. *Оптимизация: теория, примеры, задачи.* М.: УРСС, 2002. 304 с.
27. Ahlberg J. H., Nilson E. N., Walsh J. L. *The Theory of Splines and their Applications* / Mathematics in Science and Engineering. New York: Academic Press, 1967. xi+284 pp. DOI: https://doi.org/10.1016/s0076-5392(08)x6115-6.
28. Толпегин И. Г. Дифференциально-игровые методы наведения ракет на скоростные маневрирующие цели // *Изв. РАРАН*, 2003. № 1. С. 80–86.

Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2023, vol. 27, no. 2, pp. 357–374
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu1978

MSC: 65L05, 65L07, 65G40, 34A34, 65L70

The estimation of solutions sets of linear systems of ordinary differential equations with perturbations based on the Cauchy operator

A. A. Rogalev

Institute of Space and Information Technologies, Siberian Federal University,
26 k/1, Academician Kirensky str., Krasnoyarsk, 660074, Russian Federation.

Abstract

The paper outlines a method for numerical analysis of sets of solutions for linear systems of ordinary differential equations that contain perturbations in the right-hand side. The method determines extreme values of the solutions, which comprise the sets of solutions along the coordinate axes or in a specified direction. The estimations are based on using the Cauchy operator, written with symbolic formulas for variations of arbitrary constants. Additionally, control is implemented over the deviation of solutions when calculating a bundle of trajectories. The paper also is devoted to examples of estimating reachability sets of systems under the influence of control and disturbance effects.

Keywords: perturbations, trajectories tube, solutions sets, symbolic algorithms, symbolic formulae.

Received: 30th December, 2022 / Revised: 14th April, 2023 /
Accepted: 25th May, 2023 / First online: 23rd June, 2023

Competing interests. I have no conflicting interests.

Authorship contribution and responsibility.. I take full responsibility for submitting the final version of the manuscript for publication. The final version of the manuscript has been approved by me.

Funding. The work was carried out within the framework of a project supported by grant no. 20–41–240002 provided by the RFBR, the Government of the Krasnoyarsk Territory, and the Regional Science Foundation.

Mathematical Modeling, Numerical Methods and Software Complexes
Research Article

© Authors, 2023
© Samara State Technical University, 2023 (Compilation, Design, and Layout)
The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License (http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)

Please cite this article in press as:
Rogalev A. A. The estimation of solutions sets of linear systems of ordinary differential equations with perturbations based on the Cauchy operator, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2023, vol. 27, no. 2, pp. 357–374. EDN: MXEZAB. DOI: 10.14498/vsgtu1978 (In Russian).

Author's Details:
Aleksander A. Rogalev https://orcid.org/0000-0003-2176-9639
Senior Lecturer; Dept. of Information Systems; e-mail: gogoba88@mail.ru

References

1. Abgaryan K. A. On the stability of motion within a finite interval of time, *Sov. Math., Dokl.*, 1968, vol. 9, no. 3, pp. 1110–1112.
2. Abgaryan K. A. *Vvedenie v teoriiu ustoichivosti dvizheniia na konechnom intervale vremeni* [Introduction to the Theory of Stability of Motion over a Finite Time Interval]. Moscow, Nauka, 1991, 160 pp. (In Russian)
3. Polyak B. T., Khlebnikov M. V., Shcherbakov P. S. Linear matrix inequalities in control systems with uncertainty, *Autom. Remote Control*, 2021, vol. 82, no. 1, pp. 1–40. EDN: HMIXKI. DOI: https://doi.org/10.1134/S000511792101001X.
4. Kurzhansky A. B. *Upravlenie i nabliudenie v usloviiakh neopredelennosti* [Management and Supervision in Conditions of Uncertainty]. Moscow, Nauka, 1977, 392 pp. (In Russian). EDN: YOIHKV
5. Kurzhansky A. B., Filippova T. F. On a description of the bundle of surviving trajectories of a control system, *Differ. Uravn.*, 1987, vol. 23, no. 8, pp. 1303–1315 (In Russian). EDN: YMJYEV.
6. Chernous'ko F. L. *Otsenivanie fazovogo sostoianiia dinamicheskikh sistem. Metod ellipsoidov* [Estimation of the Phase State of Dynamic Systems. Ellipsoid Method]. Moscow, Nauka, 1988, 320 pp. (In Russian). EDN: TTDUCV
7. Chernous'ko F. L. Ellipsoidal approximation of the attainability sets of a linear system with an uncertain matrix, *J. Appl. Math. Mech.*, 1996, vol. 60, no. 6, pp. 921–931. DOI: https://doi.org/10.1016/S0021-8928(96)00114-1.
8. Kurzhanski A. B., Mesyats A. I. Control of ellipsoidal trajectories: Theory and numerical results, *Comput. Math. Math. Phys.*, 2014, vol. 54, no. 3, pp. 418–428. EDN: SKQPZP. DOI: https://doi.org/10.1134/S0965542514030117.
9. Chernous'ko F. L. Optimal ellipsoidal estimates of control and uncertain systems (survey), *Applied and Computational Mathematics*, 2009, vol. 8, no. 2, pp. 135–151. EDN: MWVJOL.
10. Ushakov V. N., Ershov A. A. Reachable sets and integral funnels of differential inclusions depending on a parameter, *Dokl. Math.*, 2021, vol. 104, no. 1, pp. 200–204. EDN: RZPGMU. DOI: https://doi.org/10.1134/S1064562421040153.
11. Ushakov V. N., Ershov A. A., Ushakov A. V. Control systems depending on a parameter: Reachable sets and integral funnels, *Mech. Solids*, 2022, vol. 57, no. 7, pp. 1672–1688. DOI: https://doi.org/10.3103/S0025654422070172.
12. Aubin J.-P., Frankowska H. The value does not exist! A motivation for extremal analysis, *Probab. Uncertain. Quant. Risk*, 2022, vol. 7, no. 3, pp. 195–214. DOI: https://doi.org/10.3934/puqr.2022013.
13. Althoff M., Frehse G., Girard A. Set propagation techniques for reachability analysis, *Annu. Rev. Control Robot. Auton. Syst.*, 2021, vol. 4, pp. 369–395. DOI: https://doi.org/10.1146/annurev-control-071420-081941.
14. Villegas Pico H. N., Alipantis D. C. Reachability analysis of linear dynamic systems with constant, arbitrary, and Lipschitz continuous inputs, *Automatica*, 2018, vol. 95, pp. 293–305. DOI: https://doi.org/10.1016/j.automatica.2018.05.026.
15. Morozov A. Yu., Reviznikov D. L. Adaptive interpolation algorithm on sparse meshes for numerical integration of systems of ordinary differential equations with interval uncertainties, *Differ. Equ.*, 2021, vol. 57, no. 7, pp. 947–958. EDN: OECMNR. DOI: https://doi.org/10.1134/S0012266121070107.
16. Gidaspov V. Yu., Morozov A. Yu., Reviznikov D. L. Adaptive interpolation algorithm using TT-decomposition for modeling dynamical systems with interval parameters, *Comput. Math. Math. Phys.*, 2021, vol. 61, no. 9, pp. 1387–1400. EDN: WLZHVA. DOI: https://doi.org/10.1134/S0965542521090098.
17. Morozov A. Yu., Reviznikov D. L. Interval approach to solving parametric identification problems for dynamical systems, *Differ. Equ.*, 2022, vol. 58, no. 7, pp. 952–965. EDN: PTDLNU. DOI: https://doi.org/10.1134/s0012266122070084.

18. Novikov V. A., Rogalev A. N. Construction of convergent upper and lower bounds of solutions of systems of ordinary differential equations with interval initial data, *Comput. Math. Math. Phys.*, 1993, vol. 33, no. 2, pp. 193–203. EDN: XKLCXR.
19. Rogalev A. N., Rogalev A. A. Numerical estimates of the maximum deviations of aircraft in the atmosphere, *Vestn. SibGAU*, 2016, vol. 16, no. 1, pp. 104–112 (In Russian). EDN: TRIUWN.
20. Rogalev A. A. Algorithms for symbolic calculations based on root trees for assessing management capabilities, *Siberian Journal of Science and Technology*, 2017, vol. 18, no. 4, pp. 810–819 (In Russian). EDN: YNZVUQ.
21. Rogalev A. N., Rogalev A. A., Feodorova N. A. Numerical computations of the safe boundaries of complex technical systems and practical stability, *J. Phys.: Conf. Ser.*, 2019, vol. 1399, 033112. EDN: VXANUU. DOI: https://doi.org/10.1088/1742-6596/1399/3/033112.
22. Rogalev A. N., Rogalev A. A., Feodorova N. A. Malfunction analysis and safety of mathematical models of technical systems, *J. Phys.: Conf. Ser.*, 2020, vol. 1515, 022064. EDN: GIFBHY. DOI: https://doi.org/10.1088/1742-6596/1515/2/022064.
23. Rogalev A. N. Regularization of inclusions of differential equations solutions based on the kinematics of a vector field in stability problems, *J. Phys.: Conf. Ser.*, 2021, vol. 2099, 012045. EDN: WQZHXJ. DOI: https://doi.org/10.1088/1742-6596/2099/1/012045.
24. Smirnov A. V. The bilinear complexity and practical algorithms for matrix multiplication, *Comput. Math. Math. Phys.*, 2013, vol. 53, no. 12, pp. 1781–1795. EDN: SLOFHJ. DOI: https://doi.org/10.1134/S0965542513120129.
25. Abramov S. A., Ryabenko A. A., Khmelnov D. E. Regular solutions of linear ordinary differential equations and truncated series, *Comput. Math. Math. Phys.*, 2020, vol. 60, no. 1, pp. 1–14. EDN: KIPAWT. DOI: https://doi.org/10.1134/S0965542520010029.
26. Galeev E. M. *Optimizatsiia: teoriia, primery, zadachi* [Optimization: Theory, Examples, Tasks]. Moscow, URSS, 2002, 304 pp. (In Russian)
27. Ahlberg J. H., Nilson E. N., Walsh J. L. *The Theory of Splines and their Applications*, Mathematics in Science and Engineering. New York, Academic Press, 1967, xi+284 pp. DOI: https://doi.org/10.1016/s0076-5392(08)x6115-6.
28. Tolpegin I. G. Differential-game methods for targeting missiles at high-speed maneuvering targets, *Izv. RARAN*, 2003, no. 1, pp. 80–86 (In Russian).

Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2023. Т. 27, № 2. С. 375–383
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu2012
EDN: MKLZCD

УДК 517.956

Условия существования и единственности решения задачи Гурса для системы уравнений с доминирующими частными производными

Е. А. Созонтова

Елабужский институт Казанского (Приволжского) федерального университета, Россия, 423600, Елабуга, ул. Казанская, 89.

Аннотация

Изучается n-мерная система уравнений с доминирующими частными производными n-го порядка. Признаком, отличающим рассматриваемую систему от других систем с частными производными, является наличие первого слагаемого в уравнениях правой части системы, представляющего собой доминирующую производную, при этом все остальные входящие в уравнения системы производные получаются из нее отбрасыванием по крайней мере одного дифференцирования по какой-либо из независимых переменных. Целью исследования является отыскание условий однозначной разрешимости задачи Гурса для рассматриваемой системы. Основная задача редуцируется к системе интегральных уравнений, решение которой существует и единственно при выполнении требований непрерывности ядер и правых частей этой системы в соответствующих замкнутых параллелепипедах изменения своих переменных. Получены условия, при которых основная задача однозначно разрешима. Окончательный результат в терминах коэффициентов исходной системы формулируется в виде теоремы.

Ключевые слова: система дифференциальных уравнений, задача Гурса, теорема существования и единственности.

Получение: 21 марта 2023 г. / Исправление: 13 мая 2023 г. / Принятие: 18 мая 2023 г. / Публикация онлайн: 20 июня 2023 г.

Дифференциальные уравнения и математическая физика
Краткое сообщение

© Коллектив авторов, 2023
© СамГТУ, 2023 (составление, дизайн, макет)
Контент публикуется на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru)

Образец для цитирования
Созонтова Е. А. Условия существования и единственности решения задачи Гурса для системы уравнений с доминирующими частными производными // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2023. Т. 27, № 2. С. 375–383. EDN: MKLZCD. DOI: 10.14498/vsgtu2012.

Сведения об авторе
Елена Александровна Созонтова https://orcid.org/0000-0003-4315-0669
кандидат физико-математических наук; доцент; кафедра математики и прикладной информатики; e-mail: sozontova-elena@rambler.ru

Рассматривается система уравнений с доминирующими частными производными

$$\frac{\partial^{m_i} u_i(x)}{\partial x_1^{m_{i_1}} \cdots \partial x_n^{m_{i_n}}} + \sum_{j=1}^{n} \sum_{\substack{k_j < m_i, \\ k_{j_s} \leqslant m_{j_s}}} a_{jk_{j_1} \ldots k_{j_n}}(x) \frac{\partial^{k_j} u_j(x)}{\partial x_1^{k_{j_1}} \cdots \partial x_n^{k_{j_n}}} = f_i(x), \ i = \overline{1,n}, \quad (1)$$

в области $\Omega = \{x_{10} < x_1 < x_{11}, \ x_{20} < x_2 < x_{21}, \ \ldots, \ x_{n0} < x_n < x_{n1}\}$. Здесь $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $m_i = m_{i_1} + \cdots + m_{i_n}$, $k_j = k_{j_1} + \cdots + k_{j_n}$, m_s, k_s, $s = \overline{1,n}$ — целые неотрицательные числа. Гладкость коэффициентов системы (1) определяется включениями

$$a_{jk_{j_1} \ldots k_{j_n}} \in C^{(k_{j_1}, \ k_{j_2}, \ldots, \ k_{j_n})}(\overline{\Omega}), \quad f_i \in C^{(0,0,\ldots,0)}(\overline{\Omega}).$$

Класс $C^{(k_{j_1}, k_{j_2}, \ldots, k_{j_n})}(\overline{\Omega})$ означает существование и непрерывность в $\overline{\Omega}$ всех производных $\partial^{l_{j_1} + l_{j_2} + \cdots + l_{j_n}} / \partial x_1^{l_{j_1}} \partial x_2^{l_{j_2}} \cdots \partial x_n^{l_{j_n}}$, $l_{j_p} = \overline{0, k_{j_p}}$, $p = \overline{1,n}$. Грани параллелепипеда Ω при $x_1 = x_{10}$, $x_2 = x_{20}$, $\ldots$, $x_n = x_{n0}$ обозначим соответственно $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Частные случаи системы (1) с различных точек зрения изучались многими авторами. Для $m_i = 1$ можно указать, например, публикации [1–6]. Так, в [1] при $n = 2$ исследованы задачи Коши и Гурса, получены формулы интегрального представления решения этих задач, позволяющие установить их структурные свойства. В [2,3] изучены задачи с нормальными производными первого и второго порядка в граничных условиях, в [4] с помощью решения задачи Гурса, полученного методом Римана, исследована задача Дарбу. При $n = 3$ в [5] исследована задача Гурса и получены условия ее разрешимости в квадратурах. В [6] для той же системы доказаны существование и единственность решения задачи Дарбу.

В [7, с. 62] были изложены решения задачи Коши и Гурса для системы (1) при $m_i = 2$, $m_{i_1} = m_{i_2} = 1$, полученные методом Римана. Та же система с различных точек зрения изучалась и в [8–11]. Так, в [10] исследована задача Гурса и получены условия ее разрешимости в квадратурах, в [11] исследованы характеристические задачи с условиями на трех и четырех сторонах характеристического прямоугольника. Аналогичная система (но с нулевыми обобщенными инвариантами Лапласа) рассматривалась в [12]. Для систем с кратными доминирующими частными производными при $m_i = 2$, $n = 2$ был разработан векторно-матричный аналог метода Римана, изучены задачи Коши и Гурса, а также поставлен ряд новых характеристических задач и исследован характер их разрешимости [13]. При $m_i = 2$, $n = 3$ для систем с кратными частными производными доказаны существование и единственность решений задачи Коши [14]. Частные случаи системы (1) более высокого порядка рассматривались, например, в [15,16] и др. работах.

Таким образом, изучение различных особых случаев системы (1) и граничных условий для них является важным направлением в теории дифференциальных уравнений. Целью данного исследования является получение условий, при которых решение задачи Гурса для системы (1) при произвольном n существует и единственно (указаний на этот вопрос в литературе автору обнаружить не удалось).

Задача. *В области Ω найти регулярное решение системы (1), удовлетворяющее непрерывно дифференцируемым граничным значениям*

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^{i_1} u_i}{\partial x_1^{i_1}}\Big|_{x_1=x_{10}} = \varphi_{1ii_1}(x_2, x_3, \ldots, x_n), \qquad i_1 = \overline{0,\ m_{i_1}-1},\ i=\overline{1,n};\\
&\frac{\partial^{i_2} u_i}{\partial x_2^{i_2}}\Big|_{x_2=x_{20}} = \varphi_{2ii_2}(x_1, x_3, \ldots, x_n), \qquad i_2 = \overline{0,\ m_{i_2}-1},\ i=\overline{1,n};\\
&\qquad\qquad\vdots\\
&\frac{\partial^{i_n} u_i}{\partial x_n^{i_n}}\Big|_{x_n=x_{n0}} = \varphi_{nii_n}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}), \quad i_n = \overline{0, m_{i_n}-1},\ i=\overline{1,n}.
\end{aligned} \tag{2}$$

При этом предполагается, что $\varphi_{1ii_1} \in C^{(0,m_{i_2},m_{i_3},\ldots,m_{i_n})}(\overline{X_1})$,

$$\varphi_{2ii_2} \in C^{(m_{i_1},0,m_{i_3},\ldots,m_{i_n})}(\overline{X_2}), \quad \ldots, \quad \varphi_{nii_n} \in C^{(m_{i_1},m_{i_2},\ldots,m_{i_{n-1}},0)}(\overline{X_n})$$

и выполняются условия согласования

$$\frac{\partial^{i_2}\varphi_{1ii_1}}{\partial x_2^{i_2}}\Big|_{x_2=x_{20}} = \frac{\partial^{i_1}\varphi_{2ii_2}}{\partial x_1^{i_1}}\Big|_{x_1=x_{10}}, \quad \frac{\partial^{i_3}\varphi_{1ii_1}}{\partial x_3^{i_3}}\Big|_{x_3=x_{30}} = \frac{\partial^{i_1}\varphi_{3ii_3}}{\partial x_1^{i_1}}\Big|_{x_1=x_{10}}, \quad \ldots,$$
$$\frac{\partial^{i_n}\varphi_{1ii_1}}{\partial x_n^{i_n}}\Big|_{x_n=x_{n0}} = \frac{\partial^{i_1}\varphi_{nii_n}}{\partial x_1^{i_1}}\Big|_{x_1=x_{10}};$$
$$\frac{\partial^{i_3}\varphi_{2ii_2}}{\partial x_3^{i_3}}\Big|_{x_3=x_{30}} = \frac{\partial^{i_2}\varphi_{3ii_3}}{\partial x_2^{i_2}}\Big|_{x_2=x_{20}}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial^{i_n}\varphi_{2ii_2}}{\partial x_n^{i_n}}\Big|_{x_n=x_{n0}} = \frac{\partial^{i_2}\varphi_{nii_n}}{\partial x_2^{i_2}}\Big|_{x_2=x_{20}};$$
$$\ldots; \qquad \frac{\partial^{i_n}\varphi_{n-1ii_{n-1}}}{\partial x_n^{i_n}}\Big|_{x_n=x_{n0}} = \frac{\partial^{i_{n-1}}\varphi_{nii_n}}{\partial x_{n-1}^{i_{n-1}}}\Big|_{x_{n-1}=x_{(n-1)0}}.$$

Решению основной задачи предпошлем следующую лемму.

Лемма. *Имеет место равенство*

$$\frac{\partial^{m_i} u_i(x)}{\partial x_1^{m_{i_1}}\cdots\partial x_n^{m_{i_n}}} + \sum_{j=1}^{n}\sum_{\substack{k_j<m_i,\\ k_{j_s}\leqslant m_{j_s}}} a_{jk_{j_1}\ldots k_{j_n}} \frac{\partial^{k_j} u_j(x)}{\partial x_1^{k_{j_1}}\cdots\partial x_n^{k_{j_n}}} =$$
$$= \frac{\partial^{m_i} u_i(x)}{\partial x_1^{m_{i_1}}\cdots\partial x_n^{m_{i_n}}} + \sum_{j=1}^{n}\sum_{\substack{k_j<m_i,\\ k_{j_s}\leqslant m_{j_s}}} \frac{\partial^{k_j}(b_{jk_{j_1}\ldots k_{j_n}} u_j(x))}{\partial x_1^{k_{j_1}}\cdots\partial x_n^{k_{j_n}}}, \tag{3}$$

где

$$b_{jk_{j_1}\ldots k_{j_n}} = \sum_{\substack{s_{j_1}=k_{j_1}\\ s_{j_1}+\cdots+s_{s_{j_n}}<m_i}}^{m_{i_1}} \cdots \sum_{s_{j_n}=k_{j_n}}^{m_{i_n}} \prod_{p=1}^{n} C_{s_{j_p}}^{k_{j_p}} (-1)^{\sum\limits_{p=1}^{n}(s_{j_p}+k_{j_p})} \frac{\partial^{\sum\limits_{p=1}^{n}(s_{j_p}-k_{j_p})} a_{js_{j_1}\ldots s_{j_n}}}{\partial x_1^{s_{j_1}-k_{j_1}}\cdots\partial x_n^{s_{j_n}-k_{j_n}}}, \tag{4}$$
$$i, j = \overline{1,n}.$$

Доказательство. Рассмотрим правую часть равенства (3). Применяя формулу Лейбница, получим

$$\frac{\partial^{m_i} u_i(x)}{\partial x_1^{m_{i_1}} \cdots \partial x_n^{m_{i_n}}} + \\ + \sum_{j=1}^{n} \sum_{\substack{k_j<m_i,\\ k_{j_s}\leqslant m_{j_s}}} \sum_{l_1=0}^{k_{j_1}} \cdots \sum_{l_n=0}^{k_{j_n}} \prod_{p=1}^{n} C_{k_{j_p}}^{l_p} \frac{\partial^{\sum\limits_{p=1}^{n}(k_{j_p}-l_p)} b_{jk_{j_1}\ldots k_{j_n}}}{\partial x_1^{k_{j_1}-l_1} \ldots \partial x_n^{k_{j_n}-l_n}} \cdot \frac{\partial^{\sum\limits_{p=1}^{n} l_p} u_j}{\partial x_1^{l_1} \cdots \partial x_n^{l_n}}. \quad (5)$$

Подставим в (5) значения из (4) и выделим слагаемые при $l_p = s_{j_p} \neq k_{j_p}$, $p = \overline{1,n}$:

$$\frac{\partial^{m_i} u_i(x)}{\partial x_1^{m_{i_1}} \cdots \partial x_n^{m_{i_n}}} + \sum_{j=1}^{n} \sum_{\substack{k_j<m_i,\\ k_{j_s}\leqslant m_{j_s}}} a_{jk_{j_1}\ldots k_{j_n}} \frac{\partial^{k_j} u_j(x)}{\partial x_1^{k_{j_1}} \cdots \partial x_n^{k_{j_n}}} + \\ + \sum_{j=1}^{n} \sum_{\substack{k_j<m_i,\\ k_{j_s}\leqslant m_{j_s}}} \sum_{l_1=0}^{k_{j_1}} \cdots \sum_{l_n=0}^{k_{j_n}} \sum_{s_{j_1}=k_{j_1}}^{m_{i_1}} \cdots \sum_{s_{j_n}=k_{j_n}}^{m_{i_n}} \prod_{p=1}^{n} C_{s_{j_p}}^{k_{j_p}} C_{k_{j_p}}^{l_p} (-1)^{\sum\limits_{p=1}^{n}(s_{j_p}+k_{j_p})} \times \\ \times \frac{\partial^{\sum\limits_{p=1}^{n}(s_{j_p}-l_p)} a_{js_{j_1}\ldots s_{j_n}}}{\partial x_1^{s_{j_1}-l_1} \cdots \partial x_n^{s_{j_n}-l_n}} \cdot \frac{\partial^{\sum\limits_{p=1}^{n} l_p} u_j}{\partial x_1^{l_1} \cdots \partial x_n^{l_n}}, \quad (6)$$

где $l_1+\cdots+l_n < m_i$, $s_{j_1}+\cdots+s_{s_{j_n}} < m_i$, $l_p = s_{j_p} \neq k_{j_p}$. Подсчитаем в последней сумме из (6) количество слагаемых вида

$$\frac{\partial^{\sum\limits_{p=1}^{n}(s_{j_p}-l_p)} a_{js_{j_1}\ldots s_{j_n}}}{\partial x_1^{s_{j_1}-l_1} \cdots \partial x_n^{s_{j_n}-l_n}} \cdot \frac{\partial^{\sum\limits_{p=1}^{n} l_p} u_j}{\partial x_1^{l_1} \cdots \partial x_n^{l_n}},$$

где s_{j_p}, l_p — фиксированные значения, $k_{j_p} = s_{j_p}, s_{j_p}-1, \ldots, l_p$, $p = \overline{1,n}$. Используя свойства сочетаний, получим

$$(-1)^{\sum\limits_{p=1}^{n}(2s_{j_p})} \prod_{p=1}^{n} C_{s_{j_p}}^{s_{j_p}} C_{s_{j_p}}^{l_p} + (-1)^{\sum\limits_{p=1}^{n}(2s_{j_p}-1)} \prod_{p=1}^{n} C_{s_{j_p}}^{s_{j_p}-1} C_{s_{j_p}-1}^{l_p} + \\ + (-1)^{\sum\limits_{p=1}^{n}(2s_{j_p}-2)} \prod_{p=1}^{n} C_{s_{j_p}}^{s_{j_p}-2} C_{s_{j_p}-2}^{l_p} + \cdots + (-1)^{\sum\limits_{p=1}^{n}(s_{j_p}+l_p)} \prod_{p=1}^{n} C_{s_{j_p}}^{l_p} C_{l_p}^{l_p} = 0.$$

Таким образом, последняя сумма в (6) обращается в 0. Лемма доказана. □

Согласно лемме, систему (1) можно записать в виде

$$\frac{\partial^{m_i} u_i(x)}{\partial x_1^{m_{i_1}} \cdots \partial x_n^{m_{i_n}}} + \sum_{j=1}^{n} \sum_{\substack{k_j<m_i,\\ k_{j_s}\leqslant m_{j_s}}} \frac{\partial^{k_j}(b_{jk_{j_1}\ldots k_{j_n}} u_j(x))}{\partial x_1^{k_{j_1}} \cdots \partial x_n^{k_{j_n}}} = f_i(x), \quad i=\overline{1,n}, \tag{7}$$

где коэффициенты $b_{jk_{j_1}\ldots k_{j_n}}$ вычисляются по формуле (4). Проинтегрируем систему (7) по области Ω. Учитывая формулу

$$\underbrace{\int_{x_{j0}}^{x_j} \cdots \int_{x_{j0}}^{x_j}}_{l_j \text{ раз}} u_i(x_1,\ldots,x_n)d\alpha_j =$$

$$= \int_{x_{j0}}^{x_j} \frac{(x_j-\alpha_j)^{l_j-1}}{(l_j-1)!} u_i(x_1,\ldots,x_{j-1},\alpha_j,x_{j+1},x_n)d\alpha_j,$$

получим

$$\begin{aligned} &u_i(x_1,x_2,\ldots,x_n)+\\ &\quad+\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{Q_{k,n}} \int_{x_{q_1 0}}^{x_{q_1}} \int_{x_{q_2 0}}^{x_{q_2}} \cdots \int_{x_{q_k 0}}^{x_{q_k}} K^i_{jq_1q_2\ldots q_k}(x_1,\ldots,x_n,\alpha_{q_1},\ldots,\alpha_{q_k})\times\\ &\quad\times u_j(x_1,x_2,\ldots,x_{q_1-1},\alpha_{q_1},x_{q_1+1},\ldots,x_{q_k-1},\alpha_{q_k},x_{q_k+1},\ldots,x_n)\times\\ &\qquad\times d\alpha_{q_k}\cdots d\alpha_{q_2}d\alpha_{q_1} = F_i(x_1,\ldots,x_n), \quad i=\overline{1,n}. \end{aligned} \tag{8}$$

Здесь

$$\begin{aligned} &K^i_{jq_1q_2\ldots q_k}(x_1,x_2,\ldots,x_n,\alpha_{q_1},\alpha_{q_2},\ldots,\alpha_{q_k}) =\\ &\qquad= \sum_{p_{q_1}=0}^{m_{i_1}-1} \cdots \sum_{p_{q_k}=0}^{m_{i_k}-1} b_{jp_1p_2\ldots p_n}(x_1,\ldots,x_n) \prod_{j=1}^{k} \frac{(x_{q_j}-\alpha_{q_j})^{m_{i_j}-p_{q_j}-1}}{(m_{i_j}-p_{q_j}-1)!}, \end{aligned}$$

причем если $i \neq q_j$, то $p_i = m_{i_j}$, а $b_{jp_1p_2\ldots p_n} = 0$, если выполняется хотя бы одно из неравенств $p_k > m_{j_k}$, $k=\overline{1,n}$; $Q_{k,n} = \{(q_1,q_2,\ldots,q_n) : 1 \leqslant q_1 < < q_2 < \cdots < q_l \leqslant n\}$. Функции F_i в силу условий (2) являются известными непрерывными функциями.

Известно [13, с. 30], что решение системы (8) существует и единственно, если все ядра и правые части в (8) непрерывны в соответствующих замкнутых параллелепипедах изменения своих переменных. Из проведенных рассуждений следует

Теорема. *Если в системе* (8) $K^i_{jq_1q_2\ldots q_k}$, $i,j,k=\overline{1,n}$, *непрерывны в соответствующих замкнутых параллелепипедах изменения своих переменных, то решение задачи существует и единственно.*

Заключение. В работе рассмотрена задача Гурса для n-мерной системы уравнений с доминирующими частными производными n-го порядка. С помощью вспомогательного утверждения относительно вида рассматриваемой

системы и на основании методов теории интегральных уравнений исходная задача редуцирована к системе интегральных уравнений, решение которой существует и единственно при выполнении требований непрерывности ядер и правых частей этой системы в соответствующих замкнутых параллелепипедах изменения своих переменных. Таким образом, в терминах коэффициентов исходной системы получены условия однозначной разрешимости рассматриваемой задачи. Результат сформулирован в виде теоремы.

Конкурирующие интересы. Конкурирующих интересов не имею.

Авторская ответственность. Я несу полную ответственность за предоставление окончательной версии рукописи в печать. Окончательная версия рукописи мною одобрена.

Финансирование. Работа выполнена за счет средств Программы стратегического академического лидерства Казанского (Приволжского) федерального университета.

Библиографический список

1. Бицадзе А. В. О структурных свойствах решений гиперболических систем уравнений в частных производных первого порядка // *Матем. моделирование*, 1994. Т. 6, № 6. С. 22–31.
2. Жегалов В. И. Задача с нормальными производными в граничных условиях для системы дифференциальных уравнений // *Изв. вузов. Матем.*, 2008. № 8. С. 70–72. EDN: JHCZWJ.
3. Созонтова Е. А. О характеристических задачах с нормальными производными для системы гиперболического типа // *Изв. вузов. Матем.*, 2013. № 10. С. 43–54. EDN: QZPDWX.
4. Mironova L. B. Boundary-value problems with data on characteristics for hyperbolic systems of equations // *Lobachevskii J. Math.*, 2020. vol. 41, no. 3. pp. 400–406. EDN: ZPBRIK. DOI: https://doi.org/10.1134/S1995080220030130.
5. Созонтова Е. А. К условиям разрешимости задачи Гурса в квадратурах для трехмерной системы первого порядка // *Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика. Математика*, 2017. № 2. С. 128–138. EDN: ZAERAX.
6. Миронов А. Н., Миронова Л. Б. Метод Римана–Адамара для одной системы в трехмерном пространстве // *Диффер. уравн.*, 2021. Т. 57, № 8. С. 1063–1070. EDN: GWQQJD. DOI: https://doi.org/10.31857/S0374064121080070.
7. Бицадзе А. В. *Некоторые классы уравнений в частных производных*. М.: Наука, 1981. 448 с.
8. Жибер А. В., Старцев С. Я. Интегралы, решения и существование преобразований Лапласа линейной гиперболической системы уравнений // *Матем. заметки*, 2003. Т. 74, № 6. С. 848–857. DOI: https://doi.org/10.4213/mzm322.
9. Старцев С. Я. Метод каскадного интегрирования Лапласа для линейных гиперболических систем уравнений // *Матем. заметки*, 2008. Т. 83, № 1. С. 107–118. EDN: RLQXKH. DOI: https://doi.org/10.4213/mzm4338.
10. Созонтова Е. А. Об условиях разрешимости граничных задач в квадратурах для гиперболических систем второго порядка // *Уфимск. матем. журн.*, 2016. Т. 8, № 3. С. 135–140. EDN: WMAPYB.
11. Созонтова Е. А. К условиям разрешимости характеристических задач для одной системы гиперболического типа // *Вестн. Сыктывкар. ун-та. Сер. 1. Матем. Мех. Информ.*, 2020. № 1(34). С. 22–28. EDN: BVIINY.
12. Михайлова Ю. Г. О задаче Коши для линейных гиперболических систем уравнений с нулевыми обобщенными инвариантами Лапласа // *Уфимск. матем. журн.*, 2010. Т. 2, № 2. С. 20–26. EDN: MVUKRT.
13. Миронова Л. Б. *Линейные системы уравнений с кратными старшими частными про-*

изводными: Дисс. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.02. Казань: Казан. гос. ун-т, 2005. 140 с. EDN: NNQRYV.

14. Миронова Л. Б. Применение метода Римана к одной системе в трехмерном пространстве // *Изв. вузов. Матем.*, 2019. № 6. С. 48–57. EDN: KJXFEH DOI: https://doi.org/10.26907/0021-3446-2019-6-48-57.
15. Джохадзе О. М. Функция Римана для гиперболических уравнений и систем высокого порядка с доминированными младшими членами // *Диффер. уравн.*, 2003. Т. 39, № 10. С. 1366–1378. EDN: OPFXSJ.
16. Созонтова Е. А. К условиям разрешимости задачи Гурса в квадратурах для двумерной системы высокого порядка // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2017. Т. 21, № 1. С. 94–111. EDN: YPZFUZ. DOI: https://doi.org/10.14498/vsgtu1479.

Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2023, vol. 27, no. 2, pp. 375–383
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu2012

MSC: 35G15

Conditions for the existence and uniqueness of the solution of the Goursat problem for a system of equations with dominant partial derivatives

E. A. Sozontova

Elabuga Institute of Kazan (Volga Region) Federal University,
89, Kazanskaya st., Elabuga, 423600, Russian Federation.

Abstract

An n-dimensional system of equations with dominant partial derivatives of the nth order is being studied. The distinguishing feature of the considered system compared to other systems with partial derivatives is the presence of a first term in the equations on the right side of the system, representing a dominant derivative, while all other derivatives appearing in the system equations are obtained from it by discarding at least one differentiation with respect to any of the independent variables. The aim of the study is to find conditions for the unique solvability of the Goursat problem for the considered system. The main problem is reduced to a system of integral equations, the solution of which exists and is unique when the requirements of continuity of the kernels and right sides of this system are satisfied in the corresponding closed parallelepipeds of variable ranges. Conditions under which the main problem is uniquely solvable have been obtained. The final result in terms of the coefficients of the original system is formulated as a theorem.

Keywords: system of differential equations, Goursat problem, existence and uniqueness theorem.

Received: 21st March, 2023 / Revised: 13th May, 2023 /
Accepted: 18th May, 2023 / First online: 20th June, 2023

Competing interests. I have no competing interests.

Author's Responsibilities. I take full responsibility for submitting the final version of the manuscript for publication. The final version of the manuscript has been approved by me.

Differential Equations and Mathematical Physics
Short Communication

© Authors, 2023
© Samara State Technical University, 2023 (Compilation, Design, and Layout)
The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License (http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)

Please cite this article in press as:
Sozontova E. A. Conditions for the existence and uniqueness of the solution of the Goursat problem for a system of equations with dominant partial derivatives, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2023, vol. 27, no. 2, pp. 375–383. EDN: MKLZCD. DOI: 10.14498/vsgtu2012 (In Russian).

Author's Details:
Elena A. Sozontova https://orcid.org/0000-0003-4315-0669
Cand. Phys. & Math. Sci.; Associate Professor; Dept. of Mathematics and Applied Computer Science; e-mail: sozontova-elena@rambler.ru

Funding. The work was carried out at the expense of the Strategic Academic Leadership Program of Kazan (Volga Region) Federal University.

References

1. Bitsadze A. V. On structural properties of solutions of hyperbolic systems of partial differential equations of the first order, *Mat. Model.*, 1994, vol. 6, no. 6, pp. 22–31 (In Russian).
2. Zhegalov V. I. A problem with normal derivatives in boundary conditions for a system of differential equations, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2008, vol. 52, no. 8, pp. 58–60. DOI: https://doi.org/10.3103/S1066369X08080070.
3. Sozontova E. A. Characteristic problems with normal derivatives for hyperbolic systems, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2013, vol. 57, no. 10, pp. 37–47. EDN: SKVOOR. DOI: https://doi.org/10.3103/S1066369X13100046.
4. Mironova L. B. Boundary-value problems with data on characteristics for hyperbolic systems of equations, *Lobachevskii J. Math.*, 2020, vol. 41, no. 3, pp. 400–406. EDN: ZPBRIK. DOI: https://doi.org/10.1134/S1995080220030130.
5. Sozontova E. A. The conditions of solvability of the Goursat problem in quadratures for three-dimensional system of first order, *Proc. Voronezh State Univ. Ser. Phys., Math.*, 2017, no. 2, pp. 128–138 (In Russian). EDN: ZAERAX.
6. Mironov A. N., Mironova L. B. Riemann–Hadamard method for one system in three-dimensional space, *Differ. Equ.*, 2021, vol. 57, no. 8, pp. 1034–1041. EDN: BWRRVC. DOI: https://doi.org/10.1134/S0012266121080073.
7. Bitsadze A. V. *Nekotorye klassy uravnenii v chastnykh proizvodnykh* [Some Classes of Partial Differential Equations]. Moscow, Nauka, 1981, 448 pp. (In Russian)
8. Zhiber A. V., Startsev S. Ya. Integrals, solutions, and existence problems for Laplace transformations of linear hyperbolic systems, *Math. Notes*, 2003, vol. 74, no. 6, pp. 803–811. EDN: LHRQKD. DOI: https://doi.org/10.1023/B:MATN.0000009016.91968.ed.
9. Startsev S. Ya. Cascade method of Laplace integration for linear hyperbolic systems of equations, *Math. Notes*, 2008, vol. 83, no. 1, pp. 97–106. EDN: LLHRQR. DOI: https://doi.org/10.1134/S0001434608010124.
10. Sozontova E. A. On solvability by quadratures conditions for second order hyperbolic systems, *Ufa Math. J.*, 2016, vol. 8, no. 3, pp. 130–135. EDN: YVGUUD. DOI: https://doi.org/10.13108/2016-8-3-130.
11. Sozontova E. A. On the solvability conditions of characteristic problems for one hyperbolic type system, *Vestn. Syktyvkar. Univ. Ser 1. Mat. Mekh. Inform.*, 2020, no. 1(34), pp. 22–28 (In Russian). EDN: BVIINY.
12. Mihaylova Yu. G. On Cauchy problem for linear hyperbolic systems of equations with zero generalized Laplace invariants, *Ufim. Mat. Zh.*, 2010, vol. 2, no. 2, pp. 20–26 (In Russian). EDN: MVUKRT.
13. Mironova L. B. *Linear systems of equations with multiple higher partial derivatives*, Thesis of Dissertation (Cand. Phys. & Math. Sci.). Kazan, Kazan State Univ., 2005, 140 pp. (In Russian). EDN: NNQRYV.
14. Mironova L. B. Application of Riemann method to one system in three-dimensional space, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2019, vol. 63, no. 6, pp. 42–50. EDN: GGFHED. DOI: https://doi.org/10.3103/S1066369X19060057.
15. Dzhokhadze O. M. The Riemann function for higher-order hyperbolic equations and systems with dominated lower-order terms, *Differ. Equ.*, 2003, vol. 39, no. 10, pp. 1440–1453. EDN: VYSOQG. DOI: https://doi.org/10.1023/B:DIEQ.0000017917.55876.38.
16. Sozontova E. A. A conditions of solvability of the Goursat problem in quadratures for the two-dimensional system of high order, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2017, vol. 21, no. 1, pp. 94–111 (In Russian). EDN: YPZFUZ. DOI: https://doi.org/10.14498/vsgtu1479.

Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2023. Т. 27, № 2. С. 384–393
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu2004
EDN: ZLCILC

УДК 539.3

Оценка поля скоростей в сплошной упругопластической среде при камуфлетном взрыве

В. А. Седнев[1]***, С. Л. Копнышев***[1]***, А. В. Седнев***[2]

[1] Академия государственной противопожарной службы МЧС России,
Россия, 129366, Москва, ул. Б. Галушкина, 4.
[2] Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана
(национальный исследовательский университет),
Россия, 105005, Москва, ул. 2-я Бауманская ул., д. 5/1.

Аннотация

Представлено решение центрально-симметричной задачи определения поля скоростей в сплошной упругопластической среде при камуфлетном взрыве в предположениях о бесколебательном характере движения камуфлетной полости и несжимаемости среды в пластической и упругой областях. Получены зависимости для определения размеров зон расширения и пластического деформирования среды. В основу решения положено «камуфлетное уравнение» — соотношение для определения давления на контактной поверхности расширяющейся сферической полости за счет внутреннего давления.

Ключевые слова: упругопластическая среда, камуфлетная полость, поле скоростей, расширение, камуфлетный взрыв.

Получение: 9 марта 2023 г. / Исправление: 28 апреля 2023 г. / Принятие: 25 мая 2023 г. / Публикация онлайн: 21 июня 2023 г.

Механика деформируемого твердого тела
Краткое сообщение

© Коллектив авторов, 2023
© СамГТУ, 2023 (составление, дизайн, макет)
Контент публикуется на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru)

Образец для цитирования
Седнев В. А., Копнышев С. Л., Седнев А. В. Оценка поля скоростей в сплошной упругопластической среде при камуфлетном взрыве // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2023. Т. 27, № 2. С. 384–393. EDN: ZLCILC. DOI: 10.14498/vsgtu2004.

Сведения об авторах

Владимир Анатольевич Седнев https://orcid.org/0000-0002-4922-430X
доктор технических наук, профессор; профессор кафедры гражданской обороны, защиты населения и территорий; e-mail: sednev70@yandex.ru

Сергей Львович Копнышев https://orcid.org/0009-0005-8071-0444
кандидат технических наук, доцент; доцент кафедры гражданской обороны, защиты населения и территорий; e-mail: serkopn@mail.ru

Анатолий Владимирович Седнев https://orcid.org/0009-0009-5510-6316
студент

В настоящее время наибольшим разрушающим воздействием на объекты обладает заглубленное взрывание зарядов (камуфлетный взрыв), которое исключает возникновение воздушной ударной волны и вредное воздействие продуктов взрыва на окружающую среду, однако приводит к возникновению сильных сейсмических колебаний. Воздействие сейсмических нагрузок на расположенные рядом объекты может привести к трещинообразованию в элементах конструкций, потере их несущей способности, к повреждению и разрушению. Поэтому наряду с выполнением общепринятых требований по защищенности объектов инфраструктуры, отраженных в технических стандартах и правилах, возникает необходимость оценки физической стойкости их критических элементов и повышения защищенности от воздействия взрывных нагрузок.

В работе рассматривается камуфлетный взрыв обычного взрывчатого вещества (ВВ), в результате которого до земной поверхности доходят только упругие волны деформации и не происходит образования воронки на земной поверхности [1–3]. Предполагается, что детонация заряда взрывчатого вещества происходит в условиях сферической симметрии и представляет собой процесс, протекающий без изменения объема.

Целью данной работы является решение задачи определения поля скоростей в сплошной упругопластической среде при камуфлетном взрыве.

Решение центрально-симметричной задачи о распространении взрывных возмущений в твердых средах основывается на предположении, что в безграничное полупространство помещен глубинный сферический заряд радиуса r_0, который мгновенно без изменения объема превращается в газ высокого давления P_0. В результате обмена энергией между газообразными продуктами взрыва и окружающей средой с момента времени $t = 0$ начинается снижение давления в сферической полости и одновременное увеличение ее радиуса $a(t)$ от начального значения, равного радиусу заряда $a(0) = r_0$. Текущий радиус камуфлетной полости $a(t)$ является первой характеристикой геометрического положения точек возмущенной окружающей среды в сферических координатах. Второй характеристикой является радиус упругопластической границы $b(t)$, который при разработке волновой теории действия взрыва называют радиусом «фронта» пластической волны. Предполагается, что давление в полости уменьшается в соответствии с уравнением

$$P_0 = P_{00}(a/r_0)^{-3m}, \tag{1}$$

где m — степенной показатель, P_{00} — начальное давление в полости при $a = r_0$, а связь давления при $t > 0$ с радиусом, скоростью и ускорением расширяющейся полости определяется камуфлетным уравнением [2]

$$P_0 = A + Ba\ddot{a} + C\dot{a}^2, \tag{2}$$

где A, B и C — константы, являющиеся характеристиками среды, выражения для вычисления которых представлены авторами в [4, 5]. Вызванное расширяющейся полостью возмущенное состояние среды характеризуется также плотностями ρ_0 и ρ, соответственно, в упругой и пластической областях ее деформирования, причем переход от упругого состояния к пластическому сопровождается мгновенным изменением плотности среды от ρ_0 до ρ, вводимым для приближенного учета действительной сжимаемости.

Представим (2) в виде

$$a\ddot{a} + \frac{C}{B}\dot{a}^2 = \frac{1}{B}(P_0 - A)$$

и введем безразмерные переменные $y = \rho\dot{a}^2/P_{00}$ или $\dot{a}^2 = yP_{00}/\rho$, $x = a/r_0$.

Продифференцируем переменные по времени и радиальной координате:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\dot{a}}{r_0}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{2\rho\dot{a}\ddot{a}}{P_{00}} \quad \text{и} \quad y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}.$$

С учетом выражения для x и указанных производных последнее уравнение сводится к следующему:

$$y' = \frac{2\rho\dot{a}\ddot{a}}{P_{00}}\frac{dt}{dx} = \frac{2\rho\dot{a}\ddot{a}}{P_{00}}\frac{r_0}{\dot{a}} = \frac{2\rho a\ddot{a}}{xP_{00}},$$

откуда

$$a\ddot{a} = \frac{y'xP_{00}}{2\rho}.$$

Подставляя полученные для $\dot{a}^2$ и $a\ddot{a}$ выражения в исходное соотношение (2), получаем

$$\frac{y'xP_{00}}{2\rho} + \frac{C}{B}\frac{yP_{00}}{\rho} = \frac{1}{B}(P_0 - A). \tag{3}$$

Запишем равенство (3) в виде

$$y' + 2N\frac{y}{x} = \frac{2\rho}{xBP_{00}}(P_0 - A), \tag{4}$$

где

$$N = C/B. \tag{5}$$

Дифференциальное уравнение (4) является основным в поставленной задаче. Решение его однородного уравнения

$$\frac{dy}{dx} + 2N\frac{y}{x} = 0 \tag{6}$$

имеет вид

$$y = y_c x^{-2N}, \tag{7}$$

где y_c — константа. Решение уравнения (4) будем искать в виде

$$y(x) = y_c(x)x^{-2N},$$

считая y_c функцией аргумента x.

После дифференцирования (7) по x и подстановки (7) и (6) в (5) получим

$$y_c'(x) = \frac{2\rho}{Bx^{-2N+1}}\Big(\frac{P_0}{P_{00}} - \frac{a}{P_{00}}\Big). \tag{8}$$

Для определения функции $y_c(x)$ подставим в (8) выражение (1):

$$y_c' = \frac{2\rho}{B} x^{2N-3m-1} - \frac{2\rho A}{BP_{00}} x^{2N-1}.$$

Проинтегрируем полученное соотношение:

$$y_c = \frac{2\rho}{B} \frac{x^{2N-3m}}{2N-3m} - \frac{2\rho A}{BP_{00}} \frac{x^{2N}}{2N} + \Phi, \tag{9}$$

где Φ — постоянная. Подставив найденное выражение (9) в (7), для искомой функции $y(x)$ получим

$$y(x) = \frac{2\rho}{B} \frac{x^{-3m}}{2N-3m} - \frac{\rho A}{BP_{00}} \frac{1}{N} + \frac{\Phi}{x^{2N}}. \tag{10}$$

Таким образом, единственной неизвестной величиной в соотношении (10) остается постоянная интегрирования Φ. Для ее нахождения будем считать, что известен максимальный безразмерный радиус полости x_1, образующейся при камуфлетном взрыве (радиус полости в момент ее остановки):

$$x_1 = a_{\max}/r_0 = \sqrt[3]{V_{\max}/V_0},$$

где $V_0 = \frac{4}{3}\pi r_0^3$ — объем полости (сферического заряда) в начальный момент, $V_{\max} = \frac{4}{3}\pi a_{\max}^3$ — объем полости при камуфлетном взрыве, наблюдаемый по окончании ее расширения. Тогда условием определения Φ будет условие остановки расширения полости $y(x_1) = 0$:

$$\frac{2\rho x_1^{-3m}}{B(2N-3m)} - \frac{\rho A}{BP_{00}N} + \frac{\Phi}{x_1^{2N}} = 0,$$

откуда

$$\Phi = \frac{\rho A x_1^{2N}}{BP_{00}N} - \frac{2\rho x_1^{2N-3m}}{B(2N-3m)}.$$

Окончательное выражение (10) для определения $y(x)$ примет вид

$$y(x) = \frac{\rho A}{BP_{00}} \frac{1}{N} \Big[\Big(\frac{x_1}{x}\Big)^{2N} - 1 \Big] - \frac{2\rho}{B} \frac{x^{-3m}}{2N-3m} \Big[\Big(\frac{x_1}{x}\Big)^{2N-3m} - 1 \Big]. \tag{11}$$

Для оценки радиуса полости x_1 воспользуемся законом сохранения энергии. Работа продуктов взрыва, расширяющихся по адиабатическому закону, описывается выражением

$$A_0 = \int_{V_0}^{V_{\max}} P dV = \frac{P_{00}V_0}{m-1} \Big[1 - \Big(\frac{V_0}{V_{\max}}\Big)^{m-1} \Big].$$

Для оценки энергии деформаций связь между касательным напряжением τ и деформацией сдвига γ примем в виде, показанном на рисунке.

В упругой области действие внешних сил уравновешивается напряжением $\tau = G_0\gamma$, где G_0 — постоянная.

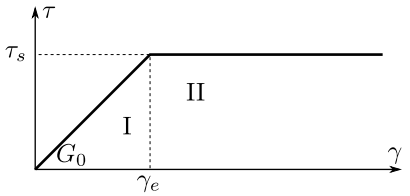


Диаграмма сдвига: I — упругая область ($r > b$), II — пластическая область ($a < r < b$); τ_s — предел упругости; γ_e — предельное упругое значение деформации сдвига; G_0 — модуль упругости при сдвиге; a — радиус полости; b — радиус упругопластической области; r — радиальная координата

[Stress-strain curve in shear: I — elastic region ($r > b$), II — plastic region ($a < r < b$); τ_s — yield strength; γ_e — ultimate elastic shear strain; G_0 — shear modulus; a — radius of the cavity; b — radius of the elastoplastic region; r — radial coordinate]

Элементарная работа частицы среды в упругой области ($r > b$) представляется в виде

$$\tau d\gamma = G_0 \gamma d\gamma,$$

а потенциальная энергия деформации частицы среды при изменении деформации сдвига от 0 до γ определяется выражением

$$\int_0^\gamma G_0 \gamma d\gamma = \frac{1}{2} G_0 \gamma^2.$$

Потенциальная энергия деформаций сдвига во всей упругой области Π_e находится из равенства

$$\Pi_e = 2\pi \int_b^\infty G_0 \gamma^2 r^2 dr. \tag{12}$$

Рассмотрим связи между тремя радиусами: радиусом заряда r_0, радиусом расширяющейся камуфлетной полости $a(t)$ и радиусом упругопластической границы $b(t)$.

Пластическое деформирование среды наступает при достижении деформацией сдвига $\gamma = \gamma(r, t)$ предельного упругого значения γ_e. Свяжем величину перемещения $W(r, t)$ среды в точке r с радиусом полости $a(t)$ в произвольный момент времени t. Объем вытесняемой среды камуфлетной полостью при ее расширении за время t составит

$$V_1 = \frac{4\pi}{3}(a^3 - r_0^3).$$

За это же время объем перемещаемой среды через поверхность сферы с радиусом r будет определяться зависимостью

$$V_2 = \frac{4\pi}{3}\big((r + W)^3 - r^3\big).$$

Из закона сохранения массы при условии несжимаемости среды следует, что

$$(r + W)^3 = a^3 + r^3 - r_0^3,$$

а при обозначении $x = a/r_0$ последнее соотношение перепишется как

$$(r + W)^3 = r^3 + a^3(1 - x^{-3})$$

или после преобразований

$$\frac{W^3}{3r^2} + \frac{W^2}{r} + W = \frac{a^3}{3r^2}(1 - x^{-3}). \tag{13}$$

При $r \gg a$, что имеет место в окрестности упругопластической границы, величины W и W/r имеют разные порядки ($W \gg W/r$). Поэтому, пренебрегая первыми двумя слагаемыми соотношения (13), получим

$$W(r,t) \approx \frac{a^3}{3r^2}(1 - x^{-3}), \tag{14}$$

и, соответственно,

$$\frac{\partial W}{\partial r} = -\frac{2a^3}{3r^3}(1 - x^{-3}). \tag{15}$$

Величина главного сдвига γ при постоянстве плотности определяется соотношением

$$\gamma \approx \frac{W}{r} - \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{1}{2}\Big(\frac{W}{r}\Big)^2 - \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial W}{\partial r}\Big)^2. \tag{16}$$

Заменяя в (16) W и $\frac{\partial W}{\partial r}$ их выражениями из (14) и (15), получаем

$$\gamma = (a/r)^3(1 - x^{-3})\frac{1 + 0.5(a/r)^3(1 - x^{-3})}{\big(1 + (a/r)^3(1 - x^{-3})\big)^{4/3}} \approx (a/r)^3(1 - x^{-3}), \tag{17}$$

так как в упругой области $(a/r)^3(1 - x^{-3}) \ll 1$.

Из последнего выражения следует, что на упругопластической границе ($r = b$ и $\gamma = \gamma_e$) выполняется соотношение

$$\gamma_e = (a/b)^3(1 - x^{-3}). \tag{18}$$

С учетом (17) и (18) выражение (12) преобразуется к виду

$$\Pi_e = 2\pi \int_b^\infty G_0\Big(\frac{a}{r}\Big)^6(1 - x^{-3})^2 r^2 dr = 2\pi G_0 a^6(1 - x^{-3})^2 \int_b^\infty \frac{1}{r^4}dr =$$
$$= -\frac{2\pi}{3}G_0 a^6(1 - x^{-3})^2 \frac{1}{r^3}\Big|_b^\infty = \frac{2\pi a^3}{3}G_0\Big(\frac{a}{b}\Big)^3(1 - x^{-3})^2 =$$
$$= \frac{1}{2}G_0\gamma_e(1 - x^{-3})V_{\max} = \frac{1}{2}\tau_s(1 - x^{-3})V_{\max}.$$

В упругопластической области $a < r < b$ потенциальная энергия деформации частицы среды запасена как упруго (так как каждая частица нагружена упруго до предела $\gamma = \gamma_e$), так и в виде пластических деформаций, т.е. выполняются следующие равенства:

$$\frac{1}{2}G_0\gamma_e^2 + \tau_s(\gamma - \gamma_e) = \frac{1}{2}\tau_s\gamma_e + \tau_s\gamma - \tau_s\gamma_e = \tau_s\gamma - \frac{1}{2}\tau_s\gamma_e.$$

Потенциальная энергия деформаций сдвига во всей упругопластической области Π_p определяется из равенства

$$\Pi_p = 4\pi \int_a^b \Big[\tau_s \Big(\frac{a}{r}\Big)^3 (1 - x^{-3}) - \frac{1}{2}\tau_s \gamma_e\Big] r^2 dr =$$
$$= 4\pi\tau_s a^3 (1 - x^{-3}) \int_a^b \frac{1}{r} dr - 2\pi\tau_s\gamma_e \int_a^b r^2 dr =$$
$$= 4\pi\tau_s a^3 (1 - x^{-3}) \ln r\Big|_a^b - \frac{2\pi}{3}\tau_s\gamma_e r^3\Big|_a^b =$$
$$= 4\pi a^3 \ln\frac{b}{a}\tau_s(1 - x^{-3}) - \frac{2\pi}{3}\tau_s\gamma_e(b^3 - a^3) =$$
$$= V_{\max} \ln\Big(\frac{b}{a}\Big)^3 \tau_s(1 - x^{-3}) - \frac{2\pi}{3} a^3 \tau_s\gamma_e \Big[\Big(\frac{b}{a}\Big)^3 - 1\Big] =$$
$$= \tau_s V_{\max} \ln\Big(\frac{b}{a}\Big)^3 (1 - x^{-3}) - \frac{1}{2}\tau_s V_{\max}\Big(\frac{a}{b}\Big)^3 (1 - x^{-3})\Big[\Big(\frac{b}{a}\Big)^3 - 1\Big] =$$
$$= \tau_s V_{\max}(1 - x^{-3}) \ln\Big(\frac{b}{a}\Big)^3 - \frac{1}{2}\tau_s V_{\max}(1 - x^{-3})\Big[1 - \Big(\frac{a}{b}\Big)^3\Big] =$$
$$= \tau_s V_{\max}(1 - x^{-3})\Big\{\ln\Big(\frac{b}{a}\Big)^3 - \frac{1}{2}\Big[1 - \Big(\frac{a}{b}\Big)^3\Big]\Big\}.$$

Так как $(a/b)^3 \ll 1$, последнее выражение можно представить в виде

$$\Pi_p \approx \tau_s V_{\max}(1 - x^{-3})\Big[\ln\Big(\frac{b}{a}\Big)^3 - \frac{1}{2}\Big]. \tag{19}$$

Для определения величины $\ln(b/a)^3$ воспользуемся законом сохранения массы в возмущенной области от центра камуфлетной полости до упругопластической границы b:

$$\rho_0(b^3 - r_0^3) = \rho(b^3 - a^3),$$

откуда

$$\Big(\frac{b}{a}\Big)^3 = \frac{\rho}{\rho - \rho_0} - \frac{\rho_0}{\rho - \rho_0}\frac{r_0^3}{a^3}. \tag{20}$$

Учитывая, что $(r_0/a)^3 \ll 1$, уже при $a \geqslant 2$, вычитаемом в соотношении (20), можно пренебречь и записать его в виде

$$\Big(\frac{b}{a}\Big)^3 = \frac{\rho}{\rho - \rho_0} = \frac{1}{\beta}.$$

Тогда соотношение (19) примет вид

$$\Pi_p \approx \tau_s V_{\max}(1 - x^{-3})\Big[\ln\frac{1}{\beta} - \frac{1}{2}\Big].$$

Приравнивая работу расширяющихся продуктов взрыва сумме $\Pi_e + \Pi_p$, получаем, что

$$\tau_s(1 - x_1^{-3}) \ln\frac{1}{\beta} = \frac{P_{00}V_0}{(m-1)V_{\max}}\Big[1 - \Big(\frac{V_0}{V_{\max}}\Big)^{m-1}\Big], \tag{21}$$

где $x_1 = a_{\max}/r_0 = (V_{\max}/V_0)^{1/3}$ и, соответственно, $V_0/V_{\max} = x_1^{-3}$.

Заменяя в (21) $V_0/V_{\max}$ через x_1^{-3}, получим уравнение относительно только одной неизвестной величины x_1, разрешив которое, определим эту неизвестную.

Соотношение (11) и зависимость $\dot{a}^2 = y(x)P_{00}/\rho$ позволяют вычислять значения размерной скорости камуфлетной поверхности $\dot{a}(x)$. После того как значение $\dot{a}(x)$ определено, по формуле $u(r) = a^2\dot{a}/r^2$ при заданном r вычисляются значения скорости частиц на различных расстояниях от центра взрыва $u(r)$ на момент достижения радиусом камуфлетной полости значения a.

Полученное решение задачи определения поля скоростей в сплошной упругопластической среде при камуфлетном взрыве позволяет оценивать размеры зон расширения, пластического деформирования среды и воздействия взрывных возмущений на различные объекты.

Конкурирующие интересы. Заявляем, что в отношении авторства и публикации этой статьи конфликта интересов не имеем.

Авторский вклад и ответственность. Все авторы принимали участие в разработке концепции статьи; все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

Библиографический список

1. Бовт А. Н., Ловецкий Е. Е., Селяков В. И. [и др.] *Механическое действие камуфлетного взрыва.* М.: Недра, 1990. 184 с.
2. Chadwick P., Cox A. D., Hopkins H. G. Mechanics of deep underground explosions // *Philos. Trans. R. Soc. Lond., Ser. A, Math. Phys. Eng. Sci.*, 1964. vol. 256, no. 1070. pp. 235–300. DOI: https://doi.org/10.1098/rsta.1964.0006.
3. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. *Проблемы гидродинамики и их математические модели.* М.: Наука, 1977. 408 с.
4. Седнев В. А., Копнышев С. Л., Седнев А. В. Исследование этапов процесса и обоснование математической модели расширения сферической полости в грунтах и горных породах // *Устойчивое развитие горных территорий*, 2020. Т. 12, № 2(44). С. 302–312. EDN: IIJROE. DOI: https://doi.org/10.21177/1998-4502-2020-12-2-302-314.
5. Седнев В. А., Копнышев С. Л. Модель расширения сферической полости в упругопластической сплошной среде с учетом ее упрочнения // *Проблемы машиностроения и автоматизации*, 2018. № 4. С. 105–113. EDN: YPOSCT.

Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2023, vol. 27, no. 2, pp. 384–393
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu2004

MSC: 74L10, 74C05

Estimation of the velocity field in a continuous elastoplastic medium during a camouflet explosion

***V. A. Sednev*[1], *S. L. Kopnyshev*[1], *A. V. Sednev*[2]**

[1] Fire Fighting Service of State Academy of Emercom of Russia,
4, B. Galushkina str., Moscow, 129366, Russian Federation.
[2] Bauman Moscow State Technical University,
5/1, 2-ya Baumanskaya str., Moscow, 105005, Russian Federation.

Abstract

The paper presents a solution to the centrally symmetric problem of determining the velocity field in a continuous elastoplastic medium during a camouflet explosion, assuming that the motion of the camouflet cavity is non-oscillatory and that the medium is incompressible in both the plastic and elastic regions. Dependencies for determining the size of the expansion zones and plastic deformation of the medium are obtained. The solution is based on the "camouflet equation" — a relationship for determining the pressure on the contact surface of the expanding spherical cavity due to internal pressure.

Keywords: elastoplastic medium, camouflage cavity, velocity field, expansion, camouflage explosion.

Received: 9th March, 2023 / Revised: 28th April, 2023 / Accepted: 25th May, 2023 / First online: 21st June, 2023

Competing interests. We declare that we have no conflicts of interest in the authorship and publication of this article.

Authors' contributions and responsibilities. Each author has participated in the article concept development; the authors contributed equally to this article. The authors

---

Mechanics of Solids
Short Communication

© Authors, 2023
© Samara State Technical University, 2023 (Compilation, Design, and Layout)
The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License (http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)

Please cite this article in press as:
Sednev V. A., Kopnyshev S. L., Sednev A. V. Estimation of the velocity field in a continuous elastoplastic medium during a camouflet explosion, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2023, vol. 27, no. 2, pp. 384–393. EDN: ZLCILC. DOI: 10.14498/vsgtu2004 (In Russian).

Authors' Details:

Vladimir A. Sednev https://orcid.org/0000-0002-4922-430X
Dr. Techn. Sci., Professor; Dept. of Civil Defense, Protection of the Population and Territories; e-mail: sednev70@yandex.ru

Sergey L. Kopnyshev https://orcid.org/0009-0005-8071-0444
Cand. Techn. Sci., Associate Professor; Dept. of Civil Defense, Protection of the Population and Territories; e-mail: serkopn@mail.ru

Anatoliy V. Sednev https://orcid.org/0009-0009-5510-6316
Student

are absolutely responsible for submit the final manuscript to print. Each author has approved the final version of manuscript.

References

1. Bovt A. N., Lovetsky E. E., Selyakov V. I., et al. *Mekhanicheskoe deistvie kamufletnogo vzryva* [Mechanical Action of a Camouflage Explosion]. Moscow, Nedra, 1990, 184 pp. (In Russian)
2. Chadwick P., Cox A. D., Hopkins H. G. Mechanics of deep underground explosions, *Philos. Trans. R. Soc. Lond., Ser. A, Math. Phys. Eng. Sci.*, 1964, vol. 256, no. 1070, pp. 235–300. DOI: https://doi.org/10.1098/rsta.1964.0006.
3. Lavrent'ev M. A., Shabat B. V. *Problemy gidrodinamiki i ikh matematicheskie modeli* [Hydrodynamics Problems and Their Mathematical Models]. Moscow, Nauka, 1977, 408 pp. (In Russian)
4. Sednev V. A., Kopnyshev S. L., Sednev A. V. Research of process stages and justification of mathematical model of spherical cavity expansion in soils and rocks, *Sustainable Development of Mountain Territories*, 2020, vol. 12, no. 2(44), pp. 302–312 (In Russian). EDN: IIJROE. DOI: https://doi.org/10.21177/1998-4502-2020-12-2-302-314.
5. Sednev V. A., Kopnyshev S. L. The model of spherical cavity expansion in the elastoplastic environment with its hardening, *Engineering and Automation Problems*, 2018, pp. 105–113 (In Russian). EDN: YPOSCT.

ПОДПИСКА – 2023
НА ЯНВАРЬ – ДЕКАБРЬ

в «каталоге «Газеты и журналы – 2023»,
и на сайте «ООО Урал-Пресс Округ»
http://www.ural-press.ru/

Уважаемые читатели!

Обратите внимание, что с 1 сентября 2022 г. проводится
подписная кампания на журналы Самарского государственного
технического университета на 2023 год

**18106 Вестник Самарского государственного технического университета.
Серия «Технические науки»
Промышленность. Энергетика. Строительство. Транспорт.**

**18108 Вестник Самарского государственного технического университета.
Серия «Физико-математические науки»
Образование. Наука.**

**70570 Градостроительство и архитектура
Промышленность. Строительство.**

**18107 Вестник Самарского государственного технического университета.
Серия «Психолого-педагогические науки»
Образование. Педагогика. Религия. Философия. Социология. Психология.**

**41340 Вестник Самарского государственного технического университета.
Серия «Философия».
Образование. Педагогика. Религия. Философия. Социология. Психология.**

Условия оформления подписки Вы найдете
на сайте http://www.ural-press.ru/

Учебная литература, изданная в СамГТУ

ПОДПИСКА
на сайте «ООО Урал-Пресс Округ»
http://www.ural-press.ru/

014827 **Технология производства смазочных масел и спецпродуктов.** Учебное пособие / В.А. Тыщенко, И.А. Агафонов, А.А. Пимерзин, Н.Н. Томина, С.А. Антонов, Е.О. Жилкина. – Самара: Самар. гос. техн. ун-т, 2014 – 240 с.

014828 **Номограммы, графики и табличные данные для технологических расчетов процессов переработки нефти и газа:** справочное пособие / В.Г. Власов, И.Г. Агафонов, А.А. Пимерзин, Н.М. Максимов, Е.Е. Вишневская, Д.И. Ишутенко. – Самара: Самар. гос. техн. ун-т, 2017. – 91 с.

014829 **Проектирование установки ЭЛОУ-АВТ:** учебно-методическое пособие / В.Г. Власов, И.А. Агафонов – Изд. 2-е, испр. и доп. – Самара: Самар. гос. техн. ун-т, 2018. – 159 с.

014832 **Химия и технология вторичных процессов переработки нефти:** учебное пособие / Л.И. Заботин. – Самара: Самар. гос. техн. ун-т, 2017. – 332 с.

014833 **Каталитический риформинг**: учеб.-метод. пособие / Л.И. Заботин. – Самара: Самар. гос. техн. ун-т, 2016. – 166 с.

014834 **Проектирование нефтеперерабатывающих заводов:** учеб. пособие / Л.И. Заботин, А.А. Пимерзин, А.В. Можаев. – Самара: Самар. гос. техн. ун-т, 2018. – 129 с.

014835 **Методы очистки нефтяных фракций:** учебное пособие / Н.Н. Томина, Н.М. Максимов, А.А. Пимерзин. – Самара: Самар. гос. техн. ун-т, 2014. – 293 с.

014837 **Катализ в химической промышленности:** учебное пособие / Н.Н. Томина, П.А. Никульшин, Н.М. Максимов, А.А. Пимерзин. – Самара: Самар. гос. техн. ун-т, 2017. – 374 с.

014839 **Процессы нефтехимического синтеза в нефтепереработке:** учебное пособие / В.А. Пильщиков, Ал.А. Пимерзин, А.А. Пимерзин. – Самара: Самар. гос. техн. ун-т, 2017. – 207 с.

014840 **Подготовка и первичная переработка нефти. Проектирование установок ЭЛОУ-АВТ:** учебно-методическое пособие / В.Г Власов, И.А. Агафонов. – Самара: Самар. гос. техн. ун-т, 2015. – 327 с.

014841 **Каталитический кретинг:** учеб.-метод. пособие / Л.И. Заботин. – Самара: Самар. гос. техн. ун-т, 2020. – 97 с.

014842 **Синтетические моторные масла и присадки:** учебное пособие / В.А. Тыщенко, С.В. Котов, А.А. Пимерзин. – Самара: Самар. гос. техн. ун-т, 2020. – 260 с.

014843 **Алкилирование спиртов олефинами. Получение топливных оксигенатов:** учебное пособие / В.А. Пильщиков, Ал.А. Пимерзин, А.А. Пимерзин. – Самара: Самар. гос. техн. ун-т, 2020. – 115 с.

014844 **Методы очистки нефтяных фракций ч. 1.** учебное пособие / Н.Н. Томина, Н.М. Максимов, В.А. Тыщенко, А.А. Пимерзин. – Самара: Самар. гос. техн. ун-т, 2014. – 293 с.