ISSN 1991-8615 (print)
ISSN 2310-7081 (online)

ВЕСТНИК
САМАРСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ТЕХНИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

Серия
«Физико-математические науки»

Т. 27, № 3 – 2023

Journal of Samara State Technical University
Ser. Physical and Mathematical Sciences

Вестник Самарского государственного технического университета

ISSN 1991–8615 (print)

ISSN 2310–7081 (online)

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ

Издаётся с 1996 г.

Выходит 4 раза в год

Сентябрь — 2023

Серия «ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ» (Т. 27, № 3/72 – 2023)

НАУЧНОЕ ИЗДАНИЕ

Вестник Самарского государственного технического университета.
Серия «Физико-математические науки» (Т. 27, № 3/72 – 2023)

Учредитель — ФГБОУ ВО «Самарский государственный технический университет» 443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244

Редактор Е. С. Захарова

Выпускающий редактор Е. В. Абрамова

Компьютерная вёрстка М. Н. Саушкин, О. С. Афанасьева, Е. Ю. Арланова

Адрес редакции и издателя:
ФГБОУ ВО «СамГТУ»,
443100, г. Самара,
ул. Молодогвардейская, 244

Тел.: +7 (846) 337 04 43
Факс: +7 (846) 278 44 00

E-mail: vsgtu@samgtu.ru
URL: http://www.mathnet.ru/vsgtu

Оригинал-макет изготовлен
на кафедре прикладной математики
и информатики СамГТУ

Свидетельство о регистрации
ПИ № ФС 77–66685 от 27.07.2016.
Федеральная служба по надзору
в сфере связи информационных
технологий и массовых коммуникаций

Подписано в печать 12 ноября 2023 г.
Дата выхода в свет 19 декабря 2023 г.
Формат 70 × 108 $^1/_{16}$.
Усл. печ. л. 15.85. Уч.-изд. л. 15.82.
Тираж 500 экз. Рег. № 182/23.
Заказ № 534.

Отпечатано в типографии
Самарского государственного
технического университета
443100, г. Самара,
ул. Молодогвардейская, 244.

Журнал индексируется в Web of Science Core Collection (Emerging Sources Citation Index), Scopus, Russian Science Citation Index, Zentralblatt MATH, DOAJ и входит в ядро Российского индекса научного цитирования.

Журнал включен в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук, по научным специальностям и соответствующим им отраслям науки:
- 1.1.2 – Дифференциальные уравнения и математическая физика (физико-математические науки);
- 1.1.8 – Механика деформируемого твердого тела (физико-математические науки);
- 1.2.2 – Математическое моделирование численные методы и комплексы программ (физико-математические науки).

Полнотекстовый доступ к статьям журнала осуществляется на Общероссийском математическом портале (http://www.mathnet.ru), портале научных журналов «Эко-Вектор» (https://journals.eco-vector.com), сайтах научных электронных библиотек eLibrary.ru (http://elibrary.ru) и КиберЛенинка (http://cyberleninka.ru).

Подписной индекс в каталоге агентства «Урал-Пресс» 18108 Цена свободная

Journal of Samara State Technical University

ISSN 1991–8615 (print)
ISSN 2310–7081 (online)
SCIENTIFIC JOURNAL
Published since 1996
4 issues per year
September — 2023

Ser. Physical & Mathematical Sciences, 2023, vol. 27, no. 3

Founder — Samara State Technical University, Samara, 443100, Russian Federation

Edited by E. S. Z a k h a r o v a, E. V. A b r a m o v a
Compiled and typeset by M. N. S a u s h k i n, O. S. A f a n a s' e v a,
E. Yu. A r l a n o v a

The Editorial Board Address:

Dept. of Applied Mathematics and Computer Science,
Samara State Technical University,
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russian Federation

Phone: +7 (846) 337 04 43
Phax: +7 (846) 278 44 00
E-mail: vsgtu@samgtu.ru
URL: http://www.mathnet.ru/eng/vsgtu

Printed at the Samara State Technical University Press.

The journal covered in Web of Science Core Collection (Emerging Sources Citation Index), Zentralblatt MATH, Scopus, Russian Science Citation Index, and DOAJ.

The full-text electronic version of journal is hosted by the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru (http://www.mathnet.ru), the Eco-Vector Journals Portal (https://journals.eco-vector.com), and by the web-sites of scientific electronic libraries eLibrary.ru (http://elibrary.ru) and CyberLeninka (http://cyberleninka.ru).

ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu/v227/i3

Содержание

Дифференциальные уравнения и математическая физика

Механика деформируемого твёрдого тела

Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

Краткие сообщения

Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2023, vol. 27, no. 3
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu/v227/i3

Contents

Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2023. Т. 27, № 3. С. 407–426
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu2014
EDN: XXIUYM

УДК 519.642

Устойчивость и сходимость локально-одномерной схемы А. А. Самарского, аппроксимирующей многомерное интегро-дифференциальное уравнение конвекции-диффузии с неоднородными граничными условиями первого рода

З. В. Бештокова

Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН,
Россия, 360000, Нальчик, ул. Шортанова, 89а.

Аннотация

Изучена первая начально-краевая задача для многомерного (по пространственным переменным) интегро-дифференциального уравнения конвекции-диффузии. Для приближенного решения поставленной задачи предложена локально-одномерная схема А. А. Самарского с порядком аппроксимации $O(h^2+\tau)$. Исследование единственности и устойчивости решения проводится с помощью метода энергетических неравенств. Получены априорные оценки решения локально-одномерной разностной схемы, откуда следуют единственность решения, непрерывная и равномерная зависимость решения от входных данных, а также сходимость решения схемы к решению исходной дифференциальной задачи со скоростью, равной порядку аппроксимации разностной схемы. Для двумерной задачи построен алгоритм численного решения, проведены численные расчеты тестовых примеров, иллюстрирующие полученные в работе теоретические результаты.

Ключевые слова: уравнение конвекции-диффузии, первая начально-краевая задача, нелокальный источник, многомерная задача, разностные схемы, априорная оценка, устойчивость и сходимость.

Получение: 26 апреля 2023 г. / Исправление: 23 августа 2023 г. /
Принятие: 19 сентября 2023 г. / Публикация онлайн: 28 сентября 2023 г.

Дифференциальные уравнения и математическая физика
Научная статья

Образец для цитирования
Бештокова З. В. Устойчивость и сходимость локально-одномерной схемы А. А. Самарского, аппроксимирующей многомерное интегро-дифференциальное уравнение конвекции-диффузии с неоднородными граничными условиями первого рода // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2023. Т. 27, № 3. С. 407–426. EDN: XXIUYM. DOI: 10.14498/vsgtu2014.

Сведения об авторе
Зарьяна Владимировна Бештокова https://orcid.org/0000-0001-8020-4406
младший научный сотрудник; отд.вычислительных методов; e-mail: zarabaeva@yandex.ru

Введение. При исследовании прикладных задач механики сплошной среды, тепло- и массопереноса широко используются методы математического моделирования и вычислительной математики. В качестве основных при исследовании многих процессов в движущихся средах можно выделить диффузионный перенос той или иной субстанции и перенос, обусловленный движением среды, т. е. конвективный перенос. В газо- и гидродинамике одним из базовых моделей многих процессов выступают краевые задачи для нестационарных уравнений конвекции-диффузии (т. е. параболическое уравнение второго порядка с младшими членами) [1].

Математические модели, детально описывающие реальные процессы и явления природы, представляют собой сложные системы. Сложность задач математической физики в основном обусловлена их многомерностью и нелинейностью. Получить точные аналитические решения таких задач очень трудно. В этой связи используются приближенные методы решения. Одним из самых распространенных методов приближенного решения краевых задач является метод конечных разностей.

С точки зрения численной реализации в отличие от одномерных задач при изучении многомерных задач возникает сложность, заключающаяся в значительном увеличении объема вычислений. В этой связи актуальное значение приобретает задача построения экономичных разностных схем для численного решения многомерных задач, обладающих возможностью достаточно эффективной стабилизации решений (устойчивостью) и требующих при переходе со слоя на слой проведения числа арифметических операций Q, пропорционального числу узлов сетки, так что $Q = O(h^{-p})$, где $h = \min\limits_{1\leqslant i\leqslant p} h_i$, p — размерность пространства, h_i — шаг сетки по направлению x_i.

К эффективным методам приближенного решения сложных многомерных задач математической физики на основе их конечно-разностных аппроксимаций относятся методы расщепления, они были развиты в работах J. Douglas, D. W. Peaceman, H. H. Rachford [2,3], Н. Н. Яненко [4], А. А. Самарского [5,6], Г. И. Марчука [7], Е. Г. Дьяконова [8], И. В. Фрязинова [9–11] и др. Их отказ от классического понятия аппроксимации и замена его более слабым условием суммарной аппроксимации существенно расширяют класс решаемых задач.

Целью и новизной настоящей работы является разработка и обоснование численного метода решения интегро-дифференциального уравнения конвекции-диффузии с неоднородными краевыми условиями первого рода в многомерной области. Для приближенного решения поставленной задачи предложена локально-одномерная разностная схема А. А. Самарского с порядком аппроксимации $O(h^2 + \tau)$. Ввиду того, что уравнение содержит первую производную от неизвестной функции по пространственной переменной x_α для повышения порядка точности локально-одномерной схемы используется известный метод, предложенный А. А. Самарским при построении монотонной схемы второго порядка точности по h_α для уравнения параболического типа общего вида, содержащего односторонние производные, учитывающие знак $r_\alpha(x,t)$. Исследование единственности и устойчивости решения проводится с помощью метода энергетических неравенств. Получены априорные оценки решения локально-одномерной разностной схемы, откуда следуют единственность решения, непрерывная и равномерная зависимость решения от входных данных, а также сходимость решения схемы к решению исходной дифференциальной задачи со скоростью, равной порядку аппроксимации разностной схемы. Для двумерной задачи построен алгоритм численного решения, проведены численные расчеты тестовых примеров, иллюстрирующие полученные в работе теоретические результаты.

Следует отметить, что применение принципа максимума [5, 6] для исследования единственности, устойчивости и сходимости решения локально-одномерной схемы, аппроксимирующей многомерное интегро-дифференциальное уравнение конвекции-диффузии, не представляется возможным, а исследование методом энергетических неравенств решения многомерного интегро-дифференциального уравнения параболического типа с однородными краевыми условиями первого рода возможно, но при этом сходимость схемы доказывается лишь со скоростью $O(h+\sqrt{\tau})$. В этой связи в данной работе предлагается подход к получению априорной оценки решения локально-одномерной схемы, с помощью которой доказывается сходимость схемы со скоростью $O(h^2+\tau)$.

Численным методам решения локальных и нелокальных краевых задач для многомерных дифференциальных уравнений в частных производных параболического типа на основе построения локально-одномерных разностных схем посвящены работы [12–15].

1. Постановка задачи. В замкнутой области $\overline{Q}_T = \overline{G}\times[0,T]$, основанием которой является p-мерный куб $\overline{G} = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_p) : 0 \leqslant x_\alpha \leqslant l, \alpha = 1, 2, \ldots, p\}$ с границей Γ, $\overline{G} = G\cup\Gamma$, рассматривается следующая задача [16, стр. 442]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu + f(x,t), \quad (x,t)\in Q_T, \tag{1}$$

$$u\Big|_\Gamma = \mu(x,t), \quad 0\leqslant t\leqslant T, \tag{2}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x\in\overline{G}, \tag{3}$$

где $Lu = \sum\limits_{\alpha=1}^{p} L_\alpha u$, $L_\alpha u = k_\alpha(t)\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2} + r_\alpha(t)\dfrac{\partial u}{\partial x_\alpha} - q_\alpha(x,t)u - \displaystyle\int_0^l H_\alpha(x,t)u dx_\alpha$;

$$0 < c_0 \leqslant k_\alpha(t) \leqslant c_1, \quad |r_\alpha(t)|,\ |H_\alpha(x,t)|,\ |q_\alpha(x,t)| \leqslant c_2, \quad c_0, c_1, c_2 = \mathrm{const} > 0;$$

$$\begin{gathered} u(x,t)\in C^{4,2}(Q_T), \quad k_\alpha(t), r_\alpha(t)\in C^1[0,T], \\ H_\alpha(x,t), q_\alpha(x,t), f(x,t)\in C^{2,1}(Q_T), \\ \mu_{\pm\alpha}(x,t),\ u_0(x) \text{ — непрерывные функции, } \alpha = 1,2,\ldots,p, \end{gathered} \tag{4}$$

$C^{m,n}$ — класс функций, непрерывных вместе со своими частными производными порядка m по x и n по t; c_0, c_1, c_2 — положительные постоянные; $Q_T = G\times(0,T]$.

Далее через M_i, $i = 1, 2, \ldots$, обозначаются положительные постоянные, зависящие только от входных данных рассматриваемой задачи.

2. Локально-одномерная схема. Пространственную сетку выберем равномерной по каждому направлению Ox_α с шагом $h = l/N$ (кубическая сетка с шагом h) [16, стр. 475]:

$$\bar\omega_h = \bar\omega_{h,\alpha}^p, \quad \bar\omega_{h,\alpha} = \left\{x_\alpha^{(i_\alpha)} = i_\alpha h : i_\alpha = 1,\ldots,N-1,\ x_\alpha^{(0)} = 0,\ x_\alpha^{(N)} = Nh/2\right\},$$

$$\omega_h = \omega_{h,\alpha}^p, \quad \omega_{h,\alpha} = \left\{x_\alpha^{(i_\alpha)} = i_\alpha h : i_\alpha = 1, \ldots, N-1\right\}, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, p.$$

На отрезке $[0, T]$ также введем равномерную сетку $\overline{\omega}_\tau = \{t_j = j\tau,\ j = 0, 1, \ldots, j_0\}$ с шагом $\tau = T/j_0$. Каждый из отрезков $[t_j, t_{j+1}]$ разобьем на p частей, введя точки $t_{j+\alpha/p} = t_j + \tau\alpha/p$, $\alpha = 1, 2, \ldots, p-1$, и обозначим через $\Delta_\alpha = \left(t_{j+(\alpha-1)/p}, t_{j+\alpha/p}\right]$ полуинтервал, где $\alpha = 1, 2, \ldots, p$.

Уравнение (1) перепишем в виде

$$\mathfrak{R}u = \frac{\partial u}{\partial t} - Lu - f = 0,$$

или

$$\sum_{\alpha=1}^{p} \mathfrak{R}_\alpha u = 0, \quad \mathfrak{R}_\alpha u = \frac{1}{p}\frac{\partial u}{\partial t} - L_\alpha u - f_\alpha, \quad \sum_{\alpha=1}^{p} f_\alpha = f,$$

где $f_\alpha(x, t)$, $\alpha = 1, 2, \ldots, p,$ — произвольные функции, обладающие той же гладкостью, что и $f(x, t)$, удовлетворяющие условию нормировки $\sum\limits_{\alpha=1}^{p} f_\alpha = f$.

На каждом полуинтервале Δ_α, $\alpha = 1, 2, \ldots, p$, будем последовательно решать задачи

$$\mathfrak{R}_\alpha \vartheta_\alpha = \frac{1}{p}\frac{\partial \vartheta_{(\alpha)}}{\partial t} - L_\alpha \vartheta_{(\alpha)} - f_\alpha = 0, \quad x \in G,\ t \in \Delta_\alpha,\ \alpha = 1, 2, \ldots, p, \tag{5}$$

$$\begin{cases} \vartheta_{(\alpha)} = \mu_{-\alpha}, & x_\alpha = 0, \\ \vartheta_{(\alpha)} = \mu_{+\alpha}, & x_\alpha = l, \end{cases}$$

полагая при этом [16, стр. 522]

$$\vartheta_{(1)}(x, 0) = u_0(x), \quad \vartheta_{(1)}^j(x, t_j) = \vartheta_{(p)}^{j-1}(x, t_j), \quad j = 1, 2, \ldots, j_0,$$

$$\vartheta_{(\alpha)}^j(x, t_{j+(\alpha-1)/p}) = \vartheta_{(\alpha-1)}^j(x, t_{j+(\alpha-1)/p}), \quad \alpha = 2, \ldots, p,\ j = 0, 1, 2, \ldots, j_0 - 1,$$

$\mu_{-\alpha} = \mu(x', 0, t)$, $\mu_{+\alpha} = \mu(x', l, t)$ — непрерывные функции.

Аналогично [16, стр. 401] получим для уравнения (5) номера α монотонную схему второго порядка аппроксимации по h. Для этого рассмотрим уравнение (5) номера α с возмущенным оператором $\widetilde{L}_\alpha$:

$$\frac{1}{p}\frac{\partial \vartheta_{(\alpha)}}{\partial t} = \widetilde{L}_\alpha \vartheta_{(\alpha)} + f_\alpha, \quad t \in \Delta_\alpha, \tag{6}$$

где

$$\widetilde{L}_\alpha \vartheta_{(\alpha)} = \varkappa_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha(x, t)\frac{\partial \vartheta_{(\alpha)}}{\partial x_\alpha}\right) + r_\alpha(x, t)\frac{\partial \vartheta_{(\alpha)}}{\partial x_\alpha} - q_\alpha \vartheta_{(\alpha)} - \int_0^l H_\alpha(x, t)\vartheta_{(\alpha)} dx_\alpha;$$

$\varkappa_\alpha = \dfrac{1}{1 + R_\alpha}$, $R_\alpha = \dfrac{h|r_\alpha|}{2k_\alpha}$ — разностное число Рейнольдса; $r_\alpha = r_\alpha^+ + r_\alpha^-$, $r_\alpha^+ = (r_\alpha + |r_\alpha|)/2 \geqslant 0$, $r_\alpha^- = (r_\alpha - |r_\alpha|)/2 \leqslant 0$; $b_\alpha^+ = r_\alpha^+/k_\alpha$, $b_\alpha^- = r_\alpha^-/k_\alpha$.

Аппроксимируем каждое уравнение (6) номера α неявной схемой на полуинтервале Δ_α, тогда получим цепочку из p одномерных разностных уравнений:

$$\frac{y^{j+\alpha/p}-y^{j+(\alpha-1)/p}}{\tau}=\tilde{\Lambda}_\alpha y^{j+\alpha/p}+\varphi_\alpha^{j+\alpha/p},\quad x_\alpha\in\omega_h,\ \alpha=1,2,\ldots,p,\tag{7}$$

где

$$\tilde{\Lambda}_\alpha y^{j+\alpha/p}=\varkappa_\alpha a_\alpha y_{\bar{x}_\alpha x_\alpha}^{j+\frac{\alpha}{p}}+b_\alpha^{+}a_\alpha y_{x_\alpha}^{j+\alpha/p}+b_\alpha^{-}a_\alpha y_{\bar{x}_\alpha}^{j+\alpha/p}-d_\alpha y^{j+\alpha/p}-\sum_{i_\alpha=0}^{N}\delta_{\alpha,i_\alpha}y_{i_\alpha}^{j+\alpha/p}\hbar;$$

$$a_\alpha=k_\alpha(\bar{t}),\ r_\alpha=r_\alpha(\bar{t}),\ d_\alpha=q_\alpha(x,\bar{t}),\ \delta_\alpha=H_\alpha(x_\alpha,\bar{t}),\ \varphi_\alpha=f_\alpha(x,\bar{t}),\ \bar{t}=t_{j+1/2},$$

$$\hbar=\begin{cases}h, & i_\alpha=1,2,\ldots,N-1,\\ h/2, & i_\alpha=0,N;\end{cases}$$

$x=(x_1,x_2,\ldots,x_p)$, $x'=(x_1,x_2,\ldots,x_{\alpha-1},x_{\alpha+1},\ldots,x_p)$; $\gamma_{h,\alpha}$ — множество граничных по направлению x_α узлов.

К уравнению (7) присоединим граничные и начальное условия

$$\begin{cases}y^{j+\alpha/p}=\mu_{-\alpha}, & x_\alpha=0,\\ y^{j+\alpha/p}=\mu_{+\alpha}, & x_\alpha=l,\end{cases}\tag{8}$$

$$y(x,0)=u_0(x).\tag{9}$$

3. Погрешность аппроксимации локально-одномерной схемы. Характеристикой точности решения локально-одномерной схемы является разность $z^{j+\alpha/p}=y^{j+\alpha/p}-u^{j+\alpha/p}$, где $u^{j+\alpha/p}$ — решение исходной задачи (1)–(3). Подставляя $y^{j+\alpha/p}=z^{j+\alpha/p}+u^{j+\alpha/p}$ в схему (7)–(9), получим задачу для погрешности $z^{j+\alpha/p}$:

$$\frac{z^{j+\alpha/p}-z^{j+(\alpha-1)/p}}{\tau}=\tilde{\Lambda}_\alpha z^{j+\alpha/p}+\psi_\alpha^{j+\alpha/p},\tag{10}$$

$$z^{j+\alpha/p}=0 \text{ при } x\in\gamma_{h,\alpha},\quad z(x,0)=0,$$

где $\psi_\alpha^{j+\alpha/p}=\tilde{\Lambda}_\alpha u^{j+\alpha/p}+\varphi_\alpha^{j+\alpha/p}-\dfrac{u^{j+\alpha/p}-u^{j+\alpha-1/p}}{\tau}$.

Обозначив через $\mathring{\psi}_\alpha=\left(L_\alpha u+f_\alpha-\dfrac{1}{p}\dfrac{\partial u}{\partial t}\right)^{j+1/2}$ и замечая, что $\sum\limits_{\alpha=1}^{p}\mathring{\psi}_\alpha=0$, если $\sum\limits_{\alpha=1}^{p}f_\alpha=f$, представим погрешность в виде суммы $\psi_\alpha^{j+\alpha/p}=\mathring{\psi}_\alpha+\psi_\alpha^{*}$:

$$\psi_\alpha^{j+\alpha/p}=\tilde{\Lambda}_\alpha u^{j+\alpha/p}+\varphi_\alpha^{j+\alpha/p}-\frac{u^{j+\alpha/p}-u^{j+(\alpha-1)/p}}{\tau}+\mathring{\psi}_\alpha-\mathring{\psi}_\alpha=$$
$$=\left(\tilde{\Lambda}_\alpha u^{j+\alpha/p}-L_\alpha u^{j+1/2}\right)+\left(\varphi_\alpha^{j+\alpha/p}-f_\alpha^{j+1/2}\right)-$$

$$-\Big(\frac{u^{j+\alpha/p}-u^{j+(\alpha-1)/p}}{\tau}-\frac{1}{p}\Big(\frac{\partial u}{\partial t}\Big)^{j+1/2}\Big)+\overset{\circ}{\psi}_\alpha=\overset{\circ}{\psi}_\alpha+\psi^*_\alpha.$$

Очевидно, что $\psi^*_\alpha=O(h^2+\tau)$, $\overset{\circ}{\psi}_\alpha=O(1)$, $\sum\limits_{\alpha=1}^{p}\psi_\alpha^{j+\alpha/p}=\sum\limits_{\alpha=1}^{p}\overset{\circ}{\psi}_\alpha+\sum\limits_{\alpha=1}^{p}\psi^*_\alpha=$ $=O(h^2+\tau)$.

4. Устойчивость локально-одномерной схемы. Априорную оценку решения схемы (7)–(9) найдем методом энергетических неравенств, для этого введем скалярные произведения и нормы в следующем виде:

$$\frac{1}{p}y^{(\alpha)}_{\bar t}=\frac{y^{j+\alpha/p}-y^{j+(\alpha-1)/p}}{\tau},\quad (u,v)_\alpha=\sum_{i_\alpha=1}^{N-1}u_{i_\alpha}v_{i_\alpha}h,\quad \|y^{(\alpha)}\|^2_{L_2(\alpha)}=\sum_{i_\alpha=1}^{N-1}y^2_{i_\alpha}h,$$

$$(u,v)=\sum_{x\in\omega_h}uvH,\quad H=h^p,\quad \|y^{(\alpha)}\|^2_{L_2(\omega_h)}=\sum_{i_\beta\neq i_\alpha}\|y^{(\alpha)}\|^2_{L_2(\alpha)}H/h,$$

$$[u,v]_\alpha=\sum_{i_\alpha=0}^{N}u_{i_\alpha}v_{i_\alpha}\hbar,\quad |[y^{(\alpha)}]|^2_{L_2(\alpha)}=\sum_{i_\alpha=0}^{N}y^2_{i_\alpha}\hbar,$$

$$[u,v]=\sum_{x\in\bar\omega_h}uv\overline{H},\quad \overline{H}=\hbar^p,\quad |[y^{(\alpha)}]|^2_{L_2(\bar\omega_h)}=\sum_{i_\beta\neq i_\alpha}|[y^{(\alpha)}]|^2_{L_2(\alpha)}\overline{H}/\hbar.$$

Умножим теперь уравнение (7) на $y^{(\alpha)}h$, где $y^{(\alpha)}=y^{j+\alpha/p}$, и просуммируем по s_α от η_α до ξ_α:

$$\frac{1}{p}\sum_{s_\alpha=\eta_\alpha}^{\xi_\alpha}y^{(\alpha)}_{\bar t,s_\alpha}y^{(\alpha)}_{s_\alpha}h=\sum_{s_\alpha=\eta_\alpha}^{\xi_\alpha}\tilde\Lambda_\alpha y^{(\alpha)}_{s_\alpha}y^{(\alpha)}_{s_\alpha}h+$$
$$+\sum_{s_\alpha=\eta_\alpha}^{\xi_\alpha}\varphi_{(\alpha),s_\alpha}y^{(\alpha)}_{s_\alpha}h,\quad 0\leqslant\eta_\alpha\leqslant\xi_\alpha\leqslant N.\tag{11}$$

Преобразуем каждое слагаемое тождества (11):

$$\frac{1}{p}\sum_{s_\alpha=\eta_\alpha}^{\xi_\alpha}y^{(\alpha)}_{\bar t,s_\alpha}y^{(\alpha)}_{s_\alpha}h=\frac{1}{2p}\Big(\sum_{s_\alpha=\eta_\alpha}^{\xi_\alpha}(y^{(\alpha)}_{s_\alpha})^2h\Big)_{\bar t}+\frac{\tau}{2p}\Big(\sum_{s_\alpha=\eta_\alpha}^{\xi_\alpha}(y^{(\alpha)}_{\bar t,s_\alpha})^2h\Big),\tag{12}$$

$$\sum_{s_\alpha=\eta_\alpha}^{\xi_\alpha}\tilde\Lambda_\alpha y^{(\alpha)}_{s_\alpha}y^{(\alpha)}_{s_\alpha}h=\varkappa_\alpha a_\alpha\sum_{s_\alpha=\eta_\alpha}^{\xi_\alpha}y_{\bar x_\alpha x_\alpha,s_\alpha}y^{(\alpha)}_{s_\alpha}h+b^+_\alpha a_\alpha\sum_{s_\alpha=\eta_\alpha}^{\xi_\alpha}y^{(\alpha)}_{x_\alpha,s_\alpha}y^{(\alpha)}_{s_\alpha}h+$$
$$+b^-_\alpha a_\alpha\sum_{s_\alpha=\eta_\alpha}^{\xi_\alpha}y^{(\alpha)}_{\bar x_\alpha,s_\alpha}y^{(\alpha)}_{s_\alpha}h-\sum_{s_\alpha=\eta_\alpha}^{\xi_\alpha}d_\alpha(y^{(\alpha)}_{s_\alpha})^2h-\sum_{s_\alpha=\eta_\alpha}^{\xi_\alpha}\Big(y^{(\alpha)}_{s_\alpha}\sum_{i_\alpha=0}^{N}\delta_{\alpha,i_\alpha}y^{j+\alpha/p}_{i_\alpha}\hbar\Big)h=$$
$$=-\varkappa_\alpha a_\alpha\sum_{s_\alpha=\eta_\alpha}^{\xi_\alpha+1}(y_{\bar x_\alpha,s_\alpha})^2h+\varkappa_\alpha a_\alpha\big(y^{(\alpha)}_{\bar x_\alpha,\xi_\alpha+1}y^{(\alpha)}_{\xi_\alpha+1}-y^{(\alpha)}_{\bar x_\alpha,\eta_\alpha}y^{(\alpha)}_{\eta_\alpha-1}\big)+$$

$$+ b^+_\alpha a_\alpha \sum_{s_\alpha=\eta_\alpha}^{\xi_\alpha} y^{(\alpha)}_{x_\alpha,s_\alpha} y^{(\alpha)}_{s_\alpha} h + b^-_\alpha a_\alpha \sum_{s_\alpha=\eta_\alpha}^{\xi_\alpha} y^{(\alpha)}_{\bar{x}_\alpha,s_\alpha} y^{(\alpha)}_{s_\alpha} h - \sum_{s_\alpha=\eta_\alpha}^{\xi_\alpha} d_{\alpha,s_\alpha} (y^{(\alpha)}_{s_\alpha})^2 h -$$

$$- \sum_{s_\alpha=\eta_\alpha}^{\xi_\alpha} \left(y^{(\alpha)}_{s_\alpha} \sum_{i_\alpha=0}^{N} \delta_{\alpha,i_\alpha} y^{j+\alpha/p}_{i_\alpha} \hbar \right) h, \quad (13)$$

$$\sum_{s_\alpha=\eta_\alpha}^{\xi_\alpha} \varphi_{(\alpha),s_\alpha} y^{(\alpha)}_{s_\alpha} h \leqslant \frac{1}{2} \sum_{s_\alpha=\eta_\alpha}^{\xi_\alpha} \varphi^2_{(\alpha),s_\alpha} h + \frac{1}{2} \sum_{s_\alpha=\eta_\alpha}^{\xi_\alpha} (y^{(\alpha)}_{s_\alpha})^2 h. \quad (14)$$

Преобразуем отдельно выражение $y^{(\alpha)}_{\bar{x}_\alpha,\xi_\alpha+1} y^{(\alpha)}_{\xi_\alpha+1} - y^{(\alpha)}_{\bar{x}_\alpha,\eta_\alpha} y^{(\alpha)}_{\eta_\alpha-1}$, тогда с учетом $(y^2)_{\bar{x}_\alpha} = 2y_{\bar{x}_\alpha} y^{(\alpha)} - h y^2_{\bar{x}_\alpha}$ получим

$$y^{(\alpha)}_{\bar{x}_\alpha,\xi_\alpha+1} y^{(\alpha)}_{\xi_\alpha+1} - y^{(\alpha)}_{\bar{x}_\alpha,\eta_\alpha} y^{(\alpha)}_{\eta_\alpha-1} =$$

$$= \frac{1}{2} \big((y^2)_{\bar{x}_\alpha,\xi_\alpha+1} + y^2_{\bar{x}_\alpha,\xi_\alpha+1} h - (y^2)_{\bar{x}_\alpha,\eta_\alpha} + y^2_{\bar{x}_\alpha,\eta_\alpha} h \big). \quad (15)$$

Учитывая преобразования (12)–(15), из (11) находим

$$\frac{1}{2p} \left(\sum_{s_\alpha=\eta_\alpha}^{\xi_\alpha} (y^{(\alpha)}_{s_\alpha})^2 h \right)_{\bar{t}} + \frac{\tau}{2p} \left(\sum_{s_\alpha=\eta_\alpha}^{\xi_\alpha} (y^{(\alpha)}_{\bar{t},s_\alpha})^2 h \right) + \frac{\varkappa_\alpha a_\alpha}{2} \sum_{s_\alpha=\eta_\alpha+1}^{\xi_\alpha} (y_{\bar{x}_\alpha,s_\alpha})^2 h \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\varkappa_\alpha a_\alpha}{2} (y^2)_{\bar{x}_\alpha,\xi_\alpha+1} - \frac{\varkappa_\alpha a_\alpha}{2} (y^2)_{\bar{x}_\alpha,\eta_\alpha} + b^+_\alpha a_\alpha \sum_{s_\alpha=\eta_\alpha}^{\xi_\alpha} y^{(\alpha)}_{x_\alpha,s_\alpha} y^{(\alpha)}_{s_\alpha} h +$$

$$+ b^-_\alpha a_\alpha \sum_{s_\alpha=\eta_\alpha}^{\xi_\alpha} y^{(\alpha)}_{\bar{x}_\alpha,s_\alpha} y^{(\alpha)}_{s_\alpha} h - \sum_{s_\alpha=\eta_\alpha}^{\xi_\alpha} d_{\alpha,s_\alpha} (y^{(\alpha)}_{s_\alpha})^2 h -$$

$$- \sum_{s_\alpha=\eta_\alpha}^{\xi_\alpha} \left(y^{(\alpha)}_{s_\alpha} \sum_{i_\alpha=0}^{N} \delta_{\alpha,i_\alpha} y^{j+\alpha/p}_{i_\alpha} \hbar \right) h + \frac{1}{2} \sum_{s_\alpha=\eta_\alpha}^{\xi_\alpha} \varphi^2_{(\alpha),s_\alpha} h + \frac{1}{2} \sum_{s_\alpha=\eta_\alpha}^{\xi_\alpha} (y^{(\alpha)}_{s_\alpha})^2 h. \quad (16)$$

Умножим теперь (16) на h и просуммируем по ξ_α от η_α до N, затем полученное неравенство умножим на h и просуммируем по η_α от 0 до N. Тогда получим

$$\frac{1}{2p} \left(\sum_{\eta_\alpha=0}^{N} h \sum_{\xi_\alpha=\eta_\alpha}^{N} h \sum_{s_\alpha=\eta_\alpha}^{\xi_\alpha} (y^{(\alpha)}_{s_\alpha})^2 h \right)_{\bar{t}} + \frac{\varkappa_\alpha a_\alpha}{2} \sum_{\eta_\alpha=0}^{N} h \sum_{\xi_\alpha=\eta_\alpha}^{N} h \sum_{s_\alpha=\eta_\alpha+1}^{\xi_\alpha} (y_{\bar{x}_\alpha,s_\alpha})^2 h \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\varkappa_\alpha a_\alpha}{2} \sum_{\eta_\alpha=0}^{N} h \sum_{\xi_\alpha=\eta_\alpha}^{N} (y^2)_{\bar{x}_\alpha,\xi_\alpha+1} h - \frac{\varkappa_\alpha a_\alpha}{2} \sum_{\eta_\alpha=0}^{N} h \sum_{\xi_\alpha=\eta_\alpha}^{N} (y^2)_{\bar{x}_\alpha,\eta_\alpha} h +$$

$$+ b^+_\alpha a_\alpha \sum_{\eta_\alpha=0}^{N} h \sum_{\xi_\alpha=\eta_\alpha}^{N} h \sum_{s_\alpha=\eta_\alpha}^{\xi_\alpha} y^{(\alpha)}_{x_\alpha,s_\alpha} y^{(\alpha)}_{s_\alpha} h + b^-_\alpha a_\alpha \sum_{\eta_\alpha=1}^{N} h \sum_{\xi_\alpha=\eta_\alpha}^{N} h \sum_{s_\alpha=\eta_\alpha}^{\xi_\alpha} y^{(\alpha)}_{\bar{x}_\alpha,s_\alpha} y^{(\alpha)}_{s_\alpha} h -$$

$$-\sum_{\eta_\alpha=0}^{N} h \sum_{\xi_\alpha=\eta_\alpha}^{N} h \sum_{s_\alpha=\eta_\alpha}^{\xi_\alpha} \left(y_{s_\alpha}^{(\alpha)} \sum_{i_\alpha=0}^{N} \delta_{\alpha,i_\alpha} y_{i_\alpha}^{j+\alpha/p} \hbar \right) h + \frac{1}{2} \sum_{\eta_\alpha=0}^{N} h \sum_{\xi_\alpha=\eta_\alpha}^{N} h \sum_{s_\alpha=\eta_\alpha}^{\xi_\alpha} \varphi_{(\alpha),s_\alpha}^2 h + \\ + M_1 \sum_{\eta_\alpha=0}^{N} h \sum_{\xi_\alpha=\eta_\alpha}^{N} h \sum_{s_\alpha=\eta_\alpha}^{\xi_\alpha} (y_{s_\alpha}^{(\alpha)})^2 h. \quad (17)$$

Преобразуем сумму $\sum\limits_{\eta_\alpha=0}^{N} h \sum\limits_{\xi_\alpha=\eta_\alpha}^{N} h \sum\limits_{s_\alpha=\eta_\alpha}^{\xi_\alpha} \varphi_{(\alpha),s_\alpha}^2 h$ следующим образом:

$$\sum_{\eta_\alpha=0}^{N} h \sum_{\xi_\alpha=\eta_\alpha}^{N} h \sum_{s_\alpha=\eta_\alpha}^{\xi_\alpha} \varphi_{(\alpha),s_\alpha}^2 h = \sum_{\eta_\alpha=0}^{N} h \sum_{s_\alpha=\eta_\alpha}^{N} \varphi_{(\alpha),s_\alpha}^2 h \sum_{\xi_\alpha=s_\alpha}^{N} h = \\ = \sum_{\eta_\alpha=0}^{N} h \sum_{s_\alpha=\eta_\alpha}^{N} (l-x_\alpha) \varphi_{(\alpha),s_\alpha}^2 h = \sum_{s_\alpha=0}^{N} (l-x_\alpha) \varphi_{(\alpha),s_\alpha}^2 h \sum_{\eta_\alpha=0}^{s_\alpha} h = \\ = \sum_{s_\alpha=0}^{N} x_\alpha (l-x_\alpha) \varphi_{(\alpha),s_\alpha}^2 h = \sum_{s_\alpha=1}^{N-1} x_\alpha (l-x_\alpha) \varphi_{(\alpha),s_\alpha}^2 h.$$

Учитывая последнее, из (17) находим

$$\frac{1}{2p} \left(\sum_{s_\alpha=1}^{N-1} x_\alpha (l-x_\alpha) (y_{s_\alpha}^{(\alpha)})^2 h \right)_{\bar t} + \frac{\varkappa_\alpha a_\alpha}{2} \sum_{s_\alpha=1}^{N-1} x_\alpha (l-x_\alpha) (y_{\bar x_\alpha,s_\alpha})^2 h \leqslant \\ \leqslant \frac{\varkappa_\alpha a_\alpha}{2} \sum_{s_\alpha=0}^{N-1} x_\alpha (y^2)_{\bar x_\alpha,s_\alpha+1} h - \frac{\varkappa_\alpha a_\alpha}{2} \sum_{s_\alpha=1}^{N} (l-x_\alpha)(y^2)_{\bar x_\alpha,s_\alpha} h + \\ + b_\alpha^+ a_\alpha \sum_{s_\alpha=1}^{N-1} x_\alpha (l-x_\alpha) y_{x_\alpha,s_\alpha}^{(\alpha)} y_{s_\alpha}^{(\alpha)} h + b_\alpha^- a_\alpha \sum_{s_\alpha=1}^{N-1} x_\alpha (l-x_\alpha) y_{\bar x_\alpha,s_\alpha}^{(\alpha)} y_{s_\alpha}^{(\alpha)} h - \\ - \sum_{s_\alpha=1}^{N-1} x_\alpha (l-x_\alpha) \left(y_{s_\alpha}^{(\alpha)} \sum_{i_\alpha=0}^{N} \delta_{\alpha,i_\alpha} y_{i_\alpha}^{j+\alpha/p} \hbar \right) h + \frac{1}{2} \sum_{s_\alpha=1}^{N-1} x_\alpha (l-x_\alpha) \varphi_{(\alpha),s_\alpha}^2 h + \\ + M_1 \sum_{s_\alpha=1}^{N-1} x_\alpha (l-x_\alpha) (y_{s_\alpha}^{(\alpha)})^2 h. \quad (18)$$

Преобразуем первое и второе слагаемые правой части (18):

$$\frac{\varkappa_\alpha a_\alpha}{2} \sum_{s_\alpha=0}^{N-1} x_\alpha (y^2)_{\bar x_\alpha,s_\alpha+1} h - \frac{\varkappa_\alpha a_\alpha}{2} \sum_{s_\alpha=1}^{N} (l-x_\alpha)(y^2)_{\bar x_\alpha,s_\alpha} h = \\ = \frac{\varkappa_\alpha a_\alpha}{2} \sum_{s_\alpha=0}^{N-1} x_\alpha (y^2)_{\bar x_\alpha,s_\alpha+1} h + \frac{\varkappa_\alpha a_\alpha}{2} \sum_{s_\alpha=1}^{N} x_\alpha (y^2)_{\bar x_\alpha,s_\alpha} h -$$

$$-\frac{\varkappa_\alpha a_\alpha l}{2}\sum_{s_\alpha=1}^{N}(y^2)_{\bar{x}_\alpha,s_\alpha}h=$$

$$=\frac{\varkappa_\alpha a_\alpha}{2}\sum_{s_\alpha=1}^{N}(2x_\alpha-h)(y^2)_{\bar{x}_\alpha,s_\alpha}h-\frac{\varkappa_\alpha a_\alpha l}{2}\sum_{s_\alpha=1}^{N}(y^2)_{\bar{x}_\alpha,s_\alpha}h=$$

$$=-\frac{\varkappa_\alpha a_\alpha}{2}\sum_{s_\alpha=0}^{N-1}(2x_\alpha+h)_{\bar{x}_\alpha,s_\alpha}(y^2_{s_\alpha})h+\frac{\varkappa_\alpha a_\alpha}{2}\sum_{s_\alpha=1}^{N}\left((2x_\alpha+h)y^2\right)_{\bar{x}_\alpha,s_\alpha}h-$$

$$-\frac{\varkappa_\alpha a_\alpha l}{2}\sum_{s_\alpha=1}^{N}(y^2)_{\bar{x}_\alpha,s_\alpha}h\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\varkappa_\alpha a_\alpha}{2}\sum_{s_\alpha=1}^{N}\left((2x_\alpha+h-l)y^2\right)_{\bar{x}_\alpha,s_\alpha}h-\varkappa_\alpha a_\alpha\sum_{s_\alpha=0}^{N}(y^2_{s_\alpha})h\leqslant$$

$$\leqslant-\varkappa_\alpha a_\alpha\sum_{s_\alpha=0}^{N}(y^2_{s_\alpha})h+\varkappa_\alpha a_\alpha l(y^2_N+y^2_0). \quad (19)$$

С учетом граничных условий (2) и (19) из (18) получим

$$\frac{1}{2p}\left(\sum_{s_\alpha=1}^{N-1}x_\alpha(l-x_\alpha)(y^{(\alpha)}_{s_\alpha})^2h\right)_{\bar{t}}+\frac{\varkappa_\alpha a_\alpha}{2}\sum_{s_\alpha=1}^{N-1}x_\alpha(l-x_\alpha)(y_{\bar{x}_\alpha,s_\alpha})^2h+$$

$$+\varkappa_\alpha a_\alpha\sum_{s_\alpha=0}^{N}(y^2_{s_\alpha})h\leqslant$$

$$\leqslant b^+_\alpha a_\alpha\sum_{s_\alpha=1}^{N-1}x_\alpha(l-x_\alpha)y^{(\alpha)}_{x_\alpha,s_\alpha}y^{(\alpha)}_{s_\alpha}h+b^-_\alpha a_\alpha\sum_{s_\alpha=1}^{N-1}x_\alpha(l-x_\alpha)y^{(\alpha)}_{\bar{x}_\alpha,s_\alpha}y^{(\alpha)}_{s_\alpha}h-$$

$$-\sum_{s_\alpha=1}^{N-1}x_\alpha(l-x_\alpha)\left(y^{(\alpha)}_{s_\alpha}\sum_{i_\alpha=0}^{N}\delta_{\alpha,i_\alpha}y^{j+\alpha/p}_{i_\alpha}\hbar\right)h+M_1\sum_{s_\alpha=1}^{N-1}x_\alpha(l-x_\alpha)(y^{(\alpha)}_{s_\alpha})^2h+$$

$$+M_2\left(\sum_{s_\alpha=1}^{N-1}\varphi^2_{(\alpha),s_\alpha}h+\mu^2_{-\alpha}+\mu^2_{+\alpha}\right). \quad (20)$$

Оценим слагаемые правой части (20) с помощью неравенства Коши с ε, тогда получим

$$b^+_\alpha a_\alpha\sum_{s_\alpha=1}^{N-1}x_\alpha(l-x_\alpha)y^{(\alpha)}_{x_\alpha,s_\alpha}y^{(\alpha)}_{s_\alpha}h+b^-_\alpha a_\alpha\sum_{s_\alpha=1}^{N-1}x_\alpha(l-x_\alpha)y^{(\alpha)}_{\bar{x}_\alpha,s_\alpha}y^{(\alpha)}_{s_\alpha}h\leqslant$$

$$\leqslant M_3\left(\varepsilon\|\rho_\alpha y_{\bar{x}_\alpha,s_\alpha}]|^2_{L_2(\alpha)}+\frac{1}{4\varepsilon}\|\rho_\alpha y^{(\alpha)}\|^2_{L_2(\alpha)}\right), \quad (21)$$

$$-\sum_{s_\alpha=1}^{N-1} x_\alpha(l-x_\alpha)\Big(y_{s_\alpha}^{(\alpha)}\sum_{i_\alpha=0}^{N}\delta_{\alpha,i_\alpha}y_{i_\alpha}^{(\alpha)}\hbar\Big)h \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{4\varepsilon_1}\sum_{s_\alpha=1}^{N-1} x_\alpha(l-x_\alpha)(y_{s_\alpha}^{(\alpha)})^2h + \varepsilon_1\sum_{s_\alpha=1}^{N-1} x_\alpha(l-x_\alpha)\Big(\sum_{i_\alpha=0}^{N}\delta_{\alpha,i_\alpha}y_{i_\alpha}^{(\alpha)}\hbar\Big)^2h \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{4\varepsilon_1}\sum_{s_\alpha=1}^{N-1} x_\alpha(l-x_\alpha)(y_{s_\alpha}^{(\alpha)})^2h + \varepsilon_1 M_3\sum_{s_\alpha=1}^{N-1}\Big(x_\alpha(l-x_\alpha)\sum_{i_\alpha=0}^{N}(y_{i_\alpha}^{(\alpha)})^2\hbar\Big)h \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{4\varepsilon_1}\sum_{s_\alpha=1}^{N-1} x_\alpha(l-x_\alpha)(y_{s_\alpha}^{(\alpha)})^2h + \varepsilon_1 M_4\sum_{s_\alpha=0}^{N} y_{s_\alpha}^2 h \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{4\varepsilon_1}\|\rho y^{(\alpha)}\|_{L_2(\alpha)}^2 + \varepsilon_1 M_4 |[y^{(\alpha)}]|_{L_2(\alpha)}^2, \quad (22)$$

где $\rho_\alpha = \sqrt{x_\alpha(l-x_\alpha)}$, $\rho_1=\rho_2=\dots=\rho_p$.

Учитывая (21), (22), из (20) находим

$$\frac{1}{2p}\big(\|\rho_\alpha y^{(\alpha)}\|_{L_2(\alpha)}^2\big)_{\bar t} + M_5\|\rho_\alpha y_{\bar x_\alpha}]|_{L_2(\alpha)}^2 + |[y^{(\alpha)}]|_{L_2(\alpha)}^2 \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon M_6\|\rho_\alpha y_{\bar x_\alpha}]|_{L_2(\alpha)}^2 + \varepsilon_1 M_4|[y^{(\alpha)}]|_{L_2(\alpha)}^2 +$$

$$+ M_7(\varepsilon)\|\rho_\alpha y^{(\alpha)}\|_{L_2(\alpha)}^2 + M_2\big(|[\varphi_{(\alpha)}]|_{L_2(\alpha)}^2 + \mu_{-\alpha}^2 + \mu_{+\alpha}^2\big),$$

где $\|\cdot\|_{L_2(\alpha)}$ означает, что норма берется по переменной x_α при фиксированных значениях остальных переменных.

Выбирая $\varepsilon = M_5/(2M_6)$, $\varepsilon_1 = 1/(2M_4)$, из последнего получим

$$\frac{1}{p}\big(\|\rho_\alpha y^{(\alpha)}\|_{L_2(\alpha)}^2\big)_{\bar t} + \|\rho_\alpha y_{\bar x_\alpha}]|_{L_2(\alpha)}^2 + |[y^{(\alpha)}]|_{L_2(\alpha)}^2 \leqslant$$

$$\leqslant M_8\|\rho_\alpha y^{(\alpha)}\|_{L_2(\alpha)}^2 + M_9\big(|[\varphi_{(\alpha)}]|_{L_2(\alpha)}^2 + \mu_{-\alpha}^2 + \mu_{+\alpha}^2\big). \quad (23)$$

Подставляя после суммирования по $i_\beta \neq i_\alpha$, $\beta = 1, 2, \dots, p$ полученные оценки в тождество (23), получим неравенство

$$\frac{1}{p}\big(\|\rho_\alpha y^{(\alpha)}\|_{L_2(\omega_h)}^2\big)_{\bar t} + \|\rho_\alpha y_{\bar x_\alpha}]|_{L_2(\omega_h)}^2 + |[y^{(\alpha)}]|_{L_2(\bar\omega_h)}^2 \leqslant M_8\|\rho_\alpha y^{(\alpha)}\|_{L_2(\omega_h)}^2 +$$

$$+ M_9\Big(|[\varphi^{j+\alpha/p}]|_{L_2(\bar\omega_h)}^2 + \sum_{i_\beta\neq i_\alpha}\big(\mu_{-\alpha}^2(t_j) + \mu_{+\alpha}^2(t_j)\big)\overline{H}/\hbar\Big). \quad (24)$$

Просуммируем (24) сначала по $\alpha = 1, 2, \dots, p$:

$$\frac{1}{p}\Big(\sum_{\alpha=1}^{p}\|\rho_\alpha y^{(\alpha)}\|_{L_2(\omega_h)}^2\Big)_{\bar t} + \sum_{\alpha=1}^{p}\big(\|\rho_\alpha y_{\bar x_\alpha}^{j+\alpha/p}]|_{L_2(\omega_h)}^2 + |[y^{j+\alpha/p}]|_{L_2(\bar\omega_h)}^2\big) \leqslant$$

$$\leqslant M_8\sum_{\alpha=1}^{p}\|\rho_\alpha y^{j+\alpha/p}\|_{L_2(\omega_h)}^2 +$$

$$+ M_9 \sum_{\alpha=1}^{p} \Big(|[\varphi^{j+\alpha/p}]|^2_{L_2(\bar\omega_h)} + \sum_{i_\beta \neq i_\alpha} \big(\mu^2_{-\alpha}(t_j) + \mu^2_{+\alpha}(t_j)\big) \overline{H}/\hbar \Big),$$

а затем, умножая обе части на τ и суммируя по j' от 0 до j, получаем

$$\|\rho_p y^{j+1}\|^2_{L_2(\omega_h)} + \sum_{j'=0}^{j} \tau \sum_{\alpha=1}^{p} \big(\|\rho_\alpha y^{j'+\alpha/p}_{\bar x_\alpha}]|^2_{L_2(\omega_h)} + |[y^{j'+\alpha/p}]|^2_{L_2(\bar\omega_h)} \big) \leqslant$$

$$\leqslant M_{10} \sum_{j'=0}^{j} \tau \sum_{\alpha=1}^{p} \|\rho_\alpha y^{j'+\alpha/p}\|^2_{L_2(\omega_h)} + M_{11} \Big(|[y^0]|^2_{L_2(\bar\omega_h)} +$$

$$+ \sum_{j'=0}^{j} \tau \sum_{\alpha=1}^{p} \Big(|[\varphi^{j'+\alpha/p}]|^2_{L_2(\bar\omega_h)} + \sum_{i_\beta \neq i_\alpha} \big(\mu^2_{-\alpha}(t_{j'}) + \mu^2_{+\alpha}(t_{j'})\big) \overline{H}/\hbar \Big) \Big). \quad (25)$$

Из (25) имеем

$$\|\rho_p y^{j+1}\|^2_{L_2(\omega_h)} \leqslant M_{10} \sum_{j'=0}^{j} \tau \sum_{\alpha=1}^{p} \|\rho_\alpha y^{j'+\alpha/p}\|^2_{L_2(\omega_h)} + M_{11} F^j, \quad (26)$$

где

$$F^j = \sum_{j'=0}^{j} \tau \sum_{\alpha=1}^{p} \Big(|[\varphi^{j'+\alpha/p}]|^2_{L_2(\bar\omega_h)} + \sum_{i_\beta \neq i_\alpha} (\mu^2_{-\alpha} + \mu^2_{+\alpha}) \overline{H}/\hbar \Big) + |[y^0]|^2_{L_2(\bar\omega_h)}.$$

Покажем, что имеет место неравенство

$$\max_{1 \leqslant \alpha \leqslant p} \|\rho_\alpha y^{j+\alpha/p}\|^2_{L_2(\omega_h)} \leqslant \nu_1 \sum_{j'=0}^{j-1} \tau \max_{1 \leqslant \alpha \leqslant p} \|\rho_\alpha y^{j'+\alpha/p}\|^2_{L_2(\omega_h)} + \nu_2 F^j,$$

где ν_1, ν_2 — известные положительные постоянные.

Перепишем неравенство (24) в следующем виде:

$$\|\rho_\alpha y^{j+\alpha/p}\|^2_{L_2(\omega_h)} \leqslant \|\rho_\alpha y^{j+(\alpha-1)/p}\|^2_{L_2(\omega_h)} + \tau M_8 \|\rho_\alpha y^{j+\alpha/p}\|^2_{L_2(\omega_h)} +$$

$$+ \tau M_9 \Big(|[\varphi^{j+\alpha/p}]|^2_{L_2(\bar\omega_h)} + \sum_{i_\beta \neq i_\alpha} (\mu^2_{-\alpha} + \mu^2_{+\alpha}) \overline{H}/\hbar \Big). \quad (27)$$

Просуммируем (27) по α' от 1 до α, тогда получим

$$\sum_{\alpha'=1}^{\alpha} \|\rho_{\alpha'} y^{j+\alpha'/p}\|^2_{L_2(\omega_h)} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\alpha'=1}^{\alpha} \|\rho_{\alpha'} y^{j+(\alpha'-1)/p}\|^2_{L_2(\omega_h)} + \tau M_8 \sum_{\alpha'=1}^{\alpha} \|\rho_{\alpha'} y^{j+\alpha'/p}\|^2_{L_2(\omega_h)} +$$

$$+\tau M_9 \sum_{\alpha'=1}^{\alpha}\Big(|[\varphi^{j+\alpha'/p}]|^2_{L_2(\bar\omega_h)} + \sum_{i_\beta\neq i_{\alpha'}} (\mu^2_{-\alpha'}+\mu^2_{+\alpha'})\overline{H}/\hbar\Big).$$

Из последнего получаем

$$\|\rho_\alpha y^{j+\alpha/p}\|^2_{L_2(\omega_h)} \leqslant \|\rho_1 y^j\|^2_{L_2(\omega_h)} + \tau M_8 \sum_{\alpha=1}^{p} \|\rho_\alpha y^{j+\alpha/p}\|^2_{L_2(\omega_h)} + \\ +\tau M_9 \sum_{\alpha=1}^{p}\Big(|[\varphi^{j+\alpha/p}]|^2_{L_2(\bar\omega_h)} + \sum_{i_\beta\neq i_{\alpha}} (\mu^2_{-\alpha}+\mu^2_{+\alpha})\overline{H}/\hbar\Big). \quad (28)$$

Не нарушая общности, можно считать, что

$$\max_{1\leqslant\alpha'\leqslant p} \|\rho_{\alpha'} y^{j+\alpha'/p}\|^2_{L_2(\omega_h)} = \|\rho_\alpha y^{j+\alpha/p}\|^2_{L_2(\omega_h)},$$

в противном случае (27) будем суммировать до такого α, при котором $\|\rho_\alpha y^{j+\alpha/p}\|^2_{L_2(\omega_h)}$ достигает максимального значения при фиксированном j. Тогда (28) перепишем в виде

$$\max_{1\leqslant\alpha\leqslant p} \|\rho_\alpha y^{j+\alpha/p}\|^2_{L_2(\omega_h)} \leqslant \|\rho_1 y^j\|^2_{L_2(\omega_h)} + p\tau M_8 \max_{1\leqslant\alpha\leqslant p} \|\rho_\alpha y^{j+\alpha/p}\|^2_{L_2(\omega_h)} + \\ +\tau M_9 \sum_{\alpha=1}^{p}\Big(|[\varphi^{j+\alpha/p}]|^2_{L_2(\bar\omega_h)} + \sum_{i_\beta\neq i_{\alpha}} (\mu^2_{-\alpha}+\mu^2_{+\alpha})\overline{H}/\hbar\Big). \quad (29)$$

Так как из (26) следует, что

$$\|\rho_1 y^j\|^2_{L_2(\omega_h)} = \|\rho_p y^j\|^2_{L_2(\omega_h)} \leqslant M_{10} \sum_{j'=0}^{j-1} \tau \max_{1\leqslant\alpha\leqslant p} \|\rho_\alpha y^{j'+\alpha/p}\|^2_{L_2(\omega_h)} + M_{11}F^j,$$

из (29) имеем

$$(1-p\tau M_8) \max_{1\leqslant\alpha\leqslant p} \|\rho_\alpha y^{j+\alpha/p}\|^2_{L_2(\omega_h)} \leqslant \\ \leqslant M_{10} \sum_{j'=0}^{j-1} \tau \max_{1\leqslant\alpha\leqslant p} \|\rho_\alpha y^{j'+\alpha/p}\|^2_{L_2(\omega_h)} + M_{12}F^j. \quad (30)$$

Выбирая $\tau \leqslant \tau_0 = 1/(2pM_8)$, из (30) находим

$$\max_{1\leqslant\alpha\leqslant p} \|\rho_\alpha y^{j+\alpha/p}\|^2_{L_2(\omega_h)} \leqslant \nu_1 \sum_{j'=0}^{j-1} \tau \max_{1\leqslant\alpha\leqslant p} \|\rho_\alpha y^{j'+\alpha/p}\|^2_{L_2(\omega_h)} + \nu_2 F^j. \quad (31)$$

Введя обозначение $g_{j+1} = \max\limits_{1\leqslant\alpha\leqslant p} \|\rho_\alpha y^{j+\alpha/p}\|^2_{L_2(\omega_h)}$, соотношение (31) можно переписать в виде

$$g_{j+1} \leqslant \nu_1 \sum_{k=0}^{j} \tau g_k + \nu_2 F^j, \quad (32)$$

где ν_1, ν_2 — известные положительные постоянные.

Применяя к (32) Лемму 4 [17, стр. 171], из (25) получаем априорную оценку:

$$\|\rho_p y^{j+1}\|^2_{L_2(\omega_h)} + \sum_{j'=0}^{j} \tau \sum_{\alpha=1}^{p} \big(\|\rho_\alpha y^{j'+\alpha/p}_{\bar{x}_\alpha}]|^2_{L_2(\omega_h)} + |[y^{j'+\alpha/p}]|^2_{L_2(\bar\omega_h)}\big) \leqslant$$

$$\leqslant M\Bigg(\sum_{j'=0}^{j} \tau \sum_{\alpha=1}^{p} |[\varphi^{j'+\alpha/p}]|^2_{L_2(\bar\omega_h)} +$$

$$+ \sum_{j'=0}^{j} \tau \sum_{\alpha=1}^{p} \sum_{i_\beta \neq i_\alpha} \big(\mu^2_{-\alpha}(0, x', t_{j'}) + \mu^2_{+\alpha}(l, x', t_{j'})\big)\overline{H}/\hbar + |[y^0]|^2_{L_2(\bar\omega_h)}\Bigg), \quad (33)$$

где $M = \text{const} > 0$ не зависит от h и τ.

Итак, справедлива следующая

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* (4), *тогда локально-одномерная схема* (7)–(9) *устойчива по правой части и начальным данным, так что для решения схемы* (7)–(9) *при* $\tau \leqslant \tau_0$ *справедлива оценка* (33).

5. Сходимость локально-одномерной схемы. По аналогии с [16, стр. 528] представим решение задачи (10) в виде суммы $z_{(\alpha)} = \upsilon_{(\alpha)} + \eta_{(\alpha)}$, $z_{(\alpha)} = z^{j+\alpha/p}$; функция $\eta_{(\alpha)}$ определяется условиями

$$\frac{\eta_{(\alpha)} - \eta_{(\alpha-1)}}{\tau} = \mathring{\psi}_\alpha, \quad x \in \omega_h + \gamma_h,\ \alpha = 1, 2, \ldots, p, \quad (34)$$

$$\eta(x, 0) = 0,$$

где

$$\mathring{\psi}_\alpha = \begin{cases} \mathring{\psi}_\alpha, & x_\alpha \in \omega_h, \\ \mathring{\psi}_{-\alpha}, & x_\alpha = 0, \\ \mathring{\psi}_{+\alpha}, & x_\alpha = l. \end{cases}$$

Из (34) следует, что $\eta^{j+1} = \eta_{(p)} = \eta^j + \tau\big(\mathring{\psi}_1 + \mathring{\psi}_2 + \cdots + \mathring{\psi}_p\big) = \eta^j = \cdots = \eta^0 = 0$, $j = 0, 1, \ldots, j_0$, так как $\eta^0 = 0$.

Тогда для η^α имеем

$$\eta^\alpha = \tau\big(\mathring{\psi}_1 + \mathring{\psi}_2 + \cdots + \mathring{\psi}_\alpha\big) = -\tau\big(\mathring{\psi}_{\alpha+1} + \cdots + \mathring{\psi}_p\big) = O(\tau).$$

Функция $\upsilon_{(\alpha)}$ определяется условиями

$$\frac{\upsilon_{(\alpha)} - \upsilon_{(\alpha-1)}}{\tau} = \tilde\Lambda_\alpha \upsilon_{(\alpha)} + \tilde\psi_\alpha, \quad x \in \omega_h,\ \alpha = 1, 2, \ldots, p, \quad (35)$$

$$\upsilon_{(\alpha)} = -\eta_\alpha, \quad x_\alpha \in \gamma_{h,\alpha},\ \upsilon(x, 0) = 0,$$

где $\tilde\psi_\alpha = \psi^*_\alpha + \tilde\Lambda_\alpha \eta_{(\alpha)}$.

Если существуют непрерывные в замкнутой области $\overline{Q}_T$ производные $\frac{\partial^4 u}{\partial x_\alpha^2 \partial x_\beta^2}$, $\alpha \neq \beta$, то $\tilde{\Lambda}_\alpha \eta_{(\alpha)} = -\tau \tilde{\Lambda}_\alpha \big(\mathring{\psi}_{\alpha+1} + \dots + \mathring{\psi}_p \big) = O(\tau)$.

Решение задачи (35) оценим с помощью теоремы 1:

$$\|\rho_p v^{j+1}\|^2_{L_2(\omega_h)} + \sum_{j'=0}^{j} \tau \sum_{\alpha=1}^{p} \big(\|\rho_\alpha v^{j'+\alpha/p}_{\bar{x}_\alpha}]|^2_{L_2(\omega_h)} + |[v^{j'+\alpha/p}]|^2_{L_2(\bar{\omega}_h)} \big) \leqslant$$
$$\leqslant M \sum_{j'=0}^{j} \tau \sum_{\alpha=1}^{p} \Bigg(|[\tilde{\psi}^{j'+\alpha/p}]|^2_{L_2(\bar{\omega}_h)} + \sum_{i_\beta \neq i_\alpha} \big(\eta^2_{-\alpha}(0, x', t_{j'}) + \eta^2_{+\alpha}(l, x', t_{j'}) \big) \overline{H}/\hbar \Bigg). \quad (36)$$

Так как $\eta^{j+1} = 0$, $\eta_{(\alpha)}$, $\eta^{j+\alpha/p}_{\bar{x}_\alpha} = O(\tau)$ и

$$|[z^{j+1}]|^2_1 = \|\rho_p z^{j+1}\|^2_{L_2(\omega_h)} + \sum_{j'=0}^{j} \tau \sum_{\alpha=1}^{p} \big(\|\rho_\alpha z^{j'+\alpha/p}_{\bar{x}_\alpha}]|^2_{L_2(\omega_h)} + |[z^{j'+\alpha/p}]|^2_{L_2(\bar{\omega}_h)} \big) =$$
$$= \|\rho_p v^{j+1} + \rho_p \eta^{j+1}\|^2_{L_2(\omega_h)} + \sum_{j'=0}^{j} \tau \sum_{\alpha=1}^{p} \big(\|\rho_\alpha v^{j'+\alpha/p}_{\bar{x}_\alpha} + \rho_\alpha \eta^{j'+\alpha/p}_{\bar{x}_\alpha}]|^2_{L_2(\omega_h)} + |[v^{j'+\alpha/p} + \eta^{j'+\alpha/p}]|^2_{L_2(\bar{\omega}_h)} \big) \leqslant$$
$$\leqslant \|\rho_p v^{j+1}\|^2_{L_2(\omega_h)} + 2 \sum_{j'=0}^{j} \tau \sum_{\alpha=1}^{p} \big(\|\rho_\alpha v^{j'+\alpha/p}_{\bar{x}_\alpha}]|^2_{L_2(\omega_h)} + \|\rho_\alpha \eta^{j'+\alpha/p}_{\bar{x}_\alpha}]|^2_{L_2(\omega_h)} + |[v^{j'+\alpha/p}]|^2_{L_2(\bar{\omega}_h)} + |[\eta^{j'+\frac{\alpha}{p}}]|^2_{L_2(\bar{\omega}_h)} \big) \leqslant$$
$$\leqslant 2 \Bigg(|[v^{j+1}]|^2_1 + \sum_{j'=0}^{j} \tau \sum_{\alpha=1}^{p} \big(\|\eta^{j'+\alpha/p}_{\bar{x}_\alpha}]|^2_{L_2(\omega_h)} + |[\eta^{j'+\alpha/p}]|^2_{L_2(\bar{\omega}_h)} \big) \Bigg).$$

Тогда из оценки (36) следует теорема

Теорема 2. *Пусть задача (1)–(3) имеет единственное непрерывное в $\overline{Q}_T$ решение $u(x,t)$ и существуют непрерывные в $\overline{Q}_T$ производные*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \ \frac{\partial^4 u}{\partial x_\alpha^2 \partial x_\beta^2}, \ \frac{\partial^3 u}{\partial x_\alpha^2 \partial t}, \ \frac{\partial^2 f}{\partial x_\alpha^2}, \quad \alpha = 1, 2, \dots, p, \ \alpha \neq \beta,$$

и выполнены условия гладкости и ограниченности (4), тогда локально-одномерная схема (7)–(9) сходится к решению дифференциальной задачи (1)–(3) со скоростью $O(h^2 + \tau)$, так что при достаточно малом τ имеет место оценка

$$|[y^{j+1} - u^{j+1}]|_1 \leqslant M(h^2 + \tau), \quad 0 < \tau \leqslant \tau_0,$$

где

$$|[z^{j+1}]|_1 = \left(\|\rho_p z^{j+1}\|^2_{L_2(\omega_h)} + \sum_{j'=0}^{j} \tau \sum_{\alpha=1}^{p} \big(\|\rho_\alpha z^{j'+\alpha/p}_{\bar{x}_\alpha}]|^2_{L_2(\omega_h)} + |[z^{j'+\alpha/p}]|^2_{L_2(\bar{\omega}_h)} \big) \right)^{1/2}.$$

6. Алгоритм численного решения задачи (1)–(3). Перепишем задачу (1)–(3) при $0 \leqslant x_\alpha \leqslant l$, $\alpha = 2$, $p = 2$; тогда получим

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_1}\Big(k_1(t)\frac{\partial u}{\partial x_1}\Big) + \frac{\partial}{\partial x_2}\Big(k_2(t)\frac{\partial u}{\partial x_2}\Big) + r_1(t)\frac{\partial u}{\partial x_1} + r_2(t)\frac{\partial u}{\partial x_2} - \\ - q_1(x_1,x_2,t)u - q_2(x_1,x_2,t)u - \int_0^l H_1(x_1,x_2,t)u dx_1 - \\ - \int_0^l H_2(x_1,x_2,t)u dx_2 + f(x_1,x_2,t), \quad (37)$$

$$\begin{cases} u(0,x_2,t) = \mu_{11}(x_2,t), & u(l,x_2,t) = \mu_{12}(x_2,t), \\ u(x_1,0,t) = \mu_{21}(x_1,t), & u(x_1,l,t) = \mu_{22}(x_1,t), \end{cases} \quad (38)$$

$$u(x_1,x_2,0) = u_0(x_1,x_2). \quad (39)$$

Для решения задачи (37)–(39) рассмотрим сетку $x_\alpha^{(i_\alpha)} = i_\alpha h$, $\alpha = 1,2$, $t_j = j\tau$, где $i_\alpha = 0,1,\ldots,N$, $h = l/N$, $j = 0,1,\ldots,j_0$, $\tau = T/j_0$. Введем дробный шаг $t_{j+1/2} = t_j + \tau/2$ и обозначим сеточную функцию

$$y^{j+s/2}_{i_1,i_2} = y^{j+s/2} = y(i_1h, i_2h, (j+s/2)\tau), \quad s = 0,1, \ j = 0,1,2,\ldots,j_0.$$

Запишем локально-одномерную схему

$$\begin{cases} \dfrac{y^{j+1/2} - y^j}{\tau} = \tilde{\Lambda}_1 y^{j+1/2} + \varphi_1, \\ \dfrac{y^{j+1} - y^{j+1/2}}{\tau} = \tilde{\Lambda}_2 y^{j+1} + \varphi_2, \end{cases} \quad (40)$$

$$\begin{cases} y^{j+1/2}_{0,i_2} = \mu_{11}(i_2h, t_{j+1/2}), & y^{j+1/2}_{N,i_2} = \mu_{12}(i_2h, t_{j+1/2}), \\ y^{j+1}_{i_1,0} = \mu_{21}(i_1h, t_{j+1}), & y^{j+1}_{i_1,N} = \mu_{22}(i_1h, t_{j+1}), \end{cases} \quad (41)$$

$$y^0_{i_1,i_2} = u_0(i_1h, i_2, h), \quad (42)$$

$$\tilde{\Lambda}_\alpha y^{j+\alpha/2} = \varkappa_\alpha a_\alpha y^{j+\alpha/2}_{\bar{x}_\alpha x_\alpha} + b^+_\alpha a_\alpha y^{j+\alpha/2}_{x_\alpha} + b^-_\alpha a_\alpha y^{j+\alpha/2}_{\bar{x}_\alpha} - \\ - d_\alpha y^{j+\alpha/2} - \sum_{i_\alpha=0}^{N} \delta_{\alpha,i_\alpha} y^{j+(\alpha-1)/2}_{i_\alpha} \hbar,$$

$\varphi_\alpha = \frac{1}{2} f(x_1,x_2,t_{j+\alpha/2})$ или $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = f(x_1,x_2,t_{j+1})$, $\alpha = 1,2$.

Приведем расчетные формулы для решения задачи (40)–(42).

На первом этапе находим решение $y_{i_1,i_2}^{j+1/2}$. Для этого при каждом значении $i_2 = \overline{1, N-1}$ решается следующая задача:

$$A_{1(i_1,i_2)} y_{i_1-1,i_2}^{j+1/2} - C_{1(i_1,i_2)} y_{i_1,i_2}^{j+1/2} + B_{1(i_1,i_2)} y_{i_1+1,i_2}^{j+1/2} = -F_{1(i_1,i_2)}^{j+1/2}, \quad 0 < i_1 < N; \quad (43)$$

$$y_{0,i_2}^{j+1/2} = \mu_{11}(i_2 h, t_{j+1/2}), \quad y_{N,i_2}^{j+1/2} = \mu_{12}(i_2 h, t_{j+1/2}),$$

где

$$A_{1(i_1,i_2)} = \frac{\varkappa_1 a_1}{h^2} - \frac{b_1^- a_1}{h}, \quad B_{1(i_1,i_2)} = \frac{\varkappa_1 a_1}{h^2} + \frac{b_1^+ a_1}{h},$$

$$C_{1(i_1,i_2)} = A_{1(i_1,i_2)} + B_{1(i_1,i_2)} + \frac{1}{\tau} + \frac{1}{p}(d_1)_{i_1,i_2},$$

$$F_{1(i_1,i_2)}^{j+1/2} = \frac{1}{\tau} y_{i_1,i_2}^j + \varphi_{1(i_1,i_2)} - \sum_{i_1=0}^{N} \delta_{1,i_1} y_{i_1}^j \hbar.$$

На втором этапе находим решение y_{i_1,i_2}^{j+1}. Для этого, как и в первом случае, при каждом значении $i_1 = \overline{1, N-1}$ решается задача

$$A_{2(i_1,i_2)} y_{i_1,i_2-1}^{j+1} - C_{2(i_1,i_2)} y_{i_1,i_2}^{j+1} + B_{2(i_1,i_2)} y_{i_1,i_2+1}^{j+1} = -F_{2(i_1,i_2)}^{j+1}, \quad 0 < i_2 < N; \quad (44)$$

$$y_{i_1,0}^{j+1} = \mu_{21}(i_1 h, t_{j+1}), \quad y_{i_1,N}^{j+1} = \mu_{22}(i_1 h, t_{j+1}),$$

$$A_{2(i_1,i_2)} = \frac{\varkappa_2 a_2}{h^2} - \frac{b_2^- a_2}{h}, \quad B_{2(i_1,i_2)} = \frac{\varkappa_2 a_2}{h^2} + \frac{b_2^+ a_2}{h},$$

$$C_{2(i_1,i_2)} = A_{2(i_1,i_2)} + B_{2(i_1,i_2)} + \frac{1}{\tau} + \frac{1}{p}(d_2)_{i_1,i_2},$$

$$F_{2(i_1,i_2)}^{j+1} = \frac{1}{\tau} y_{i_1,i_2}^{j+1/2} + \varphi_{2(i_1,i_2)} - \sum_{i_2=0}^{N} \delta_{2,i_2} y_{i_2}^{j+1/2} \hbar.$$

Каждая из задач (43), (44) решается методом прогонки [17].

7. Тестовая задача и численные результаты. Коэффициенты уравнения и граничных условий исходной дифференциальной задачи (1)–(3) подбираются таким образом, чтобы точным решением при $p = 2$ была функция $u(x,t) = t^3(x_1^4 + x_2^4)$.

Ниже в табл. 1, 2 при уменьшении размера сетки приведены максимальное значение погрешности $(z = y - u)$ и вычислительный порядок сходимости (ВПС) в нормах $\|\cdot\|_{L_2(w_{h\tau})}$ и $\|\cdot\|_{C(w_{h\tau})}$, где $\|y\|_{C(w_{h\tau})} = \max\limits_{(x_i,t_j)\in w_{h\tau}} |y|$, когда $\bar{h} = h_1 = h_2 = \sqrt{\tau}$. Погрешность уменьшается в соответствии с порядком аппроксимации $O(h^2 + (\sqrt{\tau})^2)$.

Вычислительный порядок сходимости определяется по следующей формуле:

$$\text{ВПС} = \log_{\bar{h}_1/\bar{h}_2} \frac{\|z_1\|}{\|z_2\|} = \log_2 \frac{\|z_1\|}{\|z_2\|},$$

где z_i — это погрешность, соответствующая $\bar{h}_i$, $i = 1, 2$.

Таблица 1

Изменение погрешности в норме $\|\cdot\|_{L_2(\bar{w}_{h\tau})}$ при уменьшении размера сетки на $t = 1$, когда $\bar{h} = h_1 = h_2 = \sqrt{\tau}$ [The maximum error value $(z = y - u)$ and the computational order of convergence (CO) in the norm $\|\cdot\|_{L_2(\bar{w}_{h\tau})}$ when the grid size is reduced by $t = 1$, if $\bar{h} = h_1 = h_2 = \sqrt{\tau}$]

$\bar{h}$	$\max\limits_{0<j<m} \|z^j\|_{L_2(\bar{w}_{h\tau})}$	CO in $\|\cdot\|_{L_2(\bar{w}_{h\tau})}$
1/20	0.054709570	
1/40	0.016029049	1.7711
1/80	0.004208141	1.9294
1/160	0.001067429	1.9790
1/320	0.000267991	1.9939

Таблица 2

Изменение погрешности в норме $\|\cdot\|_{C(\bar{w}_{h\tau})}$ при уменьшении размера сетки на $t = 1$, когда $\bar{h} = h_1 = h_2 = \sqrt{\tau}$ [The maximum error value $(z = y - u)$ and the computational order of convergence (CO) in the norm $\|\cdot\|_{C(\bar{w}_{h\tau})}$ when the grid size is reduced by $t = 1$, if $\bar{h} = h_1 = h_2 = \sqrt{\tau}$]

$\bar{h}$	$\|z\|_{C(\bar{w}_{h\tau})}$	CO in $\|\cdot\|_{C(\bar{w}_{h\tau})}$
1/20	0.160732965	
1/40	0.046564855	1.7874
1/80	0.011943380	1.9630
1/160	0.003001901	1.9923
1/320	0.000751465	1.9981

Заключение. В работе рассматривается краевая задача для многомерного интегро-дифференциального уравнения конвекции-диффузии с неоднородными граничными условиями первого рода. Для приближенного решения поставленной задачи предложена локально-одномерная схема А. А. Самарского с порядком аппроксимации $O(h^2 + \tau)$. Исследование единственности и устойчивости решения проводится с помощью метода энергетических неравенств. Получены априорные оценки решения локально-одномерной разностной схемы, откуда следуют единственность решения, непрерывная и равномерная зависимость решения от входных данных, а также сходимость решения схемы к решению исходной дифференциальной задачи со скоростью, равной порядку аппроксимации разностной схемы. Для двумерной задачи построен алгоритм численного решения, проведены численные расчеты тестовых примеров, иллюстрирующие полученные в работе теоретические результаты.

Конкурирующие интересы. Конкурирующих интересов не имею.

Авторская ответственность. Я несу полную ответственность за предоставление окончательной версии рукописи в печать. Окончательная версия рукописи мною одобрена.

Финансирование. Исследование выполнялось без финансирования.

Библиографический список

1. Самарский А. А., Вабищевич П. Н. *Численные методы решения задач конвекции-диффузии.* М.: Эдиториал УРСС, 2015. 246 с. EDN: QJVBYN.
2. Douglas J., Rachford H. H. On the numerical solution of heat conduction problems in two

and three space variables // *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1956. vol. 82, no. 2. pp. 421–439. DOI: https://doi.org/10.2307/1993056.

3. Peaceman D. W., Rachford H. H. The numerical solution of parabolic and elliptic differential equations // *J. Soc. Indust. Appl. Math.*, 1955. vol. 3, no. 1. pp. 28–41. DOI: https://doi.org/10.1137/0103003.
4. Яненко Н. Н. *Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики.* Наука. Сибирск. отд-ние: Новосибирск, 1967. 196 с.
5. Самарский А. А. Об одном экономичном разностном методе решения многомерного параболического уравнения в произвольной области // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 1962. Т. 2, № 5. С. 787–811.
6. Самарский А. А. Локально-одномерные разностные схемы на неравномерных сетках // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 1963. Т. 3, № 3. С. 431–466.
7. Марчук Г. И. *Методы расщепления.* М.: Наука, 1988. 264 с.
8. Дьяконов Е. Г. Разностные схемы с расщепляющимся оператором для нестационарных уравнений // *Докл. АН СССР*, 1962. Т. 144, № 1. С. 29–32.
9. Фрязинов И. В. О разностной аппроксимации граничных условий для третьей краевой задачи // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 1964. Т. 4, № 6. С. 1106–1112.
10. Фрязинов И. В. Экономичные схемы повышенного порядка точности для решения многомерного уравнения параболического типа // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 1969. Т. 9, № 6. С. 1316–1326.
11. Фрязинов И. В. Экономичные схемы для уравнения теплопроводности с краевым условием III рода // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 1972. Т. 12, № 3. С. 612–626.
12. Нахушева Ф. М., Водахова В. А., Кудаева Ф. Х., Абаева З. В. Локально-одномерная разностная схема для уравнения диффузии дробного порядка с сосредоточенной теплоемкостью // *Современные проблемы науки и образования*, 2015. № 2, 763. EDN: UHXHYD.
13. Бештокова З. В., Шхануков–Лафишев М. Х. Локально-одномерная разностная схема третьей краевой задачи для параболического уравнения общего вида с нелокальным источником // *Диффер. уравн.*, 2018. Т. 54, № 7. С. 891–901. EDN: XSAPYD. DOI: https://doi.org/10.1134/S0374064118070051.
14. Бештокова З. В. Локально-одномерная разностная схема для решения одной нелокальной краевой задачи для параболического уравнения в многомерной области // *Диффер. уравн.*, 2020. Т. 56, № 3. С. 366–379. EDN: CFONBU. DOI: https://doi.org/10.1134/S0374064120030085.
15. Бештокова З. В. Численный метод решения начально-краевой задачи для многомерного нагруженного параболического уравнения общего вида с условиями третьего рода // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2022. Т. 26, № 1. С. 7–35. EDN: BIBCLS. DOI: https://doi.org/10.14498/vsgtu1908.
16. Самарский А. А. *Теория разностных схем.* М.: Наука, 1983. 616 с.
17. Самарский А. А., Гулин А. В. *Устойчивость разностных схем.* М.: Наука, 1973. 415 с.

Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2023, vol. 27, no. 3, pp. 407–426
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu2014

MSC: 45K05, 65N12

Stability and convergence of the locally one-dimensional scheme A. A. Samarskii, approximating the multidimensional integro-differential equation of convection-diffusion with inhomogeneous boundary conditions of the first kind

Z. V. Beshtokova

Institute of Applied Mathematics and Automation,
Kabardino-Balkarian Scientific Center of RAS,
89a, Shortanov str., Nalchik, 360000, Russian Federation.

Abstract

The first initial-boundary value problem for a multidimensional (in space variables) integro-differential equation of convection-diffusion is studied. For an approximate solution of the problem a locally one-dimensional scheme by A. A. Samarskii with order of approximation $O(h^2 + \tau)$ is proposed. The study of the uniqueness and stability of the solution is carried out using the method of energy inequalities. A priori estimates for the solution of a locally one-dimensional difference scheme are obtained, which imply the uniqueness of the solution, the continuous and uniform dependence of the solution on the input data, and the convergence of the solution of the scheme to the solution of the original differential problem at a rate equal to the order of approximation of the difference scheme. For a two-dimensional problem, a numerical solution algorithm is constructed, numerical calculations of test cases are carried out, illustrating the theoretical results obtained in the study.

Keywords: convection-diffusion equation, first initial boundary value problem, nonlocal source, multidimensional problem, difference schemes, a priori estimate, stability and convergence.

Received: 26th April, 2023 / Revised: 23rd August, 2023 /
Accepted: 19th September, 2023 / First online: 28th September, 2023

Competing interests. I have no competing interests.

Author's Responsibilities. I take full responsibility for submitting the final version of the manuscript for printing. The final version of the manuscript has been approved by me.

Funding. The study was carried out without funding.

Differential Equations and Mathematical Physics
Research Article

Please cite this article in press as:
Beshtokova Z. V. Stability and convergence of the locally one-dimensional scheme A. A. Samarskii, approximating the multidimensional integro-differential equation of convection-diffusion with inhomogeneous boundary conditions of the first kind, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2023, vol. 27, no. 3, pp. 407–426. EDN: XXIUYM. DOI: 10.14498/vsgtu2014 (In Russian).

Author's Details:
Zaryana V. Beshtokova https://orcid.org/0000-0001-8020-4406
Junior Researcher; Dept. of Computational Methods; e-mail: zarabaeva@yandex.ru

References

1. Samarskii A. A., Vabishchevich P. N. *Chislennye metody resheniia zadach konvektsii-diffuzii* [Numerical Methods for Solving Convection-Diffusion Problems]. Moscow, Editorial URSS, 2015, 246 pp. (In Russian). EDN: QJVBYN.
2. Douglas J., Rachford H. H. On the numerical solution of heat conduction problems in two and three space variables, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1956, vol. 82, no. 2, pp. 421–439. DOI: https://doi.org/10.2307/1993056.
3. Peaceman D. W., Rachford H. H. The numerical solution of parabolic and elliptic differential equations, *J. Soc. Indust. Appl. Math.*, 1955, vol. 3, no. 1, pp. 28–41. DOI: https://doi.org/10.1137/0103003.
4. Yanenko N. N. *Metod drobnykh shagov resheniia mnogomernykh zadach matematicheskoi fiziki* [The Method of Fractional Steps for Solving Multidimensional Problems in Mathematical Physics]. Nauka. Sibirsk. Otdel., Novosibirsk, 1967, 196 pp. (In Russian)
5. Samarskii A. A. On an economical difference method for the solution of a multidimensional parabolic equation in an arbitrary region, *USSR Comput. Math. Math. Phys.*, 1963, vol. 2, no. 5, pp. 894–926. EDN: XKSSEZ. DOI: https://doi.org/10.1016/0041-5553(63)90504-4.
6. Samarskii A. A. Local one dimensional difference schemes on non-uniform nets, *USSR Comput. Math. Math. Phys.*, 1963, vol. 3, no. 3, pp. 572–619. DOI: https://doi.org/10.1016/0041-5553(63)90290-8.
7. Marchuk G. I. *Metody rasshchepleniia* [Decomposition Methods]. Moscow, Nauka, 1988, 264 pp. (In Russian)
8. D'yakonov E. G. Difference schemes with a splitting operator for nonstationary equations, *Dokl. Sov. Math.*, 1962, vol. 3, no. 1, pp. 645–648.
9. Fryazinov I. V. Difference approximation of the boundary conditions for the third boundary value problem, *USSR Comput. Math. Math. Phys.*, 1964, vol. 4, no. 6, pp. 180–188. DOI: https://doi.org/10.1016/0041-5553(64)90090-4.
10. Fryazinov I. V. Economic schemes for increasing the order of accuracy when solving multidimensional parabolic equations, *USSR Comput. Math. Math. Phys.*, 1969, vol. 9, no. 6, pp. 104–117. DOI: https://doi.org/10.1016/0041-5553(69)90128-1.
11. Fryazinov I. V. Economic schemes for the equation of heat conduction with a boundary condition of the third kind, *USSR Comput. Math. Math. Phys.*, 1972, vol. 12, no. 3, pp. 53–70. DOI: https://doi.org/10.1016/0041-5553(72)90034-1.
12. Nakhusheva F. M., Vodakhova V. A., Kudaeva F. Kh., Abaeva Z. V. Locally-one-dimensional difference scheme for the fractional-order diffusion equation with lumped heat capacity, *Modern Problems of Science and Education*, 2015, no. 2, 763 (In Russian). EDN: UHXHYD.
13. Beshtokova Z. V., Shkhanukov–Lafishev M. Kh. Locally one-dimensional difference scheme for the third boundary value problem for a parabolic equation of the general form with a nonlocal source, *Differ. Equat.*, 2018, vol. 54, no. 7, pp. 870–880. EDN: VBIHHF. DOI: https://doi.org/10.1134/S0012266118070042.
14. Beshtokova Z. V. Locally one-dimensional difference scheme for a nonlocal boundary value problem for a parabolic equation in a multidimensional domain, *Differ. Equat.*, 2020, vol. 56, no. 3, pp. 354–368. EDN: GHNGTY. DOI: https://doi.org/10.1134/S0012266120030088.
15. Beshtokova Z. V. Numerical method for solving an initial-boundary value problem for a multidimensional loaded parabolic equation of a general form with conditions of the third kind, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2022, vol. 26, no. 1, pp. 7–35 (In Russian). EDN: BIBCLS. DOI: https://doi.org/10.14498/vsgtu1908.
16. Samarskii A. A. *Teoriia raznostnykh skhem* [Theory of Difference Schemes]. Moscow, Nauka, 1983, 616 pp. (In Russian)
17. Samarskii A. A., Gulin A. B. *Ustoichivost' raznostnykh skhem* [Stability of Difference Schemes]. Moscow, Nauka, 1973, 415 pp. (In Russian)

Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2023. Т. 27, № 3. С. 427–445
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu2003
EDN: UKZLQF

УДК 517.984

Описание спектра одной операторной матрицы четвертого порядка

Т. Х. Расулов, Х. М. Латипов

Бухарский государственный университет,
Узбекистан, 705018, Бухара, ул. Мухаммад Икбол, 11.

Аннотация

Рассматривается операторная матрица четвертого порядка $\mathcal{A}$. Этот оператор соответствует гамильтониану системы с несохраняющимся числом и не более четырех частиц на решетке. Показано, что операторная матрица $\mathcal{A}$ унитарно эквивалентна диагональной матрице, диагональными элементами которой являются опять операторные матрицы четвертого порядка. Описано местоположение существенного спектра оператора $\mathcal{A}$, т. е. выделены двухчастичная, трехчастичная и четырехчастичная ветви существенного спектра оператора $\mathcal{A}$. Установлено, что существенный спектр операторной матрицы $\mathcal{A}$ состоит из объединения отрезков, число которых не больше 14. Построен определитель Фредгольма, такой, что его множество нулей и дискретный спектр операторной матрицы $\mathcal{A}$ совпадают, кроме того, доказано, что число простых собственных значений операторной матрицы $\mathcal{A}$, лежащих вне существенного спектра, не превосходит 16.

Ключевые слова: пространство Фока, операторная матрица, операторы рождения и уничтожения, унитарно эквивалентные операторы, существенный, дискретный и точечный спектры.

Получение: 7 марта 2023 г. / Исправление: 15 сентября 2023 г. / Принятие: 18 сентября 2023 г. / Публикация онлайн: 28 сентября 2023 г.

Дифференциальные уравнения и математическая физика
Научная статья

Образец для цитирования
Расулов Т. Х., Латипов Х. М. Описание спектра одной операторной матрицы четвертого порядка // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2023. Т. 27, № 3. С. 427–445. EDN: UKZLQF. DOI: 10.14498/vsgtu2003.

Сведения об авторах

Тулкин Хусенович Расулов https://orcid.org/0000-0002-2868-4390
доктор физико-математических наук, профессор; проректор по научной работе и инновациям; e-mail: rth@mail.ru, t.h.rasulov@buxdu.uz

Хакимбой Мирзо угли Латипов https://orcid.org/0000-0002-4806-0155
ассистент; каф. математического анализа; e-mail: h.m.latipov@buxdu.uz

Введение. Многие научно-прикладные проблемы сводятся к изучению спектральных свойств блочно-операторных матриц, элементами которых являются линейные операторы, действующие в банаховых или гильбертовых пространствах [1]. Существенные и дискретные спектры блочно-операторных матриц (в том числе и для одного специального класса — гамильтонианов систем с несохраняющимся ограниченным числом частиц на решетке) широко связаны с актуальными проблемами в физике твердого тела [2], квантовой теории поля [3], статистической физике [4], квантовой механике [5], магнитогидродинамике [6] и др. Поэтому развитие исследования блочно-операторных матриц и гамильтонианов систем с несохраняющимся ограниченным числом частиц является одним из приоритетных направлений.

Достаточно полное изучение спектральных свойств многочастичных операторов Шредингера в евклидовом пространстве проведено в книгах [7, 8]. Центральным результатом, посвященным описанию существенного спектра для системы многих частиц, является теорема Хунцикера–ван Винтера–Жислина (теорема ХВЖ), названная так в честь заслуг Хунцикера [9], ван Винтера [10] и Жислина [11]. Она гласит, что существенный спектр N-частичного непрерывного оператора Шредингера состоит из полуинтервала и наименьший элемент достигается на спектре подгамильтонианов определенного класса. В работе [12] доказана теорема ХВЖ для гамильтониана системы четырех произвольных квантовых частиц с парными потенциалами на решетке.

Доказательство аналогичных результатов в случае дискретных операторов Шредингера, а также результатов, отличающихся от них для гамильтонианов систем с несохраняющимся ограниченным числом частиц на решетке является актуальной задачей. Проблемы описания существенного спектра, определения конечности или бесконечности дискретного спектра таких гамильтонианов изучены многими авторами, см. например [13–18]. В частности, в работах [16, 17] изучены операторные матрицы четвертого порядка и описаны местоположение и структура существенного спектра, а также доказан аналог теоремы ХВЖ.

В настоящей статье рассматривается операторная матрица четвертого порядка $\mathcal{A}$, которая соответствует гамильтониану системы с несохраняющимся числом и не более четырех частиц на решетке. Она связана с моделью «спин–бозон» с не более чем тремя фотонами в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^{\mathrm{d}}$, т. е. в бозонном фоковском пространстве над $L_2(\mathbb{R}^{\mathrm{d}}, \mathbb{C}^2)$, изученной в работе [22]. Там выполнен спектральный анализ гамильтониана с помощью теории рассеяния в паре пространств со специально выбранным вложением. В частности, доказаны существование волновых операторов и их асимптотическая полнота. При этом все построения опираются на детальный анализ резольвенты.

1. Постановка задачи. Через $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{N}$ обозначим множество всех комплексных, вещественных, целых и натуральных чисел соответственно. Пусть $\mathrm{d} \in \mathbb{N}$ и $\mathbb{T}^{\mathrm{d}} := (-\pi; \pi]^{\mathrm{d}}$ — d-мерный куб с соответствующим отождествлением противоположных граней. Всюду в работе $\mathbb{T}^{\mathrm{d}}$ рассматривается как абелева группа, в которой операции сложения и умножения на вещественное число введены как операции сложения и умножения на вещественное число в $\mathbb{R}^{\mathrm{d}}$ по модулю $(2\pi\mathbb{Z})^{\mathrm{d}}$. Например, если

$$a = (\pi/2, \dots, \pi/2),\ b = (2\pi/3, \dots, 2\pi/3) \in \mathbb{T}^{\mathrm{d}},$$

то
$$a+b=(-5\pi/6,\dots,-5\pi/6),\ 6a=(\pi,\dots,\pi)\in\mathbb{T}^{\mathrm{d}}.$$

Пусть $L_2((\mathbb{T}^{\mathrm{d}})^m)$, $m=1,2,3$ — гильбертово пространство квадратично-интегрируемых (комплекснозначных) функций, определенных на $(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})^m$ и

$$\mathcal{F}(L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})):=\mathbb{C}\oplus L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})\oplus L_2((\mathbb{T}^{\mathrm{d}})^2)\oplus\cdots;$$
$$\mathcal{F}^{(m)}(L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})):=\mathbb{C}\oplus L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})\oplus L_2((\mathbb{T}^{\mathrm{d}})^2)\oplus\cdots\oplus L_2((\mathbb{T}^{\mathrm{d}})^m),\quad m=1,2,3;$$
$$\mathcal{H}^{(m)}:=\mathbb{C}^2\otimes\mathcal{F}^{(m)}(L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})),\quad m=1,2,3.$$

Гильбертово пространство $\mathcal{F}(L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}}))$ называется пространством Фока, а $\mathcal{F}^{(m)}(L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}}))$ — $(m+1)$-частичное обрезанное подпространство пространства Фока.

Норма элемента $F=\big\{f_0^{(\mathrm{s})},f_1^{(\mathrm{s})},f_2^{(\mathrm{s})},f_3^{(\mathrm{s})},\mathrm{s}=\pm\big\}\in\mathcal{H}^{(3)}$ задается формулой

$$\|F\|^2=\sum_{\mathrm{s}=\pm}\bigg(|f_0^{(\mathrm{s})}|^2+\int_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}}|f_1^{(\mathrm{s})}(k_1)|^2dk_1+\int_{(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})^2}|f_2^{(\mathrm{s})}(k_1,k_2)|^2dk_1dk_2+$$
$$+\int_{(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})^3}|f_3^{(\mathrm{s})}(k_1,k_2,k_3)|^2dk_1dk_2dk_3\bigg).$$

В гильбертовом пространстве $\mathcal{H}^{(3)}$ рассмотрим тридиагональную операторную матрицу

$$\mathcal{A}:=\begin{pmatrix}\mathcal{A}_{00}&\mathcal{A}_{01}&0&0\\ \mathcal{A}_{01}^*&\mathcal{A}_{11}&\mathcal{A}_{12}&0\\ 0&\mathcal{A}_{12}^*&\mathcal{A}_{22}&\mathcal{A}_{23}\\ 0&0&\mathcal{A}_{23}^*&\mathcal{A}_{33}\end{pmatrix}$$

с матричными элементами

$$\mathcal{A}_{00}f_0^{(\mathrm{s})}=\mathrm{s}\varepsilon f_0^{(\mathrm{s})},$$
$$\mathcal{A}_{01}f_1^{(\mathrm{s})}=\alpha\int_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}}v(t)f_1^{(-\mathrm{s})}(t)dt,$$
$$(\mathcal{A}_{11}f_1^{(\mathrm{s})})(k_1)=(\mathrm{s}\varepsilon+w(k_1))f_1^{(\mathrm{s})}(k_1),$$
$$(\mathcal{A}_{12}f_2^{(\mathrm{s})})(k_1)=\alpha\int_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}}v(t)f_2^{(-\mathrm{s})}(k_1,t)dt,$$
$$(\mathcal{A}_{22}f_2^{(\mathrm{s})})(k_1,k_2)=\big(\mathrm{s}\varepsilon+w(k_1)+w(k_2)\big)f_2^{(\mathrm{s})}(k_1,k_2),$$
$$(\mathcal{A}_{23}f_3^{(\mathrm{s})})(k_1,k_2)=\alpha\int_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}}v(t)f_3^{(-\mathrm{s})}(k_1,k_2,t)dt,$$
$$(\mathcal{A}_{33}f_3^{(\mathrm{s})})(k_1,k_2,k_3)=\big(\mathrm{s}\varepsilon+w(k_1)+w(k_2)+w(k_3)\big)f_3^{(\mathrm{s})}(k_1,k_2,k_3).$$

Здесь $\big\{f_0^{(\mathrm{s})},f_1^{(\mathrm{s})},f_2^{(\mathrm{s})},f_2^{(\mathrm{s})},\mathrm{s}=\pm\big\}\in\mathcal{H}^{(3)}$; $\mathcal{A}_{ij}^*$ — сопряженный оператор к $\mathcal{A}_{ij}$, $i<j$; функции $v(\,\cdot\,)$, $w(\,\cdot\,)$ являются вещественнозначными и непрерывными на $\mathbb{T}^{\mathrm{d}}$, причем $\min\limits_{k\in\mathbb{T}^{\mathrm{d}}}w(k)=0$; $\alpha>0$ — «параметр взаимодействия». В этих предположениях операторная матрица $\mathcal{A}$ является ограниченной и самосопряженной в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}^{(3)}$.

Поставим для операторной матрицы $\mathcal{A}$ следующие задачи:
– описать местоположение существенного спектра и доказать, что он состоит из объединения отрезков, которых не более шести;
– определить число и местонахождение собственных значений;
– оценить нижнюю грань существенного спектра.

В последующих разделах статьи мы подробно рассмотрим все эти задачи. Далее под обозначениями $\sigma(\,\cdot\,)$, $\sigma_{\mathrm{ess}}(\,\cdot\,)$, $\sigma_{\mathrm{pp}}(\,\cdot\,)$ и $\sigma_{\mathrm{disc}}(\,\cdot\,)$ понимаются спектр, существенный спектр, точечный спектр и дискретный спектр ограниченного самосопряженного оператора соответственно.

2. Спектральное соотношение для операторной матрицы $\boldsymbol{\mathcal{A}}$. В этом разделе изучение спектра операторной матрицы $\mathcal{A}$ при помощи оператора перестановки сводится к изучению спектра более простых операторных матриц $\mathcal{A}^{(\mathrm{s})}$, $\mathrm{s}=\pm$. Затем спектр операторной матрицы $\mathcal{A}$ описывается через спектр операторных матриц $\mathcal{A}^{(\mathrm{s})}$, $\mathrm{s}=\pm$.

Исследуем спектральные свойства операторной матрицы $\mathcal{A}$. С этой целью определим два ограниченных самосопряженных оператора $\mathcal{A}_m$, $m=1,2$, действующих в $\mathcal{H}^{(m)}$, в виде $(m+1)\times(m+1)$ операторных матриц:

$$\mathcal{A}_1:=\begin{pmatrix} \mathcal{A}_{00} & \mathcal{A}_{01} \\ \mathcal{A}_{01}^* & \mathcal{A}_{11} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A}_2:=\begin{pmatrix} \mathcal{A}_{00} & \mathcal{A}_{01} & 0 \\ \mathcal{A}_{01}^* & \mathcal{A}_{11} & \mathcal{A}_{12} \\ 0 & \mathcal{A}_{12}^* & \mathcal{A}_{22} \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим еще три ограниченных самосопряженных оператора $\mathcal{A}_m^{(\mathrm{s})}$, $m= =1,2,3$, $\mathrm{s}=\pm$, действующих в $\mathcal{F}^{(m)}(L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}}))$, в виде $(m+1)\times(m+1)$ операторных матриц:

$$\mathcal{A}_1^{(\mathrm{s})}:=\begin{pmatrix} \widehat{\mathcal{A}}_{00}^{(\mathrm{s})} & \widehat{\mathcal{A}}_{01} \\ \widehat{\mathcal{A}}_{01}^* & \widehat{\mathcal{A}}_{11}^{(\mathrm{s})} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A}_2^{(\mathrm{s})}:=\begin{pmatrix} \widehat{\mathcal{A}}_{00}^{(\mathrm{s})} & \widehat{\mathcal{A}}_{01} & 0 \\ \widehat{\mathcal{A}}_{01}^* & \widehat{\mathcal{A}}_{11}^{(\mathrm{s})} & \widehat{\mathcal{A}}_{12} \\ 0 & \widehat{\mathcal{A}}_{12}^* & \widehat{\mathcal{A}}_{22}^{(\mathrm{s})} \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{A}_3^{(\mathrm{s})}:=\begin{pmatrix} \widehat{\mathcal{A}}_{00}^{(\mathrm{s})} & \widehat{\mathcal{A}}_{01} & 0 & 0 \\ \widehat{\mathcal{A}}_{01}^* & \widehat{\mathcal{A}}_{11}^{(\mathrm{s})} & \widehat{\mathcal{A}}_{12} & 0 \\ 0 & \widehat{\mathcal{A}}_{12}^* & \widehat{\mathcal{A}}_{22}^{(\mathrm{s})} & \widehat{\mathcal{A}}_{23} \\ 0 & 0 & \widehat{\mathcal{A}}_{23}^* & \widehat{\mathcal{A}}_{33}^{(\mathrm{s})} \end{pmatrix}$$

с матричными элементами

$$\begin{aligned}
&\widehat{\mathcal{A}}_{00}^{(\mathrm{s})} f_0=\mathrm{s}\varepsilon f_0, \\
&\widehat{\mathcal{A}}_{01} f_1=\alpha\int_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} v(t) f_1(t)dt, \\
&(\widehat{\mathcal{A}}_{11}^{(\mathrm{s})} f_1)(k_1)=(-\mathrm{s}\varepsilon+w(k_1))f_1(k_1), \\
&(\widehat{\mathcal{A}}_{12} f_2)(k_1)=\alpha\int_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} v(t) f_2(k_1,t)dt, \\
&(\widehat{\mathcal{A}}_{22}^{(\mathrm{s})} f_2)(k_1,k_2)=\big(\mathrm{s}\varepsilon+w(k_1)+w(k_2)\big) f_2(k_1,k_2), \\
&(\widehat{\mathcal{A}}_{23} f_3)(k_1,k_2)=\alpha\int_{(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})^2} v(t) f_3(k_1,k_2,t)dt,
\end{aligned}$$

$$(\widehat{\mathcal{A}}_{33}^{(\mathrm{s})} f_3)(k_1,k_2,k_3) = \big(-\mathrm{s}\varepsilon + w(k_1) + w(k_2) + w(k_3)\big) f_3(k_1,k_2,k_3);$$

$$(f_0,f_1) \in \mathcal{F}^{(1)}(L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})), \quad (f_0,f_1,f_2) \in \mathcal{F}^{(2)}(L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})),$$
$$(f_0,f_1,f_2,f_3) \in \mathcal{F}^{(3)}(L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})).$$

Можно легко проверить, что

$$(\widehat{\mathcal{A}}_{01}^{*} f_0)(k_1) = \alpha v(k_1) f_0, \qquad (\widehat{\mathcal{A}}_{12}^{*} f_1)(k_1,k_2) = \alpha v(k_2) f_1(k_1),$$
$$(\widehat{\mathcal{A}}_{23}^{*} f_2)(k_1,k_2,k_3) = \alpha v(k_3) f_2(k_1,k_2); \quad (f_0,f_1,f_2) \in \mathcal{F}^{(2)}(L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})).$$

Внедиагональные операторы $\widehat{\mathcal{A}}_{01}$, $\widehat{\mathcal{A}}_{12}$ и $\widehat{\mathcal{A}}_{23}$ называются *операторами уничтожения*, а $\widehat{\mathcal{A}}_{01}^{*}$, $\widehat{\mathcal{A}}_{12}^{*}$ и $\widehat{\mathcal{A}}_{23}^{*}$ называются *операторами рождения* [3].

Далее для сокращения записи всюду предполагается, что $\mathcal{A}_3 := \mathcal{A}$.

Установим связь между спектрами операторных матриц $\mathcal{A}_m$ и $\mathcal{A}_m^{(\mathrm{s})}$, $\mathrm{s} = \pm$.

Лемма 1. *Пусть $m = 1,2,3$. Между спектрами операторных матриц $\mathcal{A}_m$ и $\mathcal{A}_m^{(\mathrm{s})}$, $\mathrm{s} = \pm$, справедливо равенство $\sigma(\mathcal{A}_m) = \sigma(\mathcal{A}_m^{(+)}) \cup \sigma(\mathcal{A}_m^{(-)})$. Кроме того,*

$$\sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}_m) = \sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}_m^{(+)}) \cup \sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}_m^{(-)}), \quad \sigma_{\mathrm{p}}(\mathcal{A}_m) = \sigma_{\mathrm{p}}(\mathcal{A}_m^{(+)}) \cup \sigma_{\mathrm{p}}(\mathcal{A}_m^{(-)}).$$

Доказательство. Введем три оператора перестановки:

$$\Phi_m : \mathcal{H}^{(m)} \to \mathcal{F}^{(m)}(L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})) \oplus \mathcal{F}^{(m)}(L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})), \quad m = 1,2,3;$$
$$\Phi_1 : (f_0^{(+)}, f_0^{(-)}, f_1^{(+)}, f_1^{(-)}) \to (f_0^{(+)}, f_1^{(-)}, f_0^{(-)}, f_1^{(+)}),$$
$$\Phi_2 : (f_0^{(+)}, f_0^{(-)}, f_1^{(+)}, f_1^{(-)}, f_2^{(+)}, f_2^{(-)}) \to (f_0^{(+)}, f_1^{(-)}, f_2^{(+)}, f_0^{(-)}, f_1^{(+)}, f_2^{(-)}),$$
$$\Phi_3 : (f_0^{(+)}, f_0^{(-)}, f_1^{(+)}, f_1^{(-)}, f_2^{(+)}, f_2^{(-)}, f_3^{(+)}, f_3^{(-)}) \to$$
$$(f_0^{(+)}, f_1^{(-)}, f_2^{(+)}, f_3^{(-)}, f_0^{(-)}, f_1^{(+)}, f_2^{(-)} f_3^{(+)}).$$

Очевидно, что Φ_m — унитарная операторная матрица и

$$\Phi_m^{-1} : \mathcal{F}^{(m)}(L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})) \oplus \mathcal{F}^{(m)}(L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})) \to \mathcal{H}^{(m)}, \quad m = 1,2,3;$$
$$\Phi_1^{-1} : (\phi, \phi') \to (\phi_0, \phi_0', \phi_1', \phi_1), \quad \phi = (\phi_0, \phi_1),\ \phi' = (\phi_0', \phi_1') \in \mathcal{F}^{(1)}(L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}}));$$
$$\Phi_2^{-1} : (\varphi, \varphi') \to (\varphi_0, \varphi_0', \varphi_1', \varphi_1, \varphi_2, \varphi_2'),$$
$$\varphi = (\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2),\ \varphi' = (\varphi_0', \varphi_1', \varphi_2') \in \mathcal{F}^{(2)}(L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}}));$$
$$\Phi_3^{-1} : (\psi, \psi') \to (\psi_0, \psi_0', \psi_1', \psi_1, \psi_2, \psi_2', \psi_3', \psi_3),$$
$$\psi = (\psi_0, \psi_1, \psi_2, \psi_3),\ \psi' = (\psi_0', \psi_1', \psi_2', \psi_3') \in \mathcal{F}^{(3)}(L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})).$$

Тогда из определения операторных матриц $\mathcal{A}_m$, $\mathcal{A}_m^{(\mathrm{s})}$ и Φ_m следует, что

$$\Phi_m \mathcal{A}_m \Phi_m^{-1} = \mathrm{diag}\{\mathcal{A}_m^{(+)}, \mathcal{A}_m^{(-)}\}.$$

Полученное равенство означает унитарную эквивалентность операторной матрицы $\mathcal{A}_m$ и диагональной операторной матрицы $\mathrm{diag}\{\mathcal{A}_m^{(+)}, \mathcal{A}_m^{(-)}\}$. Отсюда следует связь между спектрами операторных матриц $\mathcal{A}_m$ и $\mathcal{A}_m^{(\mathrm{s})}$, указанная в лемме. □

Замечание 1. При $m = 1, 2, 3$ часть дискретного спектра $\sigma_{\mathrm{disc}}(\mathcal{A}_m^{(\mathrm{s})})$ операторной матрицы $\mathcal{A}_m^{(\mathrm{s})}$ может лежать в существенном спектре $\sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}_m^{(-\mathrm{s})})$ операторной матрицы $\mathcal{A}_m^{(-\mathrm{s})}$, поэтому имеют место соотношения

$$\sigma_{\mathrm{disc}}(\mathcal{A}_m) \subseteq \sigma_{\mathrm{disc}}(\mathcal{A}_m^{(+)}) \cup \sigma_{\mathrm{disc}}(\mathcal{A}_m^{(-)}), \tag{1}$$

$$\sigma_{\mathrm{disc}}(\mathcal{A}_m) = \{\sigma_{\mathrm{disc}}(\mathcal{A}_m^{(+)}) \cup \sigma_{\mathrm{disc}}(\mathcal{A}_m^{(-)})\} \setminus \sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}_m). \tag{2}$$

Точнее,

$$\sigma_{\mathrm{disc}}(\mathcal{A}_m) = \bigcup_{\mathrm{s}=\pm} \{\sigma_{\mathrm{disc}}(\mathcal{A}_m^{(\mathrm{s})}) \setminus \sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}_m^{(-\mathrm{s})})\}.$$

Очевидно, что при $m = 1, 2, 3$ и $\mathrm{s} = \pm$ операторная матрица $\mathcal{A}_m^{(\mathrm{s})}$ имеет более простую структуру, чем $\mathcal{A}_m$, поэтому лемма 1 и соотношения (1), (2) дают возможность получить более точную информацию относительно спектра $\mathcal{A}_m$.

3. Описание существенного и дискретного спектров операторной матрицы $\boldsymbol{\mathcal{A}_1}$. Рассмотрим операторную матрицу $\mathcal{A}_{1,0}^{(\mathrm{s})}$, $\mathrm{s} = \pm$, которая действует в $\mathcal{F}^{(1)}(L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}}))$ как

$$\mathcal{A}_{1,0}^{(\mathrm{s})} := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \widehat{\mathcal{A}}_{11}^{(\mathrm{s})} \end{pmatrix}.$$

Тогда оператор возмущения $\mathcal{A}_1^{(\mathrm{s})} - \mathcal{A}_{1,0}^{(\mathrm{s})}$ операторной матрицы $\mathcal{A}_{1,0}^{(\mathrm{s})}$ является самосопряженной операторной матрицей ранга 2. Следовательно, из известной теоремы Г. Вейля о сохранении существенного спектра при возмущениях конечного ранга вытекает, что существенный спектр операторной матрицы $\mathcal{A}_1^{(\mathrm{s})}$ совпадает с существенным спектром операторной матрицы $\mathcal{A}_{1,0}^{(\mathrm{s})}$. Известно, что

$$\sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}_{1,0}^{(\mathrm{s})}) = [-\mathrm{s}\varepsilon, -\mathrm{s}\varepsilon + M], \quad M := \max_{k \in \mathbb{T}^{\mathrm{d}}} w(k).$$

Из последних фактов следует, что

$$\sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}_1^{(\mathrm{s})}) = [-\mathrm{s}\varepsilon, -\mathrm{s}\varepsilon + M].$$

Тогда, используя лемму 1, получаем, что справедливо равенство

$$\sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}_1) = [-\varepsilon, -\varepsilon + M] \cup [\varepsilon, \varepsilon + M].$$

Подчеркнем, что в непрерывном случае [20–23] существенный спектр соответствующий модели состоит из полуоси $[-\varepsilon, \infty)$. В рассматриваемом случае видно, что существенный спектр операторной матрицы $\mathcal{A}_1$ есть объединение двух отрезков конечной длины, которые не пересекаются, если $\varepsilon > M/2$. Иначе говоря, если $\varepsilon > M/2$, то в существенном спектре операторной матрицы $\mathcal{A}_1$ имеется лакуна $(-\varepsilon + M, \varepsilon)$.

Определим функцию

$$\Omega_1^{(\mathrm{s})}(z) := \mathrm{s}\varepsilon - z - \alpha^2 \int_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} \frac{v^2(t)dt}{-\mathrm{s}\varepsilon + w(t) - z},$$

регулярную в $\mathbb{C} \setminus [-\mathrm{s}\varepsilon, -\mathrm{s}\varepsilon + M]$.

Функция $\Omega_1^{(\mathrm{s})}(\,\cdot\,)$ называется детерминантом Фредгольма, ассоциированным с операторной матрицей $\mathcal{A}_1^{(\mathrm{s})}$.

Связь между собственными значениями операторной матрицы $\mathcal{A}_1^{(\mathrm{s})}$ и нулями функции $\Omega_1^{(\mathrm{s})}(\,\cdot\,)$ устанавливается следующей леммой.

Лемма 2 [19]. *Число $z^{(\mathrm{s})} \in \mathbb{C} \setminus \sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}_1^{(\mathrm{s})})$ есть собственное значение операторной матрицы $\mathcal{A}_1^{(\mathrm{s})}$ тогда и только тогда, когда $\Omega_1^{(\mathrm{s})}(z^{(\mathrm{s})}) = 0$.*

Из леммы 2 вытекает, что

$$\sigma_{\mathrm{disc}}(\mathcal{A}_1^{(\mathrm{s})}) = \big\{ z \in \mathbb{C} \setminus \sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}_1^{(\mathrm{s})}) : \Omega_1^{(\mathrm{s})}(z) = 0 \big\}.$$

Тогда с учетом замечания 1 получаем, что

$$\sigma_{\mathrm{disc}}(\mathcal{A}_1) = \big\{ z \in \mathbb{C} \setminus \sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}_1) : \Omega_1^{(+)}(z)\Omega_1^{(-)}(z) = 0 \big\}.$$

Из определения функции $\Omega_1^{(\mathrm{s})}(\,\cdot\,)$ и последнего равенства получим следующее утверждение.

Лемма 3 [19]. *При всех $\alpha > 0$ операторная матрица $\mathcal{A}_1$ имеет не менее одного и не более четырех собственных значений.*

Замечание 2. Собственное значение E_0 операторной матрицы $\mathcal{A}_1$, которое существует при всех $\alpha > 0$, обычно называется основным состоянием. Компоненты соответствующей собственной вектор-функции выглядят так:

$$f_0^{(+)} = 0, \quad f_0^{(-)} = \mathrm{const} \neq 0, \quad f_1^{(+)}(k_1) = -\frac{\alpha v(k_1) f_0^{(-)}}{\varepsilon + w(k_1) - E_0}, \quad f_1^{(-)}(k_1) = 0.$$

Из приведенных в этом разделе рассуждений можно заметить, что существование изолированных собственных значений операторной матрицы $\mathcal{A}_1$ тесно связано с операторными матрицами $\mathcal{A}_1^{(\mathrm{s})}$, $\mathrm{s} = \pm$. Причем $\sigma_{\mathrm{disc}}(\mathcal{A}_1) \neq \emptyset$.

4. Описание спектра операторной матрицы $\mathcal{A}_2$. В этом разделе для операторной матрицы $\mathcal{A}_2$ установлено местоположение существенного спектра и приведена оценка его нижней грани, а также изучено местоположение дискретного спектра.

Хорошо известно, что для $\lambda \in \mathbb{R}$ и $A \subset \mathbb{R}$ справедливо соотношение

$$\lambda + A = \{\lambda + a : a \in A\}.$$

Обозначим

$$\sigma_1^{(\mathrm{s})} := \bigcup_{k_1 \in \mathbb{T}^{\mathrm{d}}} \{w(k_1) + \sigma_{\mathrm{disc}}(\mathcal{A}_1^{(-\mathrm{s})})\}, \quad \Sigma_1^{(\mathrm{s})} := \sigma_1^{(\mathrm{s})} \cup [\mathrm{s}\varepsilon, \mathrm{s}\varepsilon + 2M].$$

Отметив, что

$$\bigcup_{k_1\in\mathbb{T}^{\mathrm{d}}}\{w(k_1)+\sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}_1^{(-\mathrm{s})})\}=[\mathrm{s}\varepsilon,\mathrm{s}\varepsilon+2M],$$

приходим к равенству

$$\bigcup_{k_1\in\mathbb{T}^{\mathrm{d}}}\{w(k_1)+\sigma(\mathcal{A}_1^{(-\mathrm{s})})\}=\Sigma_1^{(\mathrm{s})}.$$

Местоположение существенного спектра оператора $\mathcal{A}_2$ описывается следующей теоремой.

Теорема 1. *Существенный спектр оператора $\mathcal{A}_2$ совпадает с множеством $\Sigma_1^{(+)}\cup\Sigma_1^{(-)}$, т.е. $\sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}_2)=\Sigma_1^{(+)}\cup\Sigma_1^{(-)}$. Более того, множество $\sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}_2)$ представляет собой объединение не более чем шести отрезков.*

Доказательство. В силу леммы 1 имеем

$$\sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}_2)=\sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}_2^{(+)})\cup\sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}_2^{(-)}).$$

Покажем, что $\sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}_2^{(\mathrm{s})})=\Sigma_1^{(\mathrm{s})}$. По определению $\Sigma_1^{(\mathrm{s})}=\sigma_1^{(\mathrm{s})}\cup[\mathrm{s}\varepsilon,\mathrm{s}\varepsilon+2M]$.

Запишем операторную матрицу $\mathcal{A}_2^{(\mathrm{s})}$ в виде суммы двух операторных матриц $\mathcal{A}_2^{(\mathrm{s})}=\mathcal{A}_{2,0}^{(\mathrm{s})}+\mathcal{A}_{2,1}^{(\mathrm{s})}$, где

$$\mathcal{A}_{2,0}^{(\mathrm{s})}:=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&\widehat{\mathcal{A}}_{11}^{(\mathrm{s})}&\widehat{\mathcal{A}}_{12}\\0&\widehat{\mathcal{A}}_{12}^{*}&\widehat{\mathcal{A}}_{22}^{(\mathrm{s})}\end{pmatrix},\qquad \mathcal{A}_{2,1}^{(\mathrm{s})}:=\begin{pmatrix}\widehat{\mathcal{A}}_{00}^{(\mathrm{s})}&\widehat{\mathcal{A}}_{01}&0\\\widehat{\mathcal{A}}_{01}^{*}&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

Видно, что операторная матрица $\mathcal{A}_{2,1}^{(\mathrm{s})}$ есть двумерная самосопряженная операторная матрица. Поэтому $\sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}_2^{(\mathrm{s})})=\sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}_{2,0}^{(\mathrm{s})})$. Точнее, $\sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}_2^{(\mathrm{s})})=$ $=\sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}_{2,3}^{(\mathrm{s})})$, где

$$\mathcal{A}_{2,3}^{(\mathrm{s})}:=\begin{pmatrix}\widehat{\mathcal{A}}_{11}^{(\mathrm{s})}&\widehat{\mathcal{A}}_{12}\\\widehat{\mathcal{A}}_{12}^{*}&\widehat{\mathcal{A}}_{22}^{(\mathrm{s})}\end{pmatrix}.$$

Можно показать, что оператор $\mathcal{A}_{2,3}^{(\mathrm{s})}$ коммутирует с любой операторной матрицей U_φ, действующей в $\mathcal{H}_1\oplus\mathcal{H}_2$, по правилу

$$U_\varphi\begin{pmatrix}f_1(k_2)\\f_2(k_1,k_2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\varphi(k_1)f_1(k_2)\\\varphi(k_1)f_2(k_1,k_2)\end{pmatrix},\quad \varphi(\,\cdot\,)\in C(\mathbb{T}^{\mathrm{d}}),\quad f_i\in\mathcal{H}_i,\quad i=1,2,$$

где $C(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})$ — банахово пространство непрерывных функций, определенных на $\mathbb{T}^{\mathrm{d}}$.

Следовательно, из разложения в прямой интеграл пространства $\mathcal{H}_1\oplus\mathcal{H}_2$:

$$\mathcal{H}_1\oplus\mathcal{H}_2=\int_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}}\oplus(\mathcal{H}_0\oplus\mathcal{H}_1)dk_1$$

следует, что оператор $\mathcal{A}_{2,3}^{(\mathrm{s})}$ разлагается в прямой интеграл

$$\mathcal{A}_{2,3}^{(\mathrm{s})} = \int_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} \oplus (w(k_1)I + \mathcal{A}_1^{(-\mathrm{s})}) dk_1. \tag{3}$$

Из разложения (3) оператора $\mathcal{A}_{2,3}^{(\mathrm{s})}$ в силу теоремы о спектре разложимых операторов [25, теорема XIII.86] вытекает, что

$$\sigma(\mathcal{A}_{2,3}^{(\mathrm{s})}) = \bigcup_{k_1 \in \mathbb{T}^{\mathrm{d}}} \{w(k_1) + \sigma(\mathcal{A}_1^{(-\mathrm{s})})\}.$$

Тогда, учитывая равенства

$$\sigma(\mathcal{A}_1^{(-\mathrm{s})}) = \sigma_{\mathrm{disc}}(\mathcal{A}_1^{(-\mathrm{s})}) \cup [-\mathrm{s}\varepsilon, -\mathrm{s}\varepsilon + M]$$

и

$$\bigcup_{k_1 \in \mathbb{T}^{\mathrm{d}}} [-\mathrm{s}\varepsilon + w(k_1), -\mathrm{s}\varepsilon + w(k_1) + M] = [-\mathrm{s}\varepsilon, -\mathrm{s}\varepsilon + 2M],$$

мы приходим к равенству $\sigma(\mathcal{A}_{2,3}^{(\mathrm{s})}) = \Sigma_1^{(\mathrm{s})}$, т. е. $\sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}_2^{(\mathrm{s})}) = \Sigma_1^{(\mathrm{s})}$.

Теперь осталось доказать, что множество $\sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}_2^{(\mathrm{s})})$ представляет собой объединение не более чем трех отрезков. Так как операторная матрица $\mathcal{A}_1^{(\mathrm{s})}$ имеет не более двух простых собственных значений, лежащих вне отрезка $[\mathrm{s}\varepsilon, \mathrm{s}\varepsilon + 2M]$, и функция $w(\,\cdot\,)$ непрерывна на $\mathbb{T}^{\mathrm{d}}$, то множество $\sigma_1^{(\mathrm{s})}$ состоит из объединения не более чем двух отрезков. Следовательно, множество $\sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}_2^{(\mathrm{s})})$ представляет собой объединение не более чем трех отрезков. Доказательство теоремы 1 завершается применением леммы 1. □

Введем подмножества

$$\sigma_{\mathrm{two}}(\mathcal{A}_2) := \sigma_1^{(+)} \cup \sigma_1^{(-)} \quad \text{и} \quad \sigma_{\mathrm{three}}(\mathcal{A}_2) := [-\varepsilon, -\varepsilon + 2M] \cup [\varepsilon, \varepsilon + 2M]$$

существенного спектра $\sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}_2)$ оператора $\mathcal{A}_2$.

Определение 1. Множества $\sigma_{\mathrm{two}}(\mathcal{A}_2)$ и $\sigma_{\mathrm{three}}(\mathcal{A}_2)$ называются соответственно *двухчастичной* и *трехчастичной ветвями существенного спектра оператора* $\mathcal{A}_2$.

В силу определения множества $\sigma_{\mathrm{three}}(\mathcal{A}_2)$ имеет место равенство

$$\min(\sigma_{\mathrm{three}}(\mathcal{A}_2)) = -\varepsilon.$$

Определим регулярную в $\mathbb{C} \setminus \Sigma^{(\mathrm{s})}$ функцию

$$\Omega_2^{(\mathrm{s})}(z) := \mathrm{s}\varepsilon - z - \alpha^2 \int_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} \frac{v^2(t)dt}{\Omega_1^{(-\mathrm{s})}(z - w(t))}.$$

Положим $\Omega_2(z) := \Omega_2^{(+)}(z)\Omega_2^{(-)}(z)$.

Связь между собственными значениями оператора $\mathcal{A}_2$ и нулями функции $\Omega_2(\,\cdot\,)$ устанавливается следующей теоремой, в которой также определяется число собственных значений оператора $\mathcal{A}_2$.

Теорема 2. *Справедливы следующие утверждения*:

(а) *если число* $z \in \mathbb{C} \setminus \sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}_2)$ *является собственным значением оператора* $\mathcal{A}_2$, *то* $\Omega_2(z) = 0$, *и наоборот*;

(б) *число простых собственных значений оператора* $\mathcal{A}_2$ *не больше восьми.*

Доказательство. (а) Предположим, что точка $z \in \mathbb{C} \setminus \Sigma_1^{(\mathrm{s})}$ является собственным значением оператора $\mathcal{A}_2^{(\mathrm{s})}$ с соответствующей собственной вектор-функцией $f = (f_0, f_1, f_2) \in \mathcal{F}^{(2)}(L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}}))$. В этом случае элементы f_0, f_1 и f_2 являются решением системы уравнений

$$\begin{gathered}
(\mathrm{s}\varepsilon - z) f_0 + \alpha \int_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} v(t) f_1(t) dt = 0; \\
\alpha v(k_1) f_0 + (-\mathrm{s}\varepsilon + w(k_1) - z) f_1(k_1) + \alpha \int_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} v(t) f_2(k_1, t) dt = 0; \\
\alpha v(k_2) f_1(k_1) + (\mathrm{s}\varepsilon + w(k_1) + w(k_2) - z) f_2(k_1, k_2) = 0.
\end{gathered} \tag{4}$$

Так как $z \notin [\mathrm{s}\varepsilon, \mathrm{s}\varepsilon + 2M]$, из третьего уравнения системы (4) для f_2 имеем

$$f_2(k_1, k_2) = -\frac{\alpha v(k_2) f_1(k_1)}{\mathrm{s}\varepsilon + w(k_1) + w(k_2) - z}. \tag{5}$$

Подставляя выражение (5) для f_2 во второе уравнение (4), получим систему уравнений

$$\begin{aligned}
&0 = (z - \mathrm{s}\varepsilon) f_0 - \alpha \int_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} v(t) f_1(t) dt, \\
&\Omega_1^{(-\mathrm{s})}(z - w(k_1)) f_1(k_1) = -\alpha v(k_1) f_0,
\end{aligned} \tag{6}$$

которая имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда система уравнений (4) имеет нетривиальное решение.

В силу определения множества $\sigma_1^{(\mathrm{s})}$ для любых $z \notin \sigma_1^{(\mathrm{s})}$ и $k_1 \in \mathbb{T}^{\mathrm{d}}$ имеет место неравенство $\Omega_1^{(-\mathrm{s})}(z - w(k_1)) \neq 0$. Значит, система уравнений (6) имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда система уравнений

$$\begin{aligned}
&f_0 = (1 + z - \mathrm{s}\varepsilon) f_0 - \alpha \int_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} v(t) f_1(t) dt, \\
&f_1(k_1) = -\frac{\alpha v(k_1) f_0}{\Omega_1^{(-\mathrm{s})}(z - w(k_1))}
\end{aligned}$$

имеет решение, не равное тождественно нулю, или когда $\Omega_2^{(\mathrm{s})}(z) = 0$. Теперь замечание 1 завершает доказательство утверждения (а) теоремы 2.

(б) Так как операторная матрица $\mathcal{A}_2^{(\mathrm{s})}$ является самосопряженной, ее дискретный спектр вещественен. Поэтому исследуем вещественные нули функции $\Omega_2^{(\mathrm{s})}(\,\cdot\,)$. Из определения функции $\Omega_2^{(\mathrm{s})}(\,\cdot\,)$ вытекает, что она регулярна на $\mathbb{C} \setminus \sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}_2^{(\mathrm{s})})$. Простые преобразования показывают, что для любого $z \in \mathbb{R} \setminus \sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}_2^{(\mathrm{s})})$ имеет место равенство

$$\frac{d}{dz} \Omega_2^{(\mathrm{s})}(z) = -1 - \int_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} \frac{v^2(s)}{(\Omega_1^{(-\mathrm{s})}(z - w(s)))^2} \left(1 + \int_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} \frac{v^2(t) dt}{(\mathrm{s}\varepsilon + w(s) + w(t) - z)^2}\right) ds.$$

Очевидно, что $\dfrac{d}{dz}\Omega_2^{(\mathrm{s})}(z) < 0$ при всех $z \in \mathbb{R} \setminus \sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}_2^{(\mathrm{s})})$. Это и означает, что функция $\Omega_2^{(\mathrm{s})}(\cdot)$ монотонно убывает на $\mathbb{R}\setminus\sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}_2^{(\mathrm{s})})$. В силу теоремы 1 множество $\sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}_2^{(\mathrm{s})})$ состоит из объединения не более чем трех отрезков, поэтому из монотонности функции $\Omega_2^{(\mathrm{s})}(\cdot)$ вытекает, что эта функция может иметь четыре простых нуля в $\mathbb{R}\setminus\sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}_2^{(\mathrm{s})})$. Теперь утверждение (а) теоремы 2 завершает доказательство утверждения (б) этой теоремы. □

Из теоремы 2 следует, что

$$\sigma_{\mathrm{disc}}(\mathcal{A}_2^{(\mathrm{s})}) = \left\{z \in \mathbb{C} \setminus \Sigma_1^{(\mathrm{s})} : \Omega_2^{(\mathrm{s})}(z) = 0\right\}.$$

Отсюда с учетом замечания 1 получаем, что

$$\sigma_{\mathrm{disc}}(\mathcal{A}_2) = \left\{z \in \mathbb{C} \setminus \Sigma_1^{(\mathrm{s})} : \Omega_2(z) = 0\right\}.$$

5. Местоположение существенного и дискретного спектров оператора $\boldsymbol{\mathcal{A}_3}$. Обозначим

$$\sigma_2^{(\mathrm{s})} := \bigcup_{k_1\in\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} \{w(k_1)+\sigma_{\mathrm{disc}}(\mathcal{A}_2^{(-\mathrm{s})})\} \cup \bigcup_{k_1\in\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} \{w(k_1)+\sigma_1^{(\mathrm{s})}\}, \quad \Sigma_2^{(\mathrm{s})} := \sigma_2^{(\mathrm{s})} \cup [\mathrm{s}\varepsilon, \mathrm{s}\varepsilon+3M].$$

Здесь следует отметить, что

$$\bigcup_{k_1\in\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} \{w(k_1) + [\mathrm{s}\varepsilon, \mathrm{s}\varepsilon + 2M]\} = [\mathrm{s}\varepsilon, \mathrm{s}\varepsilon + 3M].$$

Поэтому имеет место равенство

$$\bigcup_{k_1\in\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} \{w(k_1) + \sigma(\mathcal{A}_2^{(-\mathrm{s})})\} = \Sigma_2^{(\mathrm{s})}.$$

Местоположение существенного спектра оператора $\mathcal{A}_3$ описывается следующей теоремой.

Теорема 3. *Существенный спектр оператора $\mathcal{A}_3$ совпадает с множеством $\Sigma_2^{(+)} \cup \Sigma_2^{(-)}$, т.е. $\sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}_2) = \Sigma_2^{(+)} \cup \Sigma_2^{(-)}$. Более того, множество $\sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}_3)$ представляет собой объединение не более чем четырнадцати отрезков.*

Доказательство. В силу леммы 1 имеем

$$\sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}_3) = \sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}_3^{(+)}) \cup \sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}_3^{(-)}).$$

Покажем, что $\sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}_3^{(\mathrm{s})}) = \Sigma_2^{(\mathrm{s})}$. По определению $\Sigma_2^{(\mathrm{s})} = \sigma_2^{(\mathrm{s})} \cup [\mathrm{s}\varepsilon, \mathrm{s}\varepsilon + 3M]$.

Запишем операторную матрицу $\mathcal{A}_3^{(\mathrm{s})}$ в виде суммы двух операторных матриц: $\mathcal{A}_3^{(\mathrm{s})} = \mathcal{A}_{3,0}^{(\mathrm{s})} + \mathcal{A}_{3,1}^{(\mathrm{s})}$, где

$$\mathcal{A}_{3,0}^{(\mathrm{s})} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \widehat{\mathcal{A}}_{11}^{(\mathrm{s})} & \widehat{\mathcal{A}}_{12} & 0 \\ 0 & \widehat{\mathcal{A}}_{12}^{*} & \widehat{\mathcal{A}}_{22}^{(\mathrm{s})} & \widehat{\mathcal{A}}_{23} \\ 0 & 0 & \widehat{\mathcal{A}}_{23}^{*} & \widehat{\mathcal{A}}_{33}^{(\mathrm{s})} \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{A}_{3,1}^{(\mathrm{s})} := \begin{pmatrix} \widehat{\mathcal{A}}_{00}^{(\mathrm{s})} & \widehat{\mathcal{A}}_{01} & 0 & 0 \\ \widehat{\mathcal{A}}_{01}^{*} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Видно, что $\mathcal{A}_{3,1}^{(\mathrm{s})}$ есть двумерная самосопряженная операторная матрица. Поэтому $\sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}_3^{(\mathrm{s})}) = \sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}_{3,0}^{(\mathrm{s})})$. Точнее, из одномерности пространства $\mathbb{C}$ и построения операторной матрицы $\mathcal{A}_{3,0}^{(\mathrm{s})}$ следует, что $\sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}_3^{(\mathrm{s})}) = \sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}_{3,3}^{(\mathrm{s})})$, где

$$\mathcal{A}_{3,3}^{(\mathrm{s})} := \begin{pmatrix} \widehat{\mathcal{A}}_{11}^{(\mathrm{s})} & \widehat{\mathcal{A}}_{12} & 0 \\ \widehat{\mathcal{A}}_{12}^{*} & \widehat{\mathcal{A}}_{22}^{(\mathrm{s})} & \widehat{\mathcal{A}}_{23} \\ 0 & \widehat{\mathcal{A}}_{23}^{*} & \widehat{\mathcal{A}}_{33}^{(\mathrm{s})} \end{pmatrix}.$$

Можно показать, что оператор $\mathcal{A}_{3,3}^{(\mathrm{s})}$ коммутирует с любой операторной матрицей V_φ, действующей в $\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 \oplus \mathcal{H}_2$ по правилу

$$V_\varphi \begin{pmatrix} f_1(k_2) \\ f_2(k_1,k_2) \\ f_3(k_1,k_2,k_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi(k_1) f_1(k_2) \\ \varphi(k_1) f_2(k_1,k_2) \\ \varphi(k_1) f_3(k_1,k_2,k_3) \end{pmatrix}, \quad \varphi(\cdot) \in C(\mathbb{T}^{\mathrm{d}}), \quad f_i \in \mathcal{H}_i, \quad i = 1,2,3,$$

где $C(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})$ — банахово пространство непрерывных функций, определенных на $\mathbb{T}^{\mathrm{d}}$.

Следовательно, из разложения в прямой интеграл пространства $\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 \oplus \mathcal{H}_3$:

$$\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 \oplus \mathcal{H}_3 = \int_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} \oplus (\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2) dk_1$$

следует, что оператор $\mathcal{A}_{3,3}^{(\mathrm{s})}$ разлагается в прямой интеграл:

$$\mathcal{A}_{3,3}^{(\mathrm{s})} = \int_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} \oplus (w(k_1) I + \mathcal{A}_2^{(-\mathrm{s})}) dk_1. \tag{7}$$

Из разложения (7) оператора $\mathcal{A}_{3,3}^{(\mathrm{s})}$ в силу теоремы о спектре разложимых операторов [25, теорема XIII.86] вытекает, что

$$\sigma(\mathcal{A}_{3,3}^{(\mathrm{s})}) = \bigcup_{k_1 \in \mathbb{T}^{\mathrm{d}}} \{ w(k_1) + \sigma(\mathcal{A}_2^{(-\mathrm{s})}) \}.$$

Тогда, учитывая равенства

$$\sigma(\mathcal{A}_2^{(\mathrm{s})}) = \sigma_{\mathrm{disc}}(\mathcal{A}_2^{(\mathrm{s})}) \cup \sigma_1^{(\mathrm{s})} \cup [\mathrm{s}\varepsilon, \mathrm{s}\varepsilon + 2M]$$

и

$$\bigcup_{k_1 \in \mathbb{T}^{\mathrm{d}}} [\mathrm{s}\varepsilon + w(k_1), \mathrm{s}\varepsilon + w(k_1) + 2M] = [\mathrm{s}\varepsilon, \mathrm{s}\varepsilon + 3M],$$

мы приходим к равенству $\sigma(\mathcal{A}_{3,3}^{(\mathrm{s})}) = \Sigma_2^{(\mathrm{s})}$, т. е. $\sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}_3^{(\mathrm{s})}) = \Sigma_2^{(\mathrm{s})}$.

Осталось доказать, что множество $\sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}_3^{(\mathrm{s})})$ представляет собой объединение не более чем семи отрезков. Так как операторная матрица $\mathcal{A}_2^{(\mathrm{s})}$ имеет не более четырех простых собственных значений, лежащих вне своего существенного спектра, и функция $w(\,\cdot\,)$ является непрерывной на $\mathbb{T}^{\mathrm{d}}$, множество

$\sigma_2^{(\mathrm{s})}$ состоит из объединения не более чем шести отрезков. Следовательно, множество $\sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}_3^{(\mathrm{s})})$ представляет собой объединение отрезков, число которых не больше семи. Теперь лемма 1 завершает доказательство теоремы 3. $\square$

Введем подмножества

$$\sigma_{\mathrm{two}}(\mathcal{A}_3) := \bigcup_{k_1\in\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} \{w(k_1)+\sigma_{\mathrm{disc}}(\mathcal{A}_2^{(-\mathrm{s})})\} \cup \bigcup_{k_1\in\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} \{w(k_1)+\sigma_{\mathrm{disc}}(\mathcal{A}_2^{(\mathrm{s})})\};$$
$$\sigma_{\mathrm{three}}(\mathcal{A}_3) := \bigcup_{k_1\in\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} \{w(k_1)+\sigma_1^{(-\mathrm{s})}\} \cup \bigcup_{k_1\in\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} \{w(k_1)+\sigma_1^{(\mathrm{s})}\};$$
$$\sigma_{\mathrm{four}}(\mathcal{A}_3) := [-\varepsilon, -\varepsilon+3M] \cup [\varepsilon, \varepsilon+3M]$$

существенного спектра операторной матрицы $\mathcal{A}_3$.

Определение 2. Множества $\sigma_{\mathrm{two}}(\mathcal{A}_3)$, $\sigma_{\mathrm{three}}(\mathcal{A}_3)$ и $\sigma_{\mathrm{four}}(\mathcal{A}_3)$ называются *двухчастичной*, *трехчастичной* и *четырехчастичной ветвями существенного спектра оператора* $\mathcal{A}_3$ соответственно.

Из определения множества $\sigma_{\mathrm{four}}(\mathcal{A}_3)$ видно, что $\min(\sigma_{\mathrm{four}}(\mathcal{A}_3)) = -\varepsilon$.

Определим регулярную на $\mathbb{C}\setminus\Sigma_2^{(\mathrm{s})}$ функцию

$$\Omega^{(\mathrm{s})}(z) := \mathrm{s}\varepsilon - z - \alpha^2\int_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} \frac{v^2(t)dt}{\Omega_2^{(-\mathrm{s})}(z-w(t))}.$$

Положим $\Omega(z) := \Omega^{(+)}(z)\Omega^{(-)}(z)$.

Связь между собственными значениями оператора $\mathcal{A}_3$ и нулями функции $\Omega(\,\cdot\,)$ устанавливается следующей теоремой, в которой также определяется число собственных значений оператора $\mathcal{A}_3$.

Теорема 4. *Справедливы следующие утверждения*:

(а) *если число* $z\in\mathbb{C}\setminus\sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}_3)$ *является собственным значением оператора* $\mathcal{A}_3$, *то* $\Omega(z)=0$, *и наоборот*;

(б) *число простых собственных значений оператора* $\mathcal{A}_3$ *не больше шестнадцати.*

Доказательство. (а) Предположим, что точка $z\in\mathbb{C}\setminus\Sigma_2^{(\mathrm{s})}$ является собственным значением оператора $\mathcal{A}_3^{(\mathrm{s})}$ с соответствующей собственной вектор-функцией $f=(f_0,f_1,f_2,f_3)\in\mathcal{F}^{(3)}(L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}}))$. В этом случае элементы f_0, f_1, f_2 и f_3 являются решением системы уравнений

$$\begin{aligned}
&(\mathrm{s}\varepsilon - z)f_0 + \alpha\int_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} v(t)f_1(t)dt = 0;\\
&\alpha v(k_1)f_0 + (-\mathrm{s}\varepsilon + w(k_1) - z)f_1(k_1) + \alpha\int_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} v(t)f_2(k_1,t)dt = 0;\\
&\alpha v(k_2)f_1(k_1) + (\mathrm{s}\varepsilon + w(k_1)+w(k_2) - z)f_2(k_1,k_2) + \alpha\int_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} v(t)f_3(k_1,k_2,t)dt = 0;\\
&\alpha v(k_3)f_2(k_1,k_2) + \big(-\mathrm{s}\varepsilon + w(k_1)+w(k_2)+w(k_3) - z\big)f_3(k_1,k_2,k_3) = 0.
\end{aligned}\tag{8}$$

Так как $z \notin [-\mathrm{s}\varepsilon, -\mathrm{s}\varepsilon + 3M]$, из четвертого уравнения системы (8) для f_3 имеем

$$f_3(k_1,k_2,k_3) = -\frac{\alpha v(k_3) f_2(k_1,k_2)}{-\mathrm{s}\varepsilon + w(k_1) + w(k_2) + w(k_3) - z}. \tag{9}$$

Подставляя выражение (9) для f_3 во второе уравнение (8), получим систему уравнений

$$\begin{aligned}
&(\mathrm{s}\varepsilon - z) f_0 + \alpha \int_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} v(t) f_1(t) dt = 0;\\
&\alpha v(k_1) f_0 + (-\mathrm{s}\varepsilon + w(k_1) - z) f_1(k_1) + \alpha \int_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} v(t) f_2(k_1,t) dt = 0;\\
&\alpha v(k_2) f_1(k_1) + \Omega_1^{(-\mathrm{s})}(z - w(k_2)) f_2(k_1,k_2) = 0,
\end{aligned} \tag{10}$$

которая имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда система уравнений (8) имеет нетривиальное решение.

В силу определения множества $\sigma_2^{(\mathrm{s})}$ для любых $z \notin \sigma_2^{(\mathrm{s})}$ и $k_2 \in \mathbb{T}^{\mathrm{d}}$ имеет место неравенство $\Omega_2^{(-\mathrm{s})}(z - w(k_2)) \neq 0$. Значит, система уравнений (10) имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда система уравнений

$$\begin{aligned}
&(\mathrm{s}\varepsilon - z) f_0 + \alpha \int_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} v(t) f_1(t) dt = 0;\\
&f_1(k_1) = -\frac{\alpha v(k_1) f_0}{\Omega_2^{(-\mathrm{s})}(z - w(k_1))}
\end{aligned}$$

имеет решение, не равное тождественно нулю, или когда $\Omega^{(\mathrm{s})}(z) = 0$. Теперь замечание 1 завершает доказательство утверждения (а) теоремы 4.

(б) Так как операторная матрица $\mathcal{A}_3^{(\mathrm{s})}$ является самосопряженной, ее дискретный спектр вещественен. Поэтому исследуем вещественные нули функции $\Omega^{(\mathrm{s})}(\cdot)$. Из определения функции $\Omega^{(\mathrm{s})}(\cdot)$ вытекает, что она регулярна на $\mathbb{C} \setminus \sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}_3^{(\mathrm{s})})$. Простые вычисления показывают, что

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dz}\Omega^{(\mathrm{s})}(z) = -1 - \int_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} \frac{v^2(t)}{(\Omega_2^{(-\mathrm{s})}(z - w(s)))^2} \times\\
\times \left(1 + \int_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} \frac{v^2(t) dt}{(\mathrm{s}\varepsilon + w(s) + w(t) - z)^2}\right) ds, \quad z \in \mathbb{R} \setminus \sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}_3^{(\mathrm{s})}).
\end{aligned}$$

Очевидно, что $\dfrac{d}{dz}\Omega^{(\mathrm{s})}(z) < 0$ при всех $z \in \mathbb{R} \setminus \sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}_3^{(\mathrm{s})})$. Это и означает, что функция $\Omega^{(\mathrm{s})}(\cdot)$ монотонно убывает на $\mathbb{R} \setminus \sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}_3^{(\mathrm{s})})$. В силу теоремы 1 множество $\sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}_3^{(\mathrm{s})})$ состоит из объединения не более чем семи отрезков, поэтому из монотонности функции $\Omega^{(\mathrm{s})}(\cdot)$ вытекает, что эта функция может иметь не более восьми простых нулей в $\mathbb{R} \setminus \sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}_3^{(\mathrm{s})})$. Теперь утверждение (а) теоремы 4 завершает доказательство утверждения (б) этой теоремы. $\square$

Из теоремы 4 следует, что

$$\sigma_{\mathrm{disc}}(\mathcal{A}_3^{(\mathrm{s})}) = \left\{z \in \mathbb{C} \setminus \Sigma_2^{(\mathrm{s})} : \Omega^{(\mathrm{s})}(z) = 0\right\}.$$

Отсюда с учетом замечания 1 получаем, что

$$\sigma_{\mathrm{disc}}(\mathcal{A}_3) = \left\{ z \in \mathbb{C} \setminus \Sigma_2^{(\mathrm{s})} : \Omega(z) = 0 \right\}.$$

Найденное выше равенство для дискретного спектра операторной матрицы $\mathcal{A}_3$ позволяет определить число и местоположение собственных значений этой матрицы.

Заключение. В настоящей статье исследуется операторная матрица $\mathcal{A}$ четвертого порядка, которая соответствует гамильтониану системы с несохраняющимся числом и не более четырех частиц на решетке. Эта операторная матрица действует в четырехчастичном обрезанном подпространстве фоковского пространства.

Для рассматриваемой операторной матрицы $\mathcal{A}$ получены следующие результаты:

– описано местоположение существенного спектра;
– доказано, что существенный спектр состоит из объединения не более шести отрезков;
– определено число и местоположение собственных значений;
– оценена нижняя грань существенного спектра.

Конкурирующие интересы. Заявляем, что в отношении авторства и публикации этой статьи конфликта интересов не имеем.

Авторский вклад и ответственность. Все авторы принимали участие в разработке концепции статьи и в написании рукописи. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

Благодарности. Авторы выражают глубокую благодарность рецензентам за ценные и полезные замечания.

Библиографический список

1. Tretter C. *Spectral Theory of Block Operator Matrices and Applications*. London: Imperial College Press, 2008. xxxi+264 pp.
2. Mogilner A. I. Hamiltonians in solid state physics as multiparticle discrete Schrödinger operators: Problems and results / *Many particle Hamiltonians: Spectra and Scattering* / Advances in Soviet Mathematics, vol. 5. Providence, RI: Am. Math. Soc., 1991. pp. 139–194.
3. Friedrichs K. O. *Perturbation of Spectra in Hilbert Space* / Lectures in Applied Mathematics. vol. 3. Providence, RI: Am. Math. Soc., 1965. xii+178 pp.
4. Минлос Р. А., Малышев В. А. *Линейные операторы в бесконечночастичных системах*. М.: Наука, 1994. 425 с.
5. Thaller B. *The Dirac Equation* / Texts and Monographs in Physics. Berlin: Springer-Verlag, 1991. xvii+357 pp.
6. Lifschitz A. E. *Magnetohydrodynamics and Spectral Theory* / Developments in Electromagnetic Theory and Applications. vol. 4. Kluwer Academic Publ.: Dordrecht, 1989. xii+446 pp.
7. Меркурьев С. П., Фаддеев Л. П. *Квантовая теория рассеяния для систем нескольких частиц*. М.: Наука, 1985. 400 с.
8. Cycon H. L., Froese R. G., Kirsch W., Simon B. *Schrödinger Operators, with Application to Quantum Mechanics and Global Geometry* / Springer Study edition. Texts and Monographs in Physics. Berlin: Springer-Verlag, 1987. ix+319 pp.
9. Hunziker W. On the spectra of Schrödinger multiparticle Hamiltonians // *Helv. Phys. Acta*, 1966. vol. 39. pp. 451–462.

10. van Winter C. *Theory of Finite Systems of Particles. I: The Green Function* / Mat.-Fys. Skr., Danske Vid. Selsk. 2, No. 8, 1964. 60 pp.
11. Жислин Г. М. Исследование спектра оператора Шредингера для системы многих частиц / Тр. ММО, Т. 9. М.: ГИФМЛ, 1960. С. 81–120.
12. Муминов М. Э. Теорема Хунцикера–ван Винтера–Жислина для четырехчастичного оператора Шредингера на решетке // *ТМФ*, 2006. Т. 148, № 3. С. 428–443. EDN: HVALGT. DOI: https://doi.org/10.4213/tmf2325.
13. Лакаев С. Н., Расулов Т. Х. Модель в теории возмущений существенного спектра многочастичных операторов // *Матем. заметки*, 2003. Т. 73, № 4. С. 556–564. DOI: https://doi.org/10.4213/mzm203.
14. Albeverio S., Lakaev S. N., Rasulov T. H. On the spectrum of an Hamiltonian in Fock space. Discrete spectrum asymptotics // *J. Stat. Phys.*, 2007. vol. 127, no. 2. pp. 191–220, arXiv: math-ph/0508028. EDN: LXQYHX. DOI: https://doi.org/10.1007/s10955-006-9240-6.
15. Расулов Т. Х. О структуре существенного спектра модельного оператора нескольких частиц // *Матем. заметки*, 2008. Т. 83, № 1. С. 86–94. EDN: RLQXJN. DOI: https://doi.org/10.4213/mzm4337.
16. Rasulov T. H., Muminov M. E., Hasanov M. On the spectrum of a model operator in Fock space // *Methods Funct. Anal. Topol.*, 2009. vol. 15, no. 4. pp. 369–383, arXiv: 0805.1284 [math-ph].
17. Rasulov T. H. Investigations of the essential spectrum of a Hamiltonian in Fock space // *Appl. Math. Inform. Sci.*, 2010. vol. 4, no. 3. pp. 395–412. EDN: SQGWHZ.
18. Muminov M., Neidhardt H., Rasulov T. On the spectrum of the lattice spin-boson Hamiltonian for any coupling: 1D case // *J. Math. Phys.*, 2015. vol. 56, 053507, arXiv: 1410.4763 [math-ph]. EDN: URDADB. DOI: https://doi.org/10.1063/1.4921169.
19. Расулов Т. Х. О ветвях существенного спектра решетчатой модели спин–бозон с не более чем двумя фотонами // *Теор. и мат. физ.*, 2016. Т. 186, № 2. С. 293–310. EDN: VQORSX. DOI: https://doi.org/10.4213/tmf8854.
20. Spohn H. Ground state(s) of the spin-boson hamiltonian // *Commun. Math. Phys.*, 1989. vol. 123, no. 2. pp. 277–304. DOI: https://doi.org/10.1007/BF01238859.
21. Hübner M., Spohn H. Spectral properties of the spin-boson Hamiltonian // *Ann. Inst. Henri Poincaré, Phys. Théor.*, 1995. vol. 62, no. 3. pp. 289–323.
22. Жуков Ю. В., Минлос Р. А. Спектр и рассеяние в модели “спин–бозон” с не более чем тремя фотонами // *Теор. и мат. физ.*, 1995. Т. 103, № 1. С. 63–81.
23. Minlos R. A., Spohn H. The three-body problem in radioactive decay: The case of one atom and at most two photons / *Topics in Statistical and Theoretical Physics* / American Mathematical Society Translations, Ser. 2, 177. Providence, RI: Am. Math. Soc., 1996. pp. 159–193. DOI: https://doi.org/10.1090/trans2/177/09.
24. Feynman R. P. *Statistical Mechanics. A Set of Lectures* / Advanced Book Classics. Reading, MA: Perseus Books, 1998. xiv+354 pp.
25. Reed M., Simon B. *Methods of Modern Mathematical Physics.* vol. 4: Analysis of Operators. New York: Academic Press, 1978. xv+396 pp.
26. Гохберг И. Ц., Крейн М. Г. *Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве.* М.: Наука, 1965. 448 с.

Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2023, vol. 27, no. 3, pp. 427–445
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu2003

MSC: 81Q10, 35P20, 47N50

Description of the spectrum of one fourth-order operator matrix

T. Kh. Rasulov, H. M. Latipov

Bukhara State University,
11, Muhammad Ikbol st., Bukhara, 705018, Uzbekistan.

Abstract

An operator matrix $\mathcal{A}$ of fourth-order is considered. This operator corresponds to the Hamiltonian of a system with non conserved number and at most four particles on a lattice. It is shown that the operator matrix $\mathcal{A}$ is unitarily equivalent to the diagonal matrix, the diagonal elements of which are operator matrices of fourth-order. The location of the essential spectrum of the operator $\mathcal{A}$ is described, that is, two-particle, three-particle and four-particle branches of the essential spectrum of the operator $\mathcal{A}$ are singled out. It is established that the essential spectrum of the operator matrix $\mathcal{A}$ consists of the union of closed intervals whose number is not over 14. A Fredholm determinant is constructed such that its set of zeros and the discrete spectrum of the operator matrix $\mathcal{A}$ coincide, moreover, it was shown that the number of simple eigenvalues of the operator matrix $\mathcal{A}$ lying outside the essential spectrum does not exceed 16.

Keywords: Fock space, operator matrix, annihilation and creation operators, unitary equivalent operators, essential, discrete and point spectra.

Received: 7$^{\text{th}}$ March, 2023 / Revised: 15$^{\text{th}}$ September, 2023 /
Accepted: 18$^{\text{th}}$ September, 2023 / First online: 28$^{\text{th}}$ September, 2023

Competing interests. We declare that we have no conflicts of interest in the authorship and publication of this article.

Authors' Responsibilities. The authors are absolutely responsible for submit the final manuscript to print. Each author has approved the final version of manuscript.

Differential Equations and Mathematical Physics
Research Article

Please cite this article in press as:
R a s u l o v T. Kh., L a t i p o v H. M. Description of the spectrum of one fourth-order operator matrix, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2023, vol. 27, no. 3, pp. 427–445. EDN: UKZLQF. DOI: 10.14498/vsgtu2003 (In Russian).

Authors' Details:

Tulkin Kh. Rasulov https://orcid.org/0000-0002-2868-4390
Dr. Sci. (Phys. & Math.), Professor; Vice-Rector for Research and Innovation;
e-mail: rth@mail.ru, t.h.rasulov@buxdu.uz

Hakimboy M. Latipov https://orcid.org/0000-0002-4806-0155
Assistant Lecturer; Dept. of Mathematical Analysis; e-mail: h.m.latipov@buxdu.uz

Acknowledgments. The authors express their deep gratitude to the reviewers for valuable and useful comments.

References

1. Tretter C. *Spectral Theory of Block Operator Matrices and Applications*. London, Imperial College Press, 2008, xxxi+264 pp.
2. Mogilner A. I. Hamiltonians in solid state physics as multiparticle discrete Schrödinger operators: Problems and results, In: *Many particle Hamiltonians: Spectra and Scattering*, Advances in Soviet Mathematics, vol. 5. Providence, RI, Am. Math. Soc., 1991, pp. 139–194.
3. Friedrichs K. O. *Perturbation of Spectra in Hilbert Space*, Lectures in Applied Mathematics, vol. 3. Providence, RI, Am. Math. Soc., 1965, xii+178 pp.
4. Malyshev V. A., Minlos R. A. *Linear Infinite-Particle Operators*, Translations of Mathematical Monographs, vol. 143. Providence, RI, Am. Math. Soc., 1995, viii+298 pp.
5. Thaller B. *The Dirac Equation*, Texts and Monographs in Physics. Berlin, Springer-Verlag, 1991, xvii+357 pp.
6. Lifschitz A. E. *Magnetohydrodynamics and Spectral Theory*, Developments in Electromagnetic Theory and Applications, vol. 4. Kluwer Academic Publ., Dordrecht, 1989, xii+446 pp.
7. Faddeev L. D., Merkuriev S. P. *Quantum Scattering Theory for Several Particle Systems*, Mathematical Physics and Applied Mathematics, vol. 11. Kluwer Academic Publ., 1993, xiii+404 pp.
8. Cycon H. L., Froese R. G., Kirsch W., Simon B. *Schrödinger Operators, with Application to Quantum Mechanics and Global Geometry*, Springer Study edition. Texts and Monographs in Physics. Berlin, Springer-Verlag, 1987, ix+319 pp.
9. Hunziker W. On the spectra of Schrödinger multiparticle Hamiltonians, *Helv. Phys. Acta*, 1966, vol. 39, pp. 451–462.
10. van Winter C. *Theory of Finite Systems of Particles. I: The Green Function*, Mat.-Fys. Skr., Danske Vid. Selsk. 2, No. 8, 1964, 60 pp.
11. Zhislin G. M. A study of the spectrum of the Schrödinger operator for a system of several particles, Tr. Mosk. Mat. Obs., 9, 1960, pp. 81–120 (In Russian).
12. Muminov M. É. A Hunziker–van Winter–Zhislin theorem for a four-particle lattice Schrödinger operator, *Theoret. and Math. Phys.*, 2006, vol. 148, no. 3, pp. 1236–1250. EDN: XLLPVN. DOI: https://doi.org/10.1007/s11232-006-0114-5.
13. Lakaev S. N., Rasulov T. K. A model in the theory of perturbations of the essential spectrum of multiparticle operators, *Math. Notes*, 2003, vol. 73, no. 4, pp. 521–528. EDN: XJVQYB. DOI: https://doi.org/10.1023/A:1023207220878.
14. Albeverio S., Lakaev S. N., Rasulov T. H. On the spectrum of an Hamiltonian in Fock space. Discrete spectrum asymptotics, *J. Stat. Phys.*, 2007, vol. 127, no. 2, pp. 191–220, arXiv: math-ph/0508028. EDN: LXQYHX. DOI: https://doi.org/10.1007/s10955-006-9240-6.
15. Rasulov T. K. On the structure of the essential spectrum of a model many-body Hamiltonian, *Math. Notes*, 2008, vol. 83, no. 1, pp. 80–87. EDN: LKYTYL. DOI: https://doi.org/10.1134/S0001434608010100.
16. Rasulov T. H., Muminov M. E., Hasanov M. On the spectrum of a model operator in Fock space, *Methods Funct. Anal. Topol.*, 2009, vol. 15, no. 4, pp. 369–383, arXiv: 0805.1284 [math-ph].
17. Rasulov T. H. Investigations of the essential spectrum of a Hamiltonian in Fock space, *Appl. Math. Inform. Sci.*, 2010, vol. 4, no. 3, pp. 395–412. EDN: SQGWHZ.
18. Muminov M., Neidhardt H., Rasulov T. On the spectrum of the lattice spin-boson Hamiltonian for any coupling: 1D case, *J. Math. Phys.*, 2015, vol. 56, 053507, arXiv: 1410.4763 [math-ph]. EDN: URDADB. DOI: https://doi.org/10.1063/1.4921169.
19. Rasulov T. K. Branches of the essential spectrum of the lattice spin-boson model with at most two photons, *Theoret. and Math. Phys.*, 2016, vol. 186, no. 2, pp. 251–267. EDN: WPRRHL. DOI: https://doi.org/10.1134/S0040577916020094.

20. Spohn H. Ground state(s) of the spin-boson hamiltonian, *Commun. Math. Phys.*, 1989, vol. 123, no. 2, pp. 277–304. DOI: https://doi.org/10.1007/BF01238859.
21. Hübner M., Spohn H. Spectral properties of the spin-boson Hamiltonian, *Ann. Inst. Henri Poincaré, Phys. Théor.*, 1995, vol. 62, no. 3, pp. 289–323.
22. Zhukov Yu. V., Minlos R. A. Spectrum and scattering in a "spin-boson" model with not more than three photons, *Theoret. and Math. Phys.*, 1995, vol. 103, no. 1, pp. 398–411. DOI: https://doi.org/10.1007/BF02069784.
23. Minlos R. A., Spohn H. The three-body problem in radioactive decay: The case of one atom and at most two photons, In: *Topics in Statistical and Theoretical Physics*, American Mathematical Society Translations, Ser. 2, 177. Providence, RI, Am. Math. Soc., 1996, pp. 159–193. DOI: https://doi.org/10.1090/trans2/177/09.
24. Feynman R. P. *Statistical Mechanics. A Set of Lectures*, Advanced Book Classics. Reading, MA, Perseus Books, 1998, xiv+354 pp.
25. Reed M., Simon B. *Methods of Modern Mathematical Physics*, vol. 4, Analysis of Operators. New York, Academic Press, 1978, xv+396 pp.
26. Gohberg I. C., Kreĭn M. G. *Introduction to the Theory of Linear Nonselfadjoint Operators in Hilbert Space*, Translations of Mathematical Monographs, vol. 18. Providence, RI, Am. Math. Soc., 1969, xv+378 pp. DOI: https://doi.org/10.1090/mmono/018.

Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2023. Т. 27, № 3. С. 446–461
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu2013
EDN: LDWVUL

УДК 517.968.4

О разрешимости одного класса нелинейных двумерных интегральных уравнений типа Гаммерштейна—Немыцкого на плоскости

Х. А. Хачатрян[1]**, *А. С. Петросян***[2]

[1] Ереванский государственный университет,
Армения, 0025, Ереван, ул. А. Манукяна, 1.
[2] Национальный аграрный университет Армении,
Армения, 0009, Ереван, ул. Маршала Теряна, 74.

Аннотация

Работа посвящена изучению вопросов существования и единственности положительного ограниченного и непрерывного решения для одного класса двумерных нелинейных интегральных уравнений с некомпактным оператором Гаммерштейна—Немыцкого на плоскости. Такие уравнения возникают в теории p-адических открытых и открыто-замкнутых струн, в кинетической теории газов, в математической теории географического распространения эпидемических заболеваний. Доказываются конструктивные теоремы существования и единственности ограниченного положительного решения. Исследуется также асимптотическое поведение построенного решения на бесконечности. Приводятся конкретные прикладные примеры указанного класса уравнений.

Ключевые слова: монотонность, нелинейность, ограниченное решение, интегральная асимптотика, выпуклость.

Получение: 19 апреля 2023 г. / Исправление: 13 июня 2023 г. /
Принятие: 25 июня 2023 г. / Публикация онлайн: 4 сентября 2023 г.

Дифференциальные уравнения и математическая физика
Научная статья

Образец для цитирования
Хачатрян Х. А., Петросян А. С. О разрешимости одного класса нелинейных двумерных интегральных уравнений типа Гаммерштейна—Немыцкого на плоскости // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2023. Т. 27, № 3. С. 446–461. EDN: LDWVUL. DOI: 10.14498/vsgtu2013.

Сведения об авторах
Хачатур Агавардович Хачатрян https://orcid.org/0000-0002-4835-943X
доктор физико-математических наук, профессор; зав. кафедрой теории функций и дифференциальных уравнений; e-mail: khachatur.khachatryan@ysu.am

Айкануш Самвеловна Петросян https://orcid.org/0000-0002-7172-4730
кандидат физико-математических наук, доцент; доцент каф. высшей математики и физики; e-mail: haykuhi25@mail.ru

1. Введение

Рассмотрим следующий класс двумерных интегральных уравнений на плоскости $\mathbb{R}^2$ с некомпактным и монотонным оператором типа Гаммерштейна—Немыцкого:

$$f(x,y) = \mu(x,y,f(x,y)) + \\ + \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} K(x-x',y-y')G(f(x',y'))dx'dy',\ (x,y)\in\mathbb{R}^2 \quad (1)$$

относительно искомой непрерывной ограниченной и неотрицательной на множестве $\mathbb{R}^2 := \mathbb{R}\times\mathbb{R}$, $\mathbb{R} := (-\infty,+\infty)$ функции $f(x,y)$.

В уравнении (1) нелинейности μ и G — определенные и непрерывные функции соответственно на множествах $\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^+$ и $\mathbb{R}^+ := [0,+\infty)$, принимают вещественные значения, удовлетворяют условию «критичности»:

$$\mu(x,y,0)\equiv 0,\quad (x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad G(0)=0$$

и некоторым другим условиям (см. ниже). Из условия «критичности» сразу следует существование тривиального (нулевого) решения уравнения (1). Ядро K определено на множестве $\mathbb{R}^2$ и удовлетворяет следующим условиям:

I) $K\in C_M(\mathbb{R}^2)$, где $C_M(\mathbb{R}^2)$ — пространство непрерывных и ограниченных функций на множестве $\mathbb{R}^2$;

II) $K(x,y)=K(y,x)>0$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $K(-t,y)=K(t,y)$, $t\in\mathbb{R}^+$, $y\in\mathbb{R}$, $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}K(x,y)dxdy=1$.

Исследование вопросов существования и единственности для уравнения (1) помимо чисто математического интереса представляет определенный интерес также в приложениях. В частности, при различных представлениях функций μ, G и K такие уравнения возникают в теории p-адических открытых и открыто-замкнутых струн для скалярного поля тахионов, в математической теории распространения эпидемических заболеваний в рамках модифицированной модели Дикмана—Капера, в кинетической теории газов (см. [1–6]). Следует отметить, что такие интегральные уравнения встречаются также в космологии (см. [7]).

В частном случае, когда $K(x,y)=K_1(x)K_2(y)$,[1] а $\mu\equiv 0$, вопросы построения нечетных по каждому аргументу ограниченных и монотонных (по x и по y) решений обсуждались в работе [8]. В случае, когда $\mu\equiv 0$, при более сильных (по сравнению с условиями I), II)) условиях на K уравнение (1) исследовалось в работе [9] для нелинейностей G, удовлетворяющих следующим условиям:

1) $G\in C(\mathbb{R}^+)$, $y=G(u)$ выпукла вверх на $\mathbb{R}^+$;
2) $y=G(u)\uparrow$ на $\mathbb{R}^+$;
3) существует число $\eta>0$ такое, что $G(\eta)=\eta$;
4) $G(-u)=-G(u)$, $u\in\mathbb{R}^+$.

[1] Ядра $\{K_j(u)\}_{j=1,2}$ являются четными ограниченными положительными суммируемыми и монотонно убывающими на $\mathbb{R}^+$ функциями, причем $\int_{-\infty}^{\infty}K_j(u)du=1$, $j=1,2$.

В этой работе построено знакопеременное непрерывное и ограниченное на $\mathbb{R}^2$ решение. Исследовано асимптотическое поведение решения на бесконечности по каждому аргументу. Небезынтересно отметить, что в одномерном случае уравнение (1) при различных ограничениях на μ, G и K изучалось в работах [10–13].

Относительно функции $\mu(x, y, u)$ предположим выполнение следующих условий:

a) $\mu \in C(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+)$ и при каждом фиксированном $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ функция $\mu(x, y, u) \uparrow$ по u на $\mathbb{R}^+$;

b) существует $\sup\limits_{u\in\mathbb{R}^+} \mu(x, y, u) := g(x, y)$, причем $g \in L_1(\mathbb{R}^2) \cap M(\mathbb{R}^2)$;

c) при каждом фиксированном $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ функция $\mu(x, y, u)$ выпукла вверх по u на $\mathbb{R}^+$, причем $\mu(x, y, u) < u$, когда $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, а $u \in (\eta, +\infty)$.

В настоящей работе при условиях I), II), 1)–3) и a), b) мы докажем теорему существования положительного непрерывного и ограниченного решения f, причем $f - \eta \in L_1(\mathbb{R}^2)$. В условиях теоремы существования при дополнительном ограничении на функцию μ (а именно при условии c)) докажем также единственность построенного решения в определенном подклассе ограниченных на $\mathbb{R}^2$ функций. Следует отметить, что в процессе доказательства теоремы единственности решения ключевую роль играет интегральная асимптотика построенного решения. В конце работы приведем конкретные прикладные примеры нелинейностей μ и G, а также ядра K для иллюстрации важности полученных результатов в области вышеуказанных приложений.

2. Существование ограниченного решения. Интегральная асимптотика построенного решения

Имеет место следующая

Теорема 1. *При условиях I), II), 1)–3) и a), b) уравнение (1) имеет положительное непрерывное и ограниченное на $\mathbb{R}^2$ решение $f(x, y)$, причем $f - \eta \in L_1(\mathbb{R}^2)$. Более того, если* $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \lim\limits_{y\to\pm\infty} g(x, y) = 0$, *то* $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \lim\limits_{y\to\pm\infty} f(x, y) = \eta$.

Доказательство. Сперва рассмотрим следующее характеристическое уравнение на множестве $\mathbb{R}^+$:

$$\begin{gathered} G(u) + \gamma = u, \\ \gamma := \sup_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} g(x, y) < +\infty. \end{gathered} \tag{2}$$

Из свойств 1)–3) немедленно следует, что уравнение (2) имеет положительное решение ξ.

Во-первых убедимся, что

$$\xi > \eta, \tag{3}$$

где число η определяется в условии 3). Действительно, в противном случае в силу свойств 1)–3) и положительности числа γ получим

$$1 = \frac{G(\eta)}{\eta} \leqslant \frac{G(\xi)}{\xi} = 1 - \frac{\gamma}{\xi},$$

а последнее невозможно.

Теперь докажем, что характеристическое уравнение (2) имеет единственное положительное решение.

Предположим обратное: существует также $\tilde{\xi} \neq \xi$ такое, что $G(\tilde{\xi}) + \gamma = \tilde{\xi}$. Тогда будем иметь

$$G(\tilde{\xi}) - \tilde{\xi} = G(\xi) - \xi = -\gamma < 0. \tag{4}$$

Снова принимая во внимание условия 1)–3), получаем, что при $\xi > \tilde{\xi}$ имеет место $G(\xi)/\xi < G(\tilde{\xi})/\tilde{\xi}$, а при $\xi < \tilde{\xi}$ справедлива оценка $G(\xi)/\xi > G(\tilde{\xi})/\tilde{\xi}$. В обоих случаях в силу (4) приходим к противоречию. Следовательно, $\tilde{\xi} = \xi$.

Рассмотрим теперь следующие последовательные приближения для уравнения (1):

$$f_{n+1}(x,y) = \mu(x,y,f_n(x,y)) + \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} K(x-x',y-y')G(f_n(x',y'))dx'dy',$$
$$f_0(x,y) \equiv \eta, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad n = 0,1,2,\ldots. \tag{5}$$

Используя оценку (3), тот факт, что число ξ единственным образом определяется из характеристического уравнения (2), а также условия 1)–3), a), b), I), II), индукцией по n несложно проверить, что

$$f_n(x,y) \uparrow \text{ по } n, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2, \tag{6}$$

$$f_n(x,y) \leqslant \xi, \quad n = 0,1,2,\ldots, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2, \tag{7}$$

$$f_n \in C(\mathbb{R}^2), \quad n = 0,1,2,\ldots. \tag{8}$$

Убедимся, что существует константа $C > 0$ такая, что

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(f_n(x,y) - \eta)dxdy \leqslant C, \quad n = 0,1,2,\ldots. \tag{9}$$

С этой целью сперва покажем, что

$$f_n - \eta \in L_1(\mathbb{R}^2), \quad n = 0,1,2,\ldots. \tag{10}$$

В случае $n = 0$ включение (10) очевидно. Предположим, что $f_n - \eta \in L_1(\mathbb{R}^2)$ при некотором $n \in \mathbb{N}$. Пусть $\{\delta_j\}_{j=1,2}$, $\{r_j\}_{j=1,2}$ — произвольные вещественные числа, причем $\delta_1 < \delta_2$, $r_1 < r_2$. Тогда из (5) в силу теоремы Фубини (см. [14]), условий I), II), 1)–3), a), b) и очевидного неравенства $G(u) \leqslant u$, $u \in [\eta, \xi]$ будем иметь

$$\int_{\delta_1}^{\delta_2}\int_{r_1}^{r_2}(f_{n+1}(x,y) - \eta)dxdy \leqslant \int_{\delta_1}^{\delta_2}\int_{r_1}^{r_2} g(x,y)dxdy+$$
$$+\int_{\delta_1}^{\delta_2}\int_{r_1}^{r_2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} K(x-x',y-y')(G(f_n(x',y')) - \eta)dx'dy'dxdy \leqslant$$
$$\leqslant \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y)dxdy + \int_{\delta_1}^{\delta_2}\int_{r_1}^{r_2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} K(x-x',y-y')(f_n(x',y')-\eta)dx'dy'dxdy \leqslant$$
$$\leqslant \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y)dxdy + \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(f_n(x',y')-\eta)\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} K(x-x',y-y')dxdydx'dy' =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y)dxdy + \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(f_n(x',y') - \eta)dx'dy' < +\infty.$$

В полученной оценке, устремляя $\delta_1 \to -\infty$, $\delta_2 \to +\infty$, $r_1 \to -\infty$ и $r_2 \to +\infty$, заключаем, что $f_{n+1} - \eta \in L_1(\mathbb{R}^2)$.

Вернемся к доказательству оценки (9). Из свойств (6), (7) в силу условий 1)–3) для любого $\varepsilon \in (0,1)$ имеем (см. рис. 1)

$$0 \leqslant G(f_n(x,y)) - \eta \leqslant \frac{\eta - G(\varepsilon\eta)}{\eta(1-\varepsilon)}(f_n(x,y) - \eta),\ n = 0,1,2,\ldots,\ (x,y) \in \mathbb{R}^2. \quad (11)$$

Очевидно, что $\rho := \dfrac{\eta - G(\varepsilon\eta)}{\eta(1-\varepsilon)} \in (0,1)$, ибо $G(\varepsilon\eta) > \varepsilon\eta$, $G(\eta) = \eta$, $y = G(u) \uparrow$ на $\mathbb{R}^+$ и $y = G(u)$ выпукла вверх на $\mathbb{R}^+$.

Принимая во внимание (11), а также условия II), a), b), 1)–3), в силу монотонности последовательности $\{f_n(x,y)\}_{n=0}^{\infty}$ по n и включения (10) из (5) будем иметь

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(f_{n+1}(x,y) - \eta)dxdy \leqslant \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y)dxdy +$$
$$+ \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} K(x-x', y-y')(G(f_{n+1}(x',y')) - \eta)dx'dy' \leqslant$$
$$\leqslant \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y)dxdy + \rho\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(f_{n+1}(x',y') - \eta)dx'dy',$$

откуда следует, что

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(f_{n+1}(x,y) - \eta)dxdy \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\eta(1-\varepsilon)}{G(\varepsilon\eta) - \varepsilon\eta}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y)dxdy := C < +\infty.$$

Таким образом, из (6)–(9) заключаем, что последовательность непрерывных на $\mathbb{R}^2$ функций $\{f_n(x,y)\}_{n=0}^{\infty}$ имеет поточечный предел, когда $n \to \infty$:

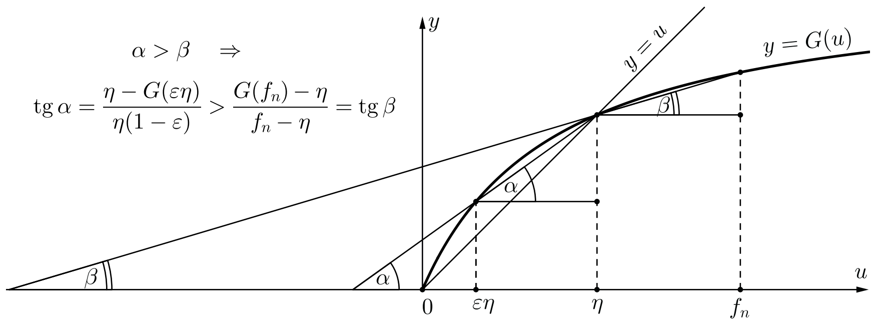


Рис. 1. [Figure 1]

$\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x,y) = f(x,y)$, причем предельная функция $f(x,y)$ согласно теореме Б. Леви (см. [14]) обладает следующими свойствами:

$$\eta \leqslant f(x,y) \leqslant \xi, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2, \tag{12}$$

$$f - \eta \in L_1(\mathbb{R}^2), \tag{13}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(f(x,y)-\eta)dxdy \leqslant \frac{\eta(1-\varepsilon)}{G(\varepsilon\eta)-\varepsilon\eta}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y)dxdy. \tag{14}$$

Учитывая (8), (12), а также непрерывность функций μ, K и G, заключаем, что $f \in C(\mathbb{R}^2)$. Для завершения доказательства осталось убедиться, что если $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\lim\limits_{y\to\pm\infty} g(x,y) = 0$, то существуют $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\lim\limits_{y\to\pm\infty} f(x,y) = \eta$. Действительно, из (1), (12), a), b), 1)–3), во-первых, следует, что

$$0 \leqslant f(x,y) - \eta \leqslant g(x,y) + \\ + \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} K(x-x',y-y')(f(x',y')-\eta)dx'dy',\ (x,y)\in\mathbb{R}^2. \tag{15}$$

С другой стороны, известно, что если $\varphi,\psi \in L_1(\mathbb{R}) \cap M(\mathbb{R})$, то (см. [15])

$$(\varphi * \psi)(x) := \int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x-x')\psi(x')dx' \to 0, \tag{16}$$

при $x \to \pm\infty$.

Учитывая (13), II), I), (16), а также предельное соотношение $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\lim\limits_{y\to\pm\infty} g(x,y) = 0$, из (15) получаем, что $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\lim\limits_{y\to\pm\infty} f(x,y) = \eta$.

Таким образом, теорема полностью доказана. □

Замечание 1. Заметим, что на самом деле построенное нами решение $f(x,y)$ удовлетворяет следующему строгому неравенству снизу:

$$f(x,y) > \eta, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2. \tag{17}$$

Действительно, из (1), (12), II), 3) в силу монотонности функций μ и G по u получаем

$$f(x,y) \geqslant \mu(x,y,\eta) + \\ + G(\eta)\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} K(x-x',y-y')dx'dy' > G(\eta) = \eta,\ (x,y)\in\mathbb{R}^2.$$

Замечание 2. Рассмотрим теперь следующий класс нелинейных двумерных интегральных уравнений на $\mathbb{R}^2$:

$$\Phi(x,y) = \mu_0(x,y)G_0(\Phi(x,y)) + \\ + \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} K(x-x',y-y')G_1(\Phi(x',y'))dx'dy',\ (x,y)\in\mathbb{R}^2 \tag{18}$$

относительно искомой неотрицательной функции $\Phi(x, y)$. В уравнении (18) μ_0 — положительная непрерывная суммируемая и ограниченная на $\mathbb{R}^2$ функция, ядро K удовлетворяет условиям I), II), а функции G_0 и G_1 допускают следующие представления:

$$G_0(u) := G(u + \eta), \tag{19}$$

$$G_1(u) := G(u + \eta) - \eta, \tag{20}$$

где $G(u)$ обладает свойствами 1)–3), причем

$$\varkappa := \sup_{u \in \mathbb{R}^+} G(u) < +\infty.$$

Несложно проверить, что функция $\mu(x, y, u) = \mu_0(x, y) G_0(u)$ удовлетворяет условиям a), b), а при условии $\varkappa \leqslant 1/2$ выполняется также условие c). Следовательно, согласно теореме 1 уравнение (1) с нелинейностью вида $\mu(x, y, u) = \mu_0(x, y) G_0(u)$ имеет положительное непрерывное и ограниченное решение со свойствами (12)–(14). Заметим, что функция $\Phi^*(x, y) = f(x, y) - \eta \in L_1(\mathbb{R}^2) \cap M(\mathbb{R}^2)$ является решением уравнения (18). Действительно, учитывая II), (20), (19), (1), из (18) будем иметь

$$\begin{gathered}
\mu_0(x, y) G_0(\Phi^*(x, y)) + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} K(x - x', y - y') G_1(\Phi^*(x', y')) dx' dy' = \\
= \mu_0(x, y) G(f(x, y)) + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} K(x - x', y - y') (G(f(x', y')) - \eta) dx' dy' = \\
= \mu(x, y, f(x, y)) + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} K(x - x', y - y') G(f(x', y')) dx' dy' - \eta = \\
= f(x, y) - \eta = \Phi^*(x, y).
\end{gathered}$$

3. Единственность решения. Примеры

В настоящем разделе займемся вопросом единственности решения уравнения (1) в следующем классе ограниченных и неотрицательных на $\mathbb{R}^2$ функций:

$$\mathfrak{M} := \{f \in C_M(\mathbb{R}^2) : f(x, y) \geqslant 0,\ (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \exists\, r > 0, \text{ s.t. } \inf_{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus B_r} f(x, y) > 0\},$$

где

$$B_r := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leqslant r, |y| \leqslant r\}.$$

Справедлива следующая

Теорема 2. *При условиях теоремы 1, если функция $\mu(x, y, u)$ дополнительно удовлетворяет условию c), то уравнение (1) в классе $\mathfrak{M}$ не может иметь более одного решения.*

Доказательство. Пусть $f^*(x, y)$ — произвольное решение уравнения (1) из класса $\mathfrak{M}$. Сперва докажем, что на самом деле

$$t := \inf_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} f^*(x, y) > 0.$$

Действительно, во-первых, если обозначим через $c_0 := \inf\limits_{(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus B_r} f^*(x,y) > 0$ (так как $f^* \in \mathfrak{M}$), то в силу свойств 1)–3), a), b) и II) из (1) для всех $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ будем иметь следующие оценки:

$$\begin{aligned}
f^*(x,y) \geqslant \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} K(x-x',y-y')G(f^*(x',y'))dx'dy' \geqslant \\
\geqslant \int_{-\infty}^{-r}\int_{r}^{\infty} K(x-x',y-y')G(f^*(x',y'))dx'dy' + \\
+ \int_{r}^{\infty}\int_{r}^{\infty} K(x-x',y-y')G(f^*(x',y'))dx'dy' + \\
+ \int_{-\infty}^{-r}\int_{-\infty}^{-r} K(x-x',y-y')G(f^*(x',y'))dx'dy' + \\
+ \int_{r}^{\infty}\int_{-\infty}^{-r} K(x-x',y-y')G(f^*(x',y'))dx'dy' \geqslant \\
\geqslant G(c_0)\Big(\int_{-\infty}^{-r}\int_{r}^{\infty} K(x-x',y-y')dx'dy' + \int_{r}^{\infty}\int_{r}^{\infty} K(x-x',y-y')dx'dy' + \\
+ \int_{-\infty}^{-r}\int_{-\infty}^{-r} K(x-x',y-y')dx'dy' + \int_{r}^{\infty}\int_{-\infty}^{-r} K(x-x',y-y')dx'dy'\Big) = \\
= G(c_0)\Big(\int_{-\infty}^{-r-y}\int_{r-x}^{\infty} K(u,v)dudv + \int_{r-y}^{\infty}\int_{r-x}^{\infty} K(u,v)dudv + \\
+ \int_{-\infty}^{-r-y}\int_{-\infty}^{-r-x} K(u,v)dudv + \int_{r-y}^{\infty}\int_{-\infty}^{-r-x} K(u,v)dudv\Big) := \sigma(x,y).
\end{aligned}$$

Обозначим через Π_1, Π_2, Π_3 и Π_4 следующие части $\mathbb{R}^2$:

$$\Pi_1 := \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x>0, y<0\}, \quad \Pi_2 := \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\geqslant 0, y\geqslant 0\},$$
$$\Pi_3 := \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x<0, y<0\}, \quad \Pi_4 := \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\leqslant 0, y\geqslant 0\}.$$

Теперь оценим снизу функцию $\sigma(x,y)$ на каждом из множеств Π_j, $j=1,2,3,4$. В силу условия II) имеем следующие оценки:

– если $(x,y)\in\Pi_1$, то

$$\begin{aligned}
\sigma(x,y) \geqslant G(c_0)\int_{-\infty}^{-r-y}\int_{r-x}^{\infty} K(u,v)dudv \geqslant \\
\geqslant G(c_0)\int_{-\infty}^{-r}\int_{r}^{\infty} K(u,v)dudv = \\
= G(c_0)\int_{r}^{\infty}\int_{r}^{\infty} K(u,v)dudv := \alpha_0 > 0;
\end{aligned}$$

– если $(x,y)\in\Pi_2$, то

$$\sigma(x,y) \geqslant G(c_0)\int_{r-y}^{\infty}\int_{r-x}^{\infty} K(u,v)dudv \geqslant$$

$$\geqslant G(c_0)\int_r^\infty\int_r^\infty K(u,v)dudv=\alpha_0;$$

– если $(x,y)\in\Pi_3$, то

$$\sigma(x,y)\geqslant G(c_0)\int_{-\infty}^{-r-y}\int_{-\infty}^{-r-x}K(u,v)dudv\geqslant$$
$$\geqslant G(c_0)\int_{-\infty}^{-r}\int_{-\infty}^{-r}K(u,v)dudv=$$
$$=G(c_0)\int_r^\infty\int_r^\infty K(u,v)dudv=\alpha_0;$$

– если $(x,y)\in\Pi_4$, то

$$\sigma(x,y)\geqslant G(c_0)\int_{r-y}^{\infty}\int_{-\infty}^{-r-x}K(u,v)dudv\geqslant$$
$$\geqslant G(c_0)\int_{r}^{\infty}\int_{-\infty}^{-r}K(u,v)dudv=$$
$$=G(c_0)\int_r^\infty\int_r^\infty K(u,v)dudv=\alpha_0.$$

Так как $\bigcup\limits_{j=1}^{4}\Pi_j=\mathbb{R}^2$, для всех $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ имеем $\sigma(x,y)\geqslant\alpha_0>0$. Следовательно, $t\geqslant\alpha_0>0$. Убедимся теперь, что $t\geqslant\eta$. Действительно, из уравнения (1) в силу условий 1)–3), a), b) и I), II) имеем

$$f^*(x,y)\geqslant G(t)\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}K(x-x',y-y')dx'dy'=G(t),\quad (x,y)\in\mathbb{R}^2,$$

откуда, принимая во внимание определение числа t, получаем, что $t\geqslant G(t)$. Следовательно, учитывая 1)–3), приходим к неравенству $t\geqslant\eta$. Аналогично, как в замечании 1, можно убедиться, что

$$f^*(x,y)>\eta,\quad (x,y)\in\mathbb{R}^2. \tag{21}$$

Несложно доказать также, что

$$f^*(x,y)\leqslant\xi,\quad (x,y)\in\mathbb{R}^2. \tag{22}$$

Очевидно, что для завершения доказательства сформулированной теоремы достаточно доказать, что $f^*(x,y)=f(x,y)$, где $f(x,y)$ — решение уравнения (1), построенное при помощи последовательных приближений (5). Предположим обратное: существует точка $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$ такая, что $f^*(x_0,y_0)\neq$ $\neq f(x_0,y_0)$. В силу непрерывности функций f^* и f существует окрестность $O(x_0,y_0)$ этой точки такая, что $f^*(x,y)\neq f(x,y)$, $(x,y)\in O(x_0,y_0)$. Обозначим через $\mathcal{D}$ следующее измеримое множество:

$$\mathcal{D}:=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: f^*(x,y)\neq f(x,y)\}.$$

Очевидно, что $O(x_0, y_0) \subset \mathcal{D}$ и $\operatorname{mes} \mathcal{D} > 0$. Учитывая (1) оценим теперь следующую разность:

$$|f(x,y) - f^*(x,y)| \leqslant |\mu(x,y,f(x,y)) - \mu(x,y,f^*(x,y))| +$$
$$+ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} K(x-x', y-y')|G(f(x',y')) - G(f^*(x',y'))|dx'dy', \ (x,y) \in \mathbb{R}^2. \quad (23)$$

Сперва убедимся, что

$$\chi_1(x,y) := (G(f(x,y)) - \eta) \times$$
$$\times |\mu(x,y,f(x,y)) - \mu(x,y,f^*(x,y))| \in L_1(\mathbb{R}^2) \cap M(\mathbb{R}^2), \quad (24)$$

$$\chi_2(x,y) := (G(f(x,y)) - \eta) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} K(x-x', y-y') \times$$
$$\times |G(f(x',y')) - G(f^*(x',y'))|dx'dy' \in L_1(\mathbb{R}^2) \cap M(\mathbb{R}^2). \quad (25)$$

Действительно, учитывая (8), (12), (22) и условия a), b), II), 1)–3), будем иметь

$$0 \leqslant \chi_1(x,y) \leqslant 2g(x,y)(f(x,y) - \eta) \in L_1(\mathbb{R}^2) \cap M(\mathbb{R}^2),$$
$$0 \leqslant \chi_2(x,y) \leqslant 2G(\xi)(f(x,y) - \eta) \in L_1(\mathbb{R}^2) \cap M(\mathbb{R}^2),$$

Следовательно, включения (24) и (25) доказаны. Умножим обе части неравенства (23) на функцию $G(f(x,y)) - \eta$ и проинтегрируем полученное неравенство на $\mathbb{R}^2$. Принимая во внимание (24), (25), условия I), II), в силу теоремы Фубини получим

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (G(f(x,y)) - \eta)|f(x,y) - f^*(x,y)|dxdy \leqslant$$
$$\leqslant \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (G(f(x,y)) - \eta)|\mu(x,y,f(x,y)) - \mu(x,y,f^*(x,y))|dxdy +$$
$$+ \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (G(f(x,y)) - \eta) \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} K(x-x', y-y') \times$$
$$\times |G(f(x',y')) - G(f^*(x',y'))|dx'dy'dxdy =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (G(f(x,y)) - \eta)|\mu(x,y,f(x,y)) - \mu(x,y,f^*(x,y))|dxdy +$$
$$+ \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |G(f(x',y')) - G(f^*(x',y'))| \times$$
$$\times \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} K(x'-x, y'-y)(G(f(x,y)) - \eta)dxdydx'dy' =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (G(f(x,y)) - \eta)|\mu(x,y,f(x,y)) - \mu(x,y,f^*(x,y))|dxdy +$$
$$+ \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |G(f(x',y')) - G(f^*(x',y'))|(f(x',y') - \mu(x',y',f(x',y')) - \eta)dx'dy'.$$

Полученное неравенство в силу оценки (17) и определения множества $\mathcal{D}$ можно переписать в следующем виде:

$$\iint\limits_{\mathcal{D}} (f(x,y)-\eta)|f(x,y)-f^*(x,y)|\Big(\frac{G(f(x,y))-\eta}{f(x,y)-\eta} - \\ - \frac{G(f(x,y))-\eta}{f(x,y)-\eta}\cdot\frac{|\mu(x,y,f(x,y))-\mu(x,y,f^*(x,y))|}{|f(x,y)-f^*(x,y)|} - \\ - \frac{|G(f(x,y))-G(f^*(x,y))|}{|f(x,y)-f^*(x,y)|} + \\ + \frac{|G(f(x,y))-G(f^*(x,y))|}{|f(x,y)-f^*(x,y)|}\cdot\frac{\mu(x,y,f(x,y))}{f(x,y)-\eta}\Big)dxdy \leqslant 0. \quad (26)$$

Учитывая условие c), можем утверждать, что для всех $(x,y)\in\mathcal{D}$ имеем

$$\frac{\mu(x,y,f(x,y))}{f(x,y)-\eta} > \frac{\mu(x,y,f(x,y))}{f(x,y)} > \frac{|\mu(x,y,f(x,y))-\mu(x,y,f^*(x,y))|}{|f(x,y)-f^*(x,y)|}, \quad (27)$$

$$\mu(x,y,f(x,y)) < f(x,y). \quad (28)$$

Принимая во внимание (27), (28) и (26), приходим к следующему неравенству:

$$\iint\limits_{\mathcal{D}} (f(x,y)-\eta)|f(x,y)-f^*(x,y)|\Big(\frac{G(f(x,y))-\eta}{f(x,y)-\eta} - \\ - \frac{G(f(x,y))-\eta}{f(x,y)-\eta}\cdot\frac{\mu(x,y,f(x,y))}{f(x,y)} - \frac{|G(f(x,y))-G(f^*(x,y))|}{|f(x,y)-f^*(x,y)|} + \\ + \frac{|G(f(x,y))-G(f^*(x,y))|}{|f(x,y)-f^*(x,y)|}\cdot\frac{\mu(x,y,f(x,y))}{f(x,y)}\Big)dxdy \leqslant 0. \quad (29)$$

Из свойств нелинейности 1)–3) с учетом неравенств (17) и (21) имеем (см. рис. 2):

$$\frac{G(f(x,y))-\eta}{f(x,y)-\eta} > \frac{|G(f(x,y))-G(f^*(x,y))|}{|f(x,y)-f^*(x,y)|}, \quad (x,y)\in\mathcal{D}. \quad (30)$$

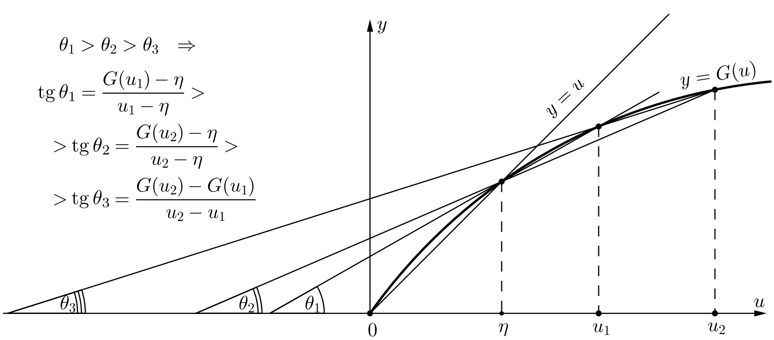


Рис. 2. [Figure 2]

Из оценок (30) и (28) в (29) приходим к противоречию. Следовательно, $f(x,y)=f^*(x,y)$, Теорема доказана. $\square$

Замечание 3. Отметим, что полученные результаты можно распространить на n-мерные аналоги ($n>2$) уравнения (1).

Приведем конкретные примеры нелинейностей μ, G и ядра K, удовлетворяющих всем условиям доказанных теорем.

3.1. Примеры функции $\mu(x,y,u)$

μ_1) $\mu(x,y,u)=\mu_0(x,y)(1-e^{-u})$, $(x,y,u)\in\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^+$;

μ_2) $\mu(x,y,u)=\mu_0(x,y)\dfrac{u}{u+1}$, $(x,y,u)\in\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^+$;

μ_3) $\mu(x,y,u)=\dfrac{\mu_0(x,y)}{2}\Big(\dfrac{u}{u+1}+1-e^{-u}\Big)$, $(x,y,u)\in\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^+$, где $\mu_0\in L_1(\mathbb{R}^2)\cap C_M(\mathbb{R}^2)$ — произвольная положительная функция.

3.2. Примеры функции $G(u)$

g_1) $G(u)=\gamma(1-e^{-u})$, $\gamma>1$ — произвольный числовой параметр, а $u\in\mathbb{R}^+$;

g_2) $G(u)=u^\alpha$, $\alpha\in(0,1)$ — числовой параметр, $u\in\mathbb{R}^+$;

g_3) $G(u)=\dfrac{1}{2}\Big(\dfrac{u}{u+1}+u^\alpha\Big)$, $\alpha\in(0,1)$, $u\in\mathbb{R}^+$.

3.3. Примеры ядра $K(x,y)$

k_1) $K(x,y)=\dfrac{1}{\pi}e^{-(x^2+y^2)}$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$;

k_2) $K(x,y)=\displaystyle\int_a^b e^{-(|x|+|y|)s}d\sigma(s)$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, где $\sigma(s)$ — определенная на $[a,b)$, $0<a<b\leqslant+\infty$ монотонно возрастающая функция, удовлетворяющая равенству
$$\int_a^b\frac{1}{s^2}d\sigma(s)=\frac{1}{4}.$$

Подробно остановимся на примере μ_3). Проверка остальных примеров осуществляется аналогичным образом. Во-первых, очевидно, что $\mu\in C(\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^+)$ и $\sup\limits_{u\in\mathbb{R}^+}\mu(x,y,u)=\mu_0(x,y)\in L_1(\mathbb{R}^2)\cap C_M(\mathbb{R}^2)$.

Так как
$$\frac{\partial\mu}{\partial u}=\frac{\mu_0(x,y)}{2}\Big(\frac{1}{(u+1)^2}+e^{-u}\Big)>0,$$
$\mu\uparrow$ по u на $\mathbb{R}^+$. С другой стороны,
$$\frac{\partial^2\mu}{\partial u^2}=-\frac{\mu_0(x,y)}{2}\Big(\frac{2}{(u+1)^3}+e^{-u}\Big)<0.$$
Следовательно, $\mu(x,y,u)$ выпукла вверх по u на $\mathbb{R}^+$. Осталось проверить неравенство
$$\mu(x,y,u)<u \quad \text{при} \quad u>\eta. \tag{31}$$
Обозначим через $d:=\sup\limits_{(x,y)\in\mathbb{R}^2}\mu_0(x,y)<+\infty$. Тогда будем иметь
$$\mu(x,y,u)\leqslant\frac{d}{2}\Big(\frac{u}{u+1}+1-e^{-u}\Big)\leqslant\frac{d}{2}\frac{2u+1}{u+1}\leqslant d,\quad u\in\mathbb{R}^+.$$

Таким образом, если $d < \eta$, то оценка (31) будет выполнена.

Отметим, что приведенные примеры имеют также практическое значение в математической физике и в математической биологии (см. [1–6]).

Конкурирующие интересы. Заявляем, что в отношении авторства и публикации этой статьи конфликта интересов не имеем.

Авторский вклад и ответственность. Все авторы принимали участие в разработке концепции статьи и в написании рукописи. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

Финансирование. Исследование выполнено при финансовой поддержке Комитета по науке РА в рамках научного проекта № 21T-1A047.

Библиографический список

1. Volovich I. V. p-adic string // *Class. Quantum Grav.*, 1987. vol. 4, no. 4. pp. L83–L87. DOI: https://doi.org/10.1088/0264-9381/4/4/003.
2. Moeller N., Schnabl M. Tachyon condensation in open-closed p-adic string theory // *J. High Energ. Phys.*, 2004. vol. 2004, no. 01, 011, arXiv: hep-th/0304213. DOI: https://doi.org/10.1088/1126-6708/2004/01/011.
3. Владимиров В. С. О нелинейных уравнениях p-адических открытых, замкнутых и открыто-замкнутых струн // *Теорет. мат. физ.*, 2006. Т. 149, № 3. С. 354–367. EDN: HYLHJV. DOI: https://doi.org/10.4213/tmf5522.
4. Diekmann O. Thresholds and travelling waves for the geographical spread of infection // *J. Math. Biology*, 1978. vol. 6, no. 2. pp. 109–130. DOI: https://doi.org/10.1007/BF02450783.
5. Diekmann O., Kaper H. G. On the bounded solutions of a nonlinear convolution equation // *Nonlinear Anal., Theory Methods Appl.*, 1978. vol. 2, no. 6. pp. 721–737. DOI: https://doi.org/10.1016/0362-546X(78)90015-9.
6. Cercignani C. *The Boltzmann Equation and Applications* / Applied Mathematical Sciences. vol. 67. New York: Springer, 1988. 455 pp. DOI: https://doi.org/10.1007/978-1-4612-1039-9.
7. Aref'eva I. Ya., Volovich I. V. Cosmological daemon // *J. High Energ. Phys.*, 2011. vol. 2011, no. 8, 102, arXiv: 1103.0273 [hep-th]. DOI: https://doi.org/10.1007/JHEP08(2011)102.
8. Хачатрян Х. А., Петросян А. С., Аветисян М. О. Вопросы разрешимости одного класса нелинейных интегральных уравнений типа свертки в $\mathbb{R}^n$ // *Тр. ИММ УрО РАН*, 2018. Т. 24, № 3. С. 247–262. EDN: UXZCME. DOI: https://doi.org/10.21538/0134-4889-2018-24-3-247-262.
9. Хачатрян Х. А., Петросян А. С. О знакопеременных и ограниченных решениях одного класса нелинейных двумерных интегральных уравнений типа свертки // *Тр. ММО*, 2021. Т. 82, № 2. С. 313–327.
10. Хачатрян Х. А., Петросян А. С. О построении суммируемого решения одного класса нелинейных интегральных уравнений типа Гаммерштейна–Немыцкого на всей прямой // *Тр. ИММ УрО РАН*, 2020. Т. 26, № 2. С. 278–287. EDN: UTSHCD. DOI: https://doi.org/10.21538/0134-4889-2020-26-2-278-287.
11. Khachatryan A. Kh., Khachatryan Kh. A. Hammerstein–Nemytskii type nonlinear integral equations on half-line in space $L_1(0,+\infty) \cap L_\infty(0,+\infty)$ // *Acta Univ. Palacki. Olomuc., Fac. Rerum Nat., Math.*, 2013. vol. 52, no. 1. pp. 89–100.
12. Хачатрян А. Х., Хачатрян Х. А., Петросян А. С. О положительных ограниченных решениях одного класса нелинейных интегральных уравнений с оператором Гаммерштейна–Немыцкого // *Диффер. уравн.*, 2021. Т. 57, № 6. С. 784–795. EDN: BNGWGX. DOI: https://doi.org/10.31857/S0374064121060066.

13. Арабаджян Л. Г. О существовании нетривиальных решений некоторых линейных и нелинейных уравнений типа свертки // *Укр. мат. ж.*, 1989. Т. 41, № 12. С. 1587–1595.
14. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. *Элементы теории функций и функционального анализа.* М.: Наука, 1981. 542 с.
15. Арабаджян Л. Г., Хачатрян А. С. Об одном классе интегральных уравнений типа свертки // *Матем. сб.*, 2007. Т. 198, № 7. С. 45–62. EDN: IAUUZL. DOI: https://doi.org/10.4213/sm1483.

Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2023, vol. 27, no. 3, pp. 446–461
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu2013

MSC: 45G05

On the solvability of a class of nonlinear two-dimensional integral equations Hammerstein–Nemytskii type on the plane

***Kh. A. Khachatryan*[1], *H. S. Petrosyan*[2]**

[1] Yerevan State University,
1, A. Manukyan str., Yerevan, 0025, Armenia.
[2] Armenian National Agrarian University,
74, Marshal Teryan str., Yerevan, 0009, Armenia.

Abstract

We consider a class of nonlinear integral equations with a stochastic and symmetric kernel on the whole line. With certain particular representations of the kernel and nonlinearity, equations of the above character arise in many branches of mathematical natural science. In particular, such equations occur in the theory p-adic strings, in the kinetic theory of gases, in mathematical biology and in the theory of radiative transfer. Constructive existence theorems are proved for non-negative non-trivial and bounded solutions under various restrictions on the function describing the nonlinearity in the equation. Under additional restrictions on the kernel and on the nonlinearity, a uniqueness theorem is also proved in a certain class of bounded and non-negative functions that have a finite limit in $\pm\infty$. Specific applied examples of the kernel and non-linearity are given that satisfy all the restrictions of the proven statements.

Keywords: monotonicity, successive approximations, convergence, bounded solution, solution limit, Caratheodory condition.

Received: 19th April, 2023 / Revised: 13th June, 2023 /
Accepted: 25th June, 2023 / First online: 4th September, 2023

Competing interests. We declare that we have no conflicts of interest in the authorship and publication of this article.

Differential Equations and Mathematical Physics
Research Article

Please cite this article in press as:
Khachatryan Kh. A., Petrosyan H. S. On the solvability of a class of nonlinear two-dimensional integral equations Hammerstein–Nemytskii type on the plane, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2023, vol. 27, no. 3, pp. 446–461. EDN: LDWVUL. DOI: 10.14498/vsgtu2013 (In Russian).

Authors' Details:

Khachatur A. Khachatryan https://orcid.org/0000-0002-4835-943X
D.Sc. (Phys. & Math. Sci.), Professor; Head of the Dept.; Dept. of Theory of Functions and Differential Equations; e-mail: khachatur.khachatryan@ysu.am

Haykanush S. Petrosyan https://orcid.org/0000-0002-7172-4730
Cand. Phys. & Math. Sci., Associate Professor; Dept of Higher Mathematics and Physics; e-mail: haykuhi25@mail.ru

Authors' Responsibilities. The authors are absolutely responsible for submit the final manuscript to print. Each author has approved the final version of manuscript.

Funding. This research was supported by the Science Committee of the Republic of Armenia, scientific project no. 21T-1A047.

References

1. Volovich I. V. p-adic string, *Class. Quantum Grav.*, 1987, vol. 4, no. 4, pp. L83–L87. DOI: https://doi.org/10.1088/0264-9381/4/4/003.
2. Moeller N., Schnabl M. Tachyon condensation in open-closed p-adic string theory, *J. High Energ. Phys.*, 2004, vol. 2004, no. 01, 011, arXiv: hep-th/0304213. DOI: https://doi.org/10.1088/1126-6708/2004/01/011.
3. Vladimirov V. S. Nonlinear equations for p-adic open, closed, and open-closed strings, *Theoret. and Math. Phys.*, 2006, vol. 149, no. 3, pp. 1604–1616. EDN: LJOAVJ. DOI: https://doi.org/10.1007/s11232-006-0144-z.
4. Diekmann O. Thresholds and travelling waves for the geographical spread of infection, *J. Math. Biology*, 1978, vol. 6, no. 2, pp. 109–130. DOI: https://doi.org/10.1007/BF02450783.
5. Diekmann O., Kaper H. G. On the bounded solutions of a nonlinear convolution equation, *Nonlinear Anal., Theory Methods Appl.*, 1978, vol. 2, no. 6, pp. 721–737. DOI: https://doi.org/10.1016/0362-546X(78)90015-9.
6. Cercignani C. *The Boltzmann Equation and Applications*, Applied Mathematical Sciences, vol. 67. New York, Springer, 1988, 455 pp. DOI: https://doi.org/10.1007/978-1-4612-1039-9.
7. Aref'eva I. Ya., Volovich I. V. Cosmological daemon, *J. High Energ. Phys.*, 2011, vol. 2011, no. 8, 102, arXiv: 1103.0273 [hep-th]. DOI: https://doi.org/10.1007/JHEP08(2011)102.
8. Khachatryan Kh. A., Petrosyan H. S., Avetisyan M. H. Solvability issues for a class of convolution type nonlinear integral equations in $\mathbb{R}^n$, *Trudy Inst. Mat. Mekh. UrO RAN*, 2018, vol. 24, no. 3, pp. 247–262 (In Russian). EDN: UXZCME. DOI: https://doi.org/10.21538/0134-4889-2018-24-3-247-262.
9. Khachatryan Kh. A., Petrosyan H. S. Alternating bounded solutions of a class of nonlinear two-dimensional convolution-type integral equations, *Trans. Moscow Math. Soc.*, 2021, vol. 82, pp. 259–271. EDN: JDJCFK. DOI: https://doi.org/10.1090/mosc/329.
10. Khachatryan Kh. A., Petrosyan H. S. On the construction of an integrable solution to one class of nonlinear integral equations of Hammerstein–Nemytskii type on the whole axis, *Trudy Inst. Mat. Mekh. UrO RAN*, 2020, vol. 26, no. 2, pp. 278–287 (In Russian). EDN: UTSHCD. DOI: https://doi.org/10.21538/0134-4889-2020-26-2-278-287.
11. Khachatryan A. Kh., Khachatryan Kh. A. Hammerstein–Nemytskii type nonlinear integral equations on half-line in space $L_1(0,+\infty) \cap L_\infty(0,+\infty)$, *Acta Univ. Palacki. Olomuc., Fac. Rerum Nat., Math.*, 2013, vol. 52, no. 1, pp. 89–100.
12. Khachatryan A. Kh., Khachatryan Kh. A., Petrosyan H. S. On positive bounded solutions of one class of nonlinear integral equations with the Hammerstein–Nemytskii operator, *Differ. Equat.*, 2021, vol. 57, no. 6, pp. 768–779. EDN: UVRUYT. DOI: https://doi.org/10.1134/S0012266121060069.
13. Arabadzhyan L. G. Existence of nontrivial solutions of certain linear and nonlinear convolution-type equations, *Ukr. Math. J.*, 1989, vol. 41, no. 12, pp. 1359-1367. DOI: https://doi.org/10.1007/BF01056100.
14. Kolmogorov A. N., Fomin S. V. *Elementy teorii funktsii i funktsional'nogo analiza* Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis. Moscow, Nauka, 1981, 542 pp. (In Russian)
15. Arabadzhyan L. G., Khachatryan A. S. A class of integral equations of convolution type, *Sb. Math.*, 2007, vol. 198, no. 7, pp. 949–966. EDN: XLRESL. DOI: https://doi.org/10.1070/SM2007v198n07ABEH003868.

Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2023. Т. 27, № 3. С. 462–475
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu1966
EDN: CXHXMY

УДК 517.958:531–133

Упругая составная плоскость с частично оторванным от матрицы межфазным абсолютно жестким тонким включением с учетом проскальзывания на концах

Акопян В. Н., Амирджанян А. А., Даштоян Л. Л., Саакян А. В.

Институт механики НАН Республики Армения,
Армения, 0019, Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24Б.

Аннотация

Рассмотрено плоско-деформированное состояние базовой плоскости упругого составного пространства с трещиной конечной длины на линии соединения составляющих полуплоскостей. В один из берегов межфазной трещины под действием сосредоточенной силы вдавливается абсолютно жесткое тонкое включение такой же длины. Для контактирующей стороны включения полагается, что в средней ее части имеет место сцепление с матрицей, а по краям происходит проскальзывание, описываемое законом сухого трения. Задача сформулирована в виде системы сингулярных интегральных уравнений. Исследовано поведение искомых функций в окрестности концов включения-трещины и в точках раздела зон сцепления и проскальзывания. Определяющая система интегральных уравнений решается методом механических квадратур. Найдены законы распределения контактных напряжений, а также длины зон сцепления и проскальзывания в зависимости от коэффициента трения, коэффициентов Пуассона и отношения модулей Юнга материалов полуплоскостей, а также угла наклона внешней силы.

Механика деформируемого твердого тела
Научная статья

Образец для цитирования
Акопян В. Н., Амирджанян А. А., Даштоян Л. Л., Саакян А. В. Упругая составная плоскость с частично оторванным от матрицы межфазным абсолютно жестким тонким включением с учетом проскальзывания на концах // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2023. Т. 27, № 3. С. 462–475. EDN: CXHXMY. DOI: 10.14498/vsgtu1966.

Сведения об авторах

Ваграм Наслетникович Акопян https://orcid.org/0000-0003-3684-9471
доктор физико-математических наук; главный научный сотрудник; отд. механики упругих и вязкоупругих тел; e-mail: vhakobyan@sci.am

Арутюн Арменович Амирджанян https://orcid.org/0009-0008-8417-7319
кандидат физико-математических наук; ведущий научный сотрудник; отд. механики упругих и вязкоупругих тел; e-mail: amirjanyan@gmail.com

Лилит Левоновна Даштоян https://orcid.org/0009-0008-4737-4524
кандидат физико-математических наук; ученый секретарь; e-mail: lilit.dashtoyan@sci.am

Аветик Вараздатович Саакян https://orcid.org/0000-0002-5904-6201
доктор физико-математических наук; ведущий научный сотрудник; отд. механики упругих и вязкоупругих тел; e-mail: avetik.sahakyan@sci.am

Ключевые слова: контактная задача, межфазная трещина, включение, составная плоскость.

Получение: 25 ноября 2022 г. / Исправление: 23 августа 2023 г. / Принятие: 18 сентября 2023 г. / Публикация онлайн: 23 сентября 2023 г.

Введение. Вопросы исследования поля напряжений вокруг концентраторов напряжений типа трещин, штампов, накладок, включений и др. всегда находились и продолжают находиться в центре внимания специалистов, занимающихся прочностью, надежностью и долговечностью конструкций и сооружений. Эти задачи, смоделированные как взаимодействие указанных концентраторов напряжений с массивными телами в виде пространства, полупространства, слоя и др., которые в рамках плоской задачи теории упругости вырождаются в плоскость, полуплоскость, полосу и др., составляют одно из важнейших направлений контактных и смешанных задач теории упругости и механики разрушения. Среди очень многих работ в этом направлении отметим известные монографии [1–5], содержащие достаточно много фундаментальных результатов. В отдельных случаях удается получить замкнутые или точные решения, позволяющие более глубоко изучить особенности поведения локальных полей разрушающих напряжений вблизи концевых точек концентраторов напряжений. В этой связи укажем на монографию [6] и на работы [7–9], в которых получены точные решения ряда задач для однородной ортотропной плоскости, составной плоскости и пространства с межфазными трещинами. В указанных работах предполагалось, что в один или в оба берега трещины вдавливается абсолютно жесткий штамп при различных условиях контакта: либо штамп полностью сцеплен с берегом трещины, либо между ними имеет место гладкий контакт, либо во всей зоне контакта имеет место сухое трение.

Л. А. Галиным [9] была предложена модель контакта штампа с упругой полуплоскостью, когда в средней части зоны контакта имеет место сцепление, а по ее краям происходит проскальзывание, подчиняющееся закону сухого трения Кулона. При помощи конформного отображения Л. А. Галиным было построено приближенное решение в замкнутом виде. Интерес к такой модели контактной задачи проявляли многие исследователи, используя разные подходы и методы для ее решения [10–15]. В частности, в работе [14] контактная задача Галина решена методом механических квадратур, показано совпадение численных результатов с результатами других авторов. В работе [16] в рамках плоского деформирования упругого пространства и модели задачи Галина было рассмотрено напряженное состояние упругой однородной плоскости с трещиной конечной длины, в один из берегов которой вдавливается абсолютно жесткий тонкий штамп такой же длины.

В настоящей работе с опорой на результаты работы [7] расширяется круг применения контактной модели Галина и рассматривается задача работы [16], но уже для кусочно-однородного пространства, составленного из двух разнородных полупространств и содержащего частично оторванное от матрицы, тонкое абсолютно жесткое межфазное включение в виде бесконечной полосы. Проводится анализ влияния неоднородности на напряженное состояние под включением.

Поскольку рассматриваемая здесь задача отличается от задачи, рассмотренной в [16], лишь тем, что однородная плоскость заменена на составную, очевидно, что текстовая часть постановки задачи в основном повторяет таковую в работе [16]. Тем не менее она здесь приводится для полноты описания поставленной задачи.

1. Постановка задачи и вывод определяющей системы интегральных уравнений. Пусть имеем упругое пространство, составленное из двух разнородных полупространств, которое в плоскости их соединения содержит сквозную трещину конечной ширины. Полагая, что пространство находится в условиях плоской деформации, сформулируем задачу для ее базовой плоскости $z = 0$ декартовой системы координат xyz, ось ординат которой находится в плоскости раздела материалов, а ось аппликат направлена вдоль срединной линии трещины. Итак, имеем упругую составную плоскость, которая составлена из двух разнородных полуплоскостей и на интервале $(-a, a)$ линии раздела материалов содержит трещину. Полагаем, что внутри трещины имеется абсолютно жесткое тонкое включение такой же длины, которое предварительно не сцеплено с матрицей и под воздействием сосредоточенной силы P_0, приложенной к средней точке верхней грани, вдавливается в берег трещины. Контакт включения с матрицей описывается моделью контактной задачи Л. А. Галина [9], т.е. считается, что на некотором интервале (b, c) средней части нижней стороны включения имеет место сцепление с матрицей, а на концевых интервалах $(-a, b,)$ и (c, a) происходит проскальзывание, подчиняющееся закону сухого трения (см. рис. 1).

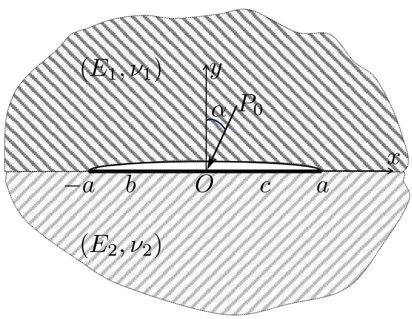


Рис. 1. Схематическое представление задачи
[Figure 1. Schematic representation of the problem]

Необходимо определить размеры зон сцепления и скольжения, контактные напряжения, возникающие под включением, и коэффициенты концентрации разрушающих напряжений в концевых точках концентратора напряжений смешанного типа — включение-трещина.

Рассматривая каждую из составляющих полуплоскостей отдельно и снабдив компоненты напряжений и смещений, относящиеся к точкам верхней и нижней полуплоскостей, верхними индексами (1) и (2) соответственно, на интервалах $(-a, a)$ каждой полуплоскости будем иметь следующие условия:

$$\sigma_y^{(1)}(x, 0) = 0, \quad \tau_{xy}^{(1)}(x, 0) = 0, \quad x \in (-a, a); \tag{1}$$

$$u_2'(x, 0) = 0, \quad x \in (b, c); \tag{2}$$

$$v_2'(x,0)=0,\quad x\in(-a,a); \tag{3}$$

$$\tau_{xy}^{(2)}(x,0)=-f\,\mathrm{sgn}(x)\sigma_y^{(2)}(x,0),\quad x\in(-a,b)\cup(c,a), \tag{4}$$

где $u_j(x,y)$ и $v_j(x,y)$ — компоненты смещения; $\sigma_y^{(j)}(x,y)$, $\tau_{xy}^{(j)}(x,y)$ — компоненты напряжений соответствующих полуплоскостей; $j=1,2$; f — коэффициент трения между включением и матрицей.

Пользуясь разрывными решениями для кусочно-однородной упругой плоскости с разрезом [6], позволяющими выразить все компоненты вектора перемещений и тензора напряжений через скачки напряжений и перемещений на интервале $(-a,a)$, выпишем выражения, необходимые для удовлетворения (1)–(3):

$$\sigma_y^{(1)}(x,0)=\frac{1}{\pi\Delta}\left[\pi\theta_1\sigma(x)+\theta_2\int_{-a}^{a}\frac{\tau(s)}{s-x}ds+\pi\mu_2\theta_3u'(x)-\mu_2\theta_4\int_{-a}^{a}\frac{v'(s)}{s-x}ds\right];$$

$$\tau_{xy}^{(1)}(x,0)=\frac{1}{\pi\Delta}\left[\pi\theta_1\tau(x)-\theta_2\int_{-a}^{a}\frac{\sigma(s)}{s-x}ds-\pi\mu_2\theta_3v'(x)-\mu_2\theta_4\int_{-a}^{a}\frac{u'(s)}{s-x}ds\right];$$

$$v_2'(x,0)=-\frac{1}{\pi\Delta}\left[\pi\theta_1v'(x)+\theta_2\int_{-a}^{a}\frac{u'(s)}{s-x}ds+\pi\frac{\theta_5}{\mu_2}\tau(x)+\frac{\theta_6}{\mu_2}\int_{-a}^{a}\frac{\sigma(s)}{s-x}ds\right];$$

$$u_2'(x,0)=\frac{1}{\pi\Delta}\left[-\pi\theta_1u'(x)+\theta_2\int_{-a}^{a}\frac{v'(s)}{s-x}ds+\pi\frac{\theta_5}{\mu_2}\sigma(x)-\frac{\theta_6}{\mu_2}\int_{-a}^{a}\frac{\tau(s)}{s-x}ds\right].$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
&\sigma(x)=\sigma_y^{(1)}(x,0)-\sigma_y^{(2)}(x,0);\quad \tau(x)=\tau_{xy}^{(1)}(x,0)-\tau_{xy}^{(2)}(x,0);\\
&u(x)=u^{(1)}(x,0)-u^{(2)}(x,0);\quad v(x)=v^{(1)}(x,0)-v^{(2)}(x,0);\\
&\Delta=(\mu+\kappa_1)(1+\mu\kappa_2);\quad \mu=\mu_1/\mu_2;\quad \kappa_i=3-4\nu_i;\\
&\theta_1=\mu[\kappa_2\mu+4(1-\nu_2)(1-\nu_1)+(1-2\nu_2)(1-2\nu_1)];\\
&\theta_2=2\mu[(1-2\nu_1)(1-\nu_2)+(1-2\nu_2)(1-\nu_1)];\\
&\theta_3=2\mu[\mu(1-2\nu_2)-(1-2\nu_1)];\quad \theta_4=-4\mu[\mu(1-\nu_2)+(1-\nu_1)];\\
&\theta_5=\frac{1}{2}[\kappa_2(1-2\nu_1)\mu-\kappa_1(1-2\nu_2)];\quad \theta_6=\kappa_2(1-\nu_1)\mu+\kappa_1(1-\nu_2);
\end{aligned} \tag{5}$$

μ — отношение модулей сдвига μ_1 и μ_2 материалов полуплоскостей, а ν_1 и ν_2 — соответствующие коэффициенты Пуассона.

Удовлетворяя условиям граничной задачи (1)–(3) с учетом условия (4), придем к разрешающей системе сингулярных интегральных уравнений

$$\pi\frac{\theta_1}{\mu_2}\sigma(x)+\frac{\theta_2}{\mu_2}\left(f\int_{-a}^{b}\frac{\sigma(s)}{s-x}ds+\int_{b}^{c}\frac{\tau(s)}{s-x}ds-f\int_{c}^{a}\frac{\sigma(s)}{s-x}ds\right)+$$
$$+\pi\theta_3u'(x)-\theta_4\int_{-a}^{a}\frac{v'(s)}{s-x}ds=0,\quad x\in(-a,a);$$

$$\pi\frac{\theta_1}{\mu_2}\tau(x)-\frac{\theta_2}{\mu_2}\int_{-a}^{a}\frac{\sigma(s)}{s-x}ds-\pi\theta_3v'(x)-\theta_4\int_{-a}^{a}\frac{u'(s)}{s-x}ds=0,\qquad x\in(-a,a);$$

$$\pi\theta_1 v'(x) + \theta_2 \int_{-a}^{a} \frac{u'(s)}{s-x} ds + \pi \frac{\theta_5}{\mu_2} \tau(x) + \frac{\theta_6}{\mu_2} \int_{-a}^{a} \frac{\sigma(s)}{s-x} ds = 0, \quad x \in (-a, a); \quad (6)$$

$$-\pi\theta_1 u'(x) + \theta_2 \int_{-a}^{a} \frac{v'(s)}{s-x} ds + \pi \frac{\theta_5}{\mu_2} \sigma(x) - \\ - \frac{\theta_6}{\mu_2} \left(-f \int_{-a}^{b} \frac{\sigma(s)}{s-x} ds + \int_{b}^{c} \frac{\tau(s)}{s-x} ds + f \int_{c}^{a} \frac{\sigma(s)}{s-x} ds \right) = 0, \quad x \in (b, c)$$

при условиях смыкания концов трещины и равновесия штампа, которые в обозначениях (5) имеют вид

$$\begin{gathered} \int_{-a}^{a} v'(s) ds = 0; \quad \int_{-a}^{a} u'(s) ds = 0; \quad \int_{-a}^{a} \sigma(s) ds = P \cos\alpha; \\ -f \int_{-a}^{b} \frac{\sigma(s)}{s-x} ds + \int_{b}^{c} \frac{\tau(s)}{s-x} ds + f \int_{c}^{a} \frac{\sigma(s)}{s-x} ds = P \sin\alpha. \end{gathered} \quad (7)$$

В полученной системе (6) уравнения имеют различные области определения, что приводит к необходимости рассматривать искомые функции как самостоятельные неизвестные на каждом из интервалов $(-a, b)$, (b, c) и (c, a). Поскольку тангенциальное контактное напряжение $\tau(s)$ неизвестно только на среднем из указанных интервалов, а остальные три $u'(s)$, $v'(s)$, $\sigma(s)$ — на всех трех интервалах, придем к определению десяти неизвестных функций. Аналогично, рассматривая первые три уравнения системы (6) на каждом из указанных интервалов раздельно, получим новую систему из десяти уравнений относительно десяти неизвестных функций.

Решение полученной системы найдем при помощи метода механических квадратур [17]. Для этого, отнеся компоненты напряжений к модулю сдвига μ_2 нижней полуплоскости и сведя каждый из интервалов определения уравнений к интервалу $(-1, 1)$, перейдем к безразмерным величинам. Новыми неизвестными будут

$$\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}^{(\mathrm{ol,i,or})} = \{u', v', \sigma/\mu_2\}, \quad \varphi_4^{(\mathrm{i})} = \tau/\mu_2, \quad (8)$$

которые определены на интервале $(-1, 1)$ и отмечены верхними индексами (ol) (outer-left), (i) (internal) и (or) (outer-right) в соответствии с интервалами $(-a, b)$, (b, c) и (c, a).

В итоге получим систему из десяти сингулярных интегральных уравнений второго рода, структурно похожих на следующее уравнение:

$$\pi\theta_1 \varphi_3^{(\mathrm{ol})}(\eta) + \theta_2 \left[f \int_{-1}^{1} \frac{\varphi_3^{(\mathrm{ol})}(\xi)}{\xi-\eta} d\xi + \int_{-1}^{1} \frac{\varphi_4^{(\mathrm{i})}(\xi)}{\xi - z_0} d\xi - f \int_{-1}^{1} \frac{\varphi_3^{(\mathrm{or})}(\xi)}{\xi - z_1} d\xi \right] + \\ + \pi\theta_3 \varphi_1^{(\mathrm{ol})}(\eta) + \theta_4 \left[\int_{-1}^{1} \frac{\varphi_2^{(\mathrm{ol})}(\xi)}{\xi-\eta} d\xi + \int_{-1}^{1} \frac{\varphi_2^{(\mathrm{i})}(\xi)}{\xi - z_0} d\xi + \int_{-1}^{1} \frac{\varphi_2^{(\mathrm{or})}(\xi)}{\xi - z_1} d\xi \right] = 0, \ \eta \in (-1, 1),$$

где $b^* = b/a < 1$, $c^* = c/a < 1$;

$$z_0 = \frac{b^*+1}{c^*-b^*}\eta - \frac{1+c^*}{c^*-b^*}, \quad z_1 = \frac{b^*+1}{1-c^*}\eta - \frac{2+c^*-b^*}{1-c^*}.$$

Решение системы будем искать в классе функций, имеющих степенное поведение в окрестности концов интервала интегрирования и представимых в виде

$$\Phi(x) = (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}\Phi_*(x), \quad \alpha,\ \beta > -1,$$

где функция $\Phi_*(x)$ удовлетворяет условию Гельдера на отрезке $[-1,1]$.

Подставляя эти представления в определяющую систему уравнений и исследуя поведение уравнений в окрестности точек ± 1, с учетом известных результатов Н. И. Мусхелишвили о поведении интеграла типа Коши у концов линии интегрирования [18], получаем систему уравнений для определения показателей α и β. Учитывая большое число уравнений, считаем нецелесообразным представлять здесь эти уравнения. Отметим лишь, что поведение искомых функций в окрестности точек раздела зон сцепления и скольжения определяется однозначно и повторяет, как и следовало ожидать, их поведение в случае аналогичной задачи для однородной плоскости [16], а для определения показателей особенности искомых функций в концевых точках включения получаем следующие уравнения:

$$\begin{aligned}
&{\alpha^{(\mathrm{or})}}^3(1-\alpha_D) + {\alpha^{(\mathrm{or})}}^2 f(\beta_D + \alpha_D\beta_D - \vartheta_2) - \\
&\qquad - \alpha^{(\mathrm{or})}(1+\alpha_D - 2\beta_D^2) + \beta_D f(1+\alpha_D - \beta_D\vartheta_2) = 0, \\
&{\beta^{(\mathrm{ol})}}^3(1-\alpha_D) - {\beta^{(\mathrm{ol})}}^2 f(\beta_D + \alpha_D\beta_D - \vartheta_2) - \\
&\qquad - \beta^{(\mathrm{ol})}(1+\alpha_D - 2\beta_D^2) - \beta_D f(1+\alpha_D - \beta_D\vartheta_2) = 0.
\end{aligned} \tag{9}$$

Здесь для упрощения записи использовались известные параметры Дандерса [19]:

$$\alpha_D = \frac{\mu(1-\nu_2) - (1-\nu_1)}{\mu(1-\nu_2) + (1-\nu_1)}, \quad \beta_D = \frac{1}{2}\frac{\mu(1-2\nu_2) - (1-2\nu_1)}{\mu(1-\nu_2) + (1-\nu_1)}$$

и обозначение

$$\vartheta_2 = \frac{1-2\nu_2}{1-\nu_2}.$$

Уравнения (9), в отличие от случая однородной плоскости [16], могут в зависимости от упругих характеристик полуплоскостей иметь как три различных вещественных корня, так и один вещественный и два комплексно-сопряженных корня. Последний случай означает, что, несмотря на рассмотрение задачи в рамках модели контакта Галина, осцилляция напряжений в концевых точках будет сохраняться. В первом же случае осцилляции напряжений на концах удается избежать. В отличие от однородного случая [16] корни уравнений (9) не выписываются аналитически, а вычисляются численно и поэтому здесь не приводятся. С дальнейшей процедурой введения новых искомых функций, поведение которых на концах интервала $(-1,1)$ определяется однозначно, можно ознакомиться в работе [16].

В итоге решение поставленной задачи сводится к системе из десяти сингулярных интегральных уравнений относительно десяти искомых функций с определенными весовыми функциями и шести постоянных, представляющих собой конечные значения искомых функций на концах внутреннего участка зоны контакта. Для определения последних, а также координат концов зоны сцепления b^* и c^* используются трансформированные соответствующим образом условия (7). Наличие в определяющей системе отличных друг от друга весовых функций предполагает использование метода механических квадратур [17] с различными узлами и разным числом точек коллокации в зависимости от того, обращается ли весовая функция под сингулярным интегралом в бесконечность на одном конце или ни на одном.

2. Численный анализ. Решение разрешающей системы построим методом механических квадратур. При одинаковом для всех функций порядке аппроксимации n будем иметь $10n + 6$ неизвестных: $10n$ значений регулярных частей искомых функций в соответствующих узловых точках и шесть постоянных, описанных выше. Шесть весовых функций, соответствующих зонам скольжения, на одном из концов обращаются в бесконечность, на другом в ноль, а четыре функции, соответствующие зоне сцепления, на обоих концах обращаются в ноль. Следовательно, выбрав для шести уравнений n точек коллокации, а для четырех — $n+1$ точку коллокации, получаем $10n+4$ уравнений. Для замыкания полученной системы линейных алгебраических уравнений к ней следует добавить два из дискретизированных условий (7), соответствующих условиям равновесия включения. Два других из условий (7) необходимы для определения координат точек раздела зон сцепления и проскальзывания b^* и c^*, которые нелинейным образом входят в матрицу полученной системы линейных алгебраических уравнений.

Анализ результатов, полученных при различных порядках аппроксимации, показал, что уже при $n = 6$ для функций $\psi_{k*}^{(\mathrm{ol})}$ и $\psi_{k*}^{(\mathrm{or})}$ $(k = 1, 2, 3)$ и $n = 10$ для функций $\varphi_{k*}^{(i)}$ $(k = 1, 2, 3, 4)$ достигается точность порядка 10^{-4}, которой вполне достаточно для графического представления результатов, поэтому дальнейшие расчеты проводились при этих значениях порядков аппроксимации. Указанные функции являются регулярными функциями соответствующих неизвестных функций (8) согласно представлению решения определяющей системы из 10 сингулярных интегральных уравнений в виде произведения выделенной особенности на регулярную функцию.

Проведен численный анализ распределения контактных напряжений, когда угол наклона приложенной силы принят $\alpha = 0.02$, коэффициент трения — $f = 0.075$, коэффициент Пуассона верхней полуплоскости — $\nu_1 = 0.2$. На рис. 2 представлены кривые распределения контактного давления для разных значений отношения модулей сдвига полуплоскостей $\mu = 0.9$, 1.25, 1.5 при $\nu_2 = 0.25$ и коэффициента Пуассона $\nu_2 = 0.2$, 0.25, 0.3 при $\mu = 1.5$, на рис. 3 — соответствующие кривые распределения тангенциальных напряжений.

Также были рассчитаны контактные напряжения при разных коэффициентах Пуассона верхней полуплоскости $\nu_1 = 0.2$, 0.3, но их влияние оказалось намного меньше и сказывалось, главным образом, на координате левого конца зоны сцепления b^* и величине контактных напряжений в его окрестности.

Следует отметить, что кривые распределения контактных напряжений под включением качественно повторяют кривые их распределения для однородной плоскости [16]. Как видно из рис. 2 и 3, изменение упругих характеристик составной плоскости не приводит к качественному изменению кривых,

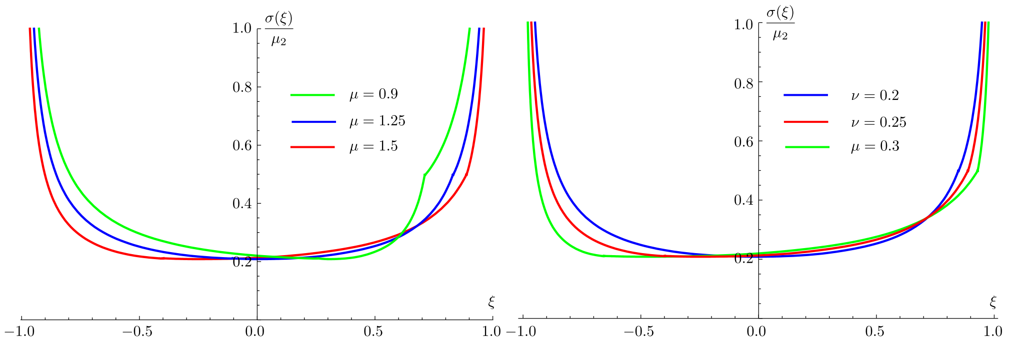


Рис. 2. Распределение безразмерных нормальных контактных напряжений для разных значений отношения $\mu = \mu_1/\mu_2$ и коэффициента Пуассона ν_2 (онлайн в цвете)
[Figure 2 (color online). Distribution of dimensionless normal contact stresses for different values of the ratio $\mu = \mu_1/\mu_2$ and Poisson's ratio ν_2]

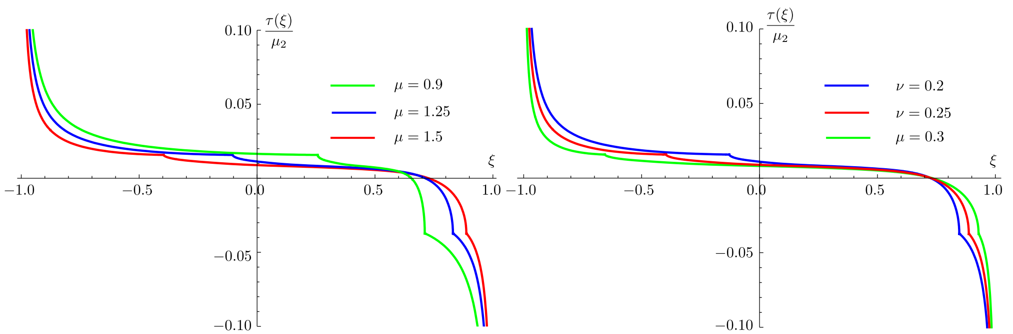


Рис. 3. Распределение безразмерных тангенциальных контактных напряжений для разных значений отношения $\mu = \mu_1/\mu_2$ и коэффициента Пуассона ν_2 (онлайн в цвете)
[Figure 3 (color online). Distribution of dimensionless tangential contact stresses for different values of the ratio $\mu = \mu_1/\mu_2$ and Poisson's ratio ν_2]

а влияет на них, главным образом, посредством величин b^* и c^*, являющихся причиной их трансформации. Следовательно, имея эти значения, можно легко представить и кривые распределения напряжений, конечно, только качественно.

На рис. 4 представлены кривые зависимости b^* и c^* от отношения модулей сдвига $\mu = \mu_1/\mu_2$ для трех значений коэффициента трения f и двух значений коэффициента Пуассона ν_1. Здесь представлен симметричный случай нагружения ($\alpha = 0$) с целью показать, что при $\mu \to 0$ задача сводится к контактной задаче Галина для полуплоскости. Точками на оси ординат показаны значения $b^* = -c^*$ для задачи Галина при $\nu_2 = 0.3$, которые имеются в работе [15].

На рис. 4 приведены также кривые коричневого цвета, которые соответствуют значению $\nu_1 = 0.35$. Заметное различие между кривыми, соответствующими ризным коэффициентам Пуассона верхней полуплоскости, проявляется только при малых коэффициентах трения и близких друг к другу значениях модулей сдвига полуплоскостей.

На рис. 5 представлены кривые зависимости b^* и c^* от угла α приложения внешней силы при следующих значениях параметров $\nu_2 = 0.3$, $\nu_1 = 0.23$, $mu = 0.5$ для разных значений коэффициента трения f.

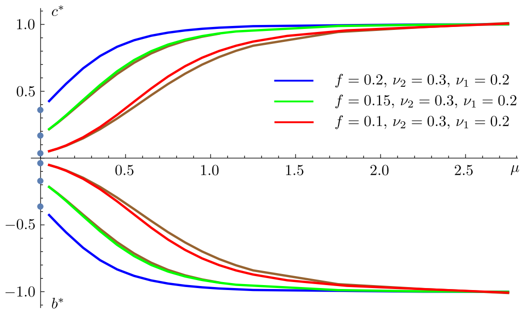


Рис. 4. Зависимость b^* и c^* от отношения $\mu = \mu_1/\mu_2$ (онлайн в цвете)
[Figure 4 (color online). Dependence of b^* and c^* on the ratio $\mu = \mu_1/\mu_2$]

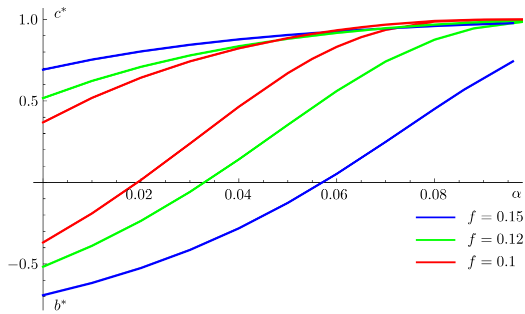


Рис. 5. Зависимость b^* и c^* от угла наклона внешней силы (онлайн в цвете)
[Figure 5 (color online). Dependence of b^* and c^* on the angle of inclination of the external force]

Как показывают графики, наклон силы приводит к уменьшению зоны сцепления и смещению ее в сторону наклона силы, что, в конечном итоге, приводит к вырождению зоны сцепления и происходит это тем раньше, чем меньше коэффициент трения.

Численный анализ зависимости b^* и c^* от коэффициентов Пуассона показал, что зависимость их от коэффициента Пуассона верхней полуплоскости мала, в то время как зависимость от коэффициента Пуассона нижней полуплоскости, как и в случае однородной плоскости, очень существенна. Расчеты показали, что при коэффициенте Пуассона ν_2, очень близком к значению 0.5, зона сцепления занимает всю зону контакта, в то время как при малых его значениях возможно даже вырождение этой зоны при том же коэффициенте трения.

Заключение. Выведена система определяющих уравнений достаточно сложной контактной задачи о вдавливании тонкого жесткого включения конечной длины в берег трещины такой же длины, находящейся в кусочно-однородной упругой плоскости, составленной из двух разнородных полуплоскостей. Задача рассматривается в рамках контактной задачи Галина, т.е. при наличии зон сцепления и проскальзывания. Определяющая система уравнений состоит из десяти сингулярных интегральных уравнений при четырех дополнительных условиях. Выделены особенности поведения искомых функций на концах интервала интегрирования. На основе метода механических квадратур разработана программа расчета в среде пакета `Wolfram Mathematica`, которая позволяет как найти законы распределения контактных напряжений, так и построить форму раскрытия трещины над включением. При помощи этой программы проведен подробный численный анализ зависимости координат концов зоны сцепления от всех параметров поставленной задачи.

Конкурирующие интересы. Конфликта интересов в отношении авторства и публикации этой статьи нет.

Авторский вклад и ответственность. Все авторы принимали участие в разработке концепции статьи и в написании рукописи. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

Финансирование. Работа выполнена в рамках проекта 21T–2C209 (Комитет по науке, Министерство образования, науки, культуры и спорта Республики Армения).

Библиографический список

1. Галин Л. А. *Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости.* М.: Наука, 1980. 304 с.
2. Попов Г. Я. *Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений.* М.: Наука, 1982. 344 с.
3. Панасюк В. В., Саврук М. П., Дацышин А. П. *Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках.* Киев: Наукова думка, 1976. 443 с.
4. Мусхелишвили Н. И. *Некоторые основные задачи математической теории упругости.* М.: Наука, 1966. 708 с.
5. Бережницкий Л. Т., Панасюк В. В., Стащук Н. Г. *Взаимодействие жестких линейных включений и трещин в деформируемом теле.* Киев: Наукова думка, 1983. 288 с.
6. Hakobyan V. N. *Stress Concentrators in Continuous Deformable Bodies* / Advanced Structured Materials. vol. 181. Cham: Springer, 2022. xx+380 pp. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-031-16023-3.
7. Hakobyan V. N., Hakobyan L. V. Dashtoyan L. L. Contact problem for a piecewise-homogeneous plane with an interfacial crack under dry friction // *J. Phys.: Conf. Ser.*, 2022. vol. 2231, 012024. DOI: https://doi.org/10.1088/1742-6596/2231/1/012024.
8. Ильина И. И., Сильвестров В. В. Задача о тонком жестком межфазном включении, отсоединившемся вдоль одной стороны от среды // *Изв. РАН. МТТ*, 2005. №3. С. 153–166. EDN: HSIWCR.
9. Галин Л. А. Вдавливание штампа при наличии трения и сцепления // *ПММ*, 1945. Т. 9, №5. С. 413–424.
10. Моссаковский В. И., Бискуп А. Г. Вдавливание штампа при наличии трения и сцепления // *Докл. АН СССР*, 1972. Т. 206, №5. С. 1068–1070.
11. Антипов Ю. А., Арутюнян Н. Х. Контактные задачи теории упругости при наличии трения и сцепления // *ПММ*, 1991. Т. 55, №6. С. 1005–1017.
12. Wayne Chen W., Jane Wang Q. A numerical model for the point contact of dissimilar materials considering tangential tractions // *Mech. Mater.*, 2008. vol. 40, no. 11. pp. 936–948. DOI: https://doi.org/10.1016/j.mechmat.2008.06.002.
13. Острик В. И. Вдавливание штампа в упругую полосу при наличии трения и сцепления // *Изв. РАН. МТТ*, 2011. №5. С. 118–129. EDN: OJMYEL.
14. Саакян А. В. Решение контактной задачи с зонами трения и сцепления (задача Галина) методом дискретных особенностей / *Развитие идей Л. А. Галина в механике: Сб. науч. тр.* М.–Ижевск, 2013. С. 103–120 http://www.mechins.sci.am/publ/avetik_sahakyan/ColGalin100.pdf.
15. Кротов С. В., Кононов Д. П., Пакулина Е. В. Напряженное состояние в контакте колеса и рельса при наличии скольжения и сцепления // *Известия Петербургского университе-*

тета путей сообщения, 2021. Т. 18, № 2. С. 177–187. EDN: LRITHA. DOI: https://doi.org/10.20295/1815-588X-2021-2-177-187.

16. Hakobyan V. N., Amirjanyan H. A., Dashtoyan L. L., Sahakyan A. V. Indentation of an absolutely rigid thin inclusion into one of the crack faces in an elastic plane under slippage at the ends / *H. Altenbach, S. M. Bauer, A. K. Belyaev, et al. (eds) Advances in Solid and Fracture Mechanics* / Advanced Structured Materials, 180. Cham: Springer, 2022. pp. 85–96. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-031-18393-5_6.
17. Sahakyan A. V., Amirjanyan H. A. Method of mechanical quadratures for solving singular integral equations of various types // *J. Phys.: Conf. Ser.*, 2018. vol. 991, 012070. DOI: https://doi.org/10.1088/1742-6596/991/1/012070.
18. Мусхелишвили Н. И. *Сингулярные интегральные уравнения. Граничные задачи теории функций и некоторые их приложения к математической физике.* М.: Наука, 1968. 510 с.
19. Dundurs J. Discussion: “Edge-bonded dissimilar orthogonal elastic wedges under normal and shear loading” (Bogy, D. B., 1968, ASME J. Appl. Mech., 35, pp. 460–466) // *J. Appl. Mech.*, 1969. vol. 36, no. 3. pp. 650–652. DOI: https://doi.org/10.1115/1.3564739.

Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2023, vol. 27, no. 3, pp. 462–475
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu1966

MSC: 74A45

Elastic compound plane with an interfacial absolutely rigid thin inclusion partially detached form the matrix subject to slippage at the ends

Hakobyan V. N., Amirjanyan H. A., Dashtoyan L. L., Sahakyan A. V.

Institute of Mechanics, National Academy of Sciences of the Republic of Armenia,
24B, Marshal Baghramyan ave., Yerevan, 0019, Armenia.

Abstract

This article discusses the stress state of an elastic composite plane with a crack of finite length on the joining line of the half-planes. An absolutely rigid thin inclusion of the same length is indented into one of the edges of an interfacial crack under the action of a concentrated force. It is assumed that for the contacting side of the inclusion, there is adhesion to the matrix in its middle part, and slippage occurs along the edges, which is described by the law of dry friction. The problem is mathematically formulated as a system of singular integral equations. The behavior of the unknown functions in the vicinity of the ends of the inclusion-crack and at the separation points of the adhesion and slip zones is studied. The governing system of integral equations is solved by the method of mechanical quadratures. The laws of distribution of contact stresses, as well as the lengths of the adhesion and slip zones, depending on the coefficient of friction, Poisson's ratios and the ratio of Young's moduli of the materials of half-planes, as well as the inclination angle of the external force, are found.

Mechanics of Solids
Research Article

Please cite this article in press as:
Hakobyan V. N., Amirjanyan H. A., Dashtoyan L. L., Sahakyan A. V. Elastic compound plane with an interfacial absolutely rigid thin inclusion partially detached form the matrix subject to slippage at the ends, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2023, vol. 27, no. 3, pp. 462–475. EDN: CXHXMY. DOI: 10.14498/vsgtu1966 (In Russian).

Authors' Details:

Vahram N. Hakobyan https://orcid.org/0000-0003-3684-9471
Dr. Phys. & Math. Sci., Professor; Main Researcher; Dep. of Elastic and Visco-Elastic Bodies; e-mail: vhakobyan@sci.am

Harutyun A. Amirjanyan https://orcid.org/0009-0008-8417-7319
Cand. Phys. & Math. Sci.; Leading Researcher; Dep. of Elastic and Visco-Elastic Bodies; e-mail: amirjanyan@gmail.com

Lilit L. Dashtoyan https://orcid.org/0009-0008-4737-4524
Cand. Phys. & Math. Sci.; Scientific Secretary; e-mail: lilit.dashtoyan@sci.am

Avetik V. Sahakyan https://orcid.org/0000-0002-5904-6201
Dr. Phys. & Math. Sci., Professor; Leading Researcher; Dep. of Elastic and Visco-Elastic Bodies; e-mail: avetik.sahakyan@sci.am

Keywords: contact problem, interfacial crack, inclusion, compound plane.

Received: 25th November, 2022 / Revised: 23rd August, 2023 /
Accepted: 18th September, 2023 / First online: 23rd September, 2023

Competing interests. We do not have any conflict of interest regarding the authorship and publication of this article.

Authors' contributions and responsibilities. All authors participated in the development of the article's concept and in writing the manuscript. Authors bear full responsibility for submitting the final manuscript for publication. The final version of the manuscript was approved by all authors.

Funding. The work was carried out within the framework of project no. 21T–2C209 (Science Committee, Ministry of Education, Science, Culture and Sport of the Republic of Armenia).

References

1. Galin L. A. *Kontaktnye zadachi teorii uprugosti i viazkouprugosti* [Contact Problems in the Theory of Elasticity and Viscoelasticity]. Moscow, Nauka, 1980, 304 pp. (In Russian)
2. Popov G. Ya. *Kontsentratsiia uprugikh napriazhenii vozle shtampov, razrezov, tonkikh vkliuchenii i podkreplenii* [Concentration of Elastic Stress around Stamps, Cuts, Thin Inclusions, and Reinforcements]. Moscow, Nauka, 1982, 344 pp. (In Russian)
3. Panasyuk V. V., Savruk M. P., Datsyshin A. P. *Raspredelenie napriazhenii okolo treshchin v plastinakh i obolochkakh* [Stress Distribution Around Cracks in Plates and Shells]. Kiev, Naukova Dumka, 1976, 443 pp. (In Russian)
4. Muskhelishvili N. I. *Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity*. Netherlands, Springer, 1977, xxxi+732 pp. DOI: https://doi.org/10.1007/978-94-017-3034-1.
5. Berezhnitskii L. T., Panasyuk V. V., Stashchuk N. G. *Vzaimodeistvie zhestkikh lineinykh vkliuchenii i treshchin v deformiruemom tele* [The Interaction of Rigid Linear Inclusions and Cracks in a Deformable Body]. Kiev, Naukova Dumka, 1983, 288 pp. (In Russian)
6. Hakobyan V. N. *Stress Concentrators in Continuous Deformable Bodies*, Advanced Structured Materials, vol. 181. Cham, Springer, 2022, xx+380 pp. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-031-16023-3.
7. Hakobyan V. N., Hakobyan L. V. Dashtoyan L. L. Contact problem for a piecewise-homogeneous plane with an interfacial crack under dry friction, *J. Phys.: Conf. Ser.*, 2022, vol. 2231, 012024. DOI: https://doi.org/10.1088/1742-6596/2231/1/012024.
8. Il'ina I. I., Sil'vestrov V. V. The problem of a thin interfacial inclusion detached from the medium along one side, *Mech. Solids.*, 2005, vol. 40, no. 3, pp. 123–133. EDN: XWSPZL.
9. Galin L. A. Indentation of a punch in the presence of friction and adhesion, *Prikl. Mat. Mekh.* [J. Appl. Math. Mech.], 1945, vol. 9, no. 5, pp. 413–424.
10. Mossakovskii V. I., Biskup A. G. Impression of a stamp with friction and adhesion present, *Sov. Phys., Dokl*, 1972, vol. 17, no. 10, pp. 984–986.
11. Antipov Yu. A., Arutyunyan N. Kh. Contact problems of the theory of elasticity with friction and adhesion, *J. Appl. Math. Mech.*, 1991, vol. 55, no. 6, pp. 887–901. DOI: https://doi.org/10.1016/0021-8928(91)90142-H.
12. Wayne Chen W., Jane Wang Q. A numerical model for the point contact of dissimilar materials considering tangential tractions, *Mech. Mater.*, 2008, vol. 40, no. 11, pp. 936–948. DOI: https://doi.org/10.1016/j.mechmat.2008.06.002.
13. Ostrik V. I. Indentation of a punch into an elastic strip with friction and adhesion, *Mech. Solids*, 2011, vol. 46, no. 5, pp. 755–765. EDN: XKMKHH. DOI: https://doi.org/10.3103/S0025654411050098.

14. http://www.mechins.sci.am/publ/avetik_sahakyan/ColGalin100.pdf Sahakyan A. V. Solution of a contact problem with contact and adhesion regions (Galin's problem) by the method of discrete singularities, In: *Razvitie idei L. A. Galina v mekhanike* [Development of L. A. Galin's Ideas in Mechanics. Collection of Research Papers]. Moscow, Izhevsk, 2013, pp. 103–120 (In Russian).
15. Krotov S. V., Kononov D. P., Pakulina E. V. Stress state in contact between wheel and rail in the presence of slip and adhesion, *Proceedings of Petersburg Transport University*, 2021, vol. 18, no. 2, pp. 177–187 (In Russian). EDN: LRITHA. DOI: https://doi.org/10.20295/1815-588X-2021-2-177-187.
16. Hakobyan V. N., Amirjanyan H. A., Dashtoyan L. L., Sahakyan A. V. Indentation of an absolutely rigid thin inclusion into one of the crack faces in an elastic plane under slippage at the ends, In: *H. Altenbach, S. M. Bauer, A. K. Belyaev, et al. (eds) Advances in Solid and Fracture Mechanics*, Advanced Structured Materials, 180. Cham, Springer, 2022, pp. 85–96. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-031-18393-5_6.
17. Sahakyan A. V., Amirjanyan H. A. Method of mechanical quadratures for solving singular integral equations of various types, *J. Phys.: Conf. Ser.*, 2018, vol. 991, 012070. DOI: https://doi.org/10.1088/1742-6596/991/1/012070.
18. Muskhelishvili N. I. *Singuliarnye integral'nye uravneniia. Granichnye zadachi teorii funktsii i nekotorye ikh prilozheniia k matematicheskoi fizike* [Singular Integral Equations. Boundary Value Problems in the Theory of Functions and Some Applications of them to Mathematical Physics]. Moscow, Nauka, 1968, 510 pp. (In Russian)
19. Dundurs J. Discussion: "Edge-bonded dissimilar orthogonal elastic wedges under normal and shear loading" (Bogy, D. B., 1968, ASME J. Appl. Mech., 35, pp. 460–466), *J. Appl. Mech.*, 1969, vol. 36, no. 3, pp. 650–652. DOI: https://doi.org/10.1115/1.3564739.

Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2023. Т. 27, № 3. С. 476–490
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu2019
EDN: XPXAWG

УДК 539.3:621.787

Влияние поверхностного пластического упрочнения на геометрические параметры круговых концентраторов напряжений в пластинах

В. Е. Глебов

Самарский государственный технический университет,
Россия, 443100, Самара, ул. Молодогвардейская, 244.

Аннотация

Разработана методика изучения влияния упрочняющей обработки на форму концентраторов напряжений в виде сквозных круговых отверстий в пластинах после процедуры поверхностно-пластического деформирования.

Рассмотрены две модельные задачи:
- определение геометрической конфигурации кругового концентратора напряжения, вырезанного в прямоугольной пластине, подвергшейся опережающему поверхностно-пластическому деформированию;
- определение геометрической конфигурации кругового концентратора напряжения в круговой цилиндрической пластине, поверхность которого подверглась поверхностно-пластическому деформированию.

Приведены феноменологические методы восстановления полей остаточных напряжений и пластических деформаций в пластинах после процедуры упрочнения. Краевые задачи реконструкции напряженно-деформированного состояния сведены к корректным задачам фиктивной термоупругости. На модельных расчетах для прямоугольной пластины из сплава ЭП742 и круговой цилиндрической пластины из сплава ЭИ698 проиллюстрирована адекватность предлагаемых подходов.

Получены профили образующих концентраторов напряжений плит. В случае опережающего поверхностного пластического деформирования верхней грани квадратной шарнирно опертой пластины толщиной 10 мм максимальное смещение образующей относительно первоначальной конфигурации составило около 4 мкм. Показано, что с уменьшением толщины пластины максимальное смещение образующей убывает.

Механика деформируемого твердого тела
Научная статья

Образец для цитирования
Глебов В. Е. Влияние поверхностного пластического упрочнения на геометрические параметры круговых концентраторов напряжений в пластинах // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2023. Т. 27, № 3. С. 476–490. EDN: XPXAWG. DOI: 10.14498/vsgtu2019.

Сведения об авторе
Виктор Евгеньевич Глебов https://orcid.org/0000-0003-4841-9786
аспирант, ассистент; каф. прикладной математики и информатики;
e-mail: gve5770200@mail.ru

В случае упрочнения поверхности кругового концентратора напряжений цилиндрической пластины максимальное смещение образующей концентратора напряжений составило около 1.4 мкм для пластин, опертых шарнирно и с жесткой заделкой боковой грани. Показано, что с уменьшением радиуса отверстия смещение образующей возрастает.

Ключевые слова: остаточные напряжения, пластические деформации, концентратор напряжений.

Получение: 11 мая 2023 г. / Исправление: 28 августа 2023 г. / Принятие: 19 сентября 2023 г. / Публикация онлайн: 28 сентября 2023 г.

Введение. Проблема увеличения ресурса производимых машиностроительными комплексами элементов конструкций не теряет своей актуальности и сегодня. Для решения данной проблемы разработано большое количество технологических методов и подходов, наиболее распространенным из которых является упрочнение поверхностным пластическим деформированием [1–7]. Применение этой технологии, с одной стороны, действительно позволяет достичь улучшения характеристик износостойкости, микротвердости, сопротивления усталости детали, а с другой стороны, естественным образом приводит к появлению остаточных технологических пластических деформаций и к короблению деталей — изменению их первоначальной геометрической конфигурации. Знание того, насколько существенным является влияние процедуры упрочнения на первоначальную геометрию детали, оказывается необходимым, поскольку допуски на вариации геометрических параметров поставляемых деталей регламентированы нормативной технической документацией. Поэтому целью данной работы является изучение напряженно-деформированного состояния (НДС) после процедуры поверхностного пластического упрочнения прямоугольных и круговых в плане пластин с круговым сквозным концентратором напряжений.

Главной возникающей задачей является реконструкция НДС образцов после упрочнения, поскольку эта информация используется в качестве начальных данных, например, для краевых задач ползучести упрочненных элементов конструкций [8, 9] либо в критериальных зависимостях для оценки предела их выносливости [1, 2, 4–7, 10–12].

Аналитический обзор литературы в данном направлении показал, что существует несколько подходов к ее решению. Большой группой исследователей применяются экспериментальные подходы [10, 12–14], основанные на механических разрушающих методах и позволяющие определить максимум две компоненты тензора остаточных напряжений. Другой подход связан с непосредственным моделированием процесса упрочнения [15–17], недостатком которого является невозможность полного учета всех стохастических факторов, влияющих на процесс упрочнения. Применительно к целям настоящего исследования эффективным представляется третий подход [11, 18–22], основанный на модификации метода расчета по первоначальным деформациям, так как он, во-первых, лишен недостатков указанных выше методов, а во-вторых, позволяет свести обратную краевую задачу реконструкции остаточных напряжений и пластических деформаций к корректной задаче фиктивной термоупругости, имеющей единственное решение. Данный подход используется для решения следующих задач:

А) определение геометрической конфигурации кругового концентратора напряжения, вырезанного в прямоугольной пластине, подвергшейся опережающему поверхностно-пластическому деформированию[1];

В) определение геометрической конфигурации кругового концентратора напряжения в круговой цилиндрической пластине, поверхность которого подверглась поверхностно-пластическому деформированию.

1. Постановка и решение задачи А. В декартовой системе координат $Oxyz$ рассматривается прямоугольная пластина толщиной H, в которой вырезано сквозное круговое отверстие (концентратор напряжений) радиусом R (рис. 1). Перед вырезанием концентратора согласно методике опережающего поверхностно-пластического деформирования верхняя грань пластины ($z = 0$) подвергается ультразвуковому (механическому) упрочнению. Вырезание концентратора напряжений (удаление части материала пластины) приводит к перераспределению напряжений и вызывает деформационные процессы, в результате которых происходит изменение геометрической конфигурации исходного кругового концентратора напряжений.

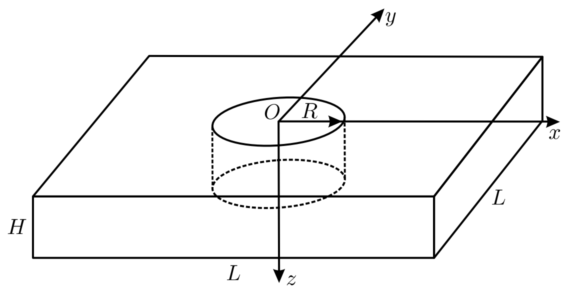


Рис. 1. Схематическое изображение прямоугольной пластины со сквозным круговым отверстием (концентратором напряжений)

[Figure 1. Schematic representation of a rectangular plate with a through circular hole (stress concentrator)

1.1. Реконструкция полей остаточных напряжений и пластических деформаций в прямоугольной пластине (аналитическое решение). В соответствии с технологией опережающего деформирования на первом этапе упрочнению подвергается верхняя грань пластины без концентратора напряжений. Поэтому сначала нужно выполнить реконструкцию НДС прямоугольной пластины после ее упрочнения. Эта задача решена[2] в [19] в предположении, что все компоненты тензора остаточных напряжений есть функции координаты z, с привлечением гипотезы плоских сечений и анизотропии упрочнения. При этом получены следующие соотношения, в которых

[1]Под опережающим поверхностно-пластическим деформированием какого-либо образца понимается процесс упрочнения гладкого образца методами поверхностно-пластического деформирования с последующим нанесением на него концентратора напряжений.

[2]Здесь следует отметить, что полученное решение будет справедливо лишь для центральной области пластины, именно для той, где будет вырезаться концентратор напряжений.

все выражается через компоненту остаточных напряжений σ_x:

$$\sigma_y = \frac{1+\alpha\nu}{\alpha+\nu}\sigma_x, \quad q_x = -\frac{\alpha(1-\nu^2)}{E(\alpha+\nu)}\sigma_x, \tag{1}$$
$$q_y = -\frac{1-\nu^2}{E(\alpha+\nu)}\sigma_x, \quad q_z = \frac{(1+\alpha)(1-\nu^2)}{E(\alpha+\nu)}\sigma_x,$$

где $\sigma_x = \sigma_x(z)$, $\sigma_y = \sigma_y(z)$ — компоненты тензора остаточных напряжений; $q_x = q_x(z)$, $q_y = q_y(z)$, $q_z = q_z(z)$ — компоненты тензора остаточных пластических деформаций; E — модуль Юнга; ν — коэффициент Пуассона; α — феноменологический параметр, характеризующий анизотропию технологии упрочнения [8]. Остальные компоненты тензоров остаточных напряжений и пластических деформаций полагаются равными нулю, поскольку их значения (по модулю) на несколько порядков меньше, чем у представленных в (1) [23].

Таким образом, для реконструкции НДС в прямоугольной пластине после упрочнения ее верхней грани необходимо иметь непрерывное аналитическое выражение для компоненты $\sigma_x = \sigma_x(z)$, $0 \leqslant z \leqslant H$.

В дальнейших расчетах использовались экспериментальные данные в области сжатия для компоненты $\sigma_x = \sigma_x(z)$ после ультразвукового упрочнения балки прямоугольного сечения из сплава ЭП742, соответствующие первому режиму упрочнения из четырех представленных в работе [8], которые представлены точками на рис. 2. Экстраполяция экспериментальных данных для компоненты σ_x выполнена с использованием зависимости

$$\sigma_x(z) = \sigma_0 - \sigma_1 \exp\Bigl(-\frac{(z-z^*)^2}{b^2}\Bigr), \quad 0 \leqslant z \leqslant H, \tag{2}$$

где z^* определяется из условия $\sigma_x(z^*) = \min\limits_{0\leqslant z\leqslant H} \sigma_x(z)$, а σ_0, σ_1 и b — параметры, методика определения которых с использованием условия самоуравновешенности эпюры остаточных напряжений изложена в [19].

Для проведения модельных расчетов по влиянию геометрических параметров пластины на изменение геометрии кругового концентратора напряжений использовались следующие значения: $H = \{10, 8, 6, 4\}$ мм, $L = 100$ мм. Соответствующие параметры полученных аппроксимаций (2) приведены в таблице. Отклонения полученных аппроксимаций от экспериментальных данных в среднеквадратической норме не превысили 5.75 %.

Отметим, что в случае ультразвукового упрочнения параметр $\alpha = 1$ [8] и формулы (1) принимают вид

$$\sigma_y = \sigma_x, \quad q_x = q_y = -\frac{1-\nu}{E}\sigma_x, \quad q_z = \frac{2(1-\nu)}{E}\sigma_x. \tag{3}$$

Значения параметров аппроксимации (2) для различных значений H
[The values of approximation parameters (2) for different values of H]

Thickness, H, mm	σ_0, MPa	σ_1, MPa	b, mm
10	13.38	1100.98	0.0928
8	16.84	1104.64	0.0933
6	22.65	1110.05	0.0938
4	34.61	1120.81	0.0949

В модельных расчетах использовались $E = 221$ ГПа, $\nu = 1/3$, соответствующие сплаву ЭП742.

1.2. Реконструкция НДС в прямоугольной пластине (конечно-элементное решение фиктивной термоупругой задачи). В данном пункте описывается получение НДС в конечно-элементной модели прямоугольной пластины методом первоначальных деформаций [11,18–20] на основе аналитического решения (см. п. 1.1). В этом случае остаточные пластические деформации $q_i = q_i(z)$, $i = x, y, z$, задаваемые соотношениями (3), моделируются фиктивными температурными:

$$q_i(z) = \alpha_i^T(z)(T(z) - T_0), \quad i = x, y, z,\ 0 \leqslant z \leqslant H, \tag{4}$$

где $T(z)$ — фиктивный закон распределения температуры; T_0 — начальное значение температуры; $\alpha_i^T(z) = \alpha_i(T(z))$ — коэффициенты температурного расширения.

Используя известные решения $q_i = q_i(z)$, $i = x, y, z$, полученные в п. 1.1, из соотношений (4) при наличии закона распределения температуры[3] по толщине пластины можно получить выражения для коэффициентов температурного расширения и таким образом свести исходную задачу к фиктивной термоупругой. После решения температурной задачи из соотношений (4) определяются законы $\alpha_i^T(z)$, которые затем вместе с упругими константами используются как исходные данные для термоупругой задачи.

В итоге строится конечно-элементная модель с заданными температурными деформациями и методом конечных элементов решается задача фиктивной термоупругости. Важно отметить, что для учета больших градиентов распределений остаточных напряжений $\sigma_x = \sigma_x(z)$ и $\sigma_y = \sigma_y(z)$ требуется довольно мелкая сетка в области, близкой к упрочняемой грани.

Выполнена проверка адекватности конечно-элементного расчета аналитическому решению поставленной задачи для упрочненной пластины. На рис. 2 приведены распределения компонент остаточных напряжений, вычисленных по формулам (3) и рассчитанных методом конечных элементов для шарнирно опертой по кромкам нижней грани пластины.

Для компоненты $\sigma_x = \sigma_x(z)$ наблюдается соответствие расчетных данных на основе решения краевой задачи фиктивной термпоупругости методом конечных элементов с экспериментальными данными и с результатами аппроксимации (2), для компоненты $\sigma_y = \sigma_y(z)$ — с зависимостью (2). При этом расчетные данные по МКЭ и по аппроксимации (2) для указанных компонент практически не различимы.

В п. 1.1 в аналитическом решении полагалось, что компоненты σ_z, τ_{xz} равны нулю. В полученном конечно-элементном решении они не нулевые. Это связано с граничными условиями и особенностями метода конечных элементов, но их максимальные значения на три–четыре порядка меньше, чем у компонент σ_x и σ_y (по модулю). Поэтому принятая гипотеза относительно компонент σ_z и τ_{xz} оправдана и можно сделать вывод о несущественности влияния этих компонент на деформированное состояние пластины.

[3] Отметим, что фиктивный закон распределения температуры $T(z)$ в соотношениях (4) можно задавать произвольным, не заботясь о его реализуемости в задаче теплопроводности, поскольку вариативные исследования, выполненные в [19, 20], показали, что он не влияет на конечное решение для остаточных напряжений в фиктивной термоупругой задаче.

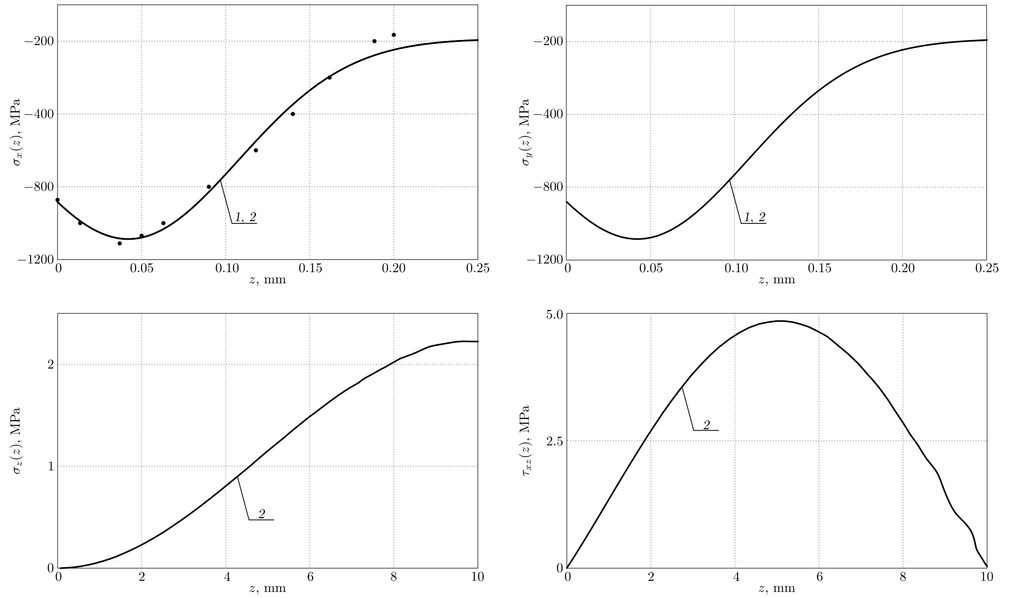


Рис. 2. Компоненты остаточных напряжений в прямоугольной пластине: маркеры — экспериментальные данные [8]; *1* — расчет по аппроксимации (2); *2* — решение фиктивной термоупругой задачи

[Figure 2. Components of residual stresses in a rectangular plate: markers — experimental data [8]; *1* — calculation by approximation (2); *2* — solution of a fictitious thermoelastic problem]

1.3. Влияние наведенных полей остаточных напряжений на профиль кругового концентратора напряжений. На следующем этапе из конечно-элементного разбиения пластины удалялись конечные элементы, соответствующие круговому концентратору напряжений радиусом 10 мм. В оставшихся конечных элементах сохранялись температурные деформации, соответствующие пластине без концентратора напряжений. Получившаяся в результате этих действий конечно-элементная схема с заданными начальными деформациями разрешалась в рамках фиктивной термоупругости.

На рис. 3 приведены профили концентраторов напряжений, полученные в результате конечно-элементного расчета, для разных значений H толщины пластины в сечении плоскостью xOz (см. рис. 1). Здесь $\delta = x - R$ — величина смещения расчетного профиля концентратора от его первоначально прямолинейной образующей (линия $\delta = 0$ на рис. 3). Из представленных результатов видно, что с уменьшением толщины пластины величина смещения первоначально прямой образующей уменьшается. Максимальное смещение образующей в проведенных расчетах не превысило 4.5 мкм.

На рис. 4 приведены эпюры величины $\sigma_x = \sigma_x(z)$ для различных значений расстояний $\Delta = (x^2 + y^2)^{1/2} - R$ от границы концентратора напряжений в сечении плоскостью xOz ($y = 0$). Из приведенных эпюр следует, что вблизи границы концентратора происходит существенное снижение (по модулю) остаточных напряжений. Компонента $\sigma_x = \sigma_x(z)$ асимптотически приближается к соответствующему распределению для пластины без концентратора напряжений и уже для значения $\Delta = 30$ мм оба распределения остаточных напряжений (кривые *5*, *6* на рис. 4) практически совпадают. Этот факт также может служить одним из элементов проверки сходимости конечно-элементного решения поставленной задачи.

2. Постановка и решение задачи B. В цилиндрической системе координат $Or\theta z$ рассматривается круговая цилиндрическая пластина с радиусом R_1 и толщиной H со сквозным круговым концентратором напряжений радиусом R (рис. 5). Внутренняя поверхность ($r = R$) концентратора напряжений подвергается поверхностно-пластическому деформированию. Требуется определить изменение геометрических параметров внутренней поверхности концентратора, которое возникает из-за перераспределения остаточных напряжений.

2.1. Реконструкция НДС в круговой цилиндрической пластине после упрочнения внутренней поверхности концентратора (аналитическое решение). Пусть σ_r, σ_θ, σ_z — радиальная, окружная и осевая компоненты тензора остаточных напряжений, а q_r, q_θ, q_z — соответствующие им компоненты тензора пластических деформаций, возникающие после процедуры поверхностного упрочнения поверхности концентратора. В работе [9] разработана методика,[4] позволяющая при наличии экспериментально полученной компоненты $\sigma_\theta = \sigma_\theta(r)$ провести реконструкцию НДС в круговой цилиндрической пластине после процедуры изотропного[5] упрочнения поверхности концентратора по следующим формулам ($R \leqslant r \leqslant R_1$):

$$\sigma_r(r) = \frac{1}{r}\int_R^r \sigma_\theta(t)dt, \tag{5}$$

$$q_\theta(r) = -\frac{1-2\nu}{E(1+\nu)r^{\frac{3}{1+\nu}}}\int_r^{+\infty} t^{\frac{2-\nu}{1+\nu}}\big[\sigma_r(t)+2\sigma_\theta(t)\big]dt - \\ -\frac{1-\nu}{E}\sigma_\theta(r)+\frac{\nu}{E}\sigma_r(r), \tag{6}$$

$$q_\theta(r) = q_z(r) = -q_r(r)/2, \tag{7}$$

$$\sigma_z(r) = -Eq_z(r)+\nu\big(\sigma_r(r)+\sigma_\theta(r)\big). \tag{8}$$

В дальнейших расчетах использовались экспериментальные данные в области сжатия для компоненты $\sigma_\theta = \sigma_\theta(r)$, приведенные в работе [9] для упрочненного цилиндрического образца из сплава ЭИ698[6] радиусом 3.76 мм и представленные на рис. 6 маркерами (точки), где $h = r-R$ — глубина упрочненного слоя. Считаем эту эпюру (в области сжатия) модельной и для рассматриваемой задачи. Экстраполяция экспериментальных данных для всей области $R \leqslant r \leqslant R_1$ ($R = 10$ мм, $R_1 = 50$ мм) компоненты σ_θ выполнена с использованием зависимости

$$\sigma_\theta(r) = \sigma_0\exp\Big(-\frac{(R-r)^2}{l^2}\Big)-\sigma_1\exp\Big(-\frac{(R-r)^2}{b^2}\Big), \tag{9}$$

[4] Данная методика предполагает, что при упрочнении поверхности концентратора не возникают вторичные пластические деформации, а недиагональные компоненты тензоров остаточных напряжений и пластических деформаций малы (в сравнении с диагональными). Также привлекается гипотеза о наведении пластических деформаций на цилиндрической поверхности как на полупространстве.

[5] В предположении $q_\theta(r) = q_z(r)$.

[6] Сплаву ЭИ698 соответствуют следующие упругие константы: $E = 200$ ГПа, $\nu = 1/3$.

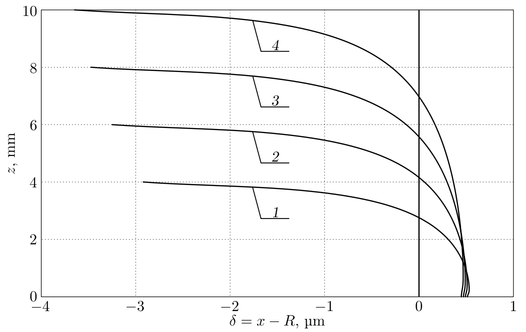


Рис. 3. Расчетные профили круговых концентраторов напряжений для различных значений толщины пластины H: *1* — 4 мм; *2* — 6 мм; *3* — 8 мм; *4* — 10 мм

[Figure 3. Calculated profiles of a circular stress concentrators for various values of plate thickness H: *1*—4 mm; *2*—6 mm; *3*—8 mm; *4*—10 mm]

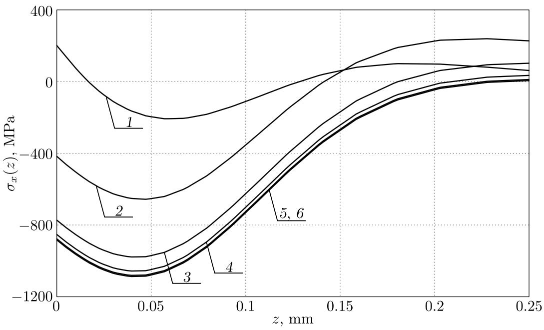


Рис. 4. Эпюры величины $\sigma_x = \sigma_x(z)$ для различных значений расстояний Δ от границы концентратора напряжений: *1* — 0.1 мм; *2* — 0.5 мм; *3* — 5 мм; *4* — 20 мм; *5* — 30 мм; *6* — для пластины без концентратора напряжений

[Figure 4. Diagrams of the value $\sigma_x = \sigma_x(z)$ for various values of distances Δ from the boundary of the stress concentrator: *1*—0.1 mm; *2*—0.5 mm; *3*—5 mm; *4*—20 mm; *5*—30 mm; *6*—for a plate without the stress concentrator]

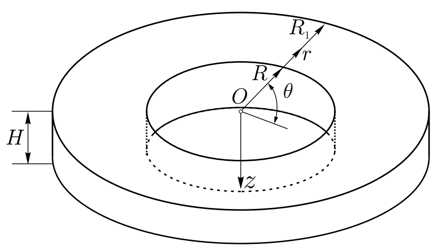


Рис. 5. Схематическое изображение круговой цилиндрической пластины со сквозным круговым отверстием (концентратором напряжений)

[Figure 5. Schematic representation of a circular cylindrical plate with a through circular hole (stress concentrator)] где σ_0, σ_1 и b, l — параметры, методика определения которых с использованием условия самоуравновешенности эпюры остаточных напряжений изложена в [9]. Для используемых экспериментальных данных (см. маркеры на рис. 6) получены следующие параметры аппроксимации (9): $\sigma_0 = 118.9$ МПа, $\sigma_1 = 1118.9$ МПа, $b = 0.106$ мм, $l = 1$ мм. Результат расчета компоненты σ_θ по (9) показан на рис. 6 сплошной линией *1*. Остальные компоненты остаточных напряжений и пластических деформаций определялись по $\sigma_\theta = \sigma_\theta(r)$ на основании (5)–(8), но в качестве верхнего предела интегрирования в (6) использовалась величина R_1.

2.2. Влияние наведенных полей остаточных напряжений на профиль кругового концентратора напряжений. Методика определения влияния наведенных полей остаточных напряжений на профиль кругового концентратора напряжений в круглой цилиндрической пластине аналогична соответствующей методике для прямоугольной пластины (см. п. 1.3): сначала по формулам (5)–(8) с применением аппроксимации (9) выполняется реконструкция остаточных напряжений и пластических деформаций. Далее остаточные пластические деформации моделируются фиктивными температурными с помощью соотношений

$$q_i(r) = \alpha_i^T(r)(T(r) - T_0), \quad i = r, \theta, z,\ R \leqslant r \leqslant R_1.$$

Отметим, что здесь волевым решением был выбран линейный закон распределения температуры:

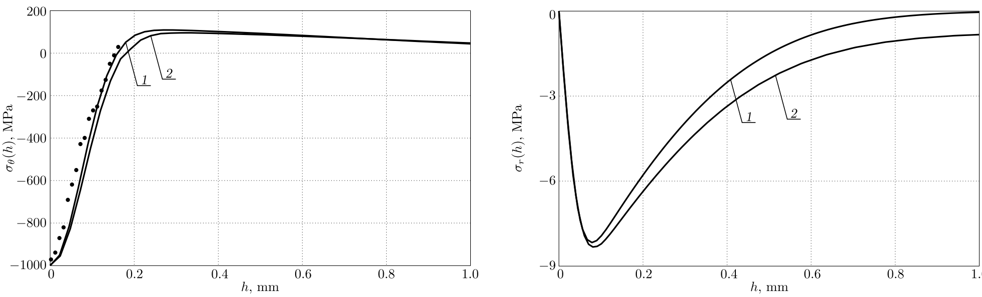
$$T(r) = ar + b, \quad T(R) = 100\,^\circ\mathrm{C}, \quad T(R_1) = 20\,^\circ\mathrm{C}.$$

Затем методом конечных элементов решается осесимметричная задача фиктивной термоупругости, при этом в области упрочнения создается более мелкая расчетная сетка.

Для проведения модельных расчетов по влиянию геометрических параметров пластины на изменение геометрии кругового концентратора напряжений использовались следующие значения: $R_1 = \{5; 7.5; 10\}$ мм, $R = 10$ мм, $H = 50$ мм. Вычисления проводились при трех вариантах закрепления: шарнирное опирание нижней грани пластины, шарнирное опирание верхней и нижней граней плиты, жесткая заделка боковой поверхности пластины.

На рис. 6 для расчетного случая $R_1 = 50$ мм, $R = 10$ мм и $H = 50$ мм приведены главные компоненты остаточных напряжений в сечении $z = H/2$ круглой цилиндрической пластины после упрочнения поверхности кругового концентратора напряжений, полученные по формулам (5)–(9) (линии *1*) и решением фиктивной термоупругой задачи методом конечных элементов (линии *2*). Согласно представленным данным эпюры компонент, полученных этими методами, за исключением компоненты $\sigma_r(r)$, практически совпадают. Для компоненты $\sigma_r(r)$ отклонение решения фиктивной термоупругой задачи от решения, полученного по формулам (5)–(9), составляет $\Delta = \max\limits_{r\in[R_1,R]} |\sigma_r^{(1)}(r) - \sigma_r^{(2)}(r)| < 1$ МПа, где $\sigma_r^{(1)}(r)$ соответствует решению по формулам (5)–(9), $\sigma_r^{(2)}(r)$ — решению фиктивной термоупругой задачи методом конечных элементов. Отметим, что значения величины $\sigma_r(r)$ в области сжатия меньше (по модулю) значений величин $\sigma_\theta(r)$ и $\sigma_z(r)$ на два-три порядка, поэтому компонента $\sigma_r(r)$ не оказывает существенного влияния на деформированное состояние цилиндрической пластины с круговым концентратором напряжений. Полученные данные демонстрируют хорошее соответствие решений, полученных по обеим методикам.

На рис. 7 приведены графики профиля образующей кругового концентратора после упрочнения его поверхности для различных радиусов концентратора и для различных вариантов закрепления образца, здесь $f = r - R$, $0 \leqslant z \leqslant H$. Видно, что изменение первоначально прямолинейной образующей концентратора увеличивается с уменьшением радиуса концентратора напряжений и для проведенных модельных расчетов является незначительным.



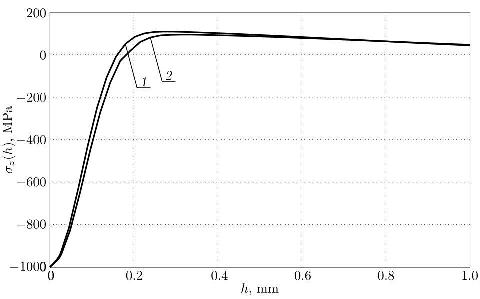


Рис. 6. Компоненты остаточных напряжений в сечении $z = H/2$ круглой цилиндрической пластины после упрочнения поверхности кругового концентратора напряжений: маркеры — экспериментальные данные [9]; *1* — расчет по формулам (5)–(9); *2* — решение фиктивной термоупругой задачи

[Figure 6. Components of residual stresses in the section $z = H/2$ of a round cylindrical plate after hardening the surface of a circular stress concentrator: markers—experimental data [9]; *1*—calculation by formulae (5)–(9); *2*—solution of a fictitious thermoelastic problem]

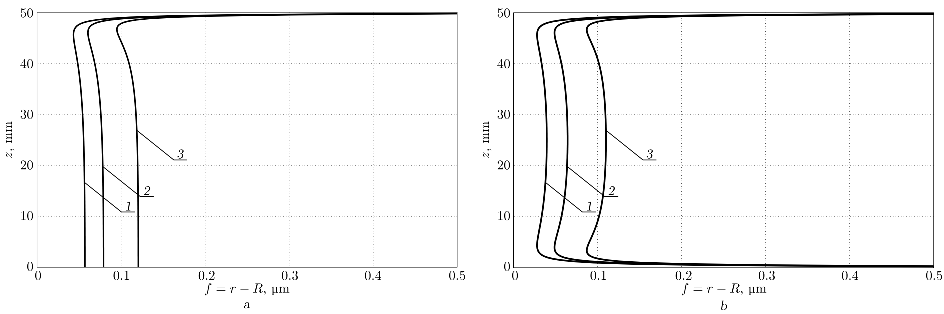


Рис. 7. Профиль образующей концентратора напряжений после упрочнения: $R = 10$ мм (*1*), $R = 7.5$ мм (*2*), $R = 5$ мм (*3*); *a* — при шарнирном опирании нижней грани пластины, *b* — при жесткой заделке боковой поверхности пластины

[Figure 7. Profile of the generatrix of the stress concentrator after hardening: $R = 10$ mm (*1*), $R = 7.5$ mm (*2*), $R = 5$ mm (*3*); *a*—when hinged support of the lower surface of the plate, *b*—when rigidly fixed to the side surface of the plate

Выводы. В настоящей работе разработана методика, позволяющая изучить влияние упрочняющей обработки на геометрическую конфигурацию концентраторов напряжений в виде сквозных круговых отверстий в пластинах после процедуры поверхностно-пластического деформирования.

Для рассмотренных модельных задач получены следующие результаты. В случае опережающего поверхностного пластического деформирования верхней грани квадратной шарнирно опертой пластины толщиной 10 мм максимальное смещение образующей относительно первоначальной конфигурации составило около 4 мкм. Показано, что с уменьшением толщины пластины максимальное смещение образующей убывает. В случае упрочнения поверхности кругового концентратора напряжений цилиндрической пластины максимальное смещение образующей концентратора напряжений составило около 1.4 мкм для пластин, опертых шарнирно и с жесткой заделкой боковой грани. Показано, что с уменьшением радиуса отверстия смещение образующей возрастает.

Конкурирующие интересы. Конкурирующих интересов не имею.

Авторская ответственность. Я несу полную ответственность за предоставление окончательной версии рукописи в печать. Окончательная версия рукописи мною одобрена.

Финансирование. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23–29–00434, https://rscf.ru/project/23-29-00434/.

Библиографический список

1. Павлов В. Ф., Букатый А. С., Семенова О. Ю. Прогнозирование предела выносливости поверхностно упрочненных деталей с концентраторами напряжений // *Вестник машиностроения*, 2019. № 1. С. 3–7. EDN: VTAEPK.
2. Altenberger I., Nalla R. K., Sano Y., et al. On the effect of deep-rolling and laser-peening on the stress-controlled low- and high-cycle fatigue behavior of Ti–6Al–4V at elevated temperatures up to 550 °C // *Int. J. Fatigue*, 2012. vol. 44. pp. 292–302. DOI: https://doi.org/10.1016/j.ijfatigue.2012.03.008.
3. Brockman R. A., Braisted W. A., Olson S. E., et al. Prediction and characterization of residual stresses from laser shock peening // *Int. J. Fatigue*, 2012. vol. 36, no. 1. pp. 96–108. DOI: https://doi.org/10.1016/j.ijfatigue.2011.08.011.
4. Dai K., Shaw L. Analysis of fatigue resistance improvements via surface severe plastic deformation // *Int. J. Fatigue*, 2008. vol. 30, no. 8. pp. 1398–1408. DOI: https://doi.org/10.1016/j.ijfatigue.2007.10.010.
5. James M. N., Hughes D. J., Chen Z., et all. Residual stresses and fatigue performance // *Eng. Fail. Anal.*, 2007. vol. 14, no. 2. pp. 384–395. DOI: https://doi.org/10.1016/j.engfailanal.2006.02.011.
6. Majzoobi G. H., Azadikhah K., Nemati J. The effects of deep rolling and shot peening on fretting fatigue resistance of Aluminum-7075-T6 // *Mater. Sci. Eng. A*, 2009. vol. 516, no. 1/2. pp. 235–247. DOI: https://doi.org/10.1016/j.msea.2009.03.020.
7. Soady K. A. Life assessment methodologies incorporating shot peening process effects: mechanistic consideration of residual stresses and strain hardening. 1. Effect of shot peening on fatigue resistance // *Mater. Sci. Technol.*, 2013. vol. 29, no. 6. pp. 637-651. DOI: https://doi.org/10.1179/1743284713Y.0000000222.
8. Радченко В. П., Саушкин М. Н., Бочкова Т. И. Математическое моделирование формирования и релаксации остаточных напряжений в плоских образцах из сплава ЭП742 после ультразвукового упрочнения в условиях высокотемпературной ползучести //

Вестник ПНИПУ. Механика, 2016. №1. С. 93–112. EDN: VQTAHL. DOI: https://doi.org/10.15593/perm.mech/2016.1.07.
9. Радченко В. П., Саушкин М. Н. *Ползучесть и релаксация остаточных напряжений в упрочненных конструкциях.* М.: Машиностроение-1, 2005. 226 с. EDN: RXLJLN.
10. Биргер И. А. *Остаточные напряжения.* М.: Машгиз, 1963. 232 с.
11. Павлов В. Ф., Столяров А. К., Кирпичев В. А., Вакулюк В. С. *Расчет остаточных напряжений в деталях с концентраторами напряжений по первоначальным деформациям.* Самара: Самар. науч. центр РАН, 2008. 124 с.
12. Павлов В. Ф., Кирпичев В. А., Вакулюк В. С. *Прогнозирование сопротивления усталости поверхностно упрочненных деталей по остаточным напряжениям.* Самара: Самар. науч. центр РАН, 2012. 125 с.
13. Иванов С. И. К определению остаточных напряжений в цилиндре методом колец и полосок / Остаточные напряжения, Т. 53. Куйбышев: Куйбышев. авиац. ин-т, 1971. С. 32–42.
14. Иванов С. И. Исследование остаточных касательных напряжений в цилиндрической детали методом колец / Остаточные напряжения, Т. 53. Куйбышев: Куйбышев. авиац. ин-т, 1971. С. 107–115.
15. Gallitelli D., Boyer V., Gelineau M., et al. Simulation of shot peening: From process parameters to residual stress fields in a structure // *Comptes Rendus Mécanique*, 2016. vol. 344, no. 4–5. pp. 355–374. DOI: https://doi.org/10.1016/j.crme.2016.02.006.
16. Lechun X., Chengxi W., Liqiang W., et al. Numerical analysis and experimental validation on residual stress distribution of titanium matrix composite after shot peening treatment // *Mech. Mat.*, 2016. vol. 99. pp. 2–8. DOI: https://doi.org/10.1016/j.mechmat.2016.05.005.
17. *Analysis of Residual Stress by Diffraction using Neutron and Synchrotron Radiation* / eds. M. E. Fitzpatrick, Alain Lodini. London: CRC Press, 2003. 368 pp. DOI: https://doi.org/https://doi.org/10.1201/9780203608999.
18. Сазанов В. П., Кирпичев В. А., Вакулюк В. С., Павлов В. Ф. Определение первоначальных деформаций в упрочненном слое цилиндрической детали методом конечно-элементного моделирования с использованием расчетного комплекса PATRAN/NASTRAN // *Вестн. Уфим. гос. авиац. техн. ун-та*, 2015. Т. 19, №2. С. 35–40. EDN: VYWUPR.
19. Радченко В. П., Афанасьева О. С., Глебов В. Е. Исследование влияния остаточных напряжений на геометрические параметры поверхностно упрочненного бруса // *Изв. Сарат. ун-та. Новая серия: Математика. Механика. Информатика*, 2019. Т. 19, №4. С. 464–478. EDN: YOWKNF. DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2019-19-4-464-478.
20. Радченко В. П., Афанасьева О. С., Глебов В. Е. Влияние технологии поверхностного пластического упрочнения, остаточных напряжений и граничных условий на выпучивание балки // *Вестник ПНИПУ. Механика*, 2020. №1. С. 87–98. EDN: IJMTQN. DOI: https://doi.org/10.15593/perm.mech/2020.1.07.
21. Келлер И. Э., Трофимов В. Н., Владыкин А. В. [и др.] К вопросу о реконструкции остаточных напряжений и деформаций пластины после дробеструйной обработки // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2018. Т. 22, №1. С. 40–64. EDN: UTXSLH. DOI: https://doi.org/10.14498/vsgtu1602.
22. Радченко В. П., Куров А. Ю. Влияние анизотропии поверхностного пластического упрочнения на формирование остаточных напряжений в цилиндрических деталях с надрезами полукруглого профиля // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2016. Т. 20, №4. С. 675–690. EDN: YHPUXF. DOI: https://doi.org/10.14498/vsgtu1513.
23. Радченко В. П., Павлов В. Ф., Саушкин М. Н. Математическое моделирование напряженно-деформированного состояния в поверхностно упрочненных втулках с учетом остаточных касательных напряжений // *Вестник ПНИПУ. Механика*, 2019. №1. С. 138–150. EDN: XKSCQS. DOI: https://doi.org/10.15593/perm.mech/2019.1.12.

Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2023, vol. 27, no. 3, pp. 476–490
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu2019

MSC: 74G70, 74S05

The influence of surface plastic hardening on the geometric parameters of circular stress concentrators in plates

V. E. Glebov

Samara State Technical University,
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russian Federation.

Abstract

A methodology for studying the influence of strengthening treatment on the shape of stress concentrators in the form of through circular holes in plates after surface-plastic deformation has been developed.

Two model problems have been considered:

– determination of the geometric configuration of a circular stress concentrator cut in a rectangular plate subjected to prior surface-plastic deformation;
– determination of the geometric configuration of a circular stress concentrator in a circular cylindrical plate whose surface has undergone surface-plastic deformation.

Phenomenological methods for restoring residual stress fields and plastic deformations in plates after the strengthening procedure are presented. Boundary problems of reconstructing the stress-strain state are reduced to well-posed fictitious thermoelasticity problems. The adequacy of the proposed approaches has been illustrated through computational modeling for a rectangular plate made of EP742 alloy and a circular cylindrical plate made of EI698 alloy.

Profiles of the generatrix of the stress concentrators in plates have been obtained. In the case of prior surface-plastic deformation of the upper surface of a square hinged-supported plate with a thickness of 10 mm, the maximum displacement of the generatrix relative to the initial configuration was approximately 4 µm. It has been shown that with a decrease in plate thickness, the maximum displacement of the formation decreases. In the case of surface strengthening of the circular stress concentrator in the cylindrical plate, the maximum displacement of the stress concentrator formation was approximately 1.4 µm for plates supported by hinges and with rigid fixation of the

Mechanics of Solids
Research Article

Please cite this article in press as:
G l e b o v V. E. The influence of surface plastic hardening on the geometric parameters of circular stress concentrators in plates, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2023, vol. 27, no. 3, pp. 476–490. EDN: XPXAWG. DOI: 10.14498/vsgtu2019 (In Russian).

Author's Details:
Victor E. Glebov https://orcid.org/0000-0003-4841-9786
Postgraduate Student, Assistant; Dept. of Applied Mathematics & Computer Science;
e-mail: gve5770200@mail.ru

side surface. It has been demonstrated that with a decrease in the radius of the hole, the displacement of the formation increases.

Keywords: residual stresses, plastic deformations, stress concentrator.

Received: 11th May, 2023 / Revised: 28th August, 2023 /
Accepted: 19th September, 2023 / First online: 28th September, 2023

Competing interests. I have no competing interests.

Author's Responsibilities. I take full responsibility for submitting the final version of the manuscript for printing. The final version of the manuscript has been approved by me.

Funding. The research was funded by the Russian Science Foundation grant no. 23–29–00434, https://rscf.ru/en/project/23-29-00434/.

References

1. Pavlov V. F., Bukaty A. S., Semyonova O. Yu. Forecasting of the endurance limit of surface-hardened parts with stress concentrators, *Vestnik Mashinostroeniya*, 2019, no. 1, pp. 43–53 (In Russian). EDN: VTAEPK.
2. Altenberger I., Nalla R. K., Sano Y., et al. On the effect of deep-rolling and laser-peening on the stress-controlled low- and high-cycle fatigue behavior of Ti–6Al–4V at elevated temperatures up to 550 °C, *Int. J. Fatigue*, 2012, vol. 44, pp. 292–302. DOI: https://doi.org/10.1016/j.ijfatigue.2012.03.008.
3. Brockman R. A., Braisted W. A., Olson S. E., et al. Prediction and characterization of residual stresses from laser shock peening, *Int. J. Fatigue*, 2012, vol. 36, no. 1, pp. 96–108. DOI: https://doi.org/10.1016/j.ijfatigue.2011.08.011.
4. Dai K., Shaw L. Analysis of fatigue resistance improvements via surface severe plastic deformation, *Int. J. Fatigue*, 2008, vol. 30, no. 8, pp. 1398–1408. DOI: https://doi.org/10.1016/j.ijfatigue.2007.10.010.
5. James M. N., Hughes D. J., Chen Z., et all. Residual stresses and fatigue performance, *Eng. Fail. Anal.*, 2007, vol. 14, no. 2, pp. 384–395. DOI: https://doi.org/10.1016/j.engfailanal.2006.02.011.
6. Majzoobi G. H., Azadikhah K., Nemati J. The effects of deep rolling and shot peening on fretting fatigue resistance of Aluminum-7075-T6, *Mater. Sci. Eng. A*, 2009, vol. 516, no. 1/2, pp. 235–247. DOI: https://doi.org/10.1016/j.msea.2009.03.020.
7. Soady K. A. Life assessment methodologies incorporating shot peening process effects: mechanistic consideration of residual stresses and strain hardening. 1. Effect of shot peening on fatigue resistance, *Mater. Sci. Technol.*, 2013, vol. 29, no. 6, pp. 637-651. DOI: https://doi.org/10.1179/1743284713Y.0000000222.
8. Radchenko V. P., Saushkin M. N., Bochkova T. I. Mathematical modeling and experimental study of forming and relaxation of the residual stresses in plane samples made of EP742 alloy after the ultrasonic hardening under the hightemperature creep conditions, *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2016, no. 1, pp. 93–112 (In Russian). EDN: VQTAHL. DOI: https://doi.org/10.15593/perm.mech/2016.1.07.
9. Radchenko V. P., Saushkin M. N. *Polzuchest' i relaksatsiia ostatochnykh napriazhenii v uprochnennykh konstruktsiiakh* [Creep and Relaxation of Residual Stresses in Hardened Structures]. Moscow, Mashinostroenie-1, 2005, 226 pp (In Russian). EDN: RXLJLN.
10. Birger I. A. *Ostatochnye napryazheniya* [Residual stresses]. Moscow, Mashgiz, 1963, 232 pp. (In Russian)
11. Pavlov V. F., Stolyarov A. K., Kirpichev V. A., Vakulyuk V. S. *Raschet ostatochnykh napriazhenii v detaliakh s kontsentratorami napriazhenii po pervonachal'nym deformatsiiam* [Calculation of Residual Stresses in Parts with Stress Concentrators by Initial Deformations]. Samara, Samara Scientific Center, Russian Academy of Sciences, 2008, 124 pp. (In Russian)

12. Pavlov V. F., Kirpichev V. A., Vakuluk V. S. *Ostatochnye napryazheniya i soprotivlenie ustalosti uprochnennykh detaley s kontsentratorami napryazheniy* [Residual Stresses and Fatigue Resistance of Hardened Parts with Stress Concentrators]. Samara, Samara Scientific Center, Russian Academy of Sciences, 2012, 125 pp. (In Russian)
13. Ivanov S. I. On determination of residual stresses in a cylinder by the method of rings and strips, Ostatochnye napriazheniia [Residual Stresses], 53. Kuibyshev, Kuibyshev Aviation Institute, 1971, pp. 32–42 (In Russian).
14. Ivanov S. I. The study of residual tangential stresses in a cylindrical part by the ring method, Ostatochnye napriazheniia [Residual Stresses], 53. Kuibyshev, Kuibyshev Aviation Institute, 1971, pp. 107–115 (In Russian).
15. Gallitelli D., Boyer V., Gelineau M., et al. Simulation of shot peening: From process parameters to residual stress fields in a structure, *Comptes Rendus Mécanique*, 2016, vol. 344, no. 4–5, pp. 355–374. DOI: https://doi.org/10.1016/j.crme.2016.02.006.
16. Lechun X., Chengxi W., Liqiang W., et al. Numerical analysis and experimental validation on residual stress distribution of titanium matrix composite after shot peening treatment, *Mech. Mat.*, 2016, vol. 99, pp. 2–8. DOI: https://doi.org/10.1016/j.mechmat.2016.05.005.
17. *Analysis of Residual Stress by Diffraction using Neutron and Synchrotron Radiation*, eds. M. E. Fitzpatrick, Alain Lodini. London, CRC Press, 2003, 368 pp. DOI: https://doi.org/https://doi.org/10.1201/9780203608999.
18. Sazanov V. P., Kirpichev V. A., Vakuluk V. S., Pavlov V. F The definition of initial deformations in the cylindrical parts surface layer by Finite Elements Modeling method using PATRAN/NASTRAN program complex, *Vestn. Ufimsk. Gos. Aviats. Techn. Univ.*, 2015, vol. 19, no. 2, pp. 35–40 (In Russian). EDN: VYWUPR.
19. Radchenko V. P., Afanaseva O. S., Glebov V. E. Influence of residual stresses on geometric parameters of surface-strengthened beam, *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2019, vol. 29, no. 4, pp. 464–478 (In Russian). EDN: YOWKNF. DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2019-19-4-464-478.
20. Radchenko V. P., Afanaseva O. S., Glebov V. E. The effect of surface plastic hardening technology, residual stresses and boundary conditions on the buckling of a beam, *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2020, no. 1, pp. 87–98 (In Russian). EDN: IJMTQN. DOI: https://doi.org/10.15593/perm.mech/2020.1.07.
21. Keller I. E., Trofimov V. N., Vladykin A. V., et al. On the reconstruction of residual stresses and strains of a plate after shot peening, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2018, vol. 22, no. 1, pp. 40–64 (In Russian). EDN: UTXSLH. DOI: https://doi.org/10.14498/vsgtu1602.
22. Radchenko V. P., Kurov A. Yu. Effect of anisotropy of surface plastic hardening on formation of residual stresses in cylindrical samples with semicircular notch, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2016, vol. 20, no. 4, pp. 675–690 (In Russian). EDN: YHPUXF. DOI: https://doi.org/10.14498/vsgtu1513.
23. Radchenko V. P., Pavlov V. F., Saushkin M. N. Mathematical modeling of the stress-strain state in surface hardened thin-walled tubes with regard to the residual shear stresses, *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2019, no. 1, pp. 138–150 (In Russian). EDN: XKSCQS. DOI: https://doi.org/10.15593/perm.mech/2019.1.12.

Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2023. Т. 27, № 3. С. 491–508
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu2017
EDN: CDEJKC

УДК 539.43:621.787

Численное решение задачи о напряженно-деформированном состоянии поверхностно упрочненного призматического образца с надрезом V-образного профиля в упругой и упругопластической постановках

В. П. Радченко[1], *Д. М. Шишкин*[2], *М. Н. Саушкин*[1]

[1] Самарский государственный технический университет,
Россия, 443100, Самара, ул. Молодогвардейская, 244.
[2] Сызранский филиал Самарского государственного технического университета,
Россия, 446001, Самарская обл., Сызрань, ул. Советская, 45.

Аннотация

Разработан метод решения задачи расчета напряженно-деформированного состояния в поверхностно упрочненном образце со сквозным поперечным надрезом V-образного профиля при различных значениях угла раскрытия в упругой и упругопластической постановках. Метод базируется на конечно-элементном моделировании и известном начальном напряженно-деформированном состоянии для гладкого упрочненного образца. Выполнено детальное исследование влияния угла раскрытия надреза и его глубины на уровень и характер распределения остаточных напряжений от дна концентратора напряжений по толщине упрочненного слоя для обеих постановок задач. На основании данных расчета обоснована целесообразность исследования поставленной задачи в упругопластической постановке, когда надрез находится полностью или частично в упрочненном слое, так как величины остаточных напряжений при решении задачи в упругой постановке физически нереализуемы, поскольку их значения превосходят по модулю временной предел сопротивления материала в несколько раз.

Механика деформируемого твердого тела
Научная статья

Образец для цитирования

Радченко В. П., Шишкин Д. М., Саушкин М. Н. Численное решение задачи о напряженно-деформированном состоянии поверхностно упрочненного призматического образца с надрезом V-образного профиля в упругой и упругопластической постановках // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2023. Т. 27, № 3. С. 491–508. EDN: CDEJKC. DOI: 10.14498/vsgtu2017.

Сведения об авторах

Владимир Павлович Радченко https://orcid.org/0000-0003-4168-9660
доктор физико-математических наук, профессор; заведующий кафедрой; каф. прикладной математики и информатики; e-mail: radchenko.vp@samgtu.ru

Дмитрий Михайлович Шишкин https://orcid.org/0000-0003-3205-2262
кандидат технических наук; доцент; каф. технологии машиностроения;
e-mail: shishkin.dim@yandex.ru

Михаил Николаевич Саушкин https://orcid.org/0000-0002-8260-2069
кандидат физико-математических наук, доцент; доцент; каф. прикладной математики и информатики; e-mail: saushkin.mn@samgtu.ru

В этом случае погрешность между решениями в упругой и упругопластической постановках для остаточных напряжений в среднеквадратической норме достигает 100–200 %, а при равномерной оценке (норма Чебышева) — нескольких сотен процентов. Если глубина концентратора превышает величину упрочненного слоя более чем в 1.5 раза, то упругое и упругопластическое решения дают близкие результаты.

Ключевые слова: опережающее поверхностное пластическое деформирование, призматический образец, V-образный надрез, остаточные напряжения, конечноэлементное моделирование, упругое и упрогопластическое решения.

Получение: 6 мая 2023 г. / Исправление: 20 августа 2023 г. /
Принятие: 19 сентября 2023 г. / Публикация онлайн: 28 сентября 2023 г.

Введение. На этапе технического контроля, следующего после механической обработки деталей различного назначения, особое внимание уделяется качеству обработанных наружных поверхностей. Даже в случае явного отсутствия дефектов на прочностной ресурс элементов конструкций серьезное влияние оказывает несовершенство микропрофиля в виде шероховатости поверхности при обработке заготовок резанием (точением, сверлением, фрезерованием, шлифованием и т. д.). При этом образующие шероховатость впадины микропрофиля в определенном смысле не только ослабляют поперечные сечения детали, но и зачастую являются главными очагами возникновения и последующего развития усталостных трещин в деталях при эксплуатации. Кроме этого в инженерной практике все большее внимание уделяется изучению вопросов усталостного разрушения деталей с концентраторами напряжений в виде технологических профильных надрезов по принципу нормального отрыва (развитие трещин I рода) при циклическом нагружении.

Современная оценка усталостной прочности и остаточного ресурса деталей с концентраторами напряжений при наличии в них дополнительных микро- или макротрещин чаще всего реализуется при помощи анализа критериальных характеристик механики усталостного разрушения, полученных на основе дорогостоящих длительных экспериментов и ресурсозатратных программных вычислений на основе метода конечных элементов (МКЭ) [1–4]. Несмотря на всю основательность описываемых для конкретных случаев подходов, сформулированные рекомендации по повышению параметров циклической трещиностойкости зачастую трудоемки либо труднореализуемы в инженерной практике.

Применение подходов механики поверхностно упрочненных элементов конструкций по отношению к вышеперечисленным вопросам считается альтернативным и наиболее эффективным вариантом повышения локальной прочности деталей, о чем свидетельствует необозримое количество научных публикаций. Среди них можно выделить «ранние» работы [5–9], относящиеся к методам поверхностного пластического деформирования (ППД), в которых описаны способы достижения наилучших результатов по повышению показателей статической и усталостной прочности, твердости, шероховатости, износостойкости и иных характеристик поверхностно упрочняемых гладких «бездефектных» деталей при минимальной трудоемкости. В частности, повышение прочностных свойств обеспечивается благодаря снижению эксплуатационных (растягивающих) напряжений наведением сжимающих остаточных напряжений, формируемых в тонком наружном слое после процедуры упрочнения при практически неизменных габаритных размерах детали. Следует отметить, что в зависимости от применяемого метода и режима упрочнения достигаемая толщина упрочненного слоя может варьироваться в пределах от 100–200 мкм (при ультразвуковом дробеструйном упрочнении [10,21]) до 1 мм (при обкатке роликом [12]).

Наибольшее прикладное использование методов ППД установлено при повышении прочности деталей газотурбинных двигателей (ГТД), имеющих несплошности в приповерхностном слое. Доказано, что для упрочненных деталей с концентраторами напряжений в условиях многоциклового нагружения наблюдается увеличение предела выносливости на 30–70% по сравнению с неупрочненными [13, 14]. Тем не менее применение большинства подходов ППД к деталям и изделиям с мелкими концентраторами напряжений (отверстия для подачи смазывающей жидкости, канавки под уплотнительные элементы и т. д.) ограничено возможностями упрочняющего инструмента, ввиду чего подавляющая часть разработанных технологий упрочнения неприменима. В этом случае одним из наиболее рациональных способов решения указанной проблемы является применение технологий опережающего поверхностного пластического деформирования (ОППД), когда нанесение наружных конструктивных надрезов на элементы конструкций осуществляется после процедуры предварительного упрочнения гладких «бездефектных» поверхностей, в результате чего происходит перераспределение остаточных напряжений в окрестности концентраторов напряжений [10–18].

Оценка влияния «острых» геометрических концентраторов напряжений, к которым в частности относятся надрезы V-образного профиля, на напряженно-деформированное состояние (НДС) деталей представляет особый научно-практический интерес [2–4, 11, 14, 19, 20]. Наглядно это отражено в работах [4,11,14] на примерах исследования концентрации напряжений в телах призматического профиля с V-образными насечками и различными углами раскрытия их граней, схожих с профилем елочных замков рабочих лопаток турбин ГТД. Детальное изучение вопроса о распределении поля остаточных сжимающих напряжений вблизи типовых концентраторов имеет отражение в работах [19, 20] на примере образцов, изготовленных из суперсплава на никелевой основе, при внедрении поверхностных повреждений в виде «тупых» вмятин и царапин оценивается влияние остаточных напряжений в указанных дефектах на выносливость при условии появления усталостной трещины на дне концентратора. Одним из подходов расчета НДС в деталях с концентраторами напряжений после ОППД является использование гипотезы об отсутствии вторичных пластических деформаций в области сжатия материала, прилегающей к концентратору (надрезу), т. е. в этой области наблюдается либо упругая «догрузка», либо упругая «разгрузка» [10, 12–15] и фактически решается задача в упругой постановке. Однако в работе [11] в предположении возникновения в области сжатия материала «вторичных» пластических деформаций показано существенное различие решений в упругой и упругопластической постановках. В связи с этим настоящая работа посвящена подробному изучению влияния значения начального угла раскрытия сквозного

V-образного надреза и его глубины в поверхностно упрочненной призматической балке на уровень формируемых остаточных напряжений вблизи концентратора напряжений.

1. Постановка задачи. В работе рассматривается поверхностно упрочненный призматический образец из сплава ЭП742 с размерами $100\times 10\times 10$ мм, ослабленный надрезом V-образного профиля (рис. 1), верхняя грань которого упрочнена в соответствии с технологией ОППД. В качестве исходных данных для выполнения расчета остаточных напряжений и вызванных упрочнением пластических деформаций используются экспериментальные данные для аналогичного гладкого «бездефектного» поверхностно упрочненного образца, полученные после виброударного (механического) ультразвукового упрочнения дробью [18]. Предполагается, что формирование центрального надреза V-образной формы с глубиной $b = \{0.1; 0.3\}$ мм и углом раскрытия $\varphi = \{1^\circ; 2^\circ; 5^\circ; 10^\circ; 15^\circ; 30^\circ; 45^\circ; 60^\circ; 90^\circ\}$ осуществлялось удалением части материала с верхней (упрочненной) грани образца. Радиус скругления при основании надреза не превышал $\rho_0 = 0.01$ мм (см. рис. 1, b).

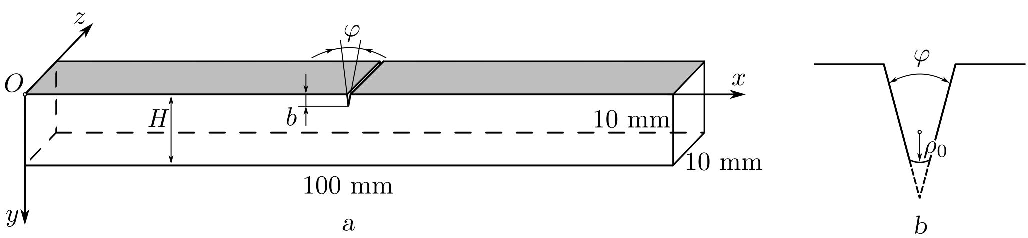


Рис. 1. Схематическое представление поверхностно упрочненного призматического образца с концентратором напряжений V-образной формы
[Figure 1. Schematic representation of a surface-hardened prismatic specimen with a V-shaped stress concentrator]

2. Восстановление НДС в поверхностно упрочненном гладком призматическом образце. Задача реконструкции НДС в поверхностно упрочненном гладком образце после виброударного ультразвукового упрочнения грани решена в работе [18], но поскольку этот материал входит составной частью в методику общей задачи, поставленной в настоящей работе, приведем основные расчетные формулы. Согласно [18] в декартовой системе координат (см. рис. 1) установлено, что компоненты тензоров остаточных напряжений и пластических деформаций зависят только от координаты y: $\sigma_x = \sigma_x(y)$, $\sigma_z = \sigma_z(y)$, $\sigma_y = \sigma_y(y) = 0$; при этом всеми недиагональными компонентами остаточных напряжений пренебрегаем в силу их малости по сравнению с диагональными; ненулевыми компонентами деформаций являются упругие $e_i = e_i(y)$, пластические $q_i = q_i(y)$ и полные $\varepsilon_i = \varepsilon_i(y)$, $i = x, y, z$, соответственно. Согласно гипотезе плоских сечений, для компонент остаточных полных деформаций выполняется условие

$$\varepsilon_x(y) = \varepsilon_z(y) = 0.$$

В рассматриваемом случае изотропного поверхностного упрочнения с учетом пластической несжимаемости $q_x+q_y+q_z = 0$ и гипотезы $q_x = q_z$ расчетные формулы принимают вид [18]

$$\sigma_z = \sigma_x, \quad q_x = q_z = -\frac{1-\nu}{E}\sigma_x, \quad q_y = \frac{2(1-\nu)}{E}\sigma_x, \tag{1}$$

где ν — коэффициент Пуассона, E — модуль Юнга.

Как следует из (1), все компоненты тензоров остаточных напряжений и пластических деформаций выражаются через компоненту $\sigma_x = \sigma_x(y)$. Поэтому если экспериментально известна величина $\sigma_x = \sigma_x(y)$, то задача реконструкции НДС решена. Однако экспериментально определить эту зависимость можно только в тонком упрочненном слое, а далее необходимо построить аппроксимацию этой зависимости и экстраполировать ее на все значения $0 \leqslant y \leqslant H$ (где $H = 10$ мм — высота призматического образца) с учетом самоуравновешенности остаточных напряжений $\int_0^H \sigma_x(y)dy = 0$. Для этого в [18] предложена следующая зависимость:

$$\sigma_x(y) = \sigma_0 - \sigma_1 \exp\left[-\left(\frac{y-y^*}{b}\right)^2\right], \tag{2}$$

где σ_0, σ_1, b, y^* — параметры аппроксимации экспериментальной эпюры $\sigma_x = \sigma_x(y)$, методика определения которых подробно изложена в [18]. Зависимости (1) и (2) являются исходной информацией задачи для призматического образца с концентраторами напряжений.

3. Численное решение задачи о перераспределении остаточных напряжений в области V-образного надреза после ОППД. Применение аналитического подхода для оценки НДС поверхностно упрочненных тел с профильными надрезами после ОППД практически невозможно, поскольку это связано со сложностями математического характера при описании напряженного состояния в области концентрации напряжений. Так, например, в работе [15] для тонкой пластины с полуэллиптическим надрезом в условиях плоского напряженного состояния в упругой постановке типовая задача решена методами теории функций комплексного переменного, однако полученные результаты имеют частный прикладной характер и неприменимы для объемных тел.

Для численного решения поставленной задачи в упругопластической постановке можно использовать универсальные подходы с применением широко распространенных в настоящее время программных комплексов на основе МКЭ, таких как `MSC Nastran`, `Abaqus`, `ANSYS`, `Solid Works` и т. д., которые в большинстве случаев являются неотъемлемыми средствами математического анализа. С этой целью в настоящей работе использовался программный конечно-элементный пакет инженерного анализа `ANSYS`, с помощью которого алгоритм численного решения задачи сводился к следующей последовательности.

1. На первом этапе численного решения по известной экспериментальной зависимости для компоненты $\sigma_x = \sigma_x(y)$ (данные по которой для сплава ЭП742 приведены в работах [10, 18, 21] и показаны на рис. 2) реализована методика восстановления полей остаточных напряжений и пластических деформаций после ультразвукового упрочнения верхней

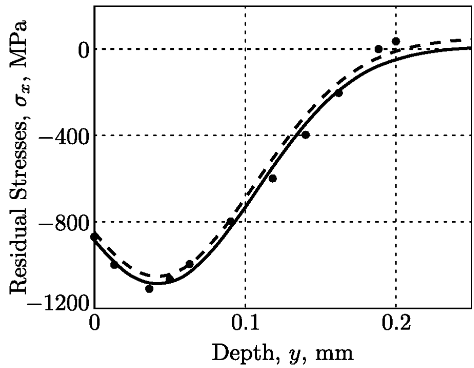


Рис. 2. Данные для компоненты $\sigma_x = \sigma_x(y)$ после ультразвукового упрочнения поверхности балки из сплава ЭП742: экспериментальные (маркеры), расчетные (сплошная линия) по аппроксимации (1) и расчетные (штриховая линия) для термоупругой задачи (воспроизведено по [22])

[Figure 2. Data for the component $\sigma_x = \sigma_x(y)$ after ultrasonic hardening of the surface of a beam made of EP742 alloy: experimental (markers), calculated (solid line) by approximation (1) and designed (dashed line) for the thermoelastic problem (reproduced by [22])]

грани гладкого «бездефектного» призматического образца (на рис. 1 залита цветом). Для этого выполняется аппроксимация экспериментально известной зависимости $\sigma_x = \sigma_x(y)$ по формуле (2) (сплошная линия на рис. 2) с учетом параметров $y^* = 0.034$ мм, $\sigma_0 = 13.38$ МПа, $\sigma_1 = 1100.98$ МПа, $b = 0.0928$ мм, после чего по соотношениям (1) рассчитываются остальные компоненты остаточных напряжений и пластических деформаций для гладкого образца.

2. Следующий шаг заключается в проверке адекватности метода первоначальных деформаций для гладкого образца в вычислительной среде МКЭ. Суть заключается в задании неоднородного поля температур, градиент которого изменяется по координате y (по толщине слоя) $T = T(y)$. Независимо от способа представления зависимости $T = T(y)$ полученные на текущем этапе результаты не влияют на последующее решение, поэтому температурное поле может быть любым [21]. При этом остаточные пластические деформации приравниваются к температурным деформациям ε_i^T с использованием соотношений
$$\varepsilon_i^T(y) = q_i(y) = \beta_i(T(y))[T(y) - T_0], \quad i = x, y, z, \ 0 \leqslant y \leqslant H, \qquad (3)$$
где $q_i(y)$ — компоненты тензора остаточных пластических деформаций, вычисленные в соответствии с (1). В расчетах на нижней грани задавалось фиксированное значение температуры $T_0 = T(H) = 20\,^\circ$C, а на противоположной упрочненной грани — $T_1 = T(0) = 400\,^\circ$C, остальные грани полагались теплоизолированными. Таким образом, с использованием соотношений (3) определялись значения коэффициентов $\beta_i = \beta_i(T(y))$ и решалась задача фиктивной термоупругости для гладкого упрочненного образца. Результаты расчетов представлены на рис. 2.

3. На третьем этапе в соответствии с технологией ОППД на предварительно упрочненный гладкий образец наносился надрез V-образного профиля с конкретно заданным значением угла раскрытия φ (см. рис. 1) посредством удаления части материала с наведенными от упрочнения полями остаточных напряжений и пластических деформаций, что приводило поле полных деформаций к неуравновешенному состоянию. Равновесное состояние в этом случае достигалось за счет перераспределения полей остаточных напряжений, которое наиболее интенсивно протекает в зоне надреза, поэтому дальнейшее решение сводилось к численному

решению задачи фиктивной термоупругопластичности с учетом зоны пластического поведения материала.

Математическое моделирование пластического поведения материала в программной среде `ANSYS` при решении термоупругопластической задачи осуществлялось с учетом следующих предположений. Во-первых, диаграммы деформирования материала на сжатие получить крайне сложно, а для материала ЭП742 ее в научной литературе, к сожалению, не имеется. Поэтому предполагалось, что диаграммы «растяжение–сжатие» для выбранного сплава идентичны (с учетом знака). Во-вторых, уровень остаточных напряжений в области сжатия гладкого образца достаточно высокий (см. рис. 2), а для тел с концентраторами напряжений они могут быть еще больше (по модулю), что, очевидно, превышает предел текучести и приводит к появлению вторичных пластических деформаций большой интенсивности в зоне, прилегающей к надрезу. Для этого в настоящей работе используется не диаграмма упругопластического деформирования в координатах «номинальное напряжение–полная деформация» ($\sigma_0 \sim \varepsilon$), а диаграмма «истинное напряжение–полная деформация» ($\sigma \sim \varepsilon$). Связь между истинным σ и номинальным σ_0 напряжениями устанавливается в соответствии с теорией реологического деформирования и накопления поврежденности в виде [23]

$$\sigma = \sigma_0(1+\omega), \quad \dot{\omega} = \alpha\sigma\dot{q}, \tag{4}$$

где ω — параметр поврежденности, q — пластичная деформация, $\alpha = \mathrm{const}$ (феноменологический параметр), σ и σ_0 соответствуют одному и тому же уровню пластической деформации q. В работе [23] для жесткого режима нагружения одноосного образца ($\dot{\varepsilon} = \mathrm{const}$) получена неявно заданная зависимость $\sigma_0 = \sigma_0(q)$:

$$q = c\left[\sigma_0 \exp\left(\int_0^q \alpha\sigma_0(\xi)d\xi\right) - \sigma_{\text{т}}\right]^n, \tag{5}$$

где $\sigma_{\text{т}}$ — предел текучести (пропорциональности); c и n — параметры аппроксимации начального участка диаграммы упругопластического деформирования степенной зависимостью

$$q = c(\sigma_0 - \sigma_{\text{т}})^n \tag{6}$$

для случая, когда $\omega \approx 0$ и $\sigma \cong \sigma_0$.

На рис. 3 приведены кривые «мгновенного» упругопластического деформирования для сплава ЭП742 при температуре 20 °C, полученные на основе экспериментальных данных (кривая *1*), а также рассчитанные в координатах $\sigma_0 \sim \varepsilon$ с ниспадающим участком (кривая *2*) и координатах $\sigma \sim \varepsilon$ монотонно возрастающей функции в соответствии с формулами (4)–(6) (кривая *3*) с параметрами, приведенными в табл. 1.

Учет упругопластических свойств сплава ЭП742 в программе `ANSYS` в соответствии с требованиями МКЭ-пакета должен выполняться при условии строго возрастающей зависимости между напряжением и деформацией, для чего удобно использовать расчетные данные кривой *3* (рис. 3). На программном уровне задание упругопластической кривой деформирования сплава

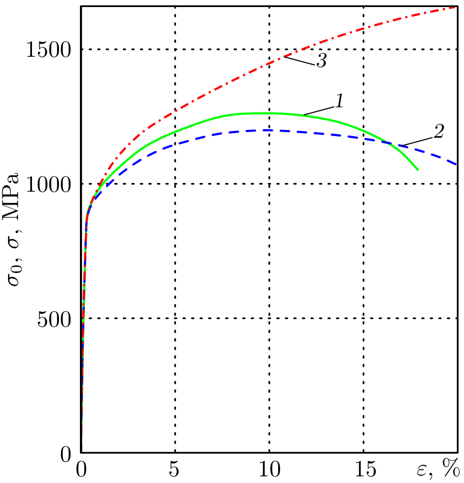


Рис. 3. Кривые упругопластического деформирования сплава ЭП742 при температуре 20 °C: *1* — экспериментальные данные, *2* — расчет в координатах $\sigma_0 \sim \varepsilon$, *3* — расчет в координатах $\sigma \sim \varepsilon$

[Figure 3. Elastoplastic deformation curves of EP742 alloy at a temperature of 20 °C: *1* — experimental data, *2* — calculation in coordinates $\sigma_0 \sim \varepsilon$, *3* — calculation in coordinates $\sigma \sim \varepsilon$]

Таблица 1

Значения параметров сплава ЭП742 для описания пластичности [23]
[The values of the parameters of EP742 alloy to describe the plasticity [23]]

T, °C	$\sigma_{\text{т}}$, MPa	c, MPa^{-n}	n	α, MPa^{-1}
20	863.3	$1.356 \cdot 10^{-6}$	1.776	$1.916 \cdot 10^{-3}$

ЭП742 в истинных координатах $\sigma \sim \varepsilon$ реализовывалось с помощью полилинейной модели материала, представляющей собой кусочно-линейную функцию в координатах «напряжение–полная деформация» по точкам $(\sigma_i, \varepsilon_i)$, $i = 1, 2, 3, \ldots, 100$. Здесь первая задаваемая точка $(\sigma_{\text{т}}, 0)$ описывает предельное упругое состояние материала при деформировании тела, где расчетное напряжение $\sigma_1 = \sigma_{\text{т}}$ — предел текучести материала, а деформация на момент начала пластического течения $\varepsilon_1 = q$ полагается равной нулю. Начальная составляющая кривой (до достижения значений расчетных напряжений $\sigma_{\text{т}}$) однозначно определяется параметрами линейной упругости ν и E.

Конечно-элементное моделирование поверхностно упрочненных гладкого «бездефектного» образца и образцов с V-образным надрезом для всех рассматриваемых в работе расчетных случаев в среде `ANSYS` осуществлялось следующим образом. При помощи восьмиузловых элементов `SOLID70`, полностью представляющих расчетную модель, решалась температурная задача, после чего указанный тип элементов заменялся на аналогичные восьмиузловые элементы `SOLID185` для последующей оценки НДС образцов после упрочнения. Важно заметить, что элементы `SOLID185` при проведении структурного анализа позволяют учесть такие свойства, как пластичность, ползучесть, большие деформации и т. д.

Реализация технологии ОППД с толщиной упрочненного слоя 200 мкм при помощи МКЭ, как было указано ранее, проводилась удалением из гладкой модели упрочненного образца части объема, представляющего собой центральный поперечный надрез V-образного профиля, что приводило к перегруппировке конечных элементов в зоне концентратора напряжений для каждого расчетного случая. С целью повышения точности модельных расчетов при оценке остаточных напряжений линейные размеры ребер конечных элементов не превышали 7 мкм, а радиус скругления дна концентратора ρ_0 варьировался в пределах от 7 до 10 мкм в зависимости от значения угла раскрытия φ.

4. Результаты расчетов и их анализ. При анализе полей остаточных напряжений в поверхностно упрочненном образце с V-образным надрезом наибольший интерес с позиции механики разрушения представляет компонента $\sigma_x = \sigma_x(y)$, так как она в значительной степени влияет на трещиностойкость и предел сопротивления усталости при поперечном расположении концентраторов [13–15].

На рис. 4–7 представлены распределения компонент тензора остаточных напряжений $\sigma_i = \sigma_i(y)$ $(i = x, y, z)$ по глубине упрочненного слоя h от дна концентратора, полученные из решения упругопластической задачи в зависимости от различных значений угла раскрытия φ, глубины концентратора b и радиуса закругления ρ. Из анализа данных, представленных на рис. 4–7, следует, что наблюдается существенное влияние величины угла раскрытия φ на величину и характер распределения остаточных напряжений. Интерес представляет сравнение данных расчета для величины $\sigma_x = \sigma_x(y)$ с V-образными надрезами на рис. 4 и для этой же компоненты для гладкого («бездефектного») образца на рис. 2. Из анализа этих данных следует, что нанесение мелких надрезов приводит к увеличению (по модулю) величины остаточных напряжений $\sigma_x = \sigma_x(y)$ в непосредственной близости от дна концентратора по сравнению с гладким образцом.

Этот эффект с инженерных позиций можно считать позитивным, поскольку при нанесении на гладкую поверхностно упрочненную деталь «эксплуатационного» дефекта рассмотренного типа (например, в результате соударения с каким-либо жестким объектом) остаточные напряжения сжатия в области, непосредственно примыкающей ко дну концентратора, становятся по модулю даже выше, чем в гладком образце.

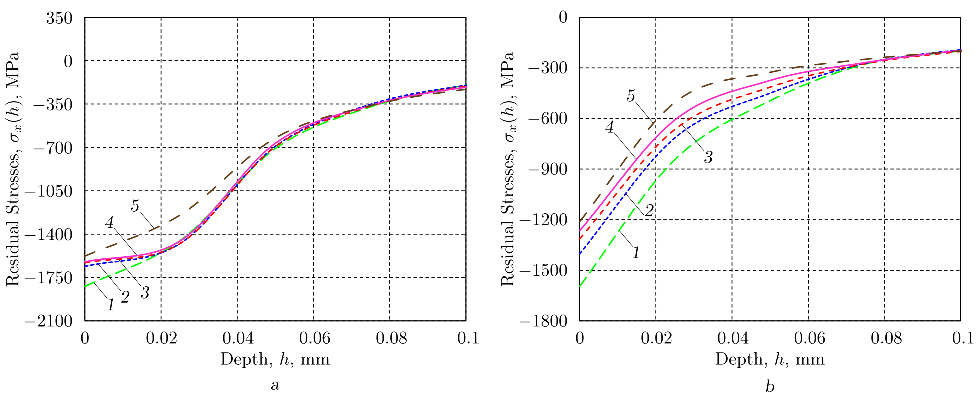


Рис. 4. Распределение компоненты $\sigma_x = \sigma_x(h)$ по глубине h от дна концентратора для упругопластического решения в зависимости от начального угла раскрытия φ при $b = 0.1$ мм (a) и $b = 0.3$ мм (b): *1* — $\varphi = 15^\circ$, *2* — $\varphi = 30^\circ$, *3* — $\varphi = 40^\circ$, *4* — $\varphi = 60^\circ$, *5* — $\varphi = 90^\circ$

[Figure 4. The distribution of stress component $\sigma_x = \sigma_x(h)$ by depth h from the bottom of the concentrator for the elastoplastic solution depending on the initial opening angle φ when $b = 0.1$ mm (a) and $b = 0.3$ mm (b): *1* — $\varphi = 15^\circ$, *2* — $\varphi = 30^\circ$, *3* — $\varphi = 40^\circ$, *4* — $\varphi = 60^\circ$, *5* — $\varphi = 90^\circ$]

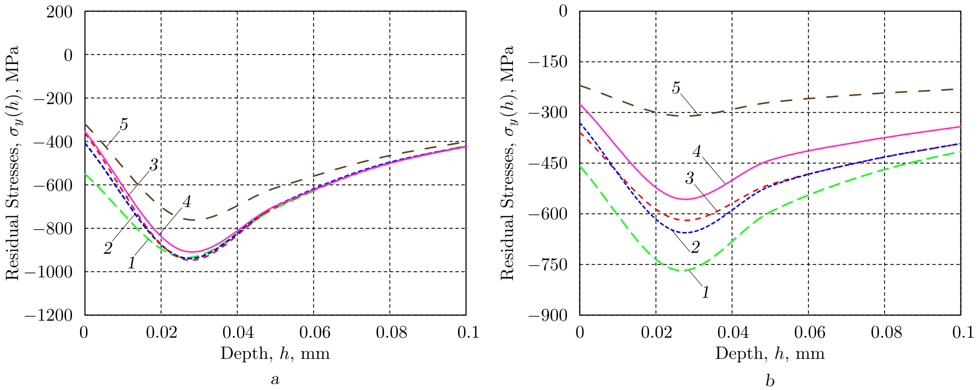


Рис. 5. Распределение компоненты $\sigma_y = \sigma_y(h)$ по глубине h от дна концентратора для упругопластического решения в зависимости от начального угла раскрытия φ при $b = 0.1$ мм (a) и $b = 0.3$ мм (b): *1* — $\varphi = 15°$, *2* — $\varphi = 30°$, *3* — $\varphi = 40°$, *4* — $\varphi = 60°$, *5* — $\varphi = 90°$

[Figure 5. The distribution of stress component $\sigma_y = \sigma_y(h)$ by depth h from the bottom of the concentrator for the elastoplastic solution depending on the initial opening angle φ when $b = 0.1$ mm (a) and $b = 0.3$ mm (b): *1* — $\varphi = 15°$, *2* — $\varphi = 30°$, *3* — $\varphi = 40°$, *4* — $\varphi = 60°$, *5* — $\varphi = 90°$]

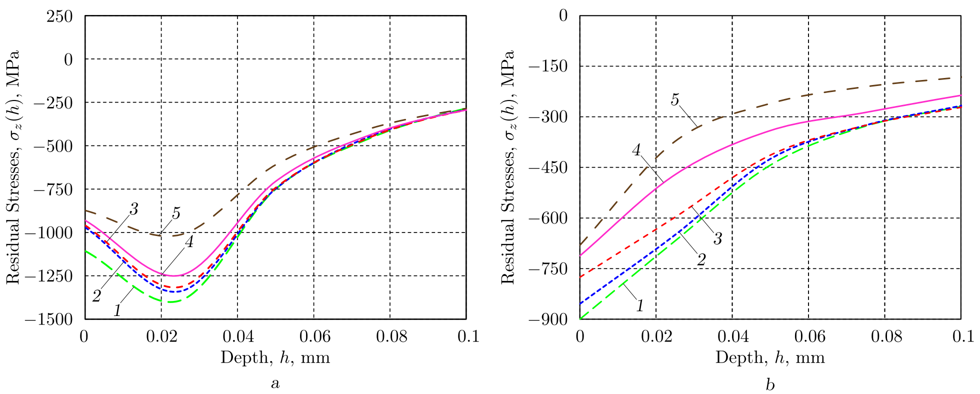


Рис. 6. Распределение компоненты $\sigma_z = \sigma_z(h)$ по глубине h от дна концентратора для упругопластического решения в зависимости от начального угла раскрытия φ при $b = 0.1$ мм (a) и $b = 0.3$ мм (b): *1* — $\varphi = 15°$, *2* — $\varphi = 30°$, *3* — $\varphi = 40°$, *4* — $\varphi = 60°$, *5* — $\varphi = 90°$

[Figure 6. The distribution of stress component $\sigma_z = \sigma_z(h)$ by depth h from the bottom of the concentrator for the elastoplastic solution depending on the initial opening angle φ when $b = 0.1$ mm (a) and $b = 0.3$ mm (b): *1* — $\varphi = 15°$, *2* — $\varphi = 30°$, *3* — $\varphi = 40°$, *4* — $\varphi = 60°$, *5* — $\varphi = 90°$]

Для сравнительного анализа была решена задача и в упругой постановке, результаты которой для компоненты $\sigma_x = \sigma_x(h)$ приведены на рис. 8–10. Отметим факты, следующие из анализа распределения компоненты $\sigma_x = \sigma_x(h)$ для упругопластического (рис. 4 и 7) и упругого (рис. 8–10) решений:

1) упругое решение дает чрезмерно завышенные (по модулю) значения $\sigma_x = \sigma_x(h)$ по сравнению с упругопластическим решением в области, непосредственно прилегающей ко дну концентратора;
2) полученные значения этой компоненты при использовании упругой постановки физически несостоятельны в окрестности области материала

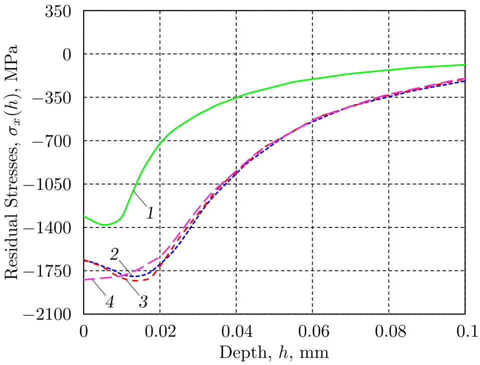


Рис. 7. Распределение компоненты $\sigma_x = \sigma_x(h)$ по глубине h от дна концентратора для упругопластического решения в зависимости от начального угла раскрытия φ при $b = 0.1$ мм: *1* — $\varphi = 1^\circ$, *2* — $\varphi = 5^\circ$, *3* — $\varphi = 10^\circ$, *4* — $\varphi = 15^\circ$

[Figure 7. The distribution of stress component $\sigma_x = \sigma_x(h)$ by depth h from the bottom of the concentrator for the elastoplastic solution depending on the initial opening angle φ when $b = 0.1$ mm: *1* — $\varphi = 1^\circ$, *2* — $\varphi = 5^\circ$, *3* — $\varphi = 10^\circ$, *4* — $\varphi = 15^\circ$]

около дна концентратора, поскольку такие уровни напряжений материала невозможны (см. рис. 3).

Поэтому адекватные результаты можно получить только при решении задачи в упругопластической постановке. Численные значения погрешности между решениями в упругой и упругопластической постановках на интервале $0 \leqslant h \leqslant 200$ мкм в зависимости от глубины надреза b и начального угла раскрытия его берегов φ для всех трех компонент тензора остаточных напряжений, вычисленные в норме

$$\Delta_i^\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{n} \left[\sigma_i^p(h_k) - \sigma_i^y(h_k)\right]^2}{\sum_{k=1}^{n} \left[\sigma_i^y(h_k)\right]^2}} \cdot 100\%, \quad i = x, y, z,$$

приведены в табл. 2. Здесь $h_k \in [0, 200]$ мкм — точки дискретизации указанного отрезка; $\sigma_i^p(h_k)$ и $\sigma_i^y(h_k)$ — значения компонент тензоров остаточных напряжений в точках дискретизации для упругопластического и упругого решений соответственно; $N = 21$ — количество точек дискретизации указанного отрезка.

Основываясь на результатах, приведенных в табл. 2, можно сделать вывод, что по мере увеличения угла раскрытия φ для всех компонент тензора остаточных сжимающих напряжений в пределах 200 мкм наблюдается асимптотическое снижение расхождения результатов между упругим и упругопластическим решениями при обоих расчетных случаях глубины дефекта b. Это, в свою очередь, хорошо согласуется с теорией сингулярности упругих напряжений вблизи вершины трещины.

Результаты решения задачи реконструкции полей остаточных напряжений вблизи дефекта трещиноподобного вида в упругопластической постановке позволяют сделать вывод, что при увеличении начального угла раскрытия дефекта V-образного профиля от 1° до 15° при $b = 0.1$ мм в окрестности зоны дна концентратора напряжений происходит возрастание (по модулю) сжимающих остаточных напряжений, а увеличение этого угла от 15° до 90° сопровождается снижением их величины для всех компонент тензора остаточных напряжений. В случае, когда дефект находится на глубине $b = 0.3$ мм от упрочненной поверхности, для значений остаточных напряжений наблюдается монотонное их снижение по абсолютной величине при увеличении угла раскрытия φ. Отсюда следует, что применение методов ППД при упрочнении призматического тела со сквозным V-образным концентратором напряжений,

Таблица 2

Расхождение компонент $\sigma_i = \sigma_i(y)$, $i = x, y, z$, между упругим и упругопластическим решениями задачи для образца с V-образным надрезом в зависимости от φ и b [The discrepancy of the components $\sigma_i = \sigma_i(y)$, $i = x, y, z$, between the elastic and elastoplastic solutions of the problem for a specimen with a V-shaped notch varies depending on φ and b]

Defect depth, b, mm	Opening angle, φ, degrees	Δ_x^σ	Δ_y^σ	Δ_z^σ
0.1	1	168.27	70.83	139.61
	5	80.29	20.39	51.32
	10	75.15	19.21	47.13
	15	73.89	18.66	46.58
	30	73.53	18.36	44.51
	40	72.79	18.29	43.3
	60	70.22	17.25	41.28
	90	58.87	13.42	33.29
0.3	15	45.06	9.97	16.88
	30	43.12	8.13	16.07
	40	31.37	6.29	11.71
	60	29.41	5.42	11.23
	90	18.76	4.33	5.93

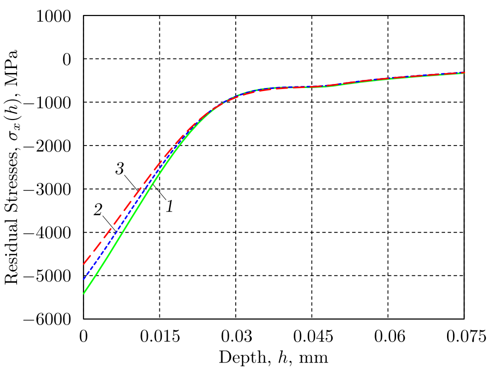


Рис. 8. Распределение компоненты $\sigma_x = \sigma_x(h)$ по глубине h от дна концентратора для упругого решения задачи в зависимости от начального угла раскрытия φ при $b = 0.1$ мм: *1* — $\varphi = 1°$, *2* — $\varphi = 5°$, *3* — $\varphi = 10°$

[Figure 8. The distribution of stress component $\sigma_x = \sigma_x(h)$ by depth h from the bottom of the concentrator for the elastic solution depending on the initial opening angle φ when $b = 0.1$ mm: *1* — $\varphi = 1°$, *2* — $\varphi = 5°$, *3* — $\varphi = 10°$]

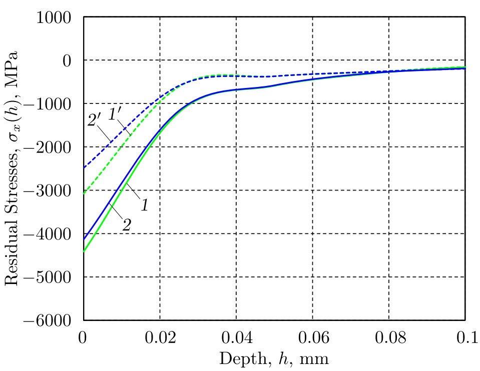


Рис. 9. Распределение компоненты $\sigma_x = \sigma_x(h)$ по глубине h от дна концентратора для упругого решения задачи в зависимости от начального угла раскрытия φ и глубины надреза b: *1* — $\varphi = 15°$, $b = 0.1$ мм; *1′* — $\varphi = 15°$, $b = 0.3$ мм; *2* — $\varphi = 30°$, $b = 0.1$ мм; *2′* — $\varphi = 30°$, $b = 0.3$ мм

[Figure 9. The distribution of stress component $\sigma_x = \sigma_x(h)$ by depth h from the bottom of the concentrator for the elastic solution depending on the initial opening angle φ and the depth of the notch b: *1* — $\varphi = 15°$, $b = 0.1$ mm; *1′* — $\varphi = 15°$, $b = 0.3$ mm; *2* — $\varphi = 30°$, $b = 0.1$ mm; *2′* — $\varphi = 30°$, $b = 0.3$ mm]

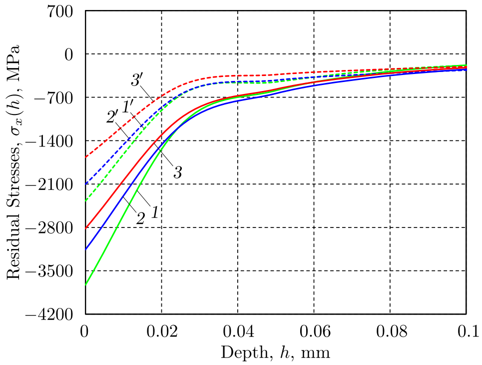


Рис. 10. Распределение компоненты $\sigma_x = \sigma_x(h)$ по глубине h от дна концентратора для упругого решения задачи в зависимости от начального угла раскрытия φ и глубины надреза b: *1* — $\varphi = 40^\circ$, $b = 0.1$ мм; *1′* — $\varphi = 40^\circ$, $b = 0.3$ мм; *2* — $\varphi = 60^\circ$, $b = 0.1$ мм; *2′* — $\varphi = 60^\circ$, $b = 0.3$ мм; *3* — $\varphi = 90^\circ$, $b = 0.1$ мм; *3′* — $\varphi = 90^\circ$, $b = 0.3$ мм

[Figure 10. The distribution of stress component $\sigma_x = \sigma_x(h)$ by depth h from the bottom of the concentrator for the elastic solution depending on the initial opening angle φ and the depth of the notch b: *1* — $\varphi = 40^\circ$, $b = 0.1$ mm; *1′* — $\varphi = 40^\circ$, $b = 0.3$ mm; *2* — $\varphi = 60^\circ$, $b = 0.1$ mm; *2′* — $\varphi = 60^\circ$, $b = 0.3$ mm; *3* — $\varphi = 90^\circ$, $b = 0.1$ mm; *3′* — $\varphi = 90^\circ$, $b = 0.3$ mm]

глубина которого не превышает толщину упрочненного слоя для гладкого образца $y \approx 200$ мкм (см. рис. 2), имеет наибольшую эффективность лишь при значениях угла раскрытия $\varphi \leqslant 60^\circ$. Здесь под эффективностью понимается ситуация, когда величина остаточных напряжений по модулю в области дна концентратора, нанесенного на упрочненную поверхность призматического образца, не меньше, чем на гладкой упрочненной детали. При этом увеличение раскрытия угла свыше 60° между берегами приводит к заметному снижению уровня сжимающих остаточных напряжений вблизи вершины надреза для компонент $\sigma_y = \sigma_y(y)$ и $\sigma_z = \sigma_z(y)$ для всех рассмотренных расчетных случаев.

5. Выводы. Выполненные исследования позволяют сформулировать следующие результаты.

1. Разработан метод решения задачи расчета НДС в призматическом образце со сквозным одиночным поперечным надрезом V-образного профиля при различных значениях угла раскрытия после технологии ОППД в упругой и упругопластической постановках, базирующийся на конечно-элементном моделировании и известном начальном напряженно-деформированном состоянии для гладкого упрочненного призматического образца.
2. Обоснована целесообразность учета деформаций пластичности материала при оценке остаточных напряжений в призматическом упрочненном образце при наличии поверхностных концентраторов напряжений V-образного типа, когда концентратор находится полностью или частично в упрочненном слое.
3. Показано, что если концентратор находится частично или полностью в упрочненном слое, то наблюдается существенное расхождение упругого решения с упругопластическим для остаточных напряжений в сечениях от дна концентратора, достигающее погрешности до 100–200% в среднеквадратической норме и нескольких сотен процентов по максимальным (по модулю) значениям (норма Чебышева). Если же глубина концентратора превышает величину упрочненного слоя более чем в 1.5 раза, то упругое и упругопластическое решения дают близкие результаты и по мере удаления от концентратора они асимптотически приближаются друг к другу.

Конкурирующие интересы. Конфликта интересов в отношении авторства и публикации этой статьи нет.

Авторский вклад и ответственность. Все авторы принимали участие в разработке концепции статьи и в написании рукописи. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

Финансирование. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23–29–00434, https://rscf.ru/project/23-29-00434/.

Библиографический список

1. Eriksson R., Moverare J., Chen Z., Simonsson K. The effect of notches on the fatigue life of a nickel-base gas turbine disk material // *Acta Polytechnica CTU Proceedings*, 2018. vol. 20. pp. 34–42. DOI: https://doi.org/10.14311/APP.2018.20.0034.
2. Liu B., Yan X. An extension research on the theory of critical distances for multiaxial notch fatigue finite life prediction // *Int. J. Fatigue*, 2018. vol. 117. pp. 217–229. DOI: https://doi.org/10.1016/j.ijfatigue.2018.08.017.
3. Bressan S., Ogawa F., Itoh T., Berto F. Influence of notch sensitivity and crack initiation site on low cycle fatigue life of notched components under multiaxial nonproportional loading // *Frattura ed Integrità Strutturale*, 2019. vol. 13, no. 47. pp. 126–140. DOI: https://doi.org/10.3221/IGF-ESIS.47.10.
4. Macek W. Fracture surface formation of notched 2017A-T4 aluminium alloy under bending fatigue // *Int. J. Fract.*, 2022. vol. 234. pp. 141–157. DOI: https://doi.org/10.1007/s10704-021-00579-y.
5. Биргер И. А. *Остаточные напряжения*. М.: Машгиз, 1963. 232 с.
6. Гринченко И. Г. *Упрочнение деталей из жаропрочных и титановых сплавов*. М.: Машиностроение, 1971. 120 с.
7. Сулима А. М., Шувалов В. А., Ягодкин Ю. Д. *Поверхностный слой и эксплуатационные свойства деталей машин*. М.: Машиностроение, 1988. 240 с.
8. Кудрявцев И. В. *Поверхностный наклеп для повышения прочности и долговечности деталей машин поверхностным пластическим деформированием*. М.: Машиностроение, 1969. 100 с.
9. Ножницкий Ю. А., Фишгойт А. В., Ткаченко Р. И., Теплова С. В. Разработка и применение новых методов упрочнение деталей ГТД, основанных на пластическом деформировании поверхностных слоев // *Вестн. двигателестроения*, 2006. № 2. С. 8–16.
10. Радченко В. П., Шишкин Д. М. Метод реконструкции остаточных напряжений в призматическом образце с надрезом полукруглого профиля после опережающего поверхностного пластического деформирования // *Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика*, 2020. Т. 20, № 4. С. 478–492. EDN: ZPKSUN. DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-4-478-492.
11. Радченко В. П., Шишкин Д. М. Численный метод расчета напряженно-деформированного состояния в призматическом поверхностно упрочненном образце с надрезом в упругой и упругопластической постановках // *Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика*, 2021. Т. 21, № 4. С. 503–519. EDN: KNHHLG. DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-4-503-519.
12. Радченко В. П., Павлов В. Ф., Саушкин М. Н. Исследование влияния анизотропии поверхностного пластического упрочнения на распределение остаточных напряжений в полых и сплошных цилиндрических образцах // *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика*, 2015. № 1. С. 130–147. EDN: TVSBYV. DOI: https://doi.org/10.15593/perm.mech/2015.1.09.
13. Павлов В. Ф., Букатый А. С., Семенова О. Ю. Прогнозирование предела выносливости поверхностно упрочненных деталей с концентраторами напряжений // *Вестн. машиностроения*, 2019. № 1. С. 3–7. EDN: VTAEPK.

14. Павлов В. Ф., Кирпичев В. А., Вакулюк В. С. *Прогнозирование сопротивления усталости поверхностно упрочненных деталей по остаточным напряжениям.* Самара: Самар. науч. центр РАН, 2012. 125 с.
15. Иванов С. И., Шатунов М. П., Павлов В. Ф. Влияние остаточных напряжений на выносливость образцов с надрезом / *Вопросы прочности элементов авиационных конструкций.* Т. 1. Куйбышев: КуАИ, 1974. С. 88–95.
16. Саушкин М. Н., Радченко В. П., Куров А. Ю. Метод расчета остаточных напряжений в надрезах с полукруглым профилем в полом поверхностно упрочненном цилиндрическом образце // *ПМТФ*, 2013. Т. 54, № 4. С. 150–157. EDN: QZQGLF.
17. Сазанов В. П. Исследование закономерностей остановки усталостной трещины в цилиндрическом образце с надрезом // *Вестник Самарского университета. Аэрокосмическая техника, технологии и машиностроение*, 2018. Т. 17, № 1. С. 160–169. EDN: UPOWMG. DOI: https://doi.org/10.18287/2541-7533-2018-17-1-160-169.
18. Радченко В. П., Саушкин М. Н., Бочкова Т. И. Математическое моделирование и экспериментальное исследование формирования и релаксации остаточных напряжений в плоских образцах из сплава ЭП742 после ультразвукового упрочнения в условиях высокотемпературной ползучести // *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика*, 2016. № 1. С. 93–112. EDN: VQTAHL. DOI: https://doi.org/10.15593/perm.mech/2016.1.07.
19. Fleury R., Nowell D. Evaluating the influence of residual stresses and surface damage on fatigue life of nickel superalloys // *Int. J. Fatigue*, 2017. vol. 105. pp. 27–33. DOI: https://doi.org/10.1016/j.ijfatigue.2017.08.015.
20. Foss B., Gray S., Hardy M., Stekovic S. [et al.] Analysis of shot-peening and residual stress relaxation in the nickel-based superalloy RR1000 // *Acta Materialia*, 2013. vol. 61, no. 7. pp. 2548–2559. DOI: https://doi.org/10.1016/j.actamat.2013.01.031.
21. Радченко В. П., Афанасьева О. С., Глебов В. Е. Влияние технологии поверхностного пластического упрочнения, остаточных напряжений и граничных условий на выпучивание балки // *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика*, 2020. № 1. С. 87–98. EDN: IJMTQN. DOI: https://doi.org/10.15593/perm.mech/2020.1.07.
22. Радченко В. П., Шишкин Д. М. Влияние размеров области поверхностного упрочнения на напряженно-деформированное состояние балки с надрезом полукруглого профиля // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2020. Т. 24, № 4. С. 663–676. EDN: GQGTTH. DOI: https://doi.org/10.14498/vsgtu1828.
23. Радченко В. П., Еремин Ю. А. *Реологическое деформирование и разрушение материалов и элементов конструкций.* М.: Машиностроение-1, 2004. 264 с. EDN: QNATSX.

Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2023, vol. 27, no. 3, pp. 491–508
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu2017

MSC: 74A10, 74D10

Numerical solution of the problem of stress-strain state of a surface-hardened prismatic V-notched specimen in elastic and elastoplastic formulations

V. P. Radchenko[1]***, D. M. Shishkin***[2]***, M. N. Saushkin***[1]

[1] Samara State Technical University,
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russian Federation.
[2] Syzran' Branch of Samara State Technical University,
45, Sovetskaya str., Syzran', Samara region, 446001, Russian Federation.

Abstract

A method has been developed for solving the problem of calculating the stress-strain state in a surface-hardened prismatic V-notched specimen at different values of the opening angle in both elastic and elastoplastic formulations. The method is based on finite element modeling and the known initial stress-strain state for a smooth hardened specimen. A detailed study was conducted on the influence of the notch opening angle and its depth on the level and distribution of residual stresses from the stress concentrator bottom throughout the thickness of the hardened layer for both formulations of the problem. Based on the calculation data, the feasibility of investigating the problem in the elastoplastic formulation was justified when the notch is located completely or partially in the hardened layer, as the magnitudes of residual stresses in the elastic formulation are physically unrealizable, since their values exceed the material's yield strength several times.

In this case, the error between solutions in the elastic and elastoplastic formulations for residual stresses reaches 100–200 % in the root-mean-square norm, and reaches several hundred percent in the uniform estimate (Chebyshev norm). If the depth of the stress concentrator exceeds the thickness

Mechanics of Solids
Research Article

Please cite this article in press as:
Radchenko V. P., Shishkin D. M., Saushkin M. N. Numerical solution of the problem of stress-strain state of a surface-hardened prismatic V-notched specimen in elastic and elastoplastic formulations, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2023, vol. 27, no. 3, pp. 491–508. EDN: CDEJKC. DOI: 10.14498/vsgtu2017 (In Russian).

Authors' Details:

Vladimir P. Radchenko https://orcid.org/0000-0003-4168-9660
Dr. Phys. & Math. Sci., Professor; Head of Department; Dept. of Applied Mathematics & Computer Science; e-mail: radchenko.vp@samgtu.ru

Dmitry M. Shishkin https://orcid.org/0000-0003-3205-2262
Cand. Techn. Sci.; Associate Professor; Dept. of Mechanical Engineering Technologies; e-mail: shishkin.dim@yandex.ru

Mikhail N. Saushkin https://orcid.org/0000-0002-8260-2069
Cand. Phys. & Math. Sci.; Associate Professor; Dept. of Applied Mathematics & Computer Science; e-mail: saushkin.mn@samgtu.ru

of the hardened layer by more than 1.5 times, the elastic and elastoplastic solutions yield similar results.

Keywords: advanced surface plastic deformation, prismatic specimen, V-shaped notch, residual stresses, finite element modeling, elastic and elastic plastic solutions.

Received: 6th May, 2023 / Revised: 20th August, 2023 /
Accepted: 19th September, 2023 / First online: 28th September, 2023

Competing interests. We do not have any conflict of interest regarding the authorship and publication of this article.

Authors' contributions and responsibilities. All authors participated in the development of the article's concept and in writing the manuscript. Authors bear full responsibility for submitting the final manuscript for publication. The final version of the manuscript was approved by all authors.

Funding. The research was funded by the Russian Science Foundation (project no. 23–29–00434), https://rscf.ru/en/project/23-29-00434/.

References

1. Eriksson R., Moverare J., Chen Z., Simonsson K. The effect of notches on the fatigue life of a nickel-base gas turbine disk material, *Acta Polytechnica CTU Proceedings*, 2018, vol. 20, pp. 34–42. DOI: https://doi.org/10.14311/APP.2018.20.0034.
2. Liu B., Yan X. An extension research on the theory of critical distances for multiaxial notch fatigue finite life prediction, *Int. J. Fatigue*, 2018, vol. 117, pp. 217–229. DOI: https://doi.org/10.1016/j.ijfatigue.2018.08.017.
3. Bressan S., Ogawa F., Itoh T., Berto F. Influence of notch sensitivity and crack initiation site on low cycle fatigue life of notched components under multiaxial nonproportional loading, *Frattura ed Integrità Strutturale*, 2019, vol. 13, no. 47, pp. 126–140. DOI: https://doi.org/10.3221/IGF-ESIS.47.10.
4. Macek W. Fracture surface formation of notched 2017A-T4 aluminium alloy under bending fatigue, *Int. J. Fract.*, 2022, vol. 234, pp. 141–157. DOI: https://doi.org/10.1007/s10704-021-00579-y.
5. Birger I. A. *Ostatochnye napriazheniia* [Residual Stresses]. Moscow, Mashgiz, 1963, 232 pp. (In Russian)
6. Grinchenko I. G. *Uprochnenie detalei iz zharoprochnykh i titanovykh splavov* [Hardening Parts Made of High-Resistant and Titanium Alloys]. Moscow, Mashinostroenie, 1971, 120 pp. (In Russian)
7. Sulima A. M., Shuvalov V. A., Yagodkin Yu. D. *Poverkhnostnyi sloi i ekspluatatsionnye svoistva detalei mashin* [Surface Layer and Performance of Machine Parts]. Moscow, Mashinostroenie, 1988, 240 pp. (In Russian)
8. Kudryavtsev I. V. *Poverkhnostnyi naklep dlia povysheniia prochnosti i dolgovechnosti detalei mashin poverkhnostnym plasticheskim deformirovaniem* [Surface Strain Hardening to Increase the Strength and Durability of Machine Parts]. Moscow, Mashinostroenie, 1969, 100 pp. (In Russian)
9. Nozhnitskii Yu. A., Fishgoit A. V., Tkachenko R. I., Teplova S. V. Development and application of new GTE parts hardening methods based on the plastic deformation of the surface layers, *Vestn. Dvigatel.*, 2006, no. 2, pp. 8–16 (In Russian).
10. Radchenko V. P., Shishkin D. M. The method of reconstruction of residual stresses in a prismatic specimen with a notch of a semicircular profile after advanced surface plastic deformation, *Izv. Saratov Univ. Math. Mech. Inform.*, 2020, vol. 20, no. 4, pp. 478–492 (In Russian). EDN: ZPKSUN. DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-4-478-492.

11. Radchenko V. P., Shishkin D. M. Numerical method for calculating the stress-strain state in a prismatic surface-hardened spacemen with a notch in elastic and elastoplastic formulations, *Izv. Saratov Univ. Math. Mech. Inform.*, 2021, vol. 21, no. 4, pp. 503–519 (In Russian). EDN: KNHHLG. DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-4-503-519.
12. Radchenko V. P., Pavlov V. Ph., Saushkin M. N. Investigation of surface plastic hardening anisotropy influence on residual stresses distribution in hollow and solid cylindrical specimens, *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2015, no. 1, pp. 130–147 (In Russian). EDN: TVSBYV. DOI: https://doi.org/10.15593/perm.mech/2015.1.09.
13. Pavlov V. F., Bukaty A. S., Semenova O. Yu. Forecasting of the endurance limit of surface-hardened parts with stress concentrators, *Vestn. Mashinostroeniya*, 2019, no. 1, pp. 3–7 (In Russian). EDN: VTAEPK.
14. Pavlov V. F., Kirpichev V. A., Vakulyuk V. S. *Prognozirovanie soprotivleniia ustalosti poverkhnostno uprochnennykh detalei po ostatochnym napriazheniiam* [Prediction of Fatigue Resistance of Surface Reinforced Parts by Residual Stresses]. Samara, Samara Sci. Center of RAS, 2012, 125 pp. (In Russian)
15. Ivanov S. I., Shatunov M. P., Pavlov V. F. Influence of residual stresses on notched specimen endurance, In: *Problems of Strength of Aircraft Structure Elements*, vol. 1. Kuibyshev, Kuibyshev Aviation Inst., 1974, pp. 88–95 (In Russian).
16. Saushkin M. N., Radchenko V. P., Kurov A. Yu. Method of calculating residual stresses in semicircular notches in a surface hardened hollow cylindrical specimen, *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2013, vol. 54, no. 4, pp. 644–650. EDN: RFQTST. DOI: https://doi.org/10.1134/S0021894413040159.
17. Sazanov V. P. Analysis of the mechanism of fatigue crack arrest in a cylindrical notched specimen, *Vestnik of Samara University. Aerospace and Mechanical Engineering*, 2018, vol. 17, no. 1, pp. 160–169 (In Russian). EDN: UPOWMG. DOI: https://doi.org/10.18287/2541-7533-2018-17-1-160-169.
18. Radchenko V. P., Saushkin M. N., Bochkova T. I. Mathematical modeling and experimental study of forming and relaxation of the residual stresses in plane samples made of EP742 alloy after the ultrasonic hardening under the hightemperature creep conditions, *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2016, no. 1, pp. 93–112 (In Russian). EDN: VQTAHL. DOI: https://doi.org/10.15593/perm.mech/2016.1.07.
19. Fleury R., Nowell D. Evaluating the influence of residual stresses and surface damage on fatigue life of nickel superalloys, *Int. J. Fatigue*, 2017, vol. 105, pp. 27–33. DOI: https://doi.org/10.1016/j.ijfatigue.2017.08.015.
20. Foss B., Gray S., Hardy M., Stekovic S. [et al.] Analysis of shot-peening and residual stress relaxation in the nickel-based superalloy RR1000, *Acta Materialia*, 2013, vol. 61, no. 7, pp. 2548–2559. DOI: https://doi.org/10.1016/j.actamat.2013.01.031.
21. Radchenko V. P., Afanaseva O. S., Glebov V. E. The effect of surface plastic hardening technology, residual stresses and boundary conditions on the buckling of a beam, *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2020, no. 1, pp. 87–98 (In Russian). EDN: IJMTQN. DOI: https://doi.org/10.15593/perm.mech/2020.1.07.
22. Radchenko V. P., Shishkin D. M. The influence of the dimensions of the surface hardening region on the stress-strain state of a beam with a notch of a semicircular profile, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2020, vol. 24, no. 4, pp. 663–676 (In Russian). EDN: GQGTTH. DOI: https://doi.org/10.14498/vsgtu1828.
23. Radchenko V. P., Eremin Yu. A. *Reologicheskoe deformirovanie i razrushenie materialov i elementov konstruktsii* [Rheological Deformation and Fracture of Materials and Structural Elements]. Moscow, Mashinostroenie-1, 2004, 264 pp. (In Russian). EDN: QNATSX

Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2023. Т. 27, № 3. С. 509–529
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu2005
EDN: FIZJNS

УДК 539.42

Параметрическое исследование полей, ассоциированных с вершиной трещины, в условиях ползучести с учетом процессов накопления поврежденности с использованием UMAT

Д. В. Чаплий, Л. В. Степанова, О. Н. Белова

Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С.П. Королева,
Россия, 443086, Самара, Московское ш., 34.

Аннотация

Предметом исследования является анализ полей, ассоциированных с вершиной трещины, находящейся в условиях ползучести при принятии во внимание явления накопления повреждений. Целью работы является проведение компьютерного конечно-элементного моделирования одноосного растяжения пластины с центральной горизонтальной и наклонной трещинами в условиях ползучести в плоской постановке задачи и анализ поля сплошности вблизи вершины трещины. При численном моделировании используется степенной закон ползучести Бейли–Нортона. Моделирование выполнено в многофункциональном программном комплексе `SIMULIA Abaqus`. Проведен анализ окружных распределений напряжений и деформаций ползучести в окрестности вершины трещины.

Степенной закон ползучести с помощью пользовательской процедуры `UMAT` (User Material) пакета `SIMULIA Abaqus` был дополнен кинетическим уравнением накопления поврежденности Качанова–Работнова в связанной постановке. Примененная подпрограмма `UMAT` имеет много преимуществ при прогнозировании поврежденности материала и позволяет работать с материалами и определяющими их соотношениями, отсутствующими в библиотеке материалов `Abaqus`. Подпрограмма `UMAT`

Механика деформируемого твердого тела
Научная статья

Образец для цитирования
Чаплий Д. В., Степанова Л. В., Белова О. Н. Параметрическое исследование полей, ассоциированных с вершиной трещины, в условиях ползучести с учетом процессов накопления поврежденности с использованием UMAT // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2023. Т. 27, № 3. С. 509–529. EDN: FIZJNS. DOI: 10.14498/vsgtu2005.

Сведения об авторах

Дмитрий Викторович Чаплий https://orcid.org/0000-0001-9510-3659
аспирант; каф. математического моделирования в механике; e-mail: chapliy.dv@ssau.ru

Лариса Валентиновна Степанова https://orcid.org/0000-0002-6693-3132
доктор физико-математических наук, доцент; заведующий кафедрой; каф. математического моделирования в механике; e-mail: stepanova.lv@ssau.ru

Оксана Николаевна Белова https://orcid.org/0000-0002-4492-223X
ассистент; каф. математического моделирования в механике; e-mail: belova.on@ssau.ru

вызывается во всех точках расчета и обновляет напряжения и переменные состояния, зависящие от решения, до их значений в конце приращения. После чего рассчитываются обновленные элементы матрицы Якоби.

Получены распределения напряжений, деформаций и сплошности в условиях ползучести с учетом накопления поврежденности с течением времени. Построены угловые распределения сплошности, напряжений и деформаций с течением времени на различных расстояниях от вершины трещины с применением библиотеки `Matplotlib`. Проведено сравнение угловых распределений напряжений и деформаций при моделировании без учета поврежденности и в случае учета накопления повреждений. Показано, что наличие поврежденности приводит к большим значениям деформаций ползучести и меньшим значениям напряжений.

Ключевые слова: ползучесть, поврежденность, пользовательская процедура `UMAT`, `SIMULIA Abaqus`, поля напряжений, поля деформаций, трещина.

Получение: 10 марта 2023 г. / Исправление: 24 августа 2023 г. / Принятие: 19 сентября 2023 г. / Публикация онлайн: 27 сентября 2023 г.

Введение. Задача моделирования полей, ассоциированных с окрестностью вершины трещины в условиях ползучести, являлась фундаментальной проблемой нелинейной механики разрушения и остается актуальной в настоящее время [1–15]. Сегодня особый интерес вызывает исследование разрушения материалов и моделирование поврежденности тел с трещинами в условиях ползучести [13–15]. Первые работы, где были предложены параметры сплошности и поврежденности для описания накопления повреждений — статьи Л. М. Качанова [1] и Ю. Н. Работнова [2] — стали классическими исследованиями, положившими начало современной механики поврежденности [3, 4]. Затем было предложено множество математических моделей (определяющих соотношений и кинетических уравнений для описания эволюции повреждений), как совершенно новых [6–8], так и базирующихся на модели поврежденности Качанова—Работнова [9]. В работе [5] авторы проводят обзор экспериментальных и теоретических исследований ползучести при нестационарных сложных напряженных состояниях; описаны результаты ученых, внесших существенный вклад в исследование ползучести с учетом поврежденности, которая может быть представлена в скалярном, векторном, тензорном виде или их комбинацией. В работе [6] приведен целый ряд математических моделей изотропной и анизотропной поврежденности при ползучести, каждая из которых применима к определенному классу решаемых задач, учитывает разные аспекты накопления повреждений и подбирается в соответствии с необходимыми условиями. В одном из последних обзоров [6] авторы вводят классификацию, согласно которой модели поврежденности в условиях ползучести могут быть подразделены на две группы: основанные на напряжениях (модель Качанова—Работнова) и на деформациях (модель Ван–Ту [10]). В соответствии с классификацией в первой группе вводится параметр сплошности или поврежденности и используется концепция эффективного (истинного) напряжения, и, как правило, в такой модели, по мнению авторов [6], введенный структурный параметр не связывается с тем или иным механизмом накопления повреждений. Во второй группе моделей параметр поврежденности связывается с определенным механизмом накопления повреждений, и авторы [6] называют эти модели физически обоснованными. Данная классификация, по всей видимости, требует уточнения и не является совершенной, ибо в фундаментальной монографии Работнова [4] в определяющие соотношения вводятся n структурных параметров, которые могут отвечать за различные механизмы микроповреждений [4]. Были попытки наделить параметр поврежденности физическим смыслом, например, в работе [16] параметр поврежденности был связан с микроповрежденностью материала.

В последнее время предложены модифицированные определяющие и кинетические уравнения для моделирования ползучести в условиях поврежденности. В работе [17] авторы исследуют модели поврежденности при ползучести для описания огнеупорных материалов, в частности высокоглиноземистого кирпича. Авторы рассмотрели три модели ползучести: модель Качанова—Работнова, модель гиперболического синуса [18] и модель Лю–Мураками [19]. Три вышеупомянутые модели повреждений при ползучести включают вторую и третью стадии ползучести, но они не могут описать первую стадию. Чтобы учесть первую стадию ползучести и максимально упростить определяющее уравнение, в [17] выбрано выражение для первой стадии модели Гарофало [20]. Итоговое определяющее уравнение получается путем сложения части, отвечающей первой стадии ползучести из формулы Гарофало и одной из трех вышеуказанных моделей. В результате авторы пришли к выводу, что все три модели, предложенные в [17], могут быть использованы для описания всех трех стадий ползучести, среди которых лучшей с точки зрения совпадения с экспериментальными данными для деформации ползучести и ее скорости с течением времени является модель гиперболического синуса–Гарофало, за которой следует модель Лю-Мураками-Гарофало.

Авторы работы [21] изучали вопрос длительности срока службы электростанций для безопасной эксплуатации. Основным опасным фактором работоспособности электростанции при повышенных температурах является воздействие усталости при ползучести. Продолжительность жизни взаимодействия при ползучести и усталости авторы оценивали с помощью моделирования методом конечных элементов. В работе [21] оценивалась продолжительность жизни модифицированной стали 9Cr–1Mo в условиях взаимодействия «ползучесть–усталость». Чтобы отразить каждую стадию нелинейной ползучести и накопление усталостных повреждений в структуре зерна, были использованы модели повреждения Дайсона [22] и модифицированные модели повреждений Вахаба [23]. Поскольку первичная стадия ползучести оказывает наибольшее влияние на взаимодействие ползучести и усталости между тремя стадиями ползучести, выбрана модель, которая может соответствующим образом отражать первую стадию ползучести. Поэтому была использована модель Дайсона, которая может отражать все три стадии развития деформаций ползучести. Модель Дайсона выражает явление накопления повреждений в условиях ползучести через три переменных состояния. Кроме того, она имеет некоторые преимущества для прогнозирования долгосрочного поведения ползучести по результатам краткосрочных тестов на ползучесть с использованием гиперболической синусоидальной функции [21]. Анализ накопления усталостных повреждений выполнен с помощью модифицированной модели Вахаба [23]. Накопление повреждений от ползучести и усталости, оцениваемое моделями повреждений континуума, фундаментально описывается как независимые функции. Повреждение при ползучести учитывается кинетическим уравнением, которое процесс повреждений связывает с эволюцией напряженно-деформированного состояния (НДС) с течением времени, а скорость усталостного повреждения связывается с эволюцией НДС с ростом числа циклов нагружения. Повреждения, которые накопились внутри материала, согласно механике сплошных сред проявляются как равное снижение несущей способности материала вследствие ползучести и усталости. Повреждения от ползучести и усталости не являются независимыми и могут рассматриваться как одни и те же факторы износа материала. Поэтому, чтобы выразить взаимодействие между повреждениями в условиях ползучести и усталостными повреждениями, авторы использовали их линейную комбинацию для получения общей поврежденности. В настоящее время проводятся исследования ползучести с учетом поврежденности не только в деталях и конструкциях, но и в различных горных породах. Например, в работе [24] авторами исследуется нелинейная модель ползучести с учетом поврежденности соляных пород. Оставшиеся после добычи каменной соли шахты могут служить высокоэффективным и крупномасштабным способом хранения различных форм энергии, например нефти и природного газа, благодаря низкой проницаемости соляных пород. Порода в результате добычи, заполнения и эксплуатации шахт повреждается в условиях ползучести. Автор [24] упоминает в работе целый ряд моделей для описания повреждений в условиях ползучести именно солевых пород. Предложена нелинейная модель ползучести для соляных пород, которые имеют реологические свойства и низкую прочность. Автор [24] вводит модель вязкоупругости Пойтинга—Томсона для описания ползучести, которая получается путем последовательного соединения упругого и вязкого элементов (модель Максвелла), а затем их параллельного соединения с другим упругим элементом. Затем добавляется вязкий элемент Абеля и вязкий элемент с нелинейной поврежденностью. Нелинейный характер деформации ползучести бетона моделируют и авторы работы [25].

В общем случае для решения вышеупомянутых задач широко используется компьютерное моделирование с помощью множества различных программных комплексов, основанных на методе конечных элементов. В решении инженерных задач одними из самых известных можно назвать пакеты `Mechanical ANSYS` и `SIMULIA Abaqus`. В данных программных комплексах имеется возможность моделирования новых материалов, определяющие уравнения которых не включены в стандартный набор моделей программного комплекса. Введение новых определяющих соотношений для описания поведения материалов может быть осуществлено с помощью пользовательских подпрограмм, например, таких как `UMAT` (User Material) в `SIMULIA Abaqus`. Этот инструмент позволяет смоделировать широкий класс материалов и решить множество разнообразных задач, некоторые из которых описаны в работе [26], что и составляет предмет настоящего исследования.

1. Моделирование полей, ассоциированных с вершиной трещины в режиме ползучести. В многофункциональном пакете моделирования `SIMULIA Abaqus`, осуществляющем расчеты методом конечных элементов, проведено моделирование плоской пластины с центральной трещиной в условиях ползучести. Пластина имеет размеры 100×100 мм, длина трещины равна 10 мм. Трещина моделируется разрезом с закругленными вершинами, радиус закругления составляет 0.001 мм. Пластина находится в условиях одноосного растяжения. В качестве материала пластины выбрана сталь, имеющая следующие упругие модули: модуль Юнга $E = 210$ кН/мм^2, коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$. Для моделирования ползучести на основе пользовательской подпрограммы `UMAT` избран степенной закон Бейли—Нортона, имеющий следующий вид:

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = (3/2)B\sigma_e^{n-1}s_{ij}, \quad \sigma_e = \sqrt{3s_{ij}s_{ij}/2}, \tag{1}$$

где $\dot{\varepsilon}_{ij}$ — компоненты скорости деформации ползучести; σ_{ij} — компоненты напряжений Коши; σ_e — интенсивность напряжения; n, B — константы материала; $s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_{kk}\delta_{ij}/3$ — компоненты девиатора напряжений, где δ_{ij} — символ Кронекера. Материальные константы n, B в соотношении (1) — параметры материала, в общем случае зависящие от температуры. Примем для моделирования, что $B = 1 \cdot 10^{-13}$ (Н/мм^2)$^{-n}$(ч)$^{-1}$ и показатель ползучести закона Бейли—Нортона $n = 3$. Обычно показатель ползучести n для металлов и сплавов принимает значения от 3 до 8. Для отдельных современных высокопрочных сплавов $n \approx 18$ [6, 9, 12], для чистых металлов $n \approx 4$ [27]. Максимальное время моделирования процесса деформирования составляло 5000 ч, нагрузка во всех рассмотренных случаях принималась равной 10 Н/мм^2.

Расчетная сетка была построена с использованием сингулярных конечных элементов в окрестности вершины трещины. Концентрические окружности поделены на три области: перед вершиной дуга окружности величиной 180° разбита на 36 секторов, таким образом, раствор секторального элемента равен 5°, две другие части поделены на 17 секторов. Тип элементов сетки — `CPS4`. Модель разбита на 41948 элементов. В течение 5000 ч к пластине с центральной трещиной прикладывалась одноосная растягивающая нагрузка. В результате расчета были получены поля напряжений, упругих деформаций и деформаций ползучести в окрестности вершины трещины, находящейся в условиях ползучести.

На рис. 1 представлены итоги вычислений в системе `SIMULIA Abaqus`, реализующей метод конечных элементов. Компоненты тензора напряжений σ_{11} и σ_{22} вблизи выреза показаны на рис. 1. Поля напряжений приведены в различные моменты времени: 0.2, 103, 1003 и 5000 ч. Таким образом, путем численного конечно-элементного моделирования получены поля вблизи вершины трещины в условиях ползучести. Точность проведенных конечно-элементных расчетов определяется совпадением результатов, найденных с помощью классической модели степенного закона ползучести и с помощью разработанной процедуры `UMAT`. Достоверность полученных с помощью `UMAT` угловых распределений компонент тензора напряжений подтверждается их совпадением с асимптотическим решением Хатчинсона—Райса—Розенгрена.

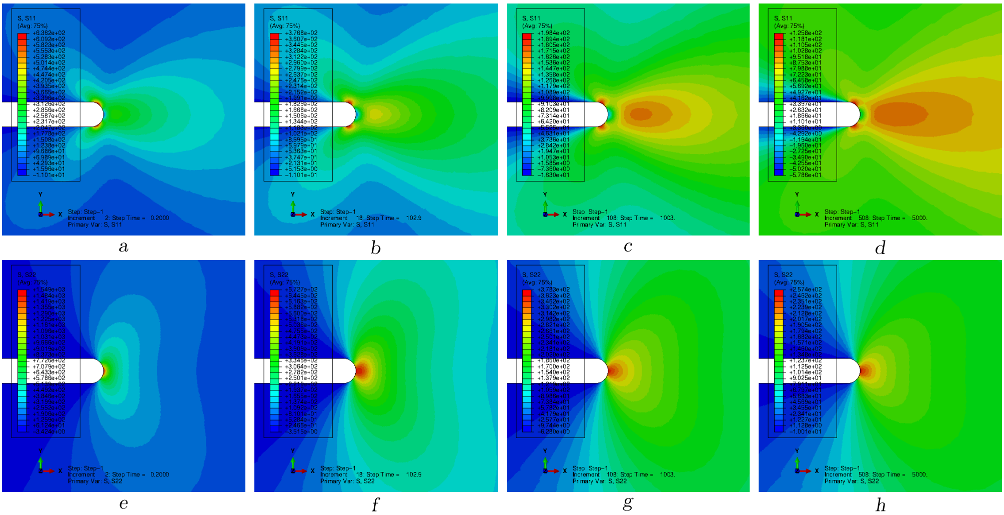


Рис. 1. Поля компонент σ_{11} (a–d) и σ_{22} (e–h) в условиях ползучести с течением времени; результаты отражены для моментов времени 0.2, 103, 1003 и 5000 ч

[Figure 1. Distributions of the stress tensor components σ_{11} (a–d) and σ_{22} (e–h) under creep conditions at 0.2, 103, 1003 and 5000 hours]

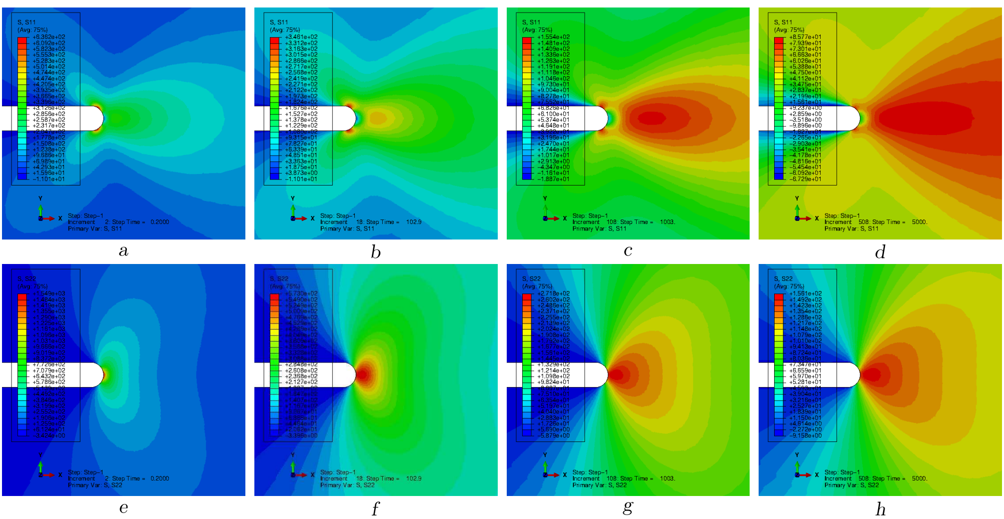


Рис. 2. Результаты конечно-элементного анализа: поля компонент σ_{11} (a–d) и σ_{22} (e–h) в условиях ползучести с учетом поврежденности с течением времени; результаты отражены для моментов времени 0.2, 103, 1003 и 5000 ч

[Figure 2. Distributions of the stress tensor components σ_{11} (a–d) and σ_{22} (e–h) under creep conditions taking into account damage accumulation processes at 0.2, 103, 1003 and 5000 hours]

2. Анализ области прогрессивного накопления рассеянных микроповреждений у кончика щели. Задачей последующего исследования выступает обнаружение и анализ поля развитой эволюции поврежденности вблизи вершины щели в предположении реализации плоского напряженного состояния для степенного закона установившейся ползучести и канонического кинетического уравнения Качанова—Работнова. Степенной закон ползучести, следуя классической процедуре [4], был дополнен кинетическим уравнением накопления поврежденности Качанова—Работнова и математическая модель представляется в следующем виде:

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = (3/2)B(\sigma_e/\psi)^{n-1}(s_{ij}/\psi), \quad \dot{\psi} = -A(\sigma_{eqv}/\psi)^m, \tag{2}$$

где ψ — параметр сплошности Качанова [1]; $\sigma_{eqv} = \alpha\sigma_e + \beta\sigma_1 + (1-\alpha-\beta)\sigma_{kk}$ — эквивалентное напряжение; σ_1 — максимальное главное напряжение; σ_{kk} — гидростатическое напряжение; константы α и β находятся экспериментально. Неповрежденному, целостному материалу соответствует значение параметра $\psi = 1$, а $\psi = 0$ означает, что материал полностью исчерпал несущую способность. Вместо параметра сплошности часто используется параметр поврежденности Работнова ω [2], связанный с параметром сплошности выражением $\omega = 1 - \psi$. Для конечно-элементного расчета необходимо задать постоянные материала A и m, фигурирующие в уравнении (2). Обычно m выбирают таким образом, чтобы выполнялось соотношение $m \approx 0.7n$, полученное эмпирическим путем [12]. В расчетах принимается, что $m = 2.5$, $A = 0.1$ $(\text{Н}/\text{мм}^2)^{-n}(\text{ч})^{-1}$. При проведении конечно-элементных расчетов постоянные материала в эволюционном уравнении и определяющем соотношении (2) выбирались на основании экспериментальных данных представленных в работах [6,9], где приведены значения материальных констант для большого ряда металлов и сплавов. С использованием подпрограммы, являющейся процедурой `UMAT` комплекса `SIMULIA Abaqus`, конституциональные соотношения степенного закона с применением идеи истинного напряжения и эволюционное уравнение Качанова—Работнова (2) были внесены в вычислительный сценарий метода конечных элементов пакета `Abaqus/Standart`, что дало возможность найти распределения параметра сплошности и механических полей. В расчетах принималось, что $B = 1 \cdot 10^{-13}$ $(\text{Н}/\text{мм}^2)^{-n}(\text{ч})^{-1}$, $n = 3$.

Проведен широкий класс расчетов одноосного растяжения пластины с центральной трещиной в условиях ползучести с учетом процессов накопления поврежденности. Пространственные зависимости составляющих тензора напряжений от координат x_1 и x_2 в различные моменты времени приведены на рис. 2. Напряженное состояние проиллюстрировано для тех же моментов времени: 0.2, 103, 1003, 5000 ч. На рис. 3 представлены распределения сплошности с течением времени; показаны картины для 103 и 1003 ч. Полученные области накопления повреждений качественно совпадают с результатами теоретических оценок [13, 14].

Особый интерес представляет анализ распределения напряжений, деформаций и сплошности вдоль круговых траекторий с центром в вершине трещины и сравнение распределения напряжений и деформаций в окрестности вершины трещины в условиях ползучести без учета явления накопления поврежденности и с учетом поврежденности. Зависимости компонент тензора напряжений и деформаций от полярного угла приведены на рис. 4 (здесь

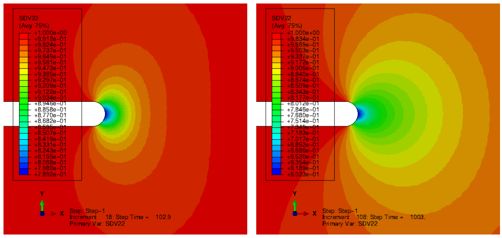


Рис. 3. Распределения сплошности в моменты времени 103 и 1003 ч
[Figure 3. Continuity distributions at 103 and 1003 hours]

и далее напряжения отнесены к приложенной нагрузке). Сплошной линией обозначены кривые, соответствующие модели без учета накопления поврежденности, пунктирной линией обозначены распределения в случае введения в модель поврежденности. Результаты приведены для узлов, находящихся на расстоянии 0.01 мм от вершины трещины, с течением времени. Приведены результаты в моменты времени 22.9, 422.9, 1423, 1423, 1923, 2923, 3923, 5000 ч. Из рис. 4 вытекает, что в начальные моменты времени соответствующие кривые моделей с учетом и без учета повреждений совпадают, но с течением времени различия между ними становятся более значительными ввиду накопления повреждений.

На рис. 5 представлены картины распределения компонент тензоров напряжений и деформаций ползучести в момент времени 5000 ч на разном расстоянии от вершины трещины; сплошной линией обозначены кривые, соответствующие модели без учета накопления поврежденности, пунктирной линией обозначены распределения в случае введения в модель поврежденности.

На рис. 6 представлены угловые распределения сплошности в зависимости от расстояния от вершины трещины в момент времени 5000 ч. Обозначим расстояние от вершины трещины через r. На рис. 6 видно, как при удалении от вершины трещины угловое распределение сплошности выравнивается и стремится к 1.

В рамках проведенных исследований выполнены вычисления с другими значениями материальной константы m. При уменьшении значения данной константы накопление повреждений проходит интенсивнее и быстрее, поэтому, например, при $m = 1.5$ уже после 53 ч расчета происходило разрушение в окрестности трещины. Напротив, при увеличении константы m происходит плавное возрастание поврежденности. Например, при $m = 4$ за 5000 ч минимальное значение сплошности достигло 0.96.

На рис. 7 представлены распределения сплошности при $m = 1.5$ в момент времени 53 ч и при $m = 4$ после 5000 ч.

3. Анализ области накопления повреждений в области вершины наклонной трещины. Задачей настоящей части работы является проведение вычислений с целью определения полей сплошности в окрестности наклонной трещины. Наклон трещины задается углом γ, составляющим в проведенном численном эксперименте 45 и 60° с горизонтальной осью; длина трещины — 10 мм; радиус закругления трещины — 0.001 мм. Константы материала в расчетах принимаются теми же, что и при моделировании горизонтальной трещины: $B = 1 \cdot 10^{-13}$ $(\text{Н/мм}^2)^{-n}(\text{ч})^{-1}$, $n = 3$, $m = 2.5$ и $A = 0.1$ $(\text{Н/мм}^2)^{-n}(\text{ч})^{-1}$.

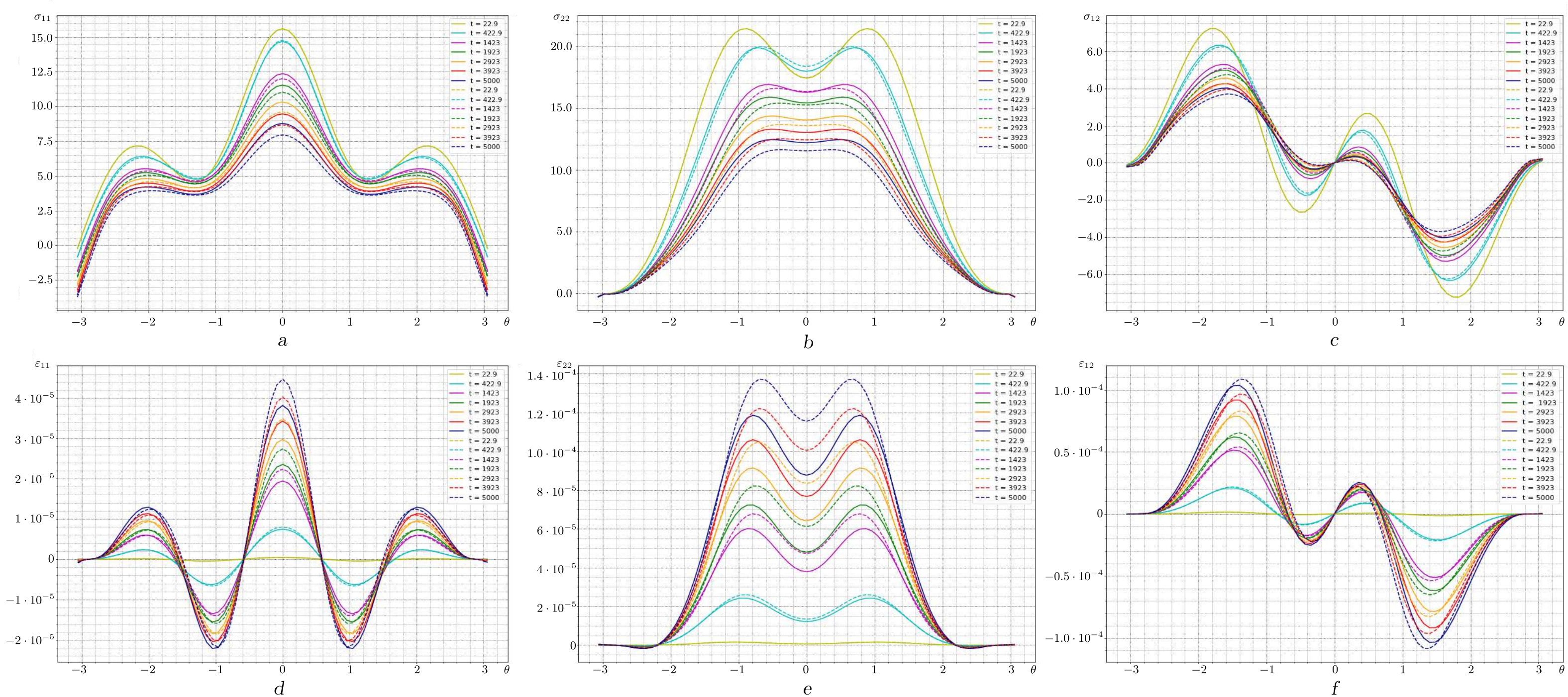


Рис. 4. Сравнение зависимостей компонент тензора напряжений (a–c) и деформаций ползучести (d–f) от полярного угла θ без учета поврежденности (сплошные кривые) и с учетом процессов накопления повреждений (пунктирные кривые) с течением времени

[Figure 4. Comparison of angular distributions of stress tensor components (a–c) and creep strains (d–f) under creep conditions without taking into account damage (solid curves) and taking into account damage accumulation processes (dotted curves) over time]

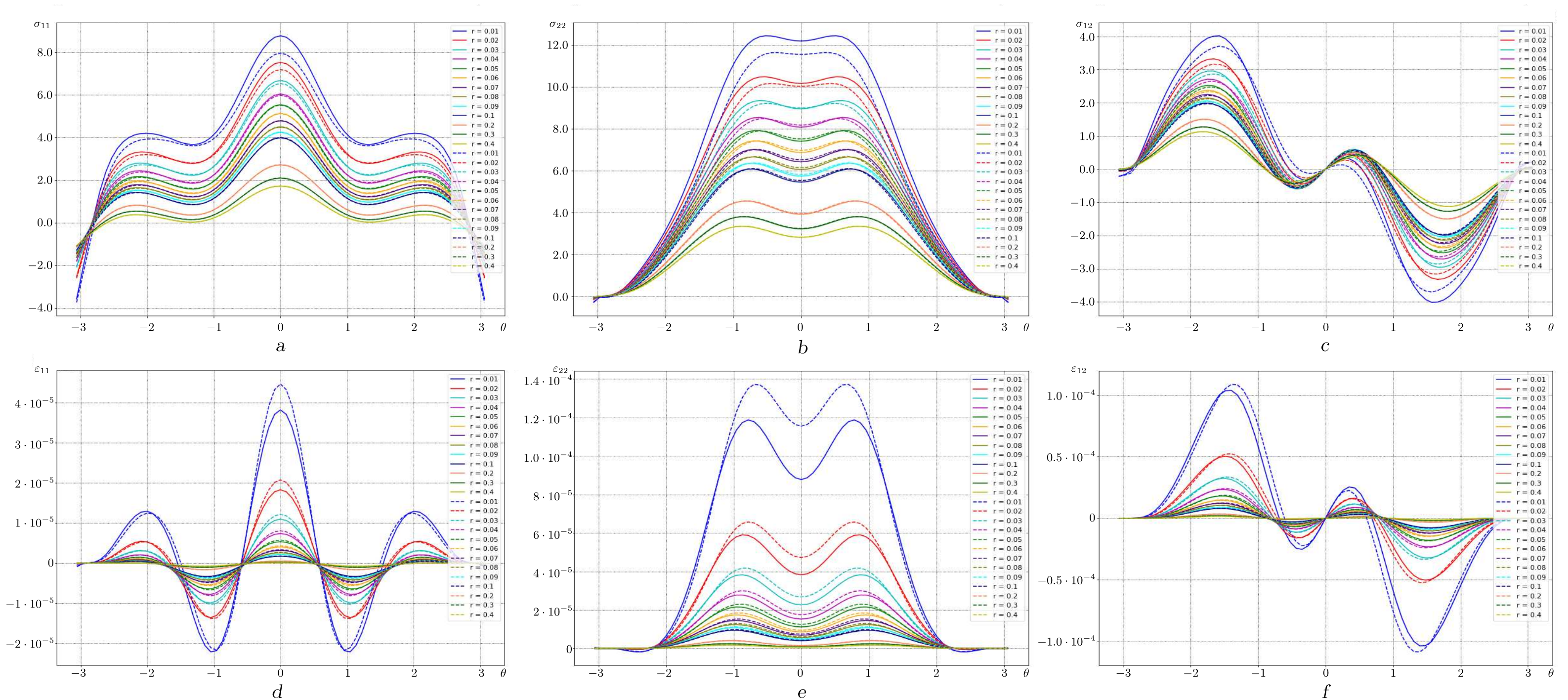


Рис. 5. Сравнение зависимостей компонент тензора напряжений (a–c) и деформаций ползучести (d–f) от полярного угла в условиях ползучести без учета поврежденности (сплошные кривые) и с учетом процессов накопления повреждений (пунктирные кривые) в момент времени 5000 ч на разном расстоянии от вершины трещины

[Figure 5. Comparison of angular distributions of stress tensor components (a–c) and creep strains (d–f) under creep conditions without taking into account damage (solid curves) and taking into account damage accumulation processes (dotted curves) at 5000 hours at different distances from the crack tip]

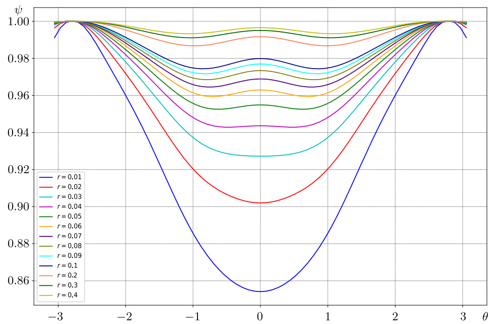
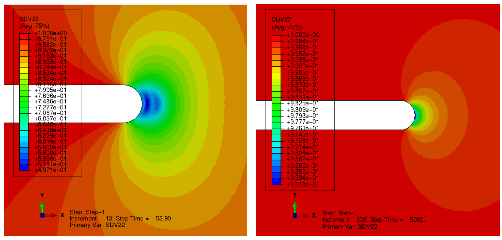


Рис. 6. Угловые распределения сплошности ψ

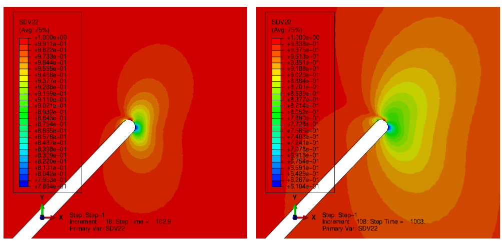
[Figure 6. Angular distributions of the continuity parameter ψ]



a *b*

Рис. 7. Распределения сплошности: *a*) при $m = 1.5$ в момент времени 53 ч; *b*) при $m = 4$ после 5000 ч

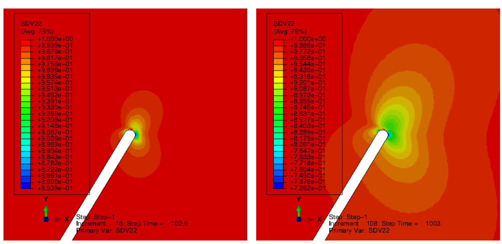
[Figure 7. Continuity distributions near the tip of an inclined crack: *a*) when $m = 1.5$ at 53 hours; *b*) when $m = 4$ after 5000 hours]



a *b*

Рис. 8. Распределения сплошности вблизи вершины наклонной трещины ($\gamma = 45^\circ$) в моменты времени 103 и 1003 ч

[Figure 8. Continuity distributions near the tip of an inclined crack ($\gamma = 45^\circ$) at 103 and 1003 hours]



a *b*

Рис. 9. Распределения сплошности вблизи вершины наклонной трещины ($\gamma = 60^\circ$) в моменты времени 103 и 1003 ч

[Figure 9. Continuity distributions near the tip of an inclined crack ($\gamma = 60^\circ$) at 103 and 1003 hours]

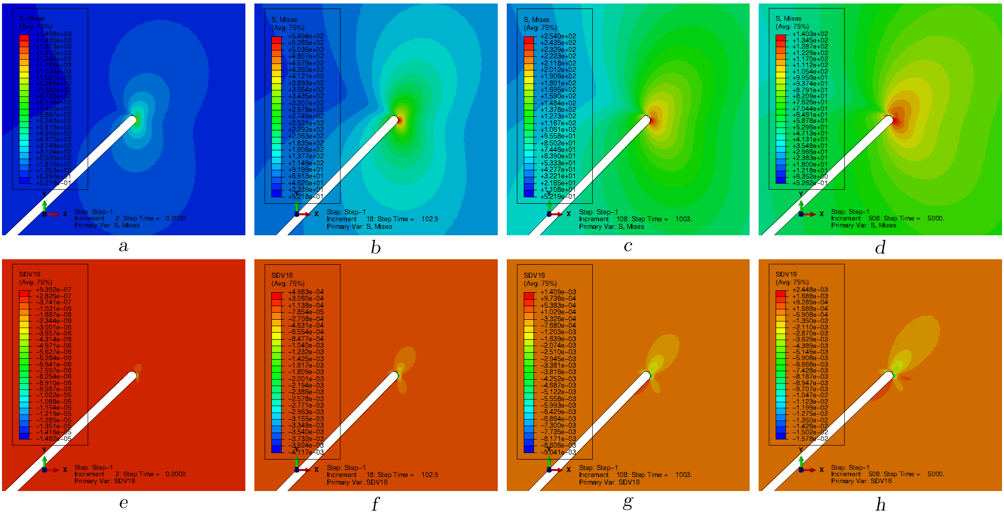


Рис. 10. Распределения интенсивности напряжений по Мизесу (*a*–*d*) и компоненты тензора деформаций ползучести ε_{11} (*e*–*h*) в условиях ползучести с учетом поврежденности в окрестности вершины наклонной трещины ($\gamma = 45^\circ$) в моменты времени 0.2, 103, 1003 и 5000 ч

[Figure 10. Distributions of the Mises stress intensity (*a*–*d*) and creep strain tensor component ε_{11} (*e*–*h*) under creep conditions taking into account damage accumulation processes in the neighborhood of the tip of the inclined crack ($\gamma = 45^\circ$) at 0.2, 103, 1003 and 5000 hours]

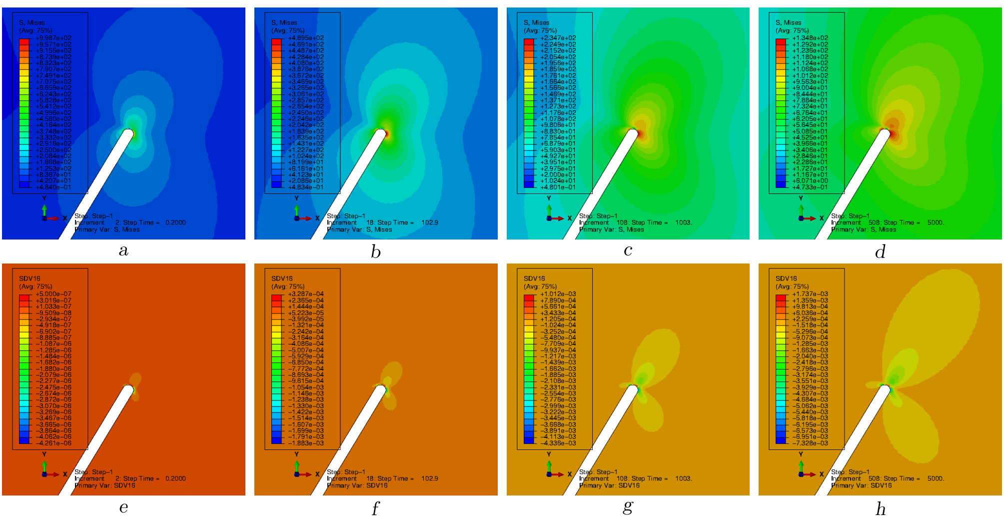


Рис. 11. Распределения интенсивности напряжений по Мизесу (*a*–*d*) и компоненты тензора деформаций ползучести ε_{11} (*e*–*h*) в условиях ползучести с учетом поврежденности в окрестности вершины наклонной трещины ($\gamma = 60^\circ$) в моменты времени 0.2, 103, 1003 и 5000 ч

[Figure 11. Distributions of the Mises stress intensity (*a*–*d*) and creep strain tensor component ε_{11} (*e*–*h*) under creep conditions taking into account damage accumulation processes in the neighborhood of the tip of the inclined crack ($\gamma = 60^\circ$) at 0.2, 103, 1003 and 5000 hours]

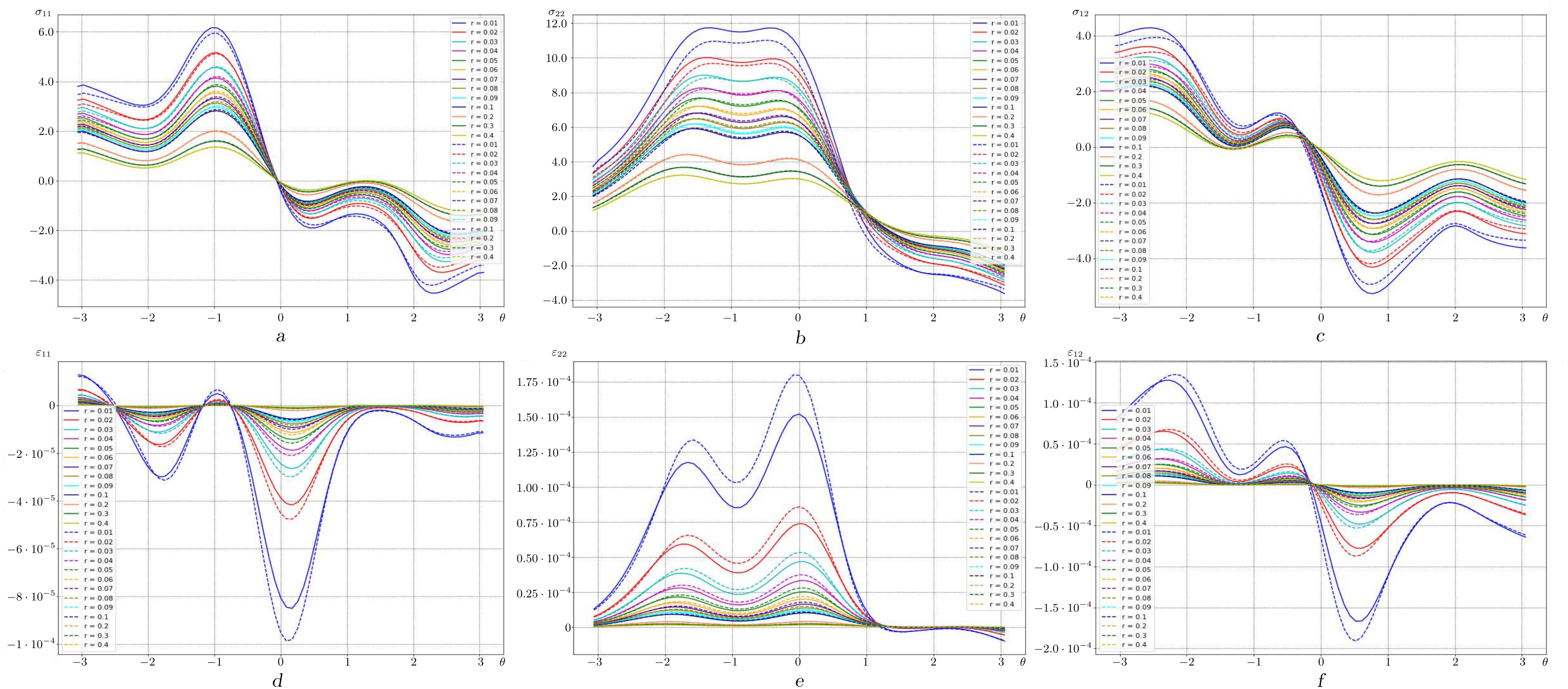


Рис. 12. Сравнение зависимостей компонент тензора напряжений (a–c) и деформаций ползучести (d–f) от полярного угла в условиях ползучести без учета поврежденности (сплошные кривые) и с учетом процессов накопления повреждений (пунктирные кривые) в момент времени 5000 ч на разном расстоянии от вершины наклонной трещины ($\gamma = 45^\circ$)

[Figure 12. Comparison of angular distributions of stress tensor components (a–c) and creep strains (d–f) under creep conditions without taking into account damage (solid curves) and taking into account damage accumulation processes (dotted curves) at 5000 hours at different distances from the inclined crack tip ($\gamma = 45^\circ$)]

На рис. 8 и 9 представлены распределения сплошности с течением времени в окрестности наклонной трещины; показаны картины распределения сплошности для 103 и 100 ч.

На рис. 10 представлены картины распределения интенсивности напряжений по Мизесу и компоненты тензора деформаций ползучести ε_{11} с учетом поврежденности с течением времени в окрестности наклонной трещины ($\gamma = 45^\circ$); показаны картины в моменты времени 103 и 1003 ч.

На рис. 11 представлены картины распределения интенсивности напряжений по Мизесу и компоненты тензора деформаций ползучести ε_{11} с учетом поврежденности с течением времени в окрестности вершины наклонной трещины ($\gamma = 60^\circ$); показаны картины в моменты времени 0.2, 103, 1003 и 5000 ч.

На рис. 12 представлены картины распределения компонент тензоров напряжений и деформаций ползучести в момент времени 5000 ч на разном расстоянии от вершины трещины; сплошной линией обозначены кривые из модели без учета накопления поврежденности, пунктирной линией обозначены распределения в случае введения в модель поврежденности.

На рис. 13 представлены угловые распределения сплошности в зависимости от расстояния от вершины наклонной трещины в момент времени 5000 ч; угол наклона трещины равен 45°.

На рис. 14 представлены картины распределения компонент тензоров напряжений и деформаций ползучести в момент времени 5000 ч на разном расстоянии от вершины трещины; сплошной линией обозначены кривые из модели без учета накопления поврежденности, пунктирной линией обозначены распределения в случае введения в модель поврежденности.

На рис. 15 представлены угловые распределения сплошности в зависимости от расстояния от вершины наклонной трещины в момент времени 5000 ч; угол наклона трещины равен 60°.

Отметим, что моделирование приложения к пластине с наклонной трещиной растягивающей нагрузки соответствует смешанному нагружению пластины с центральной горизонтальной трещиной. По распределениям, представленным на рис. 3, 8, 9, можно наблюдать, как качественно меняется поле сплошности при разных углах наклона трещины. Можно заметить, что чем больше наклон трещины, тем меньше минимальное значение сплошности. Сравнение распределений напряжений и деформаций, построенных в ре-

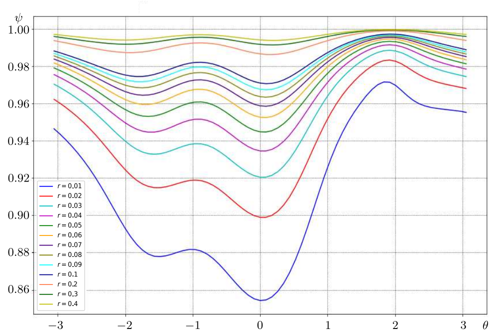


Рис. 13. Угловые распределения сплошности ψ в окрестности вершины наклонной трещины ($\gamma = 45^\circ$)

[Figure 13. Angular distributions of the continuity parameter ψ in the neighborhood of the tip of the inclined crack ($\gamma = 45^\circ$)]

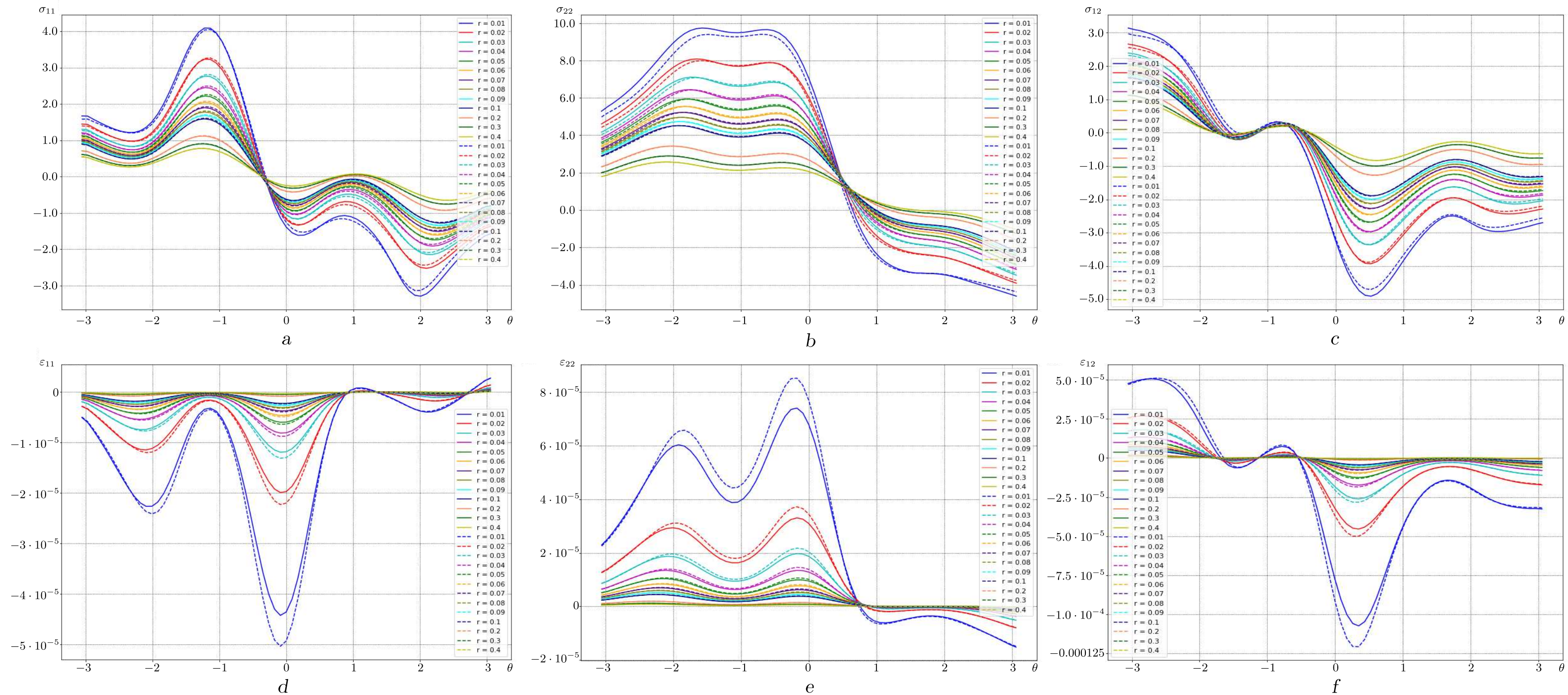


Рис. 14. Сравнение зависимостей компонент тензора напряжений (a–c) и деформаций ползучести (d–f) от полярного угла в условиях ползучести без учета поврежденности (сплошные кривые) и с учетом процессов накопления повреждений (пунктирные кривые) в момент времени 5000 ч на разном расстоянии от вершины наклонной трещины ($\gamma = 60^\circ$)

[Figure 14. Comparison of angular distributions of stress tensor components (a–c) and creep strains (d–f) under creep conditions without taking into account damage (solid curves) and taking into account damage accumulation processes (dotted curves) at 5000 hours at different distances from the inclined crack tip ($\gamma = 60^\circ$)]

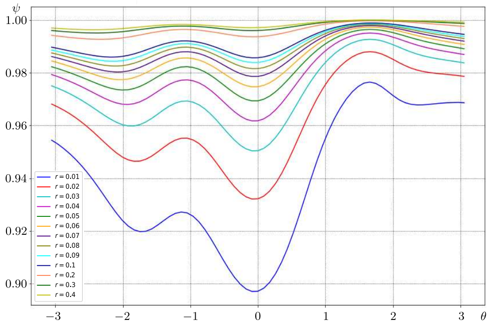


Рис. 15. Угловые распределения сплошности ψ в окрестности вершины наклонной трещины ($\gamma = 60^\circ$)

[Figure 15. Angular distributions of the continuity parameter ψ in the neighborhood of the tip of the inclined crack ($\gamma = 60^\circ$)]

зультате моделирования ползучести без учета поврежденности и с ее учетом, показало, что наличие поврежденности приводит к меньшим значениям компонент тензора напряжений вблизи вершины щели и большим значениям деформации ползучести.

Заключение. В ходе исследования выполнено конечно-элементное моделирование одноосного растяжения двумерной пластины с центральной трещиной, находящейся в условиях ползучести, с учетом поврежденности в связанной постановке. Моделирование выполнено в комплексе `SIMULIA Abaqus` с применением пользовательской процедуры `UMAT`. Степенной закон ползучести с помощью пользовательской процедуры был дополнен кинетическим уравнением накопления поврежденности Качанова—Работнова в связанной постановке. В результате моделирования получены распределения напряжений, деформаций и сплошности в условиях ползучести с учетом накопления поврежденности с течением времени. Выполнено моделирование наклонной трещины под действием растягивающей нагрузки в условиях ползучести с учетом поврежденности. Проведено сравнение полученных зависимостей компонент тензора напряжений и деформаций от полярного угла при моделировании без учета поврежденности и в случае учета накопления повреждений. Было получено, что чем больше наклон трещины, тем меньше минимальное значение сплошности. Сравнение распределений напряжений и деформаций, построенных в результате моделирования ползучести без учета поврежденности и с ее учетом, показало, что наличие поврежденности приводит к меньшим значениям компонент тензора напряжений вблизи вершины щели и большим значениям деформации ползучести.

Конкурирующие интересы. Конкурирующих интересов не имеем.

Авторский вклад и ответственность. Все авторы принимали участие в разработке концепции статьи и в написании рукописи. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

Финансирование. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 21–11–00346, https://rscf.ru/project/21-11-00346/.

Библиографический список

1. Качанов Л. М. О времени разрушения в условиях ползучести // *Изв. АН СССР. Отд. техн. наук*, 1958. № 8. С. 26–31.
2. Работнов Ю. Н. О механизме длительного разрушения / *Вопросы прочности материалов и конструкций.* М.: АН СССР, 1959. С. 5–7.
3. Качанов Л. М. *Теория ползучести.* М.: Физматлит, 1960. 455 с.
4. Работнов Ю. Н. *Ползучесть элементов конструкций.* М.: Наука, 2014. 752 с.
5. Локощенко А. М., Фомин Л. В., Теруад В. В. [и др.] Ползучесть и длительная прочность металлов при нестационарных сложных напряженных состояниях (обзор) // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2020. Т. 24, № 2. С. 275–318. EDN: OQCCVC. DOI: https://doi.org/10.14498/vsgtu1765.
6. Meng Q., Zhenqing H. Creep damage models and their applications for crack growth analysis in pipes: A review // *Eng. Fract. Mech.*, 2019. vol. 205. pp. 547–576. DOI: https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2015.09.055.
7. Meng L., Chen W., Yan Y., et al. Modelling of creep and plasticity deformation considering creep damage and kinematic hardening // *Eng. Fract. Mech.*, 2019. vol. 218, 106582. DOI: https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2019.106582.
8. Murakami S. *Continuum Damage Mechanics. A Continuum Mechanics Approach to the Analysis of Damage and Fracture.* Dordrecht: Springer, 2012. xxx+402 pp. DOI: https://doi.org/10.1007/978-94-007-2666-6.
9. Riedel H. *Fracture at High Temperatures.* Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1987. 418 pp.
10. Wen J.-F., Tu S.-T., Gao X.-L., Reddy J. N. Simulations of creep crack growth in 316 stainless steel using a novel creep-damage model // *Eng. Fract. Mech.*, 2012. vol. 98. pp. 169–184. DOI: https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2012.12.014.
11. Работнов Ю. Н. *Введение в механику разрушения.* М.: Наука, 1987. 80 с.
12. Boyle J. T., Spence J. *Stress Analysis for Creep.* Glasgow, Scotland: Butterworth-Heinemann, 1983. viii+283 pp. DOI: https://doi.org/10.1016/C2013-0-00873-0.
13. Шлянников В. Н., Туманов А. В. Силовая и деформационная модели поврежденности и разрушения при ползучести // *Физ. мезомех.*, 2018. Т. 21, № 3. С. 70–85. EDN: XRGSGD. DOI: https://doi.org/10.24411/1683-805X-2018-13008.
14. Shlyannikov V. N., Tumanov A. V. Creep damage and stress intensity factor assessment for plane multi-axial and three-dimensional problems // *Int. J. Solids Structures*, 2018. vol. 150. pp. 166–183. EDN: XWIKMX. DOI: https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2018.06.009.
15. Степанова Л. В. Компьютерное моделирование процессов накопления повреждений в твердых телах с трещинами с помощью пользовательской процедуры UMAT вычислительного комплекса Simulia Abaqus // *Вестн. ПНИПУ. Механика*, 2018. № 3. С. 71–86. EDN: YLJEXZ. DOI: https://doi.org/10.15593/perm.mech/2018.3.08.
16. Астафьев В. И., Радаев Ю. Н., Степанова Л. В. *Нелинейная механика разрушения.* Самара: Самар. ун-т, 2001. 632 с. EDN: RVXEBX.
17. Wu Y., Li G., Tan F., et al. Research on creep damage model of high alumina bricks // *Ceramics Int.*, 2022. vol. 48, no. 19, Part A. pp. 27758–27764. DOI: https://doi.org/10.1016/j.ceramint.2022.06.076.
18. Stewart C. M. *A Hybrid Constitutive Model for Creep, Fatigue, and Creep-Fatigue Damage*: Ph.D. Dissertation. Orlando, Florida: University of Central Florida, 2013. https://stars.library.ucf.edu/etd/2789/.
19. Liu L. Y., Murakami S. Damage localization of conventional creep damage models and proposition of a new model for creep damage analysis // *Eng. Fract. Mech.*, 1998. vol. 41, no. 1. pp. 57–65. DOI: https://doi.org/10.1299/jsmea.41.57.
20. Vanaja J., Laha K., Mathew M. D. Effect of tungsten on primary creep deformation and minimum creep rate of reduced activation ferritic-martensitic steel // *Metall. Mater. Trans. A*, 2014. vol. 45, no. 11. pp. 5076–5084. DOI: https://doi.org/10.1007/s11661-014-2472-1.

21. Ro U., Kim S., Kim Y., Kim M. K. Creep-fatigue damage analysis of modified 9Cr–1Mo steel based on a Voronoi crystalline model // *Int. J. Pressure Vessels Piping*, 2021. vol. 194, Part B, 104541. DOI: https://doi.org/10.1016/j.ijpvp.2021.104541.
22. Dyson B. Use of CDM in materials modeling and component creep life prediction // *J. Pressure Vessel Technol.*, 2000. vol. 122, no. 3. pp. 281–296. DOI: https://doi.org/10.1115/1.556185.
23. Abdel Wahab M. M., Ashcroft I. A., Crocombe A. D., Shaw S. J. Prediction of fatigue thresholds in adhesively bonded joints using damage mechanics and fracture mechanics // *J. Adh. Sci. Techn.*, 2001. vol. 15, no. 7. pp. 763–781. DOI: https://doi.org/10.1163/15685610152540830.
24. He Q., Wu F., Gao R. Nonlinear creep-damage constitutive model of surrounding rock in salt cavern reservoir // *J. Energy Storage*, 2022. vol. 55, Part B, 105520. DOI: https://doi.org/10.1016/j.est.2022.105520.
25. Dummer A., Neuner M., Hofstetter G. An extended gradient-enhanced damage-plasticity model for concrete considering nonlinear creep and failure due to creep // *Int. J. Solids Struct.*, 2022. vol. 243, 111541. DOI: https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2022.111541.
26. Белова О. Н., Чаплий Д. В., Степанова Л. В. Применение пользовательской подпрограммы UMAT для решения задач континуальной механики (обзор) // *Вестн. Самар. унив. Естественнонаучн. сер.*, 2021. Т. 27, № 3. С. 46–73. EDN: STPKCU. DOI: https://doi.org/10.18287/2541-7525-2021-27-3-46-73.
27. Ильин В. Н., Мордашов С. В., Пузач С. В. О законах ползучести для расчета огнестойкости стальных конструкций // *Технологии техносферной беопасности*, 2008. № 6, 10. EDN: MSMCAF.

Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2023, vol. 27, no. 3, pp. 509–529
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu2005

MSC: 74S05

Parametric analysis of the stress-strain and continuity fields at the crack tip under creep regime taking into account the processes of damage accumulation using UMAT

D. V. Chapliy, L. V. Stepanova, O. N. Belova

Samara National Research University,
34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russian Federation.

Abstract

The subject of this study is the analysis of the stress-strain and continuity fields in the proximal nearness of the crack tip, which is in creep regime conditions with due regard for the accumulation of damage. The aim of the work is to conduct computer finite element modeling of uniaxial stretching of a two-dimensional plate with a central crack under creep conditions and to analyze the continuity field around the crack tip. The Bailey–Norton power law of creep is used in numerical modeling. The simulation was performed in the software multifunctional complex `SIMULIA Abaqus`. The analysis of the circumferential apportionment of stresses, creep deformations and continuity in the direct of the crack tip is carried out.

The power law of creep with the help of the user procedure `UMAT` (User Material) of the `SIMULIA Abaqus` package was supplemented by the kinetic equation of damage accumulation of Kachanov–Rabotnov in a related formulation. The `UMAT` subroutine has many advantages in predicting material damage and allows you to work with materials that are not in the `Abaqus` materials library. The `UMAT` subroutine is called at all points of the material calculation and updates the stresses and state variables depending on the solution to their values at the end of the increment. After that, the updated elements of the Jacobi matrix are calculated.

Mechanics of Solids
Research Article

Please cite this article in press as:
Chapliy D. V., Stepanova L. V. , Belova O. N. Parametric analysis of the stress-strain and continuity fields at the crack tip under creep regime taking into account the processes of damage accumulation using UMAT, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2023, vol. 27, no. 3, pp. 509–529. EDN: FIZJNS. DOI: 10.14498/vsgtu2005 (In Russian).

Authors' Details:

Dmitriy V. Chapliy https://orcid.org/0000-0001-9510-3659
Postgraduate Student; Dept. of Mathematical Modelling in Mechanics;
e-mail: chapliy.dv@ssau.ru

Larisa V. Stepanova https://orcid.org/0000-0002-6693-3132
Dr. Phys. & Math. Sci., Associate Professor; Head of Department; Dept. of Mathematical Modelling in Mechanics; e-mail: stepanova.lv@ssau.ru

Oksana N. Belova https://orcid.org/0000-0002-4492-223X
Assistant; Dept. of Mathematical Modelling in Mechanics; e-mail: belova.on@ssau.ru

Stress, strain and continuity distributions under creep conditions are gained, considering the damage accumulation of over time. Angular distributions of continuity, stresses and deformations are constructed using the Matplotlib library over time at various distances from the crack tip. The obtained angular distributions of the stress and strain tensor components are compared when modeling without taking into account damage and when taking into account damage accumulation. It is shown that the presence of damage leads to large values of creep deformations and lower stresses.

Keywords: creep, damage, user procedure `UMAT`, `SIMULIA Abaqus`, stress fields, strain fields, crack.

Received: 10th March, 2023 / Revised: 24th August, 2023 /
Accepted: 19th September, 2023 / First online: 27th September, 2023

Competing interests. We have no competing interests.

Authors' contributions and responsibilities. All authors were involved in developing the concept of the article and writing the manuscript. The authors take full responsibility for submitting the final manuscript for printing. The final version of the manuscript has been approved by all authors.

Funding. The research was funded by the Russian Science Foundation grant no. 21–11–00346, https://rscf.ru/en/project/21-11-00346/.

References

1. Kachanov L. M. Time of the rupture process under creep conditions, *Izv. Akad. Nauk. SSSR, Otd. Tekhn. Nauk*, 1958, no. 8, pp. 26–31 (In Russian).
2. Rabotnov Yu. N. On a mechanism of delayed failure, In: *Voprosy prochnosti materialov i konstruktsii* [Questions of Strength of Materials and Construction]. Moscow, USSR Academy of Sci., 1959, pp. 5–7 (In Russian).
3. Kachanov L. M. *Teoriia plastichnosti* [Creep Theory]. Moscow, Fizmatlit, 1960, 455 pp. (In Russian)
4. Rabotnov Yu. N. *Creep Problems in Structural Members*, North-Holland Series in Applied Mathematics and Mechanics. Amsterdam, London, North-Holland Publ., 1969, ix+822 pp.
5. Lokoshchenko A. M., Fomin L. V., Teraud W. V., et al. Creep and long-term strength of metals under unsteady complex stress states (Review), *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2020, vol. 24, no. 2, pp. 275–318 (In Russian). EDN: OQCCVC. DOI: https://doi.org/10.14498/vsgtu1765.
6. Meng Q., Zhenqing H. Creep damage models and their applications for crack growth analysis in pipes: A review, *Eng. Fract. Mech.*, 2019, vol. 205, pp. 547–576. DOI: https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2015.09.055.
7. Meng L., Chen W., Yan Y., et al. Modelling of creep and plasticity deformation considering creep damage and kinematic hardening, *Eng. Fract. Mech.*, 2019, vol. 218, 106582. DOI: https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2019.106582.
8. Murakami S. *Continuum Damage Mechanics. A Continuum Mechanics Approach to the Analysis of Damage and Fracture*. Dordrecht, Springer, 2012, xxx+402 pp. DOI: https://doi.org/10.1007/978-94-007-2666-6.
9. Riedel H. *Fracture at High Temperatures*. Berlin, Heidelberg, Springer-Verlag, 1987, 418 pp.
10. Wen J.-F., Tu S.-T., Gao X.-L., Reddy J. N. Simulations of creep crack growth in 316 stainless steel using a novel creep-damage model, *Eng. Fract. Mech.*, 2012, vol. 98, pp. 169–184. DOI: https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2012.12.014.
11. Rabotnov Yu. N. *Vvedenie v mekhaniku razrusheniia* [Introduction to the Mechanics of Destruction]. Moscow, Nauka, 1987, 80 pp.

12. Boyle J. T., Spence J. *Stress Analysis for Creep*. Glasgow, Scotland, Butterworth-Heinemann, 1983, viii+283 pp. DOI: https://doi.org/10.1016/C2013-0-00873-0.
13. Shlyannikov V. N., Tumanov A. V. Force and deformation models of damage and fracture during creep, *Phys. Mesomech.*, 2018, vol. 21, no. 3, pp. 70–85 (In Russian). EDN: XRGSGD. DOI: https://doi.org/10.24411/1683-805X-2018-13008.
14. Shlyannikov V. N., Tumanov A. V. Creep damage and stress intensity factor assessment for plane multi-axial and three-dimensional problems, *Int. J. Solids Structures*, 2018, vol. 150, pp. 166–183. EDN: XWIKMX. DOI: https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2018.06.009.
15. Stepanova L. V. Computational simulation of the damage accumulation processes in cracked solids by the user procedure UMAT of Simulia Abaqus., *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2018, no. 3, pp. 71–86 (In Russian). EDN: YLJEXZ. DOI: https://doi.org/10.15593/perm.mech/2018.3.08.
16. Astaf'ev V. I., Radaev Iu. N., Stepanova L. V. *Nelineinaia mekhanika razrusheniia* [Nonlinear Fracture Mecahics]. Samara, Samara Univ., 2001, 632 pp. (In Russian). EDN: RVXEBX.
17. Wu Y., Li G., Tan F., et al. Research on creep damage model of high alumina bricks, *Ceramics Int.*, 2022, vol. 48, no. 19, Part A, pp. 27758–27764. DOI: https://doi.org/10.1016/j.ceramint.2022.06.076.
18. Stewart C. M. *A Hybrid Constitutive Model for Creep, Fatigue, and Creep-Fatigue Damage*, Ph.D. Dissertation. Orlando, Florida, University of Central Florida, 2013. https://stars.library.ucf.edu/etd/2789/.
19. Liu L. Y., Murakami S. Damage localization of conventional creep damage models and proposition of a new model for creep damage analysis, *Eng. Fract. Mech.*, 1998, vol. 41, no. 1, pp. 57–65. DOI: https://doi.org/10.1299/jsmea.41.57.
20. Vanaja J., Laha K., Mathew M. D. Effect of tungsten on primary creep deformation and minimum creep rate of reduced activation ferritic-martensitic steel, *Metall. Mater. Trans. A*, 2014, vol. 45, no. 11, pp. 5076–5084. DOI: https://doi.org/10.1007/s11661-014-2472-1.
21. Ro U., Kim S., Kim Y., Kim M. K. Creep-fatigue damage analysis of modified 9Cr–1Mo steel based on a Voronoi crystalline model, *Int. J. Pressure Vessels Piping*, 2021, vol. 194, Part B, 104541. DOI: https://doi.org/10.1016/j.ijpvp.2021.104541.
22. Dyson B. Use of CDM in materials modeling and component creep life prediction, *J. Pressure Vessel Technol.*, 2000, vol. 122, no. 3, pp. 281–296. DOI: https://doi.org/10.1115/1.556185.
23. Abdel Wahab M. M., Ashcroft I. A., Crocombe A. D., Shaw S. J. Prediction of fatigue thresholds in adhesively bonded joints using damage mechanics and fracture mechanics, *J. Adh. Sci. Techn.*, 2001, vol. 15, no. 7, pp. 763–781. DOI: https://doi.org/10.1163/15685610152540830.
24. He Q., Wu F., Gao R. Nonlinear creep-damage constitutive model of surrounding rock in salt cavern reservoir, *J. Energy Storage*, 2022, vol. 55, Part B, 105520. DOI: https://doi.org/10.1016/j.est.2022.105520.
25. Dummer A., Neuner M., Hofstetter G. An extended gradient-enhanced damage-plasticity model for concrete considering nonlinear creep and failure due to creep, *Int. J. Solids Struct.*, 2022, vol. 243, 111541. DOI: https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2022.111541.
26. Belova O. N., Chapliy D. V., Stepanova L. V. Application of the UMAT subroutine for solving continuum mechanics problems (Review), *Vestn. Samar. Univ., Estestvennonauchn. Ser.*, 2021, vol. 27, no. 3, pp. 46–73 (In Russian). EDN: STPKCU. DOI: https://doi.org/10.18287/2541-7525-2021-27-3-46-73.
27. Ilin V. N., Mordashov S. V., Pusach S.V. Laws of creep for computation of fire resisance for steel equipment, *Technology of Technosphere Safety*, 2008, no. 6, 10 (In Russian). EDN: MSMCAF.

Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2023, vol. 27, no. 3, pp. 530–543
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu1968

MSC: 35C10, 76D05, 35G20

Inhomogeneous Couette flows for a two-layer fluid

N. V. Burmasheva[1,2]***, E. A. Larina***[1,2]***,***
E. Yu. Prosviryakov[1,2,3]

[1] Ural Federal University named after the first President of Russia B. N. Yeltsin,
19, Mira st., Ekaterinburg, 620002, Russian Federation.
[2] Institute of Engineering Science, Ural Branch of RAS,
34, Komsomolskaya st., Ekaterinburg, 620049, Russian Federation.
[3] Udmurt Federal Research Center, Ural Branch of RAS,
34, T. Baramzina st., Izhevsk, 426067, Russian Federation.

Abstract

The paper presents a new exact solution to the Navier–Stokes equations which describes a steady shearing isothermal flow of an incompressible two-layer fluid stratified in terms of density and/or viscosity, the vertical velocity of the fluid being zero. This exact solution belongs to the class of functions linear in terms of spatial coordinates, and it is an extension of the classical Couette flow in an extended horizontal layer to the case of non-one-dimensional non-uniform flows. The solution constructed for each layer is studied for the ability to describe the appearance of stagnation points in the velocity field and the generation of counterflows. It has been found that the flow of a two-layer fluid is stratified into two zones where the fluid flows in counter directions. It is also shown that the tangential stress tensor components can change their sign.

Keywords: stratified viscous fluid, exact solution, field stratification, countercurrent.

Received: 13th December, 2022 / Revised: 28th June, 2023 /
Accepted: 17th July, 2023 / First online: 25th September, 2023

Mathematical Modeling, Numerical Methods and Software Complexes
Research Article

Please cite this article in press as:
Burmasheva N. V., Larina E. A., Prosviryakov E. Yu. Inhomogeneous Couette flows for a two-layer fluid, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2023, vol. 27, no. 3, pp. 530–543. EDN: YOWQMI. DOI: 10.14498/vsgtu1968.

Authors' Details:

Natalya V. Burmasheva https://orcid.org/0000-0003-4711-1894
Cand. Tech. Sci.; Associate Professor; Dept. of Information Technology and Automation[1]; Senior Researcher; Sect. of Nonlinear Vortex Hydrodynamics[2]; e-mail: nat_burm@mail.ru

Ekaterina A. Larina https://orcid.org/0009-0000-7883-0803
Assistant; Dept. of Information Technology and Automation[1]; Engineer; Sect. of Nonlinear Vortex Hydrodynamics[2]; e-mail: larinakatia@yandex.ru

Evgeniy Yu. Prosviryakov https://orcid.org/0000-0002-2349-7801
Dr. Phys. & Math. Sci.; Professor; Dept. of Information Technology and Automation[1]; Head of Sector; Sect. of Nonlinear Vortex Hydrodynamics[2]; Leading Researcher; Lab. of Physical and Chemical Mechanics[3]; e-mail: evgen_pros@mail.ru

Introduction. The Couette flow is one of the first examples of an exact solution to the Navier–Stokes equations [1–3]. It describes the isobaric flow of a viscous incompressible fluid, which is induced due to the motion of one or both boundaries of an infinite horizontal fluid layer. Recall that the steady Couette flow is described by a linear velocity profile, and this has predetermined the popularity of this solution in the theory of hydrodynamic stability for studying secondary flows generated by different disturbance classes. There is an interesting observation for the unsteady Couette flow. It is described by the simplest linear parabolic equation having a general solution to an extensive class of functions [2, 3]. Thus, the first and second Stokes problems are described by the non-stationary Couette profile, and they are its particular case [2, 3].

Besides studying the hydrodynamic stability of the Couette flow for a viscous incompressible fluid, there are various modifications of the exact Couette solution for regions without plane symmetry. Note that there exists the well-known exact Taylor–Couette solution on the fluid flow in the gap between coaxial cylinders [2,4–8], as well as the solution describing isobaric fluid flow on a sphere [9,10]. The Couette flow is fundamental in the study of fluids with non-Newtonian properties [11, 12]. The three-dimensional Couette flow, which is potential and non-isobaric, has been recently exemplified [13].

It is difficult to study Couette flows, different from unidirectional ones, since the reduced Navier–Stokes system becomes overdetermined [14–17]. The overdetermined Navier–Stokes equation system describing two-dimensional flows of viscous fluids began to be studied in [17], a complete list of exact solutions for two-dimensional hydrodynamics being given in [18]. An example of a nontrivial exact solution to the Navier–Stokes equation system for incompressible fluids with nonstationary and steady two-dimensional velocity fields depending on three coordinates was found in [15, 16]. The first exact solution describing the non-uniform Couette flow was constructed in the class of solutions for velocities linearly dependent on two coordinates (the Lin–Sidorov–Aristov family) [19–21]. The studies along this line were continued and summarized in [16].

This paper studies a boundary value problem for 2.5D Navier–Stokes equations, which describes steady flows of a two-layer fluid. The study is based on the exact solution of the Navier–Stokes equations for incompressible fluids [15, 16], which was constructed by functional variable separation. It was shown in [22] that the exact solutions found in [15, 16] and describing non-uniform Couette flows can be used to describe isobaric multilayer fluids. It was reported in [15, 16] that exact solutions with a velocity field linear in coordinates describe equatorial countercurrents in the World Ocean [2, 15, 21]. Multilayer fluids are often used to model large oceanic flows [2, 21]. In [22] it was found useful to extend the study of boundary value problems of steady flows from single-layer streams [15, 16] to multilayer fluids. This should be done in order to have a store of exact solutions for studying the hydrodynamic stability of flows, for comparing model representations with natural observations, and most importantly to understand the applicability of the substitution of continuous density stratification by a discrete saltus function.

1. Problem Statement. Consider a steady flow of a viscous two-layer fluid in an extended horizontal layer. We denote the lower layer by the subscript “1” and the upper one by “2”. Each of the two layers of the two-layer fluid can have its own thickness (h_1 and h_2, respectively, see Fig. 1), density (ρ_1 and ρ_2), and viscosity

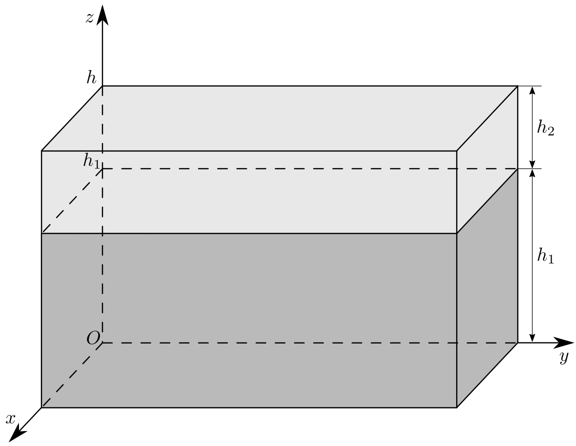


Figure 1. The scheme of a two-layer fluid

(η_1 and η_2). Note that the heavier phase is located below in density-stratified fluids, i.e., $\rho_1 > \rho_2$.

It is assumed here that the flow takes place at a constant temperature and in the absence of external forces, except for gravity. The sum of pressure (ratioed to density) and the gravity potential is constant through the flow; therefore, the gradient of this sum, entering the Navier–Stokes equations, is zero. The steady flow of fluids of this type is described by two systems of nonlinear equations (each layer is described by its own system) consisting of the vector Navier–Stokes equation and the scalar incompressibility equation [22–24]:

$$\rho_1(\mathbf{V}^{(1)}, \nabla)\mathbf{V}^{(1)} = \eta_1 \Delta \mathbf{V}^{(1)}, \quad \nabla \cdot \mathbf{V}^{(1)} = 0; \tag{1}$$

$$\rho_2(\mathbf{V}^{(2)}, \nabla)\mathbf{V}^{(2)} = \eta_2 \Delta \mathbf{V}^{(2)}, \quad \nabla \cdot \mathbf{V}^{(2)} = 0. \tag{2}$$

Systems (1), (2) have the following notations: $\mathbf{V}^{(1)} = (V_x^{(1)}, V_y^{(1)}, V_z^{(1)})$ and $\mathbf{V}^{(2)} = (V_x^{(2)}, V_y^{(2)}, V_z^{(2)})$ are the vector velocity fields for the lower and upper layers, respectively; $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$ is the Hamilton operator; $\Delta = (\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2)$ is the Laplace operator; $(\mathbf{V}, \nabla) = (V_x \partial/\partial x + V_y \partial/\partial y + V_z \partial/\partial z)$ is a convective derivative. Note that both system (1) and system (2) are overdetermined, i.e., the required velocities $V_x^{(i)}$, $V_y^{(i)}$ for each layer must satisfy three scalar equations (the third Navier–Stokes equation is fulfilled identically since a flow with zero vertical velocity is considered). Note that the equations $\nabla \cdot \mathbf{V}^{(1)} = 0$ and $\nabla \cdot \mathbf{V}^{(2)} = 0$ (velocity divergence is zero) is termed in two ways in the scientific literature. They are termed the continuity equation in the physical literature and the incompressibility equation in the hydrodynamic literature [25, 26].

In what follows, the solution of systems (1), (2) is sought in the form of functions linearly dependent on one of the horizontal coordinates [22–24]:

$$V_x{}^{(1)} = u^{(1)}(z) + u^{(1)}(z)y, \quad V_y{}^{(1)} = V^{(1)}(z); \tag{3}$$

$$V_x{}^{(2)} = u^{(2)}(z) + u^{(2)}(z)y, \quad V_y{}^{(2)} = V^{(2)}(z). \tag{4}$$

For the class (3), (4) the incompressibility equation in systems (1), (2) is satisfied identically. This circumstance dismantles the problem of overdetermination of systems (1) and (2), i.e., each system is now reduced to finding two projections of the velocity vector from two ordinary differential equations (projections of the Navier–Stokes equation onto the axes Ox and Oy):

$$\rho_1 V^{(1)} u^{(1)} = \eta_1 (u^{(1)''} + u^{(1)''} y), \quad \eta_1 V^{(1)''} = 0; \tag{5}$$

$$\rho_1 V^{(2)} u^{(2)} = \eta_2 (u^{(2)''} + u^{(2)''} y), \quad \eta_2 V^{(2)''} = 0. \tag{6}$$

Hereinafter, the double prime marks derivation with respect to the vertical coordinate z. In view of the independence of the spatial coordinates x and y of the selected Cartesian system, equations (5) and (6) can be represented as

$$u^{(1)''} = 0, \quad V^{(1)''} = 0, \quad u^{(1)''} = \frac{\rho_1}{\eta_1} V^{(1)} u^{(1)}; \tag{7}$$

$$u^{(2)''} = 0, \quad V^{(2)''} = 0, \quad u^{(2)''} = \frac{\rho_2}{\eta_2} V^{(2)} u^{(2)}. \tag{8}$$

The first two equations in both system (7) and system (8) are isolated, and the solution of the third equations in these systems is the last to be found. Double integration of systems (7) and (8) results in their general solution

$$\begin{gathered} u^{(1)} = {c_2}^{(1)} z + {c_1}^{(1)}, \quad V^{(1)} = {\alpha_2}^{(1)} z + {\alpha_1}^{(1)}, \\ u^{(1)} = \frac{\rho_1}{12\eta_1} \big({c_2}^{(1)} {\alpha_2}^{(1)} z^4 + 2({c_2}^{(1)} {\alpha_1}^{(1)} + {c_1}^{(1)} {\alpha_2}^{(1)}) Z^3 + 6 {c_1}^{(1)} {\alpha_1}^{(1)} z^2 \big) + \\ + {\beta_2}^{(1)} z + {\beta_1}^{(1)}; \end{gathered} \tag{9}$$

$$\begin{gathered} u^{(2)} = {c_2}^{(2)} z + {c_1}^{(2)}, \quad V^{(2)} = {\alpha_2}^{(2)} z + {\alpha_1}^{(2)}, \\ u^{(2)} = \frac{\rho_2}{12\eta_2} \big({c_2}^{(2)} {\alpha_2}^{(2)} z^4 + 2({c_2}^{(2)} {\alpha_1}^{(2)} + {c_1}^{(2)} {\alpha_2}^{(2)}) Z^3 + 6 {c_1}^{(2)} {\alpha_1}^{(2)} z^2 \big) + \\ + {\beta_2}^{(2)} z + {\beta_1}^{(2)}. \end{gathered} \tag{10}$$

The solutions represented by equations (9) and (10) are polynomial, the highest degree of these polynomials corresponds to expressions for velocities $U^{(1)}$, $U^{(2)}$, and this is attributable to the sequence of integration of the equations in systems (7) and (8). The constants $c_i^{(1)}$, $c_i^{(2)}$, $\alpha_i^{(1)}$, $\alpha_i^{(2)}$, $\beta_i^{(1)}$ and $\beta_i^{(2)}$ $(i = 1, 2)$ in the exponential solutions (9) and (10) must be found from the boundary conditions; therefore, it is necessary to formulate twelve conditions for the determination of these values.

2. Boundary Conditions. Since the vertical fluid velocity is assumed to be zero, the fluids of the different layers do not intermix in the shear flow under study. In other words, the interlayer boundary (the boundary $z = h_1$) is here considered to be rigid (Fig. 1). For convenience, in what follows, $h = h_1 + h_2$.

Assume that a no-slip condition is set at the lower boundary $z = 0$ [15]:

$$V_x^{(1)}(0) = 0, \quad V_y^{(1)}(0) = 0.$$

Taking into account the representation (3), (4), we arrive at three conditions

$$U^{(1)}(0) = 0, \quad u^{(1)}(0) = 0, \quad V^{(1)}(0) = 0. \tag{11}$$

A velocity field (wind effect) is set at the upper boundary $z = h$ [15]:

$$V_x^{(2)}(h) = W\cos\varphi + \Omega y, \quad V_y^{(2)}(h) = W\sin\varphi.$$

Here, Ω is the horizontal gradient of the velocity $V_x^{(2)}$ (spatial acceleration) at the upper boundary; W is the absolute value of the uniform velocity component at the mobile boundary $z = h$ of a two-layer fluid; φ is the angle between the uniform velocity component $V_x^{(2)}$ and the axis Ox. Taking into account representation (4), we obtain three more conditions

$$U^{(2)}(h) = W\cos\varphi, \quad u^{(2)}(h) = \Omega, \quad V^{(2)}(h) = W\sin\varphi. \tag{12}$$

Besides, it is required that two additional conditions be met at the interlayer boundary $z = h_1$ (conditions for "sewing together" the solutions for the two layers). They are

– the solution continuity condition for velocities

$$V_x^{(1)}(h_1) = V_x^{(2)}(h_1), \quad V_y^{(1)}(h_1) = V_y^{(2)}(h_1),$$

and taking into account the structure of classes (3) and (4), we have three equalities

$$U^{(1)}(h_1) = U^{(2)}(h_1), \quad u^{(1)}(h_1) = u^{(2)}(h_1), \quad V^{(1)}(h_1) = V^{(2)}(h_1); \tag{13}$$

– the solution continuity condition for tangential stresses

$$\tau_{xz}^{(1)}(h_1) = \tau_{xz}^{(2)}(h_1), \quad \tau_{yz}^{(1)}(h_1) = \tau_{yz}^{(2)}(h_1).$$

As distinct from expressions (13) resulting (in view of the independence of the spatial coordinates) directly from the condition of equality of the velocities at the interlayer boundary, the case with the continuity condition for tangential stresses is not as apparent, the continuity condition for the velocity field proves to be insufficient. By the Newton law, the relation of the stress tensor components to velocities is known,

$$\tau^{(i)} = \begin{pmatrix} -p^{(i)} + 2\eta_i \frac{\partial V_x{}^{(i)}}{\partial x} & \eta_i\left(\frac{\partial V_x{}^{(i)}}{\partial y} + \frac{\partial V_y{}^{(i)}}{\partial x}\right) & \eta_i\left(\frac{\partial V_x{}^{(i)}}{\partial z} + \frac{\partial V_z{}^{(i)}}{\partial x}\right) \\ \eta_i\left(\frac{\partial V_x{}^{(i)}}{\partial y} + \frac{\partial V_y{}^{(i)}}{\partial x}\right) & -p^{(i)} + 2\eta_i \frac{\partial V_y{}^{(i)}}{\partial y} & \eta_i\left(\frac{\partial V_y{}^{(i)}}{\partial z} + \frac{\partial V_z{}^{(i)}}{\partial y}\right) \\ \eta_i\left(\frac{\partial V_x{}^{(i)}}{\partial z} + \frac{\partial V_z{}^{(i)}}{\partial y}\right) & \eta_i\left(\frac{\partial V_z{}^{(i)}}{\partial y} + \frac{\partial V_y{}^{(i)}}{\partial z}\right) & -p^{(i)} + 2\eta_i \frac{\partial V_z{}^{(i)}}{\partial z} \end{pmatrix} \overset{(3),(4)}{=}$$

$$= \begin{pmatrix} -p^{(i)} & \eta_i u^{(i)} & \eta_i \frac{\partial V_x{}^{(i)}}{\partial z} \\ \eta_i u^{(i)} & -p^{(i)} & \eta_i \frac{\partial V_y{}^{(i)}}{\partial z} \\ \eta_i \frac{\partial V_x{}^{(i)}}{\partial z} & \eta_i \frac{\partial V_y{}^{(i)}}{\partial z} & -p^{(i)} \end{pmatrix},$$

where $p^{(i)}$ is hydrostatic pressure (the pressure of a moving fluid column, depending not only on the transverse coordinate, i.e. changing only with depth, similarly to the main equation of hydrostatics) in the layer under study. This representation of the stress tensor can easily yield the following equivalent of the continuity condition for tangential stresses:

$$\eta_1 \frac{du^{(1)}}{dz}\Big|_{z=h_1} = \eta_2 \frac{du^{(2)}}{dz}\Big|_{z=h_1}, \quad \eta_1 \frac{du^{(1)}}{dz}\Big|_{z=h_1} = \eta_2 \frac{du^{(2)}}{dz}\Big|_{z=h_1},$$
$$\eta_1 \frac{dV^{(1)}}{dz}\Big|_{z=h_1} = \eta_2 \frac{dV^{(2)}}{dz}\Big|_{z=h_1}. \tag{14}$$

Thus the boundary value problem (9)–(14) becomes closed.

3. An Exact Solution to the Boundary Value Problem. Conditions (11)–(14) allow us to find a particular solution to systems (7), (8) for each layer, which would meet the selected boundary conditions:

$$u^{(1)}(Z) = \frac{h\eta_2\Omega}{h_2\eta_1 + h_1\eta_2} Z, \tag{15}$$

$$V^{(1)}(Z) = \frac{h\eta_2 W \sin\varphi}{h_2\eta_1 + h_1\eta_2} Z, \tag{16}$$

$$u^{(1)}(Z) = \frac{hWZ}{12\eta_1(h_2\eta_1 + h_1\eta_2)^3}\big[\Omega\rho_1\eta_2^2(h_2\eta_1 + h_1\eta_2)h^3\sin\varphi Z^3 +$$
$$+12\eta_1\eta_2(h_2\eta_1 + h_1\eta_2)^2\cos\varphi - \Omega\sin\varphi(4h_1^3h_2\eta_1\eta_2^2\rho_1 + h_1^4\eta_2^3\rho_1 +$$
$$+h_2^4\eta_1^3\rho_2 + 4h_1h_2^3\eta_2^2\eta_2\rho_2 + 6h_1^2h_2^2\eta_1\eta_2^2\rho_2)\big], \tag{17}$$

$$u^{(2)}(Z) = \frac{\Omega}{h_2\eta_1 + h_1\eta_2}\big(h\eta_1 Z + h_1(\eta_2 - \eta_1)\big), \tag{18}$$

$$V^{(2)}(Z) = \frac{W\sin\varphi}{h_2\eta_1 + h_1\eta_2}\big(h\eta_1 Z + h_1(\eta_2 - \eta_1)\big), \tag{19}$$

$$u^{(2)}(Z) = \frac{W}{12\eta_2(h_2\eta_1 + h_1\eta_2)^3}\big\{h^4\eta_2^2(h_2\eta_1 + h_1\eta_2)\rho_2\Omega\sin\varphi Z^4 -$$
$$-4h^3h_1\eta_1(\eta_1 - \eta_2)(h_2\eta_1 + h_1\eta_2)\rho_2\Omega\sin\varphi Z^3 +$$
$$+6h^2h_1^2(\eta_1 - \eta_2)^2(h_2\eta_1 + h_1\eta_2)\rho_2\Omega\sin\varphi Z^2 -$$
$$-hZ\big[\big(-3h_1^4\eta_2^3\rho_1 + \big(h_2(4h_1^3 + h_2^3)\eta_1^3 + 4h_1(h_1^3 - 3h_1^2h_2 + h_2^3)\eta_2^2\eta_2 +$$
$$+6h_1^2(-2h_1^2 + 2h_1h_2 + h_2^2)\eta_1\eta_2^2 + 12h_1^4\eta_2^3\big)\rho_2\big)\Omega\sin\varphi -$$
$$-12\eta_1\eta_2(h_2\eta_1 + h_1\eta_2)^2\cos\varphi\big] +$$
$$-h_1(h_1 + h_2)W\sin\varphi\big(3h_1^3\eta_2^3\rho_1 - h_1^2h_2\eta_1^3\rho_2 + h_1h_2^2\eta_1^3\rho_2 - h_2^3\eta_1^3\rho_2 -$$
$$-h_1^3\eta_2^2\eta_2\rho_2 + 5h_1h_2\eta_2^2\eta_2\rho_2(h_1 - h_2) + h_2^3\eta_2^2\eta_2\rho_2 + 4h_1^3\eta_1\eta_2^2\rho_2 -$$
$$-10h_1^2h_2\eta_1\eta_2^2\rho_2 + 4h_1h_2^2\eta_1\eta_2^2\rho_2 + 6h_1^2\eta_2^3\rho_2(h_2 - h_1)\big)$$
$$-12h_1(\eta_1 - \eta_2)\eta_2(h_2\eta_1 + h_1\eta_2)^2\cos\varphi\big\}. \tag{20}$$

Solutions (15)–(20) involve the substitution $Z = z/h \in [0, 1]$. The motion of the lower layer ($Z \in [0; h_1/h]$) is described by expressions (15)–(17). The values of $Z \in [h_1/h; 1]$ correspond to the other (upper) layer, where the flow velocity is determined by solutios (18)–(20).

It is of interest that, despite seemingly simple structure of boundary conditions (11), (12) and velocity field representation (11), (12), the obtained solution (15)–(20) depends on the parameters of the boundary problem under study and the physical characteristics of the fluid in an extremely non-trivial way. Therefore, in a general form, it is impossible to make any conclusions about the effect of a specific parameter on the structure of the final solution. First of all, this concerns the uniform components $U^{(1)}$ and $U^{(2)}$. The only conclusion (fairly obvious) that can be made concerns the effect of the values of W and Ω on the value of velocity in the Oy direction (the velocities $V^{(1)}$ and $V^{(2)}$) and the non-uniform velocity component along the Ox axis (the spatial gradients $u^{(1)}$ and $u^{(2)}$) since functions (15), (16) and (18), (19) depend in direct proportion on these parameters.

Note also that, when $W = 0$, the velocity field determined by solutions (15)–(17) and (18)–(20) assumes a trivial form; therefore, it is considered hereinafter that $W \neq 0$.

Besides, note that the functions $u^{(1)}$ and $u^{(2)}$ become zero when $\Omega = 0$, i. e., we obtain an extension of the classical Couette flow to a non-one-dimensional case. The velocities $V^{(1)}$ and $V^{(2)}$ become zero only if $\sin\varphi = 0$. In this case, there is a unidirectional flow along the Ox axis with a non-uniform velocity distribution. In addition, the exact solutions for the components $u^{(1)}$ and $V^{(1)}$ are linear functions of Z, whose zero is only the point $Z = 0$. The stagnation (zero) points of the fluid are of particular importance due to the fact that both simply flow suppression and flow reversal (the appearance of counterflows) are possible at these points.

4. Analysis of the Exact Solution for the Lower Layer. Expression (17) for velocity $U^{(1)}$ can be written as

$$u^{(1)} = \frac{hWZ}{12\eta_1(h_2\eta_1 + h_1\eta_2)^3}[aZ^3 + b], \tag{21}$$

where the following nomenclature is introduced:

$$a = \Omega\rho_1\eta_2^2(h_2\eta_1 + h_1\eta_2)h^3\sin\varphi, \qquad b = 12\eta_1\eta_2(h_2\eta_1 + h_1\eta_2)^2\cos\varphi -$$

$$-\Omega\sin\varphi(4h_1^3h_2\eta_1\eta_2^2\rho_1 + h_1^4\eta_2^3\rho_1 + h_2^4\eta_1^3\rho_2 + 4h_1h_2^3\eta_2^2\eta_2\rho_2 + 6h_1^2h_2^2\eta_1\eta_2^2\rho_2).$$

The case $a = 0$ in Eq. (21) is not discussed here due to its triviality. Assume further that $a \neq 0$, then the velocity $U^{(1)}$ becomes zero inside the layer under study only if the point $Z_0 = -\sqrt[3]{b/a}$ falls within this layer. The latter condition is equivalent to the fulfillment of the inequality

$$b(ah_1^3 + bh^3) < 0.$$

The corresponding velocity profiles $U^{(1)}$ are shown in Figs. 2 and 3. These figures show the value of angular velocity, corresponding to the first Coriolis parameter, for the equatorial zone of the World Ocean (the latitude is $\pi/12$ rad).

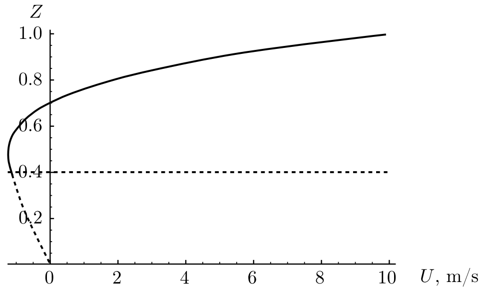


Figure 2. The U-velocity profiles (the dashed line $U^{(1)}$ for the lower layer and the solid line $U^{(2)}$ for the upper layer) for $W = 10$ m/s, $\varphi = \pi/12$, $h_1 = 0.4$ m, $h_2 = 0.6$ m, $\Omega = 1.4584 \cdot 10^{-5}$ rad/s, $\rho_1 = 1100$ kg/m^3, $\rho_2 = 1057.6$ kg/m^3, $\eta_1 = 1.7 \cdot 10^{-5}$ Pa · s, $\eta_2 = 1.2 \cdot 10^{-5}$ Pa · s

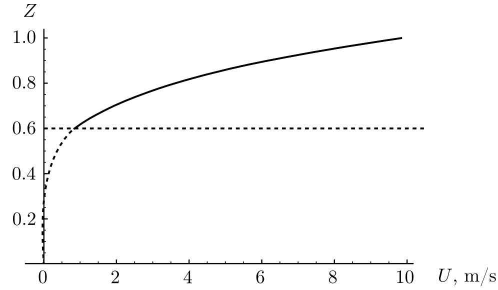


Figure 3. The U-velocity profiles (the dashed line $U^{(1)}$ for the lower layer and the solid line $U^{(2)}$ for the upper layer) for $W = 10$ m/s, $\varphi = \pi/12$, $h_1 = 0.6$ m, $h_2 = 0.4$ m, $\Omega = 1.4584 \cdot 10^{-5}$ rad/s, $\rho_1 = 1100$ kg/m^3, $\rho_2 = 733.1$ kg/m^3, $\eta_1 = 1.7 \cdot 10^{-5}$ Pa · s, $\eta_2 = 1.2 \cdot 10^{-5}$ Pa · s

In view of the above notations, the tangential stress $\tau_{xz}^{(1)}$ is defined as

$$\tau_{xz}^{(1)} = \frac{W}{12(h_2\eta_1 + h_1\eta_2)^3}[4aZ^3 + b] + \frac{\eta_1\eta_2\Omega y}{h_2\eta_1 + h_1\eta_2}.$$

Note that, when $W = 0$, the tangential stress $\tau_{xz}^{(1)}$ assumes a constant value (different for each section y). Therefore, it is further assumed that $W \neq 0$, and hence the stress $\tau_{xz}^{(1)}$ can be represented as

$$\tau_{xz}^{(1)} = \frac{hW}{12(h_2\eta_1 + h_1\eta_2)^3}[4aZ^3 + b] + \frac{h\eta_1\eta_2\Omega y}{h_2\eta_1 + h_1\eta_2} = \\ = \frac{hW}{12(h_2\eta_1 + h_1\eta_2)^3}[4aZ^3 + C], \quad (22)$$

where C denotes the following expression:

$$C = b + \frac{12\eta_1\eta_2(h_2\eta_1 + h_1\eta_2)^2\Omega y}{W}.$$

Note that the structure of expression (22) is similar to formula (21). Hence, by analogy with the analysis of the expression (21), it follows that, when $a \neq 0$, the stress $\tau_{xz}^{(1)}$ becomes zero only at one point inside the layer, namely at the point $Z = -\sqrt[3]{C/(4a)}$. This value belongs to the interval of interest only if

$$C(4ah_1^3 + Ch^3) < 0.$$

Thus, the profile of the tangential stress represented by expression (22) is defined by a cubic parabola, which cannot have more than one point in common with the OZ axis (Figs. 4 and 5). The profiles of the tangential stress τ_{xz} in Figs. 4 and 5 are constructed for those values of the boundary conditions, layer thicknesses, and physical fluid parameters for which a calculation is made and presented in Figs. 2 and 3, respectively.

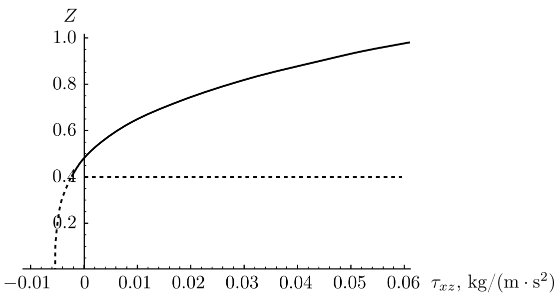


Figure 4. The profile of the stress τ_{xz} (the dashed line $\tau_{xz}^{(1)}$ for the lower layer and the solid line $\tau_{xz}^{(2)}$ for the upper layer) for $W = 10$ m/s, $\varphi = \pi/12$, $h_1 = 0.4$ m, $h_2 = 0.6$ m, $\Omega = 1.4584\cdot 10^{-5}$ rad/s, $\rho_1 = 1100$ kg/m^3, $\rho_2 = 1057.6$ kg/m^3, $\eta_1 = 1.7\cdot 10^{-5}$ Pa·s, $\eta_2 = 1.2\cdot 10^{-5}$ Pa·s

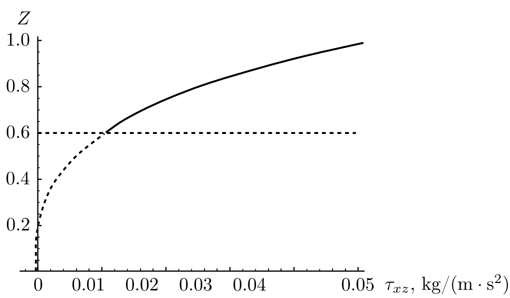


Figure 5. The profile of the stress τ_{xz} (the dashed line $\tau_{xz}^{(1)}$ for the lower layer and the solid line $\tau_{xz}^{(2)}$ for the upper layer) for $W = 10$ m/s, $\varphi = \pi/12$, $h_1 = 0.6$ m, $h_2 = 0.4$ m, $\Omega = 1.4584\cdot 10^{-5}$ rad/s, $\rho_1 = 900$ kg/m^3, $\rho_2 = 733.1$ kg/m^3, $\eta_1 = 1.7\cdot 10^{-5}$ Pa·s, $\eta_2 = 1.2\cdot 10^{-5}$ Pa·s

Note that, in view of the structure of solutions(16) and (19), the tangential stress τ_{yz} assumes a constant value determined by the problem parameters:

$$\tau_{yz}^{(1)} = \eta_1 \frac{dV^{(1)}}{dz} = \frac{\eta_1}{h}\frac{dV^{(1)}}{dZ} = \frac{\eta_1\eta_2 W\sin\varphi}{h_2\eta_1 + h_1\eta_2} = {\tau_{yz}}^{(2)}.$$

5. Analysis of the Exact Solution for the Upper Layer. The expression(20) for the velocity $U^{(2)}$ can be represented as

$$u^{(2)} = \frac{W}{12\eta_2(h_2\eta_1 + h_1\eta_2)^3}[kZ^4 + nZ^3 + mZ^2 + qZ + r].$$

The coefficients k, n, m, q and r can be easily written from exact solution (20).

Let us now study the properties of the tangential stress defined by the velocity $V_x^{(2)}$. Using the above notations, we obtain

$$\tau_{xz}^{(2)} = \frac{\eta_2}{h}\Big\{\frac{W}{12\eta_2(h_2\eta_1+h_1\eta_2)^3}[4kZ^3+3nZ^2+2mZ+q]+\frac{h\eta_1\Omega y}{h_2\eta_1+h_1\eta_2}\Big\}.$$

Note that, when $W=0$, the stress $\tau_{xz}^{(2)}$ assumes a constant (through the selected section) value, hence the stratification of this field does not occur. In the assumption that $W\neq 0$, the stress $\tau_{xz}^{(2)}$ can be represented as

$$\tau_{xz}^{(2)} = \frac{\eta_2}{h}\frac{W}{12\eta_2(h_2\eta_1+h_1\eta_2)^3}\Big\{4kZ^3+3nZ^2+2mZ+q+ \\ +\frac{12h\eta_1\eta_2(h_2\eta_1+h_1\eta_2)^2\Omega y}{W}\Big\},$$

and this illustrates stratification on the change in the sign of the tangential stress relative to the Z-coordinate. The examples of the tangential stress $\tau_{xz}^{(2)}$ corresponding to this solution are given in Figs. 4 and 5.

Conclusion. The problem describing the isothermal flow of a viscous incompressible two-layer fluid in a horizontal layer has been studied. The properties of the layers differ in thickness, density and/or viscosity. An exact solution has been obtained to describe velocities in each of the layers for a set of boundary conditions describing no-slip of the fluid at the lower boundary of the fluid flow region under study and the non-uniform effect of wind at the upper boundary of this region. At the boundary between the layers of the two-layer fluid, it was required that the velocities and stresses be equal. The analysis of the obtained solution for the layers has shown that this exact solution is able to describe the appearance of reverse flow zones and stratification of the tangential stress field.

Competing interests. Authors declare that they have no competing interests.

Authors' contributions and responsibilities. Each author has participated in the development of the concept of the article and in the writing of the manuscript. The authors are absolutely responsible for submitting the final manuscript in print. Each author has approved the final version of the manuscript.

Funding. The study received no funding.

References

1. Couette M. Études sur le frottement des liquids, *Ann. de Chim. et Phys. (6)*, 1890, vol. 21, pp. 433–510 (In French).
2. Drazin P., Riley N. *The Navier–Stokes equations: A classification of flows and exact solutions*, London Mathematical Society Lecture Note Serie, vol. 334. Cambridge, Cambridge Univ. Press, 2006, x+196 pp. DOI: https://doi.org/10.1017/CBO9780511526459.
3. Aristov S. N., Knyazev D. V., Polyanin A. D. Exact solutions of the Navier–Stokes equations with the linear dependence of velocity components on two space variables, *Theor. Found. Chem. Eng.*, 2009, vol. 43, no. 5, pp. 642–662. EDN: LPGJRJ. DOI: https://doi.org/10.1134/S0040579509050066.

4. Taylor G. I. Stability of a viscous liquid contained between two rotating cylinders, *J. Phil. Trans. Royal Society A*, 1923, vol. 102, no. 718, pp. 541–542. DOI: https://doi.org/10.1098/rsta.1923.0013.
5. Shlikhting G. *Teoriia pogranichnogo sloia* [Boundary-Layer Theory]. Moscow, Nauka, 1974, 712 pp. (In Russian)
6. Ilin K. I., Morgulis A. B. Critical curves for the Couette–Taylor throughflow, *Izv. Vuzov. Severo-Kavkazskii Reg. Natural Sci.*, 2019, vol. 1, pp. 10–16 (In Russian). EDN: ZBZEWT.
7. Devisilov V. A., Sharay E. Yu. Hydrodynamic filtration, *Safety in Technosphere*, 2015, vol. 4, no. 3, pp. 68–80 (In Russian). EDN: TZKMCL. DOI: https://doi.org/10.12737/11885.
8. Lebiga V. A., Zinoviev V. N., Pak A. Yu., Zharov I. R. The circular gap Couette flow modeling, *Vestn. Novosib. Gos. Univ. Ser. Fizika*, 2016, vol. 11, no. 4, pp. 52–60 (In Russian). EDN: XRUKWH.
9. Astaf'ev N. M. Structures formed in a rotating spherical layer under the influence of conditions simulating global heat fluxes in the atmosphere, *Sovr. Probl. DZZ Kosm.*, 2006, vol. 3, no. 1, pp. 245–256 (In Russian). EDN: NDPOWR.
10. Belyaev Yu. N., Monakhov A. A., Yavorskaya I. M. Stability of spherical Couette flow in thick layers when the inner sphere revolves, *Fluid. Dyn.*, 1978, vol. 13, no. 2, pp. 162–168. DOI: https://doi.org/10.1007/BF01091664.
11. Puhnachev V. V., Puhnacheva T. P. The Couette problem for a Kelvin–Voigt medium, *J. Math. Sci.*, 2012, vol. 186, no. 3, pp. 495–510. EDN: RGHYXH. DOI: https://doi.org/10.1007/s10958-012-1003-0.
12. Skul'skiy O. I., Aristov S. N. *Mekhanika anomal'no viazkikh zhidkostei* [Mechanics of Abnormally Viscous Fluids]. Moscow, Izhevsk, R&C Dynamics, 2003, 156 pp. (In Russian). EDN: OWGAFL.
13. Prosviryakov E. Yu. Exact solutions for three-dimensional potential and vorticity Couette flows of an incompressible viscous fluid, *Vestnik natsional'nogo issledovatel'skogo yadernogo universiteta "MIFI"*, 2015, vol. 4, no. 6, pp. 501–506. EDN: VLRBSB. DOI: https://doi.org/10.1134/S2304487X15060127.
14. Aristov S. N., Prosviryakov E. Yu. On laminar flows of planar free convection, *Nelin. Dinam.*, 2013, vol. 9, no. 4, pp. 651–657 (In Russian). EDN: SAHAZJ.
15. Aristov S. N., Prosviryakov E. Yu. Inhomogeneous Couette flow, *Nelin. Dinam.*, 2014, vol. 10, no. 2, pp. 177–182 (In Russian). EDN: SHVJGX.
16. Zubarev N. M., Prosviryakov E. Yu. Exact solutions for layered three-dimensional nonstationary isobaric flows of a viscous incompressible fluid, *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2019, vol. 60, no. 6, pp. 1031–1037. EDN: VKJMMQ. DOI: https://doi.org/10.1134/S0021894419060075.
17. Berker R. *Sur quelques cas d'intégration des équations du mouvement d'un fluide visqueux incompressible.* Paris-Lille, Imprimerie A. Taffin-Lefort, 1936, 161 pp. (In French)
18. Shmyglevskii Yu. D. On isobaric planar flows of a viscous incompressible liquid, *USSR Comput. Math. Math. Phys.*, 1985, vol. 25, no. 6, pp. 191–193. DOI: https://doi.org/10.1016/0041-5553(85)90030-8.
19. Lin C. C. Note on a class of exact solutions in magneto-hydrodynamics, *Arch. Rational Mech. Anal.*, 1957, vol. 1, no. 1, pp. 391–395. DOI: https://doi.org/10.1007/BF00298016.
20. Sidorov A. F. Two classes of solutions of the fluid and gas mechanics equations and their connection to traveling wave theory, *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 1989, vol. 30, no. 2, pp. 197–203. EDN: LZHPWE. DOI: https://doi.org/10.1007/BF00852164.
21. Aristov S. N. *Eddy Currents in Thin Liquid Layers*, Dr. Sci. [Phys.-Math.] Dissertation. Vladivostok, 1990, 303 pp. (In Russian)
22. Burmasheva N. V., Prosviryakov E. Yu. Exact solutions to the Navier–Stokes equations describing stratified fluid flows, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2021, vol. 25, no. 3, pp. 491–507. EDN: JKXFDQ. DOI: https://doi.org/10.14498/vsgtu1860.

23. Burmasheva N. V., Prosviryakov E. Yu. A large-scale layered stationary convection of a incompressible viscous fluid under the action of shear stresses at the upper boundary. Temperature and presure field investigation, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2017, vol. 21, no. 4, pp. 736–751 (In Russian). EDN: YUGZXQ. DOI: https://doi.org/10.14498/vsgtu1568.
24. Burmasheva N. V., Prosviryakov E. Yu. Studying the stratification of hydrodynamic fields for laminar flows of vertically swirling fluids, *Diagnostics, Resource and Mechanics of Materials and Structures*, 2020, no. 4, pp. 62–78. DOI: https://doi.org/10.17804/2410-9908.2020.4.062-078.
25. Landau L. D., Lifshitz E. M. *Fluid Mechanics*, Course of Theoretical Physics, vol. 6. Oxford, Pergamon Press, 1963, xii+536 pp.
26. Kochin N. K., Kibel I. A., Roze N. V. *Theoretical Hydromechanics*. New York, John Wiley and Sons, 1964, v+577 pp.

Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2023. Т. 27, № 3. С. 530–543
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu1968
EDN: YOWQMI

УДК 532.5

Неоднородное течение Куэтта двухслойной жидкости

***Н. В. Бурмашева*[1,2], *Е. А. Ларина*[1,2], *Е. Ю. Просвиряков*[1,2,3]**

[1] Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б. Н. Ельцина, Россия, 620002, Екатеринбург, ул. Мира, 19.
[2] Институт машиноведения УрО РАН, Россия, 620049, Екатеринбург, ул. Комсомольская, 34.
[3] Удмуртский федеральный исследовательский центр УрО РАН, Россия, 426067, Ижевск, ул. Т. Барамзиной, 34.

Аннотация

Предложено новое точное решение уравнений Навье–Стокса, описывающее установившееся изобарическое изотермическое течение стратифицированной по плотности и/или вязкости несжимаемой двуслойной жидкости. Указанное точное решение принадлежит классу функций, линейных по части пространственных координат, и является обобщением классического течения Куэтта в протяженном горизонтальном слое на случай неодномерных неоднородных течений. В качестве системы краевых условий рассмотрена связка «условие прилипания + воздействие параболического ветра». На общей границе двух слоев заявлено выполнение требования гладкости и непрерывности решения. Построенное для каждого слоя решение было исследовано на предмет возможности описывать возникновение застойных точек поля скорости и генерации противотечений. Строго показано, что указанное решение при

Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ
Научная статья

Образец для цитирования
Burmasheva N. V., Larina E. A., Prosviryakov E. Yu. Inhomogeneous Couette flows for a two-layer fluid, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2023, vol. 27, no. 3, pp. 530–543. EDN: YOWQMI. DOI: 10.14498/vsgtu1968.

Сведения об авторах

Наталья Владимировна Бурмашева https://orcid.org/0000-0003-4711-1894
кандидат технических наук; доцент; департамент информационных технологий и автоматики[1]; старший научный сотрудник; сектор нелинейной вихревой гидродинамики[2]; e-mail: nat_burm@mail.ru

Екатерина Александровна Ларина https://orcid.org/0009-0000-7883-0803
ассистент; департамент информационных технологий и автоматики[1]; инженер; сектор нелинейной вихревой гидродинамики[2]; e-mail: larinakatia@yandex.ru

Евгений Юрьевич Просвиряков https://orcid.org/0000-0002-2349-7801
доктор физико-математических наук; профессор; департамент информационных технологий и автоматики[1]; заведующий сектором; сектор нелинейной вихревой гидродинамики[2]; ведущий научный сотрудник; лаб. физико-химической механики[3]; e-mail: evgen_pros@mail.ru

определенном граничном управлении и варьировании геометрико-физических характеристик слоя отвечает множественной стратификации как поля скорости, так и порождаемого им поля касательных напряжений.

Ключевые слова: многослойная вязкая жидкость, точное решение, стратификация полей, противотечение.

Получение: 13 декабря 2022 г. / Исправление: 28 июня 2023 г. /
Принятие: 17 июля 2023 г. / Публикация онлайн: 25 сентября 2023 г.

Конкурирующие интересы. Конфликта интересов в отношении авторства и публикации этой статьи нет.

Авторский вклад и ответственность. Все авторы принимали участие в разработке концепции статьи и в написании рукописи. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

Финансирование. Исследование выполнялось без финансирования.

Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2023, vol. 27, no. 3, pp. 544–572
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu2037

MSC: 93E35, 93A30, 65C20

Transfer function identification by minimizing the adaptive vs. optimal filter state estimates mismatch

I. V. Semushin

Ulyanovsk State University,
42, L. Tolstoy st., Ulyanovsk, 432017, Russian Federation.

Abstract

The article is concerned with a further development of the Active Principle of parametric system identification in the class of linear, time-invariant, completely observable models. As the identification target model, the optimal Kalman filter (OKF) is designated that is present, no more than conceptually, in the system's discretely observed response to a training excitation of the white noise type. By modifying the physically given structure into the standard observable model in both the observed response and the Adaptive Kalman Filter (AKF), a so-called Generalized Residual (GR) is constructed equaling the mismatch between the adaptive and the optimal filter state estimates plus an AKF-independent noise component. By virtue of this modification, the GR mean square becomes a new model proximity criterion for these filters. Minimizing this criterion via conventional practical optimization methods produces exactly the same result (AKF = OKF) as would be obtained by minimizing the theoretical criterion being, unfortunately, inaccessible to any AKF numerical optimization methods. The article presents a detailed step-by-step procedure explaining the above solution in terms of a parameterized transfer function. For the sake of clarity and for stimulating real world applications of the approach, the article employs the transfer function model of a twisted-pair line in a typical xDSL system. The implementation challenges of theoretical provisions of the method are discussed. The issue of extending the proposed approach to the problems of identifying linear models for nonlinear systems is outlined in the directions for further research.

Keywords: LTI model, complete observability, Kalman filter, adaptive filter, indirect performance index, implementation challenges.

Received: 23rd June, 2023 / Revised: 5th August, 2023 / Accepted: 21st August, 2023 / First online: 28th September, 2023

Mathematical Modeling, Numerical Methods and Software Complexes
Research Article

Please cite this article in press as:
Semushin I. V. Transfer function identification by minimizing the adaptive vs. optimal filter state estimates mismatch, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2023, vol. 27, no. 3, pp. 544–572. EDN: XUQAGA. DOI: 10.14498/vsgtu2037.

Author's Details:
Innokentiy V. Semushin https://orcid.org/0000-0002-3687-1110
Dr. Techn. Sci., Professor; IEEE Member; Professor; Dept. of Information Technology; e-mail: kentvsem@gmail.com

1. Introduction. The theory and practice of system identification (SI) in their more than half a century of history have received a powerful development reflected in hundreds of thousands of scientific publications around the world. As Gianluigi Pillonetto and Lennart Ljung note in their recent paper [1], '*Despite its long history, such research area is still extremely active.*' Indeed, even in a nonlinear setting, research is being done on how to deal with the presence of nonlinear distortions in systems by using linear SI techniques [2].

The abundance of publications in this field signaled the need for some serious cleanup work in order to single out the truly independent concepts. According to Ljung, in SI there are two independent and universal key concepts: the *choice of a Parametric Model Structure*, PMS, and the *choice of a Model Proximity Criterion*, MPC, the latter is the criterion of fit indicating erroneousness of a model with respect to a target [3]. Looking generally at what takes us in the identification process from observed data to a validated model, there are four main components: '*(1) The data itself, (2) The set of candidate models, (3) The suitability criterion, and (4) The validation procedure*' [4].

Indeed, at the heart of SI—or, in the modern AI terminology, of system mathematical model machine learning—is the principle of fitting the response data of an adaptive predictive model to the data of the real system response, which actually exists as a 'black box,' under conditions of the same excitatory (learning or training) input for them, by some predefined cost function. Nevertheless, the question of interest remains: *Given the PMS*, HOW *to use the available data to predefine the MPC*?

In the SI community, the impressive *Prediction Error Framework*, PEF, [5] reflects a generally accepted understanding of this issue. Such a view has been expressed [6] on more than one occasion: '*All existing parameter identification methods can be seen as special cases of this prediction error framework.*' At that, existing PEF methods fit the adaptive model *in the system response space, not in the state space.* This is due to the fact that the useful concept of 'state space' is intended for purely theoretical work to formulate and minimize the system model optimality criterion, which we call *direct performance index*, DPI. This limiting feature is generated by the certainty that it is impossible to overcome the obvious barrier, namely, the inaccessibility of state space elements in explicit form and, hence, of DPI. In fact, DPI cannot be accepted as MPC for identification algorithms.

Putting this barrier overcoming on the agenda, this article proposes an alternative solution to the HOW question posed above. That is, in formulating the research question, the intention here is to form an *Indirect Performance Index*, IPI, and then organize the minimization of IPI so that it is equivalent to minimizing the discrepancy between the internal states of the adaptive model that is available, and the internal states of the optimal model, which is only theoretically known as *Optimal Kalman Filter*, OKF, but is not accessible because of parameter uncertainty and, moreover, is sought as the target result of the parametric optimization of the *Adaptive Kalman Filter*, AKF.

Thus, the alternative approach considered in this paper should, as is conceivable, minimize the discrepancy between the AKF and OKF state estimates. This would be reasonable, since the notion of 'state' is intended to exhaustively characterize the behavior of an object. Moreover, such minimization, if implemented in practice, corresponds one-to-one to a theoretically optimal filter designing. This feature prevents the SI algorithm deviating from theoretical results of the OKF design and, therefore, from the bias errors inherent in some other SI methods.

To make such a solution feasible, the real system observed output is represented as if it were generated by the desired but hidden from us optimal filter rather than the given physically structured system. In the interest of realizing such a conceptual vision, the system is supposed to be completely observable to gain access to the ability to change the basis of the system's internal states formally without changing its input-output description, which is called the *transfer function*, TF, in the class of *linear time-invariant*, LTI, systems the article addresses to.

Building an LTI model for a dynamic system is usually being made either in the frequency domain (by a TF) or in time domain (by differential or difference equations) [7] to answer the challenge of reducing model uncertainty. The LTI SI theory and practice have reached a high degree of maturity and are frequently used in many disciplines where an *object of interest* exists, for example, in mechanical [8], electrical [9], electronic [10], chemical [11], civil [12], and even in biomedical [13, 14] applications. Besides, the point is that the object of interest for which it is necessary to parameterize the model in the form of TF can be not real, but fictitious. The most striking example of this is the construction of a dummy filter forming a model stationary random process from a white-noise process, which should approximate by its correlation function the experimental correlation function of a real process in a real system. An example may be identification of a parameterized instrumental errors model of a multi-component inertial navigation system [15].

The novelty of this article is that it encourages the application of the approach in the real world where it has not previously been considered. As an original example and for clarity, it uses the twisted-pair model in a typical *Digital Subscriber Line*, xDSL system [16]. As known, there exists a computational cost reduction challenge to solve the crosstalk precoding problem and this problem cannot be solved without knowing the *direct and cross channel TFs*, DCTFs and CCTFs [17]. There are several solutions to this engineering task in the literature of recent years, to exemplify [18–23]. Most of them are similar in that they propose to estimate channel TFs in the frequency domain, which is quite understandable since TF itself is a function of signal frequency and is to be known for each tone to eliminate the crosstalk phenomenon. Such methods of TF estimation narrow the field of their possible application, reducing it to the xDSL technology, where they are recognized to be effective. In contrast, this work proceeds from the fact that the problem of TF estimation can be solved in a more general formulation, considering it as a problem of parametric LTI model identification for a dynamic system in the state space time domain.

This article addresses the following research issues.

① First, we intend to overcome the obvious problem that the state vector of a dynamical system is unattainable explicitely, or, put this differently, is beyond of reach in a perfectly measured form, just as a signal disturbed by noise in filtering problems is, by definition, immeasurable in a pure form. The same applies to optimal state estimators, since the optimal filter remains machine-unrealizable or, put it tentatively, covert in the mesurement data until the necessary parameters are identified.

② The solution to overcome this unattainability barrier in [24] considered individual cases of a'priori uncertainty level constraints under which the solution works. We aim to show that this solution is in fact feasible with no limitations on the size of a'priori parametric uncertainty of the system model. We must make sure that this method of solution makes it universally applicable under the only unencumbered condition: the LTI model under study is completely observable and can be considered adequate to reality. We want to show that this quality of solution is achievable by converting the model into a *standard observable form*, SOF, to gain a solution in a computer-implementable tool.

③ As for common xDSL applications, we have to check whether it is possible to use time-domain formulas instead of traditional frequency-domain formulations to estimate the DCTFs or CCTFs, and show how to do so for any frequency (or tone) of interest in the channel operating frequency range.

④ Further, to organize the computational process with its numerical robustness and also to translate all decisions into a software design, reasonable suggestions are needed.

⑤ Finally, a determination has to be made about the novelty of this work in terms of its results, advantages, and limitations, and concerning objectives of further research in the proposed direction.

Consideration of these issues constitutes the main content of this article. *Section 2* is devoted to an illustrative example for which the IPI-based LTI system identification method may be of practical interest. *Section 3* presents a formal statement of the problem with two generalizations. *Section 4* explains a detailed procedure of how to identify a parametric OKF estimator in terms of a parametrized TF. *Section 5* discusses three practical challenges associated with implementing the solution: (1) organizing the computation time; (2) ordering the computation in terms of its numerical robustness; and (3) scheduling the work for a software project. The final *Section 6* summarizes the work, describes the limitations, and outlines possible research on the approach.

2. An illustrative example. Only within this example, symbol f is to designate the signal frequency in the electronic $R_{\mathrm{s}}L_{\mathrm{s}}G_{\mathrm{s}}C_{\mathrm{s}}$-circuit of Fig. 1 that mimics a very short—of length Δl—*section* of a twisted-pair line in the typical xDSL system [17, Chapter II]. The circuit can help the DCTF evaluation for transmission line of l full length. *Primary transmission line parameters* are $R = R(f)$, $L = L(f)$, $G = G(f)$ and $C = C(f)$ being functions of frequency f can be seen as expressed through the *secondary cable parameters* for standard twisted pairs depending on cable diameter, material and design. Taking these values from [17, p. 19] yields the parameters of a short section: the section resistance $R_{\mathrm{s}} = R{\cdot}\Delta l$, the section inductance $L_{\mathrm{s}} = L{\cdot}\Delta l$, the section conductivity $G_{\mathrm{s}} = G{\cdot}\Delta l$, and the section capacitance $C_{\mathrm{s}} = C{\cdot}\Delta l$.

Remark 1. *The subscript* $_{\mathrm{s}}$ *written in roman typestyle for lowercase index should not to be confused with the below Laplace variable* s. *It serves to remind that the quantity refers to a twisted pair* section *as shown in Fig. 1. The square brackets below denote the dimensionality of physical quantities in units of* SI.

The formula called Generalized Ohm's Law (GOL) in the complex domain defines the impedance of an electronic two-terminal element as *across variable* (voltage) divided by *through variable* (current), both in terms of the Laplace transform. When it is coupled with Kirchhoff's Current and Voltage Laws (com-

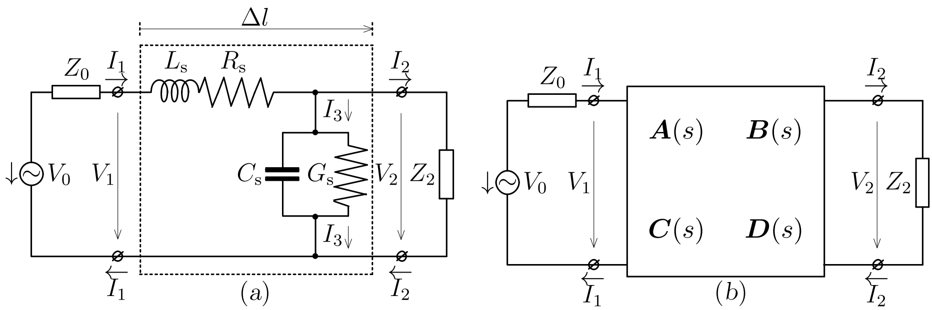


Figure 1. Line section of length Δl for a twisted pair transmission line of full length l

monly shortened to KCL and KVL), one has a sufficient set of tools for analyzing circuits. By writing KCL and KVL for the circuit in Fig. 1 (a), the equivalent linear Two-Port Network (TPN) shown in Fig. 1 (b) is obtained, yielding the following equations (1) in terms of the Laplace transform variables:

$$\left.\begin{aligned} &\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}(s) & \boldsymbol{B}(s) \\ \boldsymbol{C}(s) & \boldsymbol{D}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix}, \\ &\boldsymbol{A}(s) \triangleq 1 + F_s(s);\ [\boldsymbol{A}(s)] = 1, \\ &F_s(s) \triangleq (R_s + sL_s)(G_s + sC_s);\ [F_s(s)] = 1, \\ &\boldsymbol{B}(s) \triangleq (R_s + sL_s);\ [\boldsymbol{B}(s)] = \Omega, \\ &\boldsymbol{C}(s) \triangleq (G_s + sC_s);\ [\boldsymbol{C}(s)] = \mathrm{S} \equiv \Omega^{-1}, \\ &\boldsymbol{D}(s) \triangleq 1. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

REMARK 2. *In this notation, referring to variables and their transforms interchangeably, Laplace transforms are distinguishable by the use of an uppercase letter or* (*in more detail*) *the complex-valued argument* ($s \triangleq \sigma + \mathrm{j}\omega$) *with* ω, $[\omega]$ =*Rad*/*s*, *equaling angular velocity* $2\pi f$ *and* f, $[f]$ =s^{-1}, *meaning the frequency variable*, $\mathrm{j} \triangleq \sqrt{-1}$.

Define the dimensionless TF of a Δl-length line section as $T_s(s) \triangleq V_2/V_0$. Applying KVL yields V_0 and KCL I_1 in (2)

$$\begin{bmatrix} V_0 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_2 + [Z_0 + (R_s + sL_s)]I_1 \\ \underbrace{V_2/Z_2}_{I_2} + \underbrace{(G_s + sC_s)V_2}_{I_3} \end{bmatrix}. \tag{2}$$

It follows that $T_s(s)$ is the quantity inverse to

$$1 + [Z_0 + (R_s + sL_s)] \left[Z_2^{-1} + (G_s + sC_s)\right].$$

Together with (1), it leads to (3)

$$T_s(s) = \left\{\boldsymbol{A}(s) + Z_0 \left[Z_2^{-1} + \boldsymbol{C}(s)\right] + Z_2^{-1}\boldsymbol{B}(s)\right\}^{-1}. \tag{3}$$

From now on, consider a mathematically idealized experiment with, *condition* (i), a voltage source V_0 connected to the section input thus assuming $Z_0 \to 0$;

and with, *condition* (ii), a voltmeter having a very large inner impedance $Z_2 \to \infty$ connected to the section output to measure V_2. In this scenario, $T_{\mathrm{s}}(s) \to \mathring{T}_{\mathrm{s}}(s) \triangleq \boldsymbol{A}^{-1}(s)$. $\mathring{T}_{\mathrm{s}}(s)$ is the *section intrinsic transfer function*, SITF, we are interested in to move closer to the reality of xDSL *multi-user transmission*, xDSL–MUT.

As known from [17, Chapters II and III], the DCTF denoted by $H(f,l)$ is frequency-dependent and changes with the cable length l. When the transmission line is connected to a source V_S with source impedance Z_S and terminated with load impedance Z_L, this $H(f,l)$ is expressed by (4)

$$\left.\begin{aligned} H(f,l) &= \frac{Z_S + Z_L}{(Z_S + Z_L)\cosh(\gamma l) + Z_\star^\star \sinh(\gamma l)} \\ Z_\star^\star &\triangleq Z_\star + \frac{Z_S \cdot Z_L}{Z_\star} \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

through the characteristic line impedance $Z_\star$ defined as

$$Z_\star \triangleq \sqrt{\frac{R + \mathrm{j}2\pi f L}{G + \mathrm{j}2\pi f C}} \tag{5}$$

and the propagation constant $\gamma \triangleq \gamma(f)$ calculated by

$$\gamma(f) = \sqrt{(R + \mathrm{j}2\pi f L)(G + \mathrm{j}2\pi f C)}. \tag{6}$$

If the line terminates ideally at $Z_\star$ (5), so that $Z_L = Z_\star = Z_S$, the channel transfer function simplifies [17, Chapters II and III] to

$$H(f,l) = e^{-\gamma(f)\cdot l}. \tag{7}$$

Now, noticing a similarity between (6) and $F_{\mathrm{s}}(s)$ in (1), we obtain $F_{\mathrm{s}}(s) = (\Delta l)^2 \gamma^2(s)$ after substitution $s = \mathrm{j}2\pi f$. Hence

$$\gamma(f) = (\Delta l)^{-1} \sqrt{[\mathring{T}_{\mathrm{s}}(s)]^{-1}\big|_{s=\mathrm{j}2\pi f} - 1}. \tag{8}$$

If one manages to evaluate the expression under the square root sign in (8) as a complex-valued magnitude in dependence on frequency f, then the problem is solved for any f value desired. Thus, the solution is to parametrically identify the SITF, that is, $\mathring{T}_{\mathrm{s}}(s)$ to use it in (8) and then substitute in (7).

Remark 3. *Everywhere, the fact that a value* $\{\cdot\}$ *is unknown and so is to be estimated is reminded by the notation* $\mathring{\{\cdot\}}$ *with the overscript* $^\circ$. *When moving later to the solution, we change marking the estimated parameters to the commonly used* $\hat{\{\cdot\}}$, *instead of true* $\mathring{\{\cdot\}}$.

Directly from equations (1) and/or Fig. 1 (a), the following expression

$$\mathring{T}_{\mathrm{s}}(s) = \frac{\mathring{c}_0}{s^2 + \mathring{a}_1 s + \mathring{a}_0} \tag{9}$$

is obtained with the following three parameters

$$\left.\begin{array}{ll} \mathring{c}_0 \triangleq 1/(L_\mathrm{s}C_\mathrm{s}), & [\mathring{c}_0] = \mathrm{s}^{-2}, \\ \mathring{a}_0 \triangleq (R_\mathrm{s}G_\mathrm{s}+1)/(L_\mathrm{s}C_\mathrm{s}) = \omega_\mathrm{n}^2, & [\mathring{a}_0] = \mathrm{s}^{-2}, \\ \mathring{a}_1 \triangleq \dfrac{R_\mathrm{s}}{L_\mathrm{s}} + \dfrac{G_\mathrm{s}}{C_\mathrm{s}} = 2\zeta\omega_\mathrm{n}, & [\mathring{a}_1] = \mathrm{s}^{-1}. \end{array}\right\} \tag{10}$$

Here are some intermediate values

$$\left.\begin{array}{ll} \omega_\mathrm{n} = \sqrt{\mathring{a}_0}, & [\omega_\mathrm{n}] = \mathrm{s}^{-1}, \\ \zeta = \dfrac{\mathring{a}_1}{2\sqrt{\mathring{a}_0}}, & [\zeta] = 1, \\ D = \mathring{a}_0 - \mathring{a}_1^2/4 = \omega_\mathrm{n}^2(1-\zeta^2), & [D] = \mathrm{s}^{-2}, \\ \chi = \dfrac{\mathring{a}_1}{2\sqrt{D}} = \dfrac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}, & [\chi] = 1 \end{array}\right\} \tag{11}$$

introduced through the basic parameters (10) for further convenience, checking $\zeta^2 < 1$ for the literature obtainable secondary cable parameters [17, Table 2.1].

3. Problem statements. Given the specific case **A** with TF (9), good-quality estimates are required for parameters (10) of the numerator and denominator of this TF. In the most general case **B**, given an LTI 'black-box' as an nth order ordinary differential equation (nth order ODE), good-quality estimates are required for the numerator and denominator parameters of the corresponding TF. The solution is sought for the below **A** and **B** cases.

A. Illustrative example (9). The DSL environment is a multi-user transmission environment enabling a Central Office and the Customer Premises Equipment (CPE) to communicate in the downstream (from the CO to the different users) or in upstream (opposite) directions. The CO and the locally distributed CPEs are connected via twisted pair lines, each line belonging to one user. The twisted pairs are physically close to each other because they are bundled in a cable binder. Electromagnetic coupling between lines results in mutual interferences at all modems operating within the same cable [25]. These interferences known as *crosstalk channels* must be mitigated or, better, canceled.

Of two different kinds of crosstalk, namely near-end crosstalk (NEXT) and far-end crosstalk (FEXT), the latter represents the largest performance limiter in the xDSL system. A variety of suggestions have been made to reduce the impact of FEXT.

Most DSL and discrete multi-tone transmission (DMT) scenarios use the decomposition-based zero-forcing precoding (DBZF) to deal with FEXT. In DBZF, the transmit vector signal is pre-perturbed by the $[N \times N]$ precoder matrix $\boldsymbol{P}$ defined for each tone, where N is the number of users. For each tone, this number may be in thousands, matrix $\boldsymbol{P}$ is the inverse of the normalized (i.e. unit-diagonal) channel matrix $\boldsymbol{H}_\mathrm{norm}^{-1}$. Formally, $\boldsymbol{H}_\mathrm{norm}$ is the channel matrix $\boldsymbol{H}$ pre-multiplied by matrix $\boldsymbol{H}_\mathrm{diag}^{-1}$, the latter being a diagonal matrix composed of inverse transfer coefficients of direct channels [16; 17, pp. 34–35]. Hence, for downstream transmission with efficient precoding, i.e. full crosstalk cancellation, it is necessary to know the channel $[N \times N]$ matrix $\boldsymbol{H}$, which consists of the DCTFs (on the diagonal) and crosstalk channel transfer functions, CCTFs (off the diagonal).

For a very short section (*see* Fig. 1), the generally accepted model DCTF is given by formula (9). A large number of such DCTFs cascade to form a DCTF of the entire line. It is shown in Fig. 2 with approximations $\mathrm{d}R \triangleq R{\cdot}\mathrm{d}l \approx R_{\mathrm{s}}$, $\mathrm{d}L \triangleq L{\cdot}\mathrm{d}l \approx L_{\mathrm{s}}$, $\mathrm{d}G \triangleq G{\cdot}\mathrm{d}l \approx G_{\mathrm{s}}$, and $\mathrm{d}C \triangleq C{\cdot}\mathrm{d}l \approx C_{\mathrm{s}}$, $i_{out} = i_{in} + \mathrm{d}i_{in}$ and $v_{out} = v_{in} + \mathrm{d}v_{vn}$, given $\Delta l \approx \mathrm{d}l$. Therefore, the resulting DCTF will be of a higher order, while remaining a proper fractional-rational function of s. As for the CCTF, solutions for its modeling include various approaches that have a solid physics basis but high computational complexity [17, p. 28]. Nevertheless, the adopted CCTF model does not escape the proper fraction form we move to now.

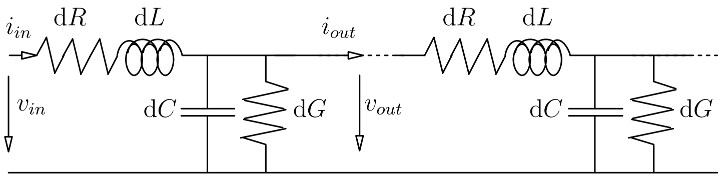


Figure 2. Equivalent lumped $RLCG$-circuit of a 2-wire transmission line

B. General case. In the most general form, the transfer function of a channel to the jth output from the ith input is defined as follows:

$$\mathring{T}_{ji}(s) = \frac{\mathring{c}_m s^m + \mathring{c}_{m-1} s^{m-1} + \cdots + \mathring{c}_1 s + \mathring{c}_0}{s^n + \mathring{a}_{n-1} s^{n-1} + \cdots + \mathring{a}_1 s + \mathring{a}_0} \tag{12}$$

where $m+n+1 < 2n+1$ parameters may be unknown. With (12), a DSL system is thought of as a MIMO—specifically, $[N \times N]$—system, for which the crosstalk is modeled as an input rather than noise and the acronym MIMO stands for *Multiple-Input Multiple-Output* (Fig. 3).

Thus, the ith input $U_i(s)$ causes a direct response z_i on the $(j = i)$th output and creates crosstalk contributions z_j on all other, $(j \neq i)$th outputs, plus an external noise $V_j(s)$ in every jth channel:

$$Y_j(s) = \sum_{i=1}^{N} \mathring{T}_{ji}(s) U_i(s) + V_j(s),\ j = 1, 2, \ldots, N. \tag{13}$$

The fact we are seeking to solve the inverse problem of recovering (12) from (13) dictates the only possible identification scenario (*cf.* Fig. 3): feed only one, namely ith input $U_i(s)$ per single, namely ith identification session, into the MIMO system:

$$Y_j(s) = \mathring{T}_{ji}(s) U_i(s) + V_j(s),\ j = 1, 2, \ldots, N. \tag{14}$$

(As for the uppercase variables notations in (13) and (14), *cf.* Remark 2.) The time of each ith session (14) needs to be spent to determine the ith column $\mathring{T}(s)_{(\cdot,i)} = [\mathring{T}_{ji}(s)]$, $j = 1, 2, \ldots, N$ of matrix $\mathring{T}(s) \triangleq [\mathring{T}_{ji}(s)]$, and the whole scenario will require repeating N sessions: $i = 1, 2, \ldots, N$ as in (14).

4. Problem solution framework. Focusing the research on the class of linear constant-coefficient ODEs to describe the wide range of LTI dynamical

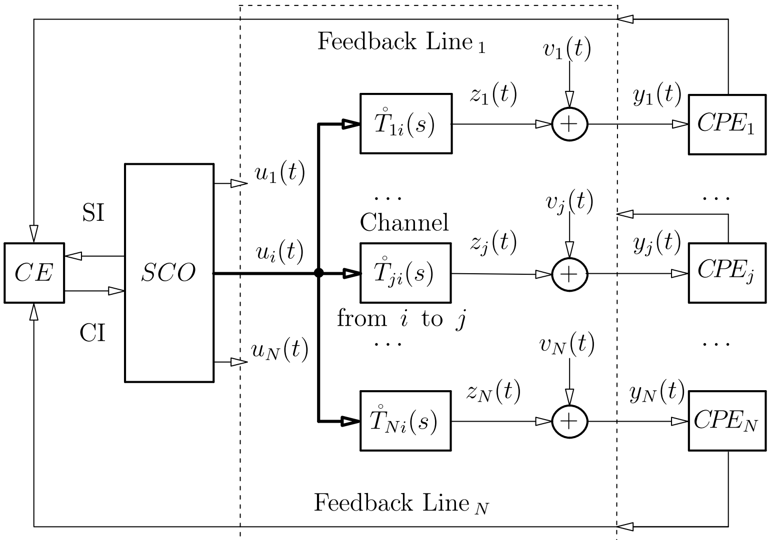


Figure 3. The distributed MIMO channel estimation structure. *Legend: CE* – Channel Estimation; *SCO* – System Central Office; SI – System Information; CI – Channel Information; *CPE* – Customer Premises Equipment; N – the number of customers, $j = 1, 2, \ldots, N$

systems, we first state that the choice of the excitation signal $u_i(t)$ (*cf.* Fig. 3) is extremely important for parameter system identification. Gaussian white-noise random excitations $w(t)$ are very popular among practitioners because they seem to be simple to design. We also stick to this choice, assuming $u_i(t) \equiv w_i(t)$. However, using random-phase multisines for $u_i(t)$ is also possible, given the design of the amplitude spectrum of the multisine is such that the equivalence between the random-phase multisine and the Gaussian random noise concerning the system behavior is guaranteed. Such signals are known as *Riemann-Equivalent Excitation Signals*, REESs [2, p. 44]. Using random input excitations makes the system output under study a stochastic process.

4.1. Cauchy form ODE system. Since there is no uniformity in the structure of matrices for the general Cauchy form and little else can be said about this form without additional knowledge of the particular dynamical system, we assume that the output, i. e. measurement data are generated by a completely observable physical system whose observability index is designated p. Hence, we focus the attention on the SOF among the known three standard system forms [26, pp. 28–32]. The SOF provides a sort of unified approach to TFs of general form (12), not just (9). Besides, using SOF is beneficial to the below solution.

Given (9), using the notation mentioned in Remark 3 yields the following system of equations

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\mathring{a}_0 & -\mathring{a}_1 \end{bmatrix}}_{\mathring{F}} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \mathring{c}_0 \end{bmatrix}}_{\mathring{\Gamma}} w(t) \tag{15}$$

with $w(t)$ as a stationary input voltage $v_1(t)$ (*cf.* Fig. 1). Let $w(t)$ be REES, that is Riemann-equivalent to the Gaussian white-noise excitation with the correlation function $R_{ww}(\tau) = \mathring{Q}\delta(\tau)$ in terms of Dirac's delta function $\delta(\tau)$ with some $\mathring{Q} > 0$,

$[\mathring{Q}] = \mathrm{V}^2\!\cdot\mathrm{s}$ where $\mathring{Q}$ is possibly given. Next, assume that the output voltage $v_2(t) \equiv x_1(t)$ is measured with random error $v(t)$ of Gaussian type with correlation function $R_{vv}(\tau) = \mathring{R}\delta(\tau)$, $\mathring{R} > 0$, $[\mathring{R}] = \mathrm{V}^2\!\cdot\mathrm{s}$, to obtain the measurement data as

$$y(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathring{H}} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + v(t). \tag{16}$$

SOF model (15)+(16) corresponds to *conditions* (i) *and* (ii) of the experiment above mentioned on page 549. Its characteristic polynomial $\mathring{q}(s) \triangleq s^2 + \mathring{a}_1 s + \mathring{a}_0$ has the discriminant $-D < 0$. Besides, $\mathring{T}_{\mathrm{s}}(s) = \mathring{H}\mathring{\Phi}_{\mathrm{s}}(s)\mathring{\Gamma}$ with $\mathring{\Phi}_{\mathrm{s}}(s) = (Is - \mathring{F})^{-1}$, in matrix notation. The inverse Laplace transform of $\mathring{\Phi}_{\mathrm{s}}(s)$ yields the continuous-time state transition matrix

$$\mathring{\phi}(t) = \begin{bmatrix} \phi_{11}(t) & \phi_{12}(t) \\ \phi_{21}(t) & \phi_{22}(t) \end{bmatrix} \tag{17}$$

with its entries

$$\left.\begin{aligned} \phi_{11}(t) &= e^{-\zeta\omega_{\mathrm{n}}t}\left[\cos(t\sqrt{D}) + \chi\sin(t\sqrt{D})\right], \\ \phi_{12}(t) &= e^{-\zeta\omega_{\mathrm{n}}t}\frac{1}{\sqrt{D}}\sin(t\sqrt{D}), \\ \phi_{21}(t) &= -\omega_{\mathrm{n}}^2\phi_{12}(t), \\ \phi_{22}(t) &= e^{-\zeta\omega_{\mathrm{n}}t}\left[\cos(t\sqrt{D}) - \chi\sin(t\sqrt{D})\right]. \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Given (12), it leads to the general SOF

$$\left.\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} &= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -\mathring{a}_0 & -\mathring{a}_1 & \cdots & -\mathring{a}_{n-1} \end{bmatrix}}_{\mathring{F}_{ji}} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathring{b}_1 \\ \mathring{b}_2 \\ \vdots \\ \mathring{b}_{n-1} \\ \mathring{b}_n \end{bmatrix}}_{\mathring{\Gamma}_{ji}} w(t), \\ y(t) &= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathring{H}} x(t) + v(t) \end{aligned}\right\}$$

instead of (15)+(16), where $\mathring{b}_1, \mathring{b}_2, \ldots, \mathring{b}_n$ satisfy the following equation

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \mathring{c}_m \\ \vdots \\ \mathring{c}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \mathring{a}_{n-1} & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \mathring{a}_{n-2} & \mathring{a}_{n-1} & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathring{a}_2 & \mathring{a}_3 & \cdots & \mathring{a}_{n-1} & 1 & 0 \\ \mathring{a}_1 & \mathring{a}_2 & \cdots & \mathring{a}_{n-2} & \mathring{a}_{n-1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathring{b}_1 \\ \mathring{b}_2 \\ \mathring{b}_3 \\ \vdots \\ \mathring{b}_{n-1} \\ \mathring{b}_n \end{bmatrix}$$

and $\mathring{F}_{ji}$ is the Frobenius companion matrix for the characteristic polynomial $\mathring{q}(s) \triangleq s^n + \mathring{a}_{n-1}s^{n-1} + \cdots + \mathring{a}_1 s + \mathring{a}_0$ of (12). Acting as before (17) yields the check relation $\mathring{T}_{ji}(s) = \mathring{H}\mathring{\Phi}_{ji}(s)\mathring{\Gamma}_{ji}$, in which $\mathring{\Phi}_{ji}(s) = (Is - \mathring{F}_{ji})^{-1}$ serves to find $\mathring{\phi}_{ji}(t)$ as the inverse Laplace transform of $\mathring{\Phi}_{ji}(s)$, quite similar to (17). Check: the $\mathring{T}_{ji}(s)$ thus found must coincide with (12).

REMARK 4. *What will be done in the next Subsec. 4.2. and Subsec. 4.3 based on the preceeding Subsec. 4.1 for the illustrative example given in* (9) *can be repeated similarly for the general case given by* (12)*, furnishing the results with the subscript* $_{ji}$. *We omit these details and* $_{ji}$ *subscripts due to the obviousness of the technique. We also omit subscript* $_{\mathrm{s}}$ *as is done at the transition to* (17).

4.2. Discrete-time model (DTM). Belonging of $\{\cdot\}$ to the discrete-time model is indicated below by the subscript $_{\mathrm{d}}$ as in $\{\cdot\}_{\mathrm{d}}$. Before making the change, it is necessary to reasonably choose the sampling interval T. Obviously, the sampling rate $1/T$ must be much higher than the natural frequency $f_{\mathrm{n}} \triangleq 1/T_{\mathrm{n}} = \omega_{\mathrm{n}}/(2\pi)$ of the system to be able to track the system behavior. This requirement means $Tf_{\mathrm{n}} \ll 1$. From the other side, ζ^2, *cf.* (11), must remain less than one for the consideration to stand. As a result, requirement $T \ll T_{\mathrm{n}}$ in the transition to the discrete-time model means that parameter

$$\boxed{d \triangleq e^{-\zeta\omega_{\mathrm{n}}T}} \tag{19}$$

appearing in (18) at $t = T$ must lie within the sufficiently wide boundaries of inequality $e^{-2\pi} \ll d < 1$, that is be less than one, but possible insignificantly less.

Given (9) and its continuous-time model (15)+(16), the DTM

$$\left.\begin{aligned} x(t_{i+1}) &= \mathring{\Phi}_{\mathrm{d}} x(t_i) + w_{\mathrm{d}}(t_i), \quad \mathring{\Phi}_{\mathrm{d}} \triangleq \mathring{\phi}(T), \\ y(t_i) &= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathring{H}} x(t_i) + v_{\mathrm{d}}(t_i) \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

yields by the standard method [26]. Here it is checked that (20) is observable with the observability index $p = n = 2$ and has physical dimentionalities $[x_1(t_i)] = \mathrm{V}$, $[x_2(t_i)] = \mathrm{V}\cdot\mathrm{s}^{-1}$. The discrete white-noise $w_{\mathrm{d}}(t_i)$ in (20) is a zero-mean process

$$w_{\mathrm{d}}(t_i) \triangleq \int_{t_i}^{t_{i+1}} \mathring{\phi}(t_{i+1} - \tau)\mathring{\Gamma}\mathrm{d}\beta(\tau)$$

definded via the Brownian motion $\beta(t)$ related formally with $w(t)$ in its differential $d\beta(\tau) \triangleq w(\tau)d\tau$. The covariance $[2 \times 2]$-matrix of $w_{\mathrm{d}}(t_i)$ is [26]

$$\mathring{Q}_{\mathrm{d}} \triangleq \int_{t_i}^{t_{i+1}} \mathring{\phi}(t_{i+1} - \tau)\mathring{\Gamma}\mathring{Q}\mathring{\Gamma}^{\mathrm{T}}\mathring{\phi}^{\mathrm{T}}(t_{i+1} - \tau)\mathrm{d}\tau. \tag{21}$$

For the *illustrative example* (*cf.* 550), four entries of (21) are calculated directly using (10) and (11); the result is in

$$\left.\begin{aligned} q_{11} &= \frac{\mathring{c}_0^2\mathring{Q}}{4\zeta\omega_{\mathrm{n}}^3}\big[1-\big(d^2+2\chi\sqrt{D}\phi_{11}(T)\phi_{12}(T)\big)\big], \\ q_{12} &= \frac{\mathring{c}_0^2\mathring{Q}}{2}\phi_{12}^2(T) = q_{21}, \\ q_{22} &= \frac{\mathring{c}_0^2\mathring{Q}}{4\zeta\omega_{\mathrm{n}}}\big[1-\big(d^2-2\chi\sqrt{D}\phi_{12}(T)\phi_{22}(T)\big)\big]. \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

REMARK 5. *Calculations like (22) are technically trivial, so they are omitted here. They may seem complicated if done manually. Manual work can be avoided by using* `Maple` *to obtain the result quickly, easily and accurately. Additionally, although dimensionality analysis does not guarantee the correctness of result, it can be an auxiliary tool as in this case:* $[q_{11}] = \mathrm{V}^2$, $[q_{12}] = \mathrm{V}^2\cdot\mathrm{s}^{-1}$, $[q_{22}] = \mathrm{V}^2\cdot\mathrm{s}^{-2}$.

To finalize formulating DTM, it is worth going from $w_{\mathrm{d}}(t_i)$ to a dimensionless vector quantity $\xi_{\mathrm{d}}(t_i)$ for which $w_{\mathrm{d}}(t_i) \triangleq \mathring{L}_{\mathrm{d}}\xi_{\mathrm{d}}(t_i)$ with a matrix $\mathring{L}_{\mathrm{d}}$ such that $\mathring{Q}_{\mathrm{d}} = \mathring{L}_{\mathrm{d}}\mathring{L}_{\mathrm{d}}^{\mathrm{T}}$ by the lower triangular Cholesky decomposition [27, p. 40]. From (22),

$$\begin{aligned} l_{11} &= \sqrt{q_{11}}, \quad [l_{11}] = \mathrm{V}, \\ l_{21} &= q_{12}/l_{11}, \quad [l_{21}] = \mathrm{V}\cdot\mathrm{s}^{-1}, \\ l_{22} &= \sqrt{q_{22}-{l_{21}}^2}, \quad [l_{21}] = \mathrm{V}\cdot\mathrm{s}^{-1} \end{aligned} \tag{23}$$

being three non-zero real-valued entries of $[2\times 2]$-matrix $\mathring{L}_{\mathrm{d}}$. The model (20) now takes the final form

$$\left.\begin{aligned} x(t_{i+1}) &= \mathring{\Phi}_{\mathrm{d}}x(t_i) + \mathring{L}_{\mathrm{d}}\xi_{\mathrm{d}}(t_i), \quad \mathring{\Phi}_{\mathrm{d}} \triangleq \mathring{\phi}(T), \\ y(t_i) &= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathring{H}} x(t_i) + v_{\mathrm{d}}(t_i). \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

As a result, the discrete white sequence $\xi_{\mathrm{d}}(t_i)$ in (24) has the unit covariance matrix, and the measurement discrete white sequence $v_{\mathrm{d}}(t_i)$ may have some unknown covariance $\mathring{R}_{\mathrm{d}} > 0$. Vector $\mathring{\theta} \triangleq \big[\mathring{\theta}_1 \triangleq \mathring{c}_0 \mid \mathring{\theta}_2 \triangleq \mathring{a}_0 \mid \mathring{\theta}_3 \triangleq \mathring{a}_1 \mid \mathring{\theta}_4 \triangleq \mathring{Q} \mid \mathring{\theta}_5 \triangleq \mathring{R}_{\mathrm{d}}\big]^{\mathrm{T}}$. Vector $\hat{\theta} \triangleq \big[\hat{\theta}_1 \triangleq \hat{c}_0 \mid \hat{\theta}_2 \triangleq \hat{a}_0 \mid \hat{\theta}_3 \triangleq \hat{a}_1 \mid \hat{\theta}_4 \triangleq \hat{Q} \mid \hat{\theta}_5 \triangleq \hat{R}_{\mathrm{d}}\big]^{\mathrm{T}}$ will be the estimator for $\mathring{\theta}$. The explicit dependence of the in (24) matrices on $\mathring{\theta}$ can be easily traced from the above formulas.

4.3. Standard Observable Discrete-time Model (SODM). Turning back to the general solution of the problem, case **B**, let us introduce

$$\mathring{M} \triangleq \big[\mathring{H}^{\mathrm{T}} \mid (\mathring{H}\mathring{\Phi}_{\mathrm{d}})^{\mathrm{T}} \mid \cdots \mid (\mathring{H}\mathring{\Phi}_{\mathrm{d}}^{n-1})^{\mathrm{T}}\big]^{\mathrm{T}},$$

the observability matrix for a linear n-dimensional one-way derivable DTM. It is invertible as the observability index p is supposed to equal n. Performing a nonsingular basis transform in the state space by relation $x^\star \triangleq \mathring{M}x$, we obtain the *Standard Observable Discrete-time Model*, SODM, with $\mathring{\Phi}_\star \triangleq \mathring{M}\mathring{\Phi}_{\mathrm{d}}\mathring{M}^{-1}$, $\mathring{H}_\star \triangleq \mathring{H}\mathring{M}^{-1}$, and $\mathring{L}_\star \triangleq \mathring{M}\mathring{L}_\mathrm{d}$. Let us note that we use $\{\star\}$ as a superscript or subscript for any magnitude $\{\cdot\}$ belonging to the SODM, keeping in mind that the transfer function does not change when the basis changes nonsingularly. For this general case, notice Remark 4. For the specific case of (20), (24), we obtain the following SODM:

$$\left.\begin{aligned} x^\star(t_{i+1}) &= \mathring{\Phi}_\star x^\star(t_i) + \mathring{L}_\star \xi_\mathrm{d}(t_i),\\ y(t_i) &= \mathring{H}_\star x^\star(t_i) + v_\mathrm{d}(t_i),\\ \mathring{\Phi}_\star &\triangleq \mathring{M}\mathring{\Phi}_\mathrm{d}\mathring{M}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1\\ d^2 & 2d\cos(T\sqrt{D}) \end{bmatrix},\\ \mathring{H}_\star &\triangleq \mathring{H}\mathring{M}^{-1} = [\,1 \quad 0\,],\\ \mathring{L}_\star &\triangleq \mathring{M}\mathring{L}_\mathrm{d} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0\\ l_{11}\phi_{11} + l_{21}\phi_{12} & l_{22}\phi_{12} \end{bmatrix},\\ \phi_{11} \triangleq \phi_{11}(T),\ &\phi_{12} \triangleq \phi_{12}(T),\ \phi_{22} \triangleq \phi_{22}(T). \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

Every SODM thus obtained has matrix $\mathring{\Phi}_\star$ in the form of the Frobenius companion matrix, and matrix $\mathring{H}_\star$ with its first element equal to 1 and the rest to zeros.

4.4. OKF as the Target Model (OKF-TM). Using the above technique culminated in (25) and taking into account Remark 4, one obtains the following unique *Optimal Kalman Filter–Target Model*, OKF-TM, in the SODM basis for the general case arising from (12):

$$\left.\begin{aligned} \hat{x}^\star(t_{i+1}|t_i) &= \mathring{\Phi}_\star \hat{x}^\star(t_i|t_i)\,,\\ \hat{x}^\star(t_i|t_i) &= \hat{x}^\star(t_i|t_{i-1}) + \mathring{K}_\star \nu(t_i|t_{i-1})\,, \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

together with

$$\left.\begin{aligned} y(t_i) &= \mathring{H}_\star \hat{x}^\star(t_i|t_{i-1}) + \nu(t_i|t_{i-1}),\\ \nu(t_i|t_{i-1}) &\triangleq y(t_i) - \mathring{H}_\star \hat{x}^\star(t_i|t_{i-1}) \text{ is defined as}\\ &\qquad\qquad \textit{Innovation Sequence}, \text{IS},\\ \mathring{K}_\star &= \mathring{P}_\star^- \mathring{H}_\star^\mathrm{T}\big(\mathring{H}_\star \mathring{P}_\star^- \mathring{H}_\star^\mathrm{T} + \mathring{R}_\mathrm{d}\big)^{-1},\\ \mathring{P}_\star^- &= \mathring{\Phi}_\star\big[\mathring{P}_\star^- - \mathring{K}_\star \mathring{H}_\star \mathring{P}_\star^-\big]\mathring{\Phi}_\star^\mathrm{T} + \mathring{L}_\star \mathring{L}_\star^\mathrm{T}. \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

We aim for a parametric identification of the steady-state OKF-TM (26)+(27). In this filter, $\nu_{t|t-1}$ is a white-noise Gaussian sequence (WGS), and the last two equations in (27) form a *Discrete-time Algebraic Riccati Equation*, DARE. Note the IS behaves like an WGS because $\mathring{\theta}$ in (26)+(27) is assumed to be a true, albeit unknown, real parameter vector of some dimension q: $\mathring{\theta} \in \mathbb{R}^q$.

Thus, algorithm (26)+(27) is a set of steady-state Kalman filter equations optimal for the true parameter $\mathring{\theta}$. It is written under the unrealized assumption that $\mathring{\theta}$ is known and that steady-state operation of this algorithm has been achieved by a theoretically assumed numerically stable DARE solution.

Remark 6. *The preceding contains the correct characterization of* $\nu(t_i|t_{i-1})$ *provided that the mathematical model on which the filter* (26)+(27) *is based accurately represents the real behavior of the system.*

Thus, we can imagine—and consider this representation fair reasonable and therefore bearable—that the observed output $y(t_i)$ provided in fact by the real system is as if were generated, very conventionally, by the target model, that is, by the optimal Kalman filter, as presended in the first line of (27).

4.5. Concurrent Candidate Models (CCM). Since $\mathring{\theta}$ is unknown, one can only use its estimated value $\hat{\theta}$, which is located in some Θ space. Where the object of interest exists with no specific constraints, the real-valued space $\Theta \equiv \mathbb{R}^q$ is formed by all possible values $\hat{\theta}[j]$ of the estimator vector $\hat{\theta}$. Here and below j denotes the order number of value $\hat{\theta}$ in some scanning trajectory over the space Θ: $\hat{\theta}[j] \in \Theta$, $j = 0, 1, 2, \ldots, J_{\text{total}}$, i.e. over an imaginary set of *Concurrent Candidate Models*, CCM. The CCM set plays the role of Machine Learning Models if one prefers to use Machine Learning terminology. When implementing a numerical iterative filter optimization method capable of sequentially converging to the OKF-TM (26)+(27), j has the meaning of the method step number, since it is common to test suboptimal models sequentially, their total number J_{total}, even if we admit, quite theoretically, the possibility of testing them in parallel (i.e. synchronously). It is important that in both variants, sequential or parallel, of the target model (26)+(27) identification, it is possible and even expedient to base the work on the same observational data $y(t_i)$ supplied (conditionally as said in Remark 6) by the target model (26)+(27), using processing and analyzing the responses to these data of the suboptimal models under test as candidates for the role of the target, that is, optimal, model.

Assuming that $\hat{\theta}$ has taken a particular $\hat{\theta}[j]$ value in Θ, imagine that instead of optimal Kalman filter (26)+(27), we have managed to implement a suboptimal steady-state Kalman filter we refer to as jth *Standard Observable Kalman Filter*, the jth SOKF, or SOKF$(\hat{\theta}[j])$, for short. The latter is the jth candidate model

$$\left.\begin{aligned} g_j^\star(t_{i+1}|t_i) &= \hat{\Phi}_{\star_j} g_j^\star(t_i|t_i)\,,\\ g_j^\star(t_i|t_i) &= g_j^\star(t_i|t_{i-1}) + \hat{K}_{\star_j}\eta_j(t_i|t_{i-1})\,,\\ y(t_i) &= \mathring{H}_\star g_j^\star(t_i|t_{i-1}) + \eta_j(t_i|t_{i-1}),\\ \eta_j(t_i|t_{i-1}) &\triangleq y(t_i) - \mathring{H}_\star g_j^\star(t_i|t_{i-1}) \text{ is defined as}\\ &\quad\ \text{the } j\text{th } \textit{Residual Sequence}, \text{RS}_j,\\ \hat{K}_{\star_j} &= \hat{P}^-_{\star_j}\mathring{H}_\star^{\mathrm{T}}\big(\mathring{H}_\star\hat{P}^-_{\star_j}\mathring{H}_\star^{\mathrm{T}} + \hat{R}_{\mathrm{d}j}\big)^{-1},\\ \hat{P}^-_{\star_j} &= \hat{\Phi}_{\star_j}\big[\hat{P}^-_{\star_j} - \hat{K}_{\star_j}\mathring{H}_\star\hat{P}^-_{\star_j}\big]\hat{\Phi}^{\mathrm{T}}_{\star_j} + \hat{L}_{\star_j}\hat{L}^{\mathrm{T}}_{\star_j} \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

with $\hat{\Phi}_{\star_j} \triangleq \hat{\Phi}_\star(\hat{\theta}[j])$, $\hat{R}_{\mathrm{d}j} \triangleq \hat{R}_{\mathrm{d}}(\hat{\theta}[j])$, and $\hat{L}_{\star_j} \triangleq \hat{L}_\star(\hat{\theta}[j])$. The model is intended to participate in testing to come as close as possible to the optimal filter (26)+(27), provided that the target model is also in the CCM set.

However, what does it mean: '*we have managed to implement* (28)?' In the real case scenario, this means that when trying to test candidate models sequentially, i.e. SOKF$(\hat{\theta}[j])$ after SOKF$(\hat{\theta}[j-1])$, SOKF$(\hat{\theta}[j+1])$ after SOKF$(\hat{\theta}[j])$, and so on, we must solve DARE, i.e. the last two equations in (28) at each such step. Doing this job iteratively for each SOKF$(\hat{\theta}[j])$, we introduce the local notation (i) for the iteration number, $(i) = (0), (1), \ldots, (I_{\text{DARE}})$, where I_{DARE} denotes the final iteration number, and compute as follows, labeling the computed quantities with j:

$$\hat{P}^{-}_{\star_j(0)} = \hat{P}^{-}_{\star_{j-1}(I_{\mathrm{DARE}}+1)} \tag{29}$$

and then

$$\begin{aligned} \hat{K}_{\star_j(i)} &= \hat{P}^{-}_{\star_j(i)} H^{\mathrm{T}}_{\star} \big(\mathring{H}_{\star} \hat{P}^{-}_{\star_j(i)} H^{\mathrm{T}}_{\star} + \hat{R}_{\mathrm{d}j} \big)^{-1}, \\ \hat{P}^{-}_{\star_j(i+1)} &= \hat{\Phi}_{\star_j} \big[\hat{P}^{-}_{\star_j(i)} - \hat{K}_{\star_j(i)} \mathring{H}_{\star} \hat{P}^{-}_{\star_j(i)} \big] \hat{\Phi}^{\mathrm{T}}_{\star_j} + \\ &\qquad \hat{L}_{\star_j} \hat{L}^{\mathrm{T}}_{\star_j}, \quad (i) = (0), (1), \ldots, (I_{\mathrm{DARE}}). \end{aligned} \tag{30}$$

The final value $\hat{K}_{\star_j(I_{\mathrm{DARE}})}$ should be used as $\hat{K}_{\star_j}$ in the second equation of (28), that is, $\hat{K}_{\star_j} := \hat{K}_{\star_j(I_{\mathrm{DARE}})}$, and the final value $\hat{P}^{-}_{\star_j(I_{\mathrm{DARE}}+1)}$ as the starting point $\hat{P}^{-}_{\star_{j+1}(0)} = \hat{P}^{-}_{\star_j(I_{\mathrm{DARE}}+1)}$ by the (29) type but now for the SOKF($\hat{\theta}[j+1]$) at the $(j+1)$th optimization step if any, over the CCM set. 'Real-case scenario' means that these Riccati iterations should be stopped at I_{DARE} when a reasonable convergence criterion is satisfied. It also means that by the time of the final iteration $(i) = (I_{\mathrm{DARE}})$ we assume that the so iterated filter (28) has reached the desired steady-state operation defined by equations (28).

Iterations (30) may and should be performed on an accelerated time scale in the form of known numerically robust algorithms, *e.g.* [28], for each value j, in other words, at each jth step of the numerical approximation to the optimum, that is to the target algorithm (26)+(27). This numerical optimization should be performed by a single AKF scanning sequentially the elements of the theoretically unbounded CCM set.

4.6. Predictors to form the AKF. We supplement the jth candidate model (28) with the predictors and make them operate as follows:

$$\left. \begin{aligned} g^{\star}_j(t_{i+h}|t_i) &\triangleq \hat{\Phi}_{\star_j} g^{\star}_j(t_{i+h-1}|t_i) \\ \hat{y}_j(t_{i+h}|t_i) &\triangleq \mathring{H}_{\star} g^{\star}_j(t_{i+h}|t_i) \end{aligned} \right\} \; h = 1, 2, \ldots, p \tag{31}$$

where p is the total observability index of the system.

Remark 7. *In an n-dimensional system with m outputs, any 'i'th output of m outputs can be assigned a partial observability index p_i. The sum of partial observability indices is always equal to the dimensionality n of the system if only the system has the property of complete observability. The total observability index p of the system is defined as the greatest of the partial indices. The case $p < n$ is possible if only $m > 1$.* In the problem under consideration, $m = 1$, therefore $p = n$ elsewhere in what follows. *Nevertheless, we distinguish between the notations p and n, intending further work to extend the solution to the case where the number m of system outputs exceeds one.* Only then p may occur less than n.

The fact that $\hat{y}_j(t_{i+h}|t_i)$ in (31) and beyond depends on $\hat{\theta}[j]$ can also be denoted by the subscript $_{\hat{\theta}[j]}$, bearing in mind the equivalence of the two possible notations: $\hat{y}_j(t_{i+h}|t_i) \equiv \hat{y}_{\hat{\theta}[j]}(t_{i+h}|t_i),\ h = 1, 2, \ldots, p$. In (32) that follows for the case of (20)+(25) when $p = 2$, the first line comes from (31) while the second equation in (32) comes from the first three lines of the target expressions (26)+(27):

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}\hat{y}_j(t_{i+1}|t_i)\\ \hat{y}_j(t_{i+2}|t_i)\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}\mathring{H}_\star\\ \mathring{H}_\star\hat{\Phi}_{\star_j}\end{bmatrix} g_j^\star(t_{i+1}|t_i),\\ \begin{bmatrix}y(t_{i+1})\\ y(t_{i+2})\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}\mathring{H}_\star\\ \mathring{H}_\star\mathring{\Phi}_\star\end{bmatrix}\hat{x}^\star(t_{i+1}|t_i) + \begin{bmatrix}1 & 0\\ \mathring{H}_\star\mathring{\Phi}_\star\mathring{K}_\star & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\nu(t_{i+1}|t_i)\\ \nu(t_{i+2}|t_{i+1})\end{bmatrix}.\end{aligned} \tag{32}$$

The composite (stackable) vectors opening expressions (32) in the specific case $p = 2$ are to be redefined when turning to the general case. Their definitions follow using notation p for the total observability index:

$$\begin{aligned}\hat{y}_{\hat{\theta}[j]}\left(t_{i+1}^{i+p}|t_i\right) &\triangleq \left[\hat{y}_j(t_{i+1}|t_i)\;\middle|\;\cdots\;\middle|\;\hat{y}_j(t_{i+p}|t_i)\right]^{\mathrm{T}},\\ y\left(t_{i+1}^{i+p}\right) &\triangleq \left[y(t_{i+1})\;\middle|\;\cdots\;\middle|\;y(t_{i+p})\right]^{\mathrm{T}},\\ t_{i+1}^{i+p} &\triangleq (t_{i+1}, t_{i+2}, \dots, t_{i+p}).\end{aligned} \tag{33}$$

For the case of a single-output completely observable linear n-dimensional DTM, we have $p = n$. Thus, we obtain the advantages of changing to the SOF, viz.,

$$\begin{aligned}\left[\mathring{H}_\star \quad (\mathring{H}_\star\hat{\Phi}_{\star_j}) \quad \cdots \quad (\mathring{H}_\star\hat{\Phi}_{\star_j}^{n-1})\right]^{\mathrm{T}} &= I,\\ \left[\mathring{H}_\star \quad (\mathring{H}_\star\mathring{\Phi}_\star) \quad \cdots \quad (\mathring{H}_\star\mathring{\Phi}_\star^{n-1})\right]^{\mathrm{T}} &= I.\end{aligned} \tag{34}$$

Equations (34) are true regardless of j and the non-trivial entries in the Frobenius matrices $\mathring{\Phi}_\star$ as defined in (25) for (26) and $\hat{\Phi}_{\star_j}$ as commented for (28).

4.7. The generalized residual (GR). What follows is the general case of using $p = n$ in the key relations (34) as a result of computing these composite (stackable) vectors:

$$\left.\begin{aligned}\hat{y}_{\hat{\theta}[j]}\left(t_{i+1}^{i+p}|t_i\right) &= I\cdot g_j^\star(t_{i+1}|t_i),\\ y\left(t_{i+1}^{i+p}\right) &= I\cdot\hat{x}^\star(t_{i+1}|t_i) +\\ &\underbrace{\begin{bmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ \mathring{H}_\star\mathring{\Phi}_\star\mathring{K}_\star & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \mathring{H}_\star\mathring{\Phi}_\star^{p-1}\mathring{K}_\star & \mathring{H}_\star\mathring{\Phi}_\star^{p-2}\mathring{K}_\star & \cdots & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\nu(t_{i+1}|t_i)\\ \nu(t_{i+2}|t_{i+1})\\ \vdots\\ \nu(t_{i+p}|t_{i+p-1})\end{bmatrix}}_{\triangleq\,\delta\left[\nu_{(t_{i+1}|t_i)}^{(t_{i+p}|t_{i+p-1})}\right](\mathring{\theta})}.\end{aligned}\right\} \tag{35}$$

Expressions (35), obtained at intervals equal to the system's observability index p, show that the discrepancy between the system outputs $y\left(t_{i+1}^{i+p}\right)$ and the corresponding predicted data $\hat{y}_{\hat{\theta}[j]}\left(t_{i+1}^{i+p}|t_i\right)$ both expressed in SODM terms, contain a valuable but explicitly unavailable mismatch between the states $\hat{x}^\star(t_{i+1}|t_i)$ of the optimal filter (26)+(27), which is latently present in the discretely observed system output in response to the learning excitation $w(t)$, and $g_j^\star(t_{i+1}|t_i)$ being computed at the jth iteration of SOKF($\hat{\theta}[j]$) (28)+(31).

Remark 8. *The mismatch of the optimal filter* (26)+(27) *compared to the suboptimal filter* (28)+(31) *is the difference between the object state estimates given by the optimal and suboptimal filters.*

Naming the difference between the second and first lines in (33), or equally in (35), the *Generalized Residual*, GR, calculated to be the $(n \times 1)$ vector process

$$\text{GR:} \quad \varepsilon^{\star}_{\hat{\theta}[j]}\left(t_{i+1}^{i+p}|t_i\right) \triangleq y\left(t_{i+1}^{i+p}\right) - \hat{y}_{\hat{\theta}[j]}\left(t_{i+1}^{i+p}|t_i\right) \in \mathbb{R}^n \tag{36}$$

and introducing the notion of adaptive filter state estimation error, or better to say, the concept of *Adaptive vs. Optimal Filter State Estimation Mismatch*,

$$\text{AOFSEM:} \quad e^{\star}_{\hat{\theta}[j]}(t_{i+1}|t_i) \triangleq \hat{x}^{\star}(t_{i+1}|t_i) - g^{\star}_j(t_{i+1}|t_i) \in \mathbb{R}^n \tag{37}$$

yields the key result:

Theorem 1. *Let* GR *be calculated as* (36) *and* AOFSEM, *which does not have a computer-manipulable representation, defined as* (37). *Based on the fact that the* Direct Performance Index

$$DPI \triangleq \mathcal{J}^{DPI}_{t_{i+1}}(\hat{\theta}) \triangleq \mathbf{E}\left\{\left\|e^{\star}_{\hat{\theta}[j]}(t_{i+1}|t_i)\right\|^2\right\} \in \mathbb{R}^1, \tag{38}$$

or in other words, Expected Direct Cost Function, *EDCF, is not explicitly available to optimize the suboptimal filter* (28)+(31), *we introduce the* Indirect Performance Index

$$IPI \triangleq \mathcal{J}^{IPI}_{t_{i+p}}(\hat{\theta}) \triangleq \mathbf{E}\left\{\left\|\varepsilon^{\star}_{\hat{\theta}[j]}\left(t_{i+1}^{i+p}|t_i\right)\right\|^2\right\} \in \mathbb{R}^1, \tag{39}$$

or in formal words, the Expected Indirect Cost Function, *EICF. Then minimizing the IPI* (39) *by any numerical optimization method in $\hat{\theta} \equiv \hat{\theta}[j] \in \Theta$ at each discrete time t_{i+p} is equivalent to minimizing the DPI* (38) *in $\hat{\theta} \equiv \hat{\theta}[j] \in \Theta$ at time t_{i+1}:*

$$\boxed{\left\{\min_{\hat{\theta}} \mathcal{J}^{IPI}_{t_{i+p}}(\hat{\theta})\right\} \iff \left\{\min_{\hat{\theta}} \mathcal{J}^{DPI}_{t_{i+1}}(\hat{\theta}) = 0\right\}.} \tag{40}$$

Proof. Given definitions (36) and (37), relations (35) show that

$$\varepsilon^{\star}_{\hat{\theta}[j]}\left(t_{i+1}^{i+p}|t_i\right) = e^{\star}_{\hat{\theta}[j]}(t_{i+1}|t_i) + \delta\left[\nu^{(t_{i+p}|t_{i+p-1})}_{(t_{i+1}|t_i)}\right](\mathring{\theta})$$

with $\delta\left[\nu^{(t_{i+p}|t_{i+p-1})}_{(t_{i+1}|t_i)}\right](\mathring{\theta})$ defined in (35) being, first, independent of the estimated value $\hat{\theta} \equiv \hat{\theta}[j] \in \Theta$ and, second, uncorrelated with error $e^{\star}_{\hat{\theta}[j]}(t_{i+1}|t_i)$ (37) since the stackable vector $\left[\nu^{(t_{i+p}|t_{i+p-1})}_{(t_{i+1}|t_i)}\right]$ formed by the white-noise IS in (26)+(27) is separated by one sample time interval T from all preceding IS values that determine error $e^{\star}_{\hat{\theta}[j]}(t_{i+1}|t_i)$ (37). It is this circumstance, together with the theoretical fact that IS has the properties of a white-noise sequence, that entails statement $\boxed{IPI = DPI + Const_{\hat{\theta}}}$, where $Const_{\hat{\theta}}$ equals $\mathbf{E}\left\{\left\|\delta\left[\nu^{(t_{i+p}|t_{i+p-1})}_{(t_{i+1}|t_i)}\right](\mathring{\theta})\right\|^2\right\}$, a value independent of $\hat{\theta} \equiv \hat{\theta}[j] \in \Theta$, which definitively proves statement (40). It is also easy to verify that

$$\hat{y}_{\hat{\theta}[j]}\big(t_{i+1}^{i+p}|t_i\big) = g_j^\star(t_{i+1}|t_i) \tag{41}$$

by virtue of the predictors (31) *and first line in* (34). □

REMARK 9. *The data* $y\big(t_{i+1}^{i+p}\big)$ *defined in* (33) *and used in* (36) *does not depend on* $\hat{\theta}[j]$, *so only these measurement data can be collected and stored in computer memory* before *running the method's algorithm aimed at analyzing any* SOKF$(\hat{\theta}[j])$ *in terms of its state* (behavior) *closeness to that of the target optimal filter and ability of further diminishing the mean square discrepancy between these states.*

5. Method implementation challenges. An attempt to implement the given solution with its advantages poses several challenges concerning the organization of computation time, calculation sequence, and numerical stability. Let us briefly discuss these challenges.

5.1. Computation time organization. As noted above, it is possible and even expedient to calculate parameter estimates in the accelerated off-line mode, that is, after the accumulation of measurement data in a database. We come to the contents of the database having defined the function to be minimized as follows.

By shifting IPI (39) back by p time points, we determine the *Expected Indirect Objective Function*, EIOF,

$$f(\hat{\theta}) \triangleq \mathbf{E}\left\{\left\|\varepsilon^\star_{\hat{\theta}[j]}(t^i_{i-p+1}|t_{i-p})\right\|^2\right\} \tag{42}$$

to be minimized in $\hat{\theta} \in \mathbb{R}^q$. For practical work, we have to turn to the *Averaged Indirect Objective Function*, AIOF (43)

$$\overline{IPI} \triangleq \mathcal{J}^{\overline{IPI}}_{t_i \equiv t_i^c}(\hat{\theta}[j]) \triangleq \frac{1}{M+1}\sum_{k=0}^{M}\left\|\varepsilon^{\star(k)}_{\hat{\theta}[j]}(t^i_{i-p+1}|t_{i-p})\right\|^2 \triangleq f_M(\hat{\theta} = \hat{\theta}[j]) \tag{43}$$

considered as a real-valued function $f_M(\hat{\theta} = \hat{\theta}[j])$ to be minimized in parameter $\hat{\theta} \in \mathbb{R}^q$ instead of (42), the latter being the shifted back EICF (39).

REMARK 10. *The use of the upper index* $^{(k)}$, $k = \overline{0, M} \triangleq 0, 1, \ldots, M$, *from* (43) *on as the sample number is especially justified when averaging* $M+1$ *sample paths of the process, if necessary. Otherwise, it is sufficient to let* $M = 0$ *and so release of using* $^{(k)}$. M *may be as large as desired positive integer number for better averaging. We relate* t_i^c, *the time the computer starts up to process the data, to the real time* t_i *by which the data is ready.*

As seen from (43), each (k)th $\varepsilon^{\star(k)}_{\hat{\theta}[j]}\big(t^i_{i-p+1}|t_{i-p}\big)$-path must result from a one-to-one time-mapping—no more than in the algorithmic computations computer-time formal representation—of interval $t^i_{i-p+1}|t_{i-p}$ to the real-time (k)th segment

$$\left.\begin{aligned} & t^{i(k)}_{i-p+1} \triangleq \{t_{i-(k+1)p+1}, t_{i-(k+1)p+2}, \ldots, t_{i-(k+1)p+p}\} \triangleq t^{i-kp}_{i-(k+1)p+1}\,, \\ & \qquad k = 0, 1, \ldots, M \end{aligned}\right\} \tag{44}$$

of a set of points. We imagine an entire record $(M+1)p$-length of all data

$$y(t^i_{i-(M+1)p+1}) \triangleq \{y(t_{i-(M+1)p+1}), y(t_{i-(M+1)p+2}), \cdots, y(t_{i-1}), y(t_i)\}$$

in the *Measurement Data Base*, MDB, as composed of $(M+1)$ portions (45)

$$y^{(k)}\big(t^i_{i-p+1}\big) \triangleq y\big(t^{i-kp}_{i-(k+1)p+1}\big)\,, \quad k = 0, 1, \ldots, M \tag{45}$$

obtained in real time but referenced to the computer-time stackable p-vectors

$$\left.\begin{array}{l} y^{(k)}\big(t^i_{i-p+1}\big) \triangleq \big[y^{(k)}\,(t_{i-p+1}) \mid y^{(k)}\,(t_{i-p+2}) \mid \cdots \mid y^{(k)}(t_i)\big]^{\mathrm{T}}, \\ \qquad\qquad k = 0, 1, \ldots, M\,. \end{array}\right\} \tag{46}$$

Remark 11. *The idea of notation (46) explained as regards the (k)th sample path $\varepsilon^{\star(k)}_{\hat\theta[j]}(t^i_{i-p+1}|t_{i-p})$ notation by relating the $t^i_{i-p+1}|t_{i-p}$ interval—for the algorithmic computations in computer-time—to the real-time segment (44) should be clear below when applied to other quantities as well. One can always see how real-time data, such as (45), relates to the same data, such as (46), when the latter is stored in the MDB for further computer processing. Additionally, the upper index $^{(k)}$ indicates that the (k)th sample data is considered as being in the MDB.*

Given (35), (36), and (37), let us write down all (k)-sampled time-shifted values

$$\begin{gathered} \varepsilon^{\star(k)}_{\hat\theta[j]}\big(t^i_{i-p+1}|t_{i-p}\big) \triangleq y^{(k)}\big(t^i_{i-p+1}\big) - \hat y^{(k)}_{\hat\theta[j]}\big(t^i_{i-p+1}|t_{i-p}\big) \\ k = 0, 1, \ldots, M \end{gathered} \tag{47}$$

of the GR, (36), stored in the MDB to compute $f_M(\hat\theta)$ and, respectively, all

$$\begin{gathered} e^{\star(k)}_{\hat\theta[j]}(t_{i-p+1}|t_{i-p}) \triangleq \hat x^{\star(k)}(t_{i-p+1}|t_{i-p}) - g^{\star(k)}_j(t_{i-p+1}|t_{i-p}) \\ k = 0, 1, \ldots, M \end{gathered} \tag{48}$$

AOFSEM, (37), to go from (43) to optimization algorithms.

According to Theorem 1, the (k)th sample value (47) of the random vector (36) varies, if we consider it in the *Mean Square*, MS, sense, by $Const_{\hat\theta}$ remaining constant during the numerical scanning—does not matter sequentially or in parallel—of the parameter space Θ, from the (k)th sample value (48) of the p-points delayed random discrepancy (37) between $(\boldsymbol{A})$ state $\hat x^{\star(k)}(t_{i-p+1}|t_{i-p})$ of the target optimal filter (26)+(27) and $(\boldsymbol{B})$ state $g^{\star(k)}_j(t_{i-p+1}|t_{i-p})$ of the suboptimal filter (28), that is from the error committed by $(\boldsymbol{B})$ if used as the jth estimator of $(\boldsymbol{A})$ based on the (k)th sample data (45)≡(46). The theorem also proves equation (41), which we use hereafter as the p-point delay for any (k)th sampling path thus obtaining (49)

$$\hat y_{\hat\theta[j]}\big(t^i_{i-p+1}|t_{i-p}\big) = g^\star_j(t_{i-p+1}|t_{i-p}). \tag{49}$$

Remark 12. *The delay by $(k+1)p$ points of discrete time from the current moment $t_i \equiv t^c_i$ in (45), and in (47), (48) as well, if we relate (47), (48) to the* *real time, is irrelevant because of the stationarity assumption of the system under study and the MS sense used.*

Note in passing that, by virtue of Remark 7, *vectors in the* (k)*th sample defined by expressions* (45), (47), *and* (48) *have dimension* n, *due to equality* $p = n$ *in the situation of scalar system output,* $m = 1$.

Assuming that the $\hat{\theta}$ parameter has no explicit constraints, the unconstrained optimization is applicable. The most straightforward way of doing this gives rise to what is known as Newton's method (50) [29, pp. 44–79]:

$$\left.\begin{array}{l}\text{(a) solve } G(\hat{\theta}[j])\,\Delta = -\nabla_{\hat{\theta}} f_M\big(\hat{\theta} = \hat{\theta}[j]\big) \text{ for vector } \Delta\,;\\ \text{(b) set } \hat{\theta}[j+1] = \hat{\theta}[j] + \Delta\big(\hat{\theta} = \hat{\theta}[j]\big) \text{ with } \Delta\big(\hat{\theta} = \hat{\theta}[j]\big) \triangleq \Delta\,.\end{array}\right\} \tag{50}$$

Hereafter, *gradient operator* is used as

$$\nabla_{\hat{\theta}}(\diamond) \triangleq \left[\frac{\partial}{\partial\hat{\theta}_1}(\diamond)\,\Big|\,\cdots\,\Big|\,\frac{\partial}{\partial\hat{\theta}_r}(\diamond)\,\Big|\,\cdots\,\Big|\,\frac{\partial}{\partial\hat{\theta}_q}(\diamond)\right]^{\mathrm{T}} \equiv \left[\cdots\frac{\partial}{\partial\hat{\theta}_r}(\diamond)\cdots\right]^{\mathrm{T}}_{r=\overline{1,q}} \tag{51}$$

to be applied to each scalar element of vector or matrix $(\diamond)$; if $(\diamond) = f_M\big(\hat{\theta} = \hat{\theta}[j]\big)$, we have (50) with the *matrix of second partial variables* $G(\hat{\theta}[j])$ known as *Hessian matrix* and defined by $\nabla^2_{\hat{\theta}} f_M^{\mathrm{T}}\big(\hat{\theta} = \hat{\theta}[j]\big) \triangleq \nabla_{\hat{\theta}}\big(\nabla_{\hat{\theta}} f_M\big(\hat{\theta} = \hat{\theta}[j]\big)^{\mathrm{T}}\big)$. When $M = 0$, (50) is treated as a pure stochastic approximation of Newton's method.

The following gradient descent optimization

$$\hat{\theta}[j+1] = \hat{\theta}[j] - \gamma_j \nabla_{\hat{\theta}} f_M\big(\hat{\theta} = \hat{\theta}[j]\big) \tag{52}$$

can be a reasonable alternative to (50) with a lower computational burden. It uses a small enough step size $\gamma_j \in \mathbb{R}_+$ to guarantee $f_M\big(\hat{\theta} = \hat{\theta}[j+1]\big) < f_M\big(\hat{\theta} = \hat{\theta}[j]\big)$ and thereby performs the transition to the next SOKF$(\hat{\theta}[j+1])$, as shown in Fig. 4 and mentioned in Subsec. 4.5 to test candidate models sequentially. In this figure, the arcs directed by arrows from points t_{i-p+1}, t_{i-p+2}, and t_i to t_{i-p} on the horizontal line tell us, *cf.* (31), that all predictors $g_j^{\star(k)}(t_{i-p+h}|t_{i-p})$, their numbers $h = 1, 2, \ldots, p$, involved in obtaining the estimates $\hat{y}^{(k)}_{\hat{\theta}[j]}(t_{i-p+h}|t_{i-p}) = \mathring{H}_\star g_j^{\star(k)}(t_{i-p+h}|t_{i-p})$ are conditioned, *in the probabilistic sense*, on the entire measurement history $y\big(t_{i-p-l}^{i-p}\big) \triangleq \big\{y(t_{i-p-l}), y(t_{i-p-(l-1)}), \ldots, y(t_{i-p-1}), y(t_{i-p})\big\}$, (theoretically, $l \to \infty$) which is incorporated in the predictors and precedes their calculation immediately *after* time t_{i-p}.

Thus, upon a closer look at what the theory requires, we realize that it requires the cost of time intervals (44) depicted in Fig. 4 by boxes as $t_{i-p+1}^{i(k)}(\hat{\theta}[j])$, then $t_{i-p+1}^{i(k)}(\hat{\theta}[j+1])$, and so on, as related to SOKF$(\hat{\theta}[j])$, then SOKF$(\hat{\theta}[j+1])$, and so on during the AKF step-by-step accelerated optimization.

5.2. Computation scheme and numerical robustness challenge. Let us perform the necessary calculations for the above algorithm (52).

Using (49) to obtain

$$\nabla_{\hat{\theta}}\left(\big[\varepsilon^{\star(k)}_{\hat{\theta}[j]}(t_{i-p+1}^{i}|t_{i-p})\big]^{\mathrm{T}}\right) = -\nabla_{\hat{\theta}}\left(\big[g_j^{\star(k)}(t_{i-p+1}|t_{i-p})\big]^{\mathrm{T}}\right) \tag{53}$$

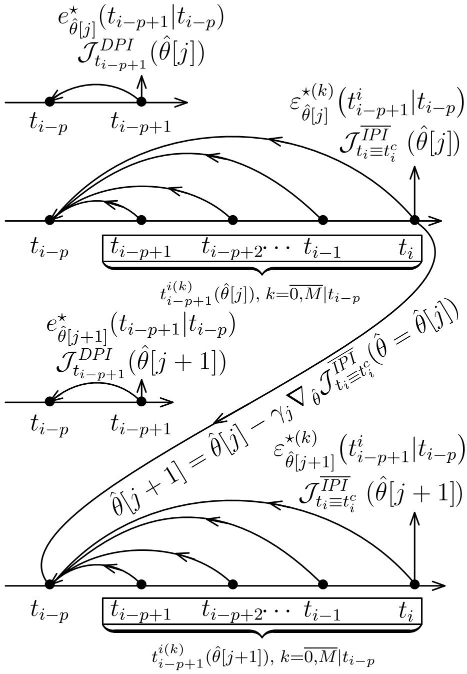


Figure 4. A timing diagram for minimizing the average (43) of the indirect performance index (39) by a gradient sequential method (52) using the AIOF as defined in (43)

and further (43) as ($\diamond$) in (51) yields (54), the *Objective Function Gradient*, OFG:

$$\left.\begin{aligned}
&\nabla_{\hat\theta} f_M\big(\hat\theta = \hat\theta[j]\big)\\
&\qquad = \frac{2}{M+1}\sum_{k=0}^{M} \nabla_{\hat\theta}\left(\left[\varepsilon^{\star(k)}_{\hat\theta[j]}(t^i_{i-p+1}|t_{i-p})\right]^{\mathrm T}\right) \times \left[\varepsilon^{\star(k)}_{\hat\theta[j]}(t^i_{i-p+1}|t_{i-p})\right]\\
&\qquad = \frac{-2}{M+1}\sum_{k=0}^{M} \nabla_{\hat\theta}\left(\left[g^{\star(k)}_{j}(t_{i-p+1}|t_{i-p})\right]^{\mathrm T}\right) \times \left[\varepsilon^{\star(k)}_{\hat\theta[j]}(t^i_{i-p+1}|t_{i-p})\right]
\end{aligned}\right\} \tag{54}$$

Controlling whether the OFG norm reaches a neighborhood of zero, that is checking it for values ‘greater than/equal to’ ($\geqslant$) or ‘less than’ ($<$) a small threshold δ is a convenient criterion for continuing or terminating the procedure:

$$\Big|\big\|\nabla_{\hat\theta} f_M\big(\hat\theta = \hat\theta[j]\big)\big\|\Big| \ \underset{\text{stop}}{\overset{\text{continue}}{\underset{<}{\geqslant}}}\ \delta\,. \tag{55}$$

The identification procedure will continue repeating operations numbered (Fig. 5) by blocks ②, ③, ④, ⑤, ⑥, and ⑦ with the same data stored in block ① after updating the parameter estimate in block ⑧:

$$\hat\theta[j+1] := \hat\theta[j] \tag{56}$$

or will stop with capturing the result in block ⑨:

$$\hat\theta_{\mathrm{FINAL}} := \hat\theta[j]\,. \tag{57}$$

The most important thing about these repeatable operations (*cf.* Fig. 5) is that the calculations in block ② – the AKF, and in block ⑤ – the AKF *Sensitivity Model* being an algorithm to compute values of partial derivatives of state vector estimates and covariance matrix elements relative to the q-vector parameter estimates $\hat{\theta}[j]$, must be numerically stable and robust with respect to ill-conditioned models. In this regard, it should be noted that practical projects using Kalman filtering, KF, since the very first one [30], have opened a wide field for research and development on giving KF algorithms, including Riccati equations, required numerical stability and robustness properties. The fundamental ideas of Bierman [27] about matrix factorization served as a powerful impetus.

For the method of Active System Identification developed in this article and earlier works by the author, the greatest contribution from Russian scientists was made by Julia Tsyganova and Maria Kulikova in their dissertations [31, 32] and numerous publications, partly co-authored [33, 34] with the author of this synthesis paper. More references on the pioneering titles can be found in a recent survey [35]. In there, one can find discussions and current developments for the efficient and robust computation of derivatives on the parameters of discrete filter equations, including a set of vector-valued filter sensitivity equations and a set of matrix-valued Riccati-type sensitivity equations arising in implementing the (steepest) gradient descent method (52); the necessary experimental proofs are there also available. In promising software projects, it is strongly recommended to create modern implementations of ② and ④ blocks (in Fig. 5) based on orthogonalized array methods for parametric identification of discrete linear stochastic systems [31].

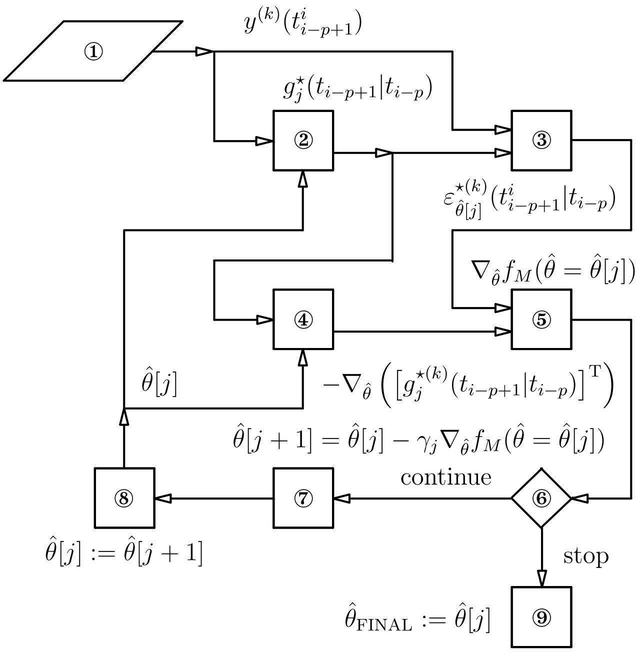


Figure 5. Generalized Parametric Identification Scheme by the Active Principle. *Legend:* ① = (45)≡(46); ② = (31)→(29)→(30)→(31)→(49); ③ = (47); ④ = (53); ⑤ = (54); ⑥ = (55); ⑦ = (52); ⑧ = (56); ⑨ = (57)

5.3. Sequence of work for a software project. If there is an object of interest in the application domain, an appropriate mathematical model must first be written for parametric identification of the TF, considered to be an adequate description based on the laws of Physics. An example of such preprocessing operations is given in Sect. 2. It is highly expedient to perform further actions on the application of this method not manually, but in the automated mode on the `Maple` software, according to the guidelines in Remark 5. The calculation procedure recommended for identifying the TF of an object according to the method outlined above is shown graphically in Fig. 6. This diagram can be useful when creating a specialized software tool to solve similar problems if such a project arises. Application-specific (AS) calculations for the problem taken in this article as an illustrative example are dictated by the following intermediate quantities:

① parameters ω_{n}, ζ, D, and χ in (11);
② matrix $\mathring{\phi}(t)$ in (17) with its entries in (18);
③ parameter d in (19);
④ matrix $\mathring{Q}_{\mathrm{d}}$ in (21) with its entries in (22);
⑤ matrix $\mathring{L}_{\mathrm{d}}$ with its three non-zero entries in (23);
⑥ matrix $\mathring{\Phi}_{\mathrm{d}}$ in (24); and
⑦ matrices $\mathring{\Phi}_\star$ and $\mathring{L}_\star$ in (25).

These quantities are all continuous and differentiable functions of elements $\mathring{\theta}_i$ of vector $\mathring{\theta}$ introduced after (24) for this application problem. Following the form of these functions, we apply not the true parameter value $\mathring{\theta}$, but its estimated value $\hat{\theta}$ to have continuous and differentiable, over $\hat{\theta}$, functions. These properties make it possible to compute the gradient $\nabla_{\hat{\theta}}\overline{\mathcal{J}^{IPI}_{t_i\equiv t_i^c}}(\hat{\theta}=\hat{\theta}[j])$ in algorithm (52) tuning the parameter $\hat{\theta}$.

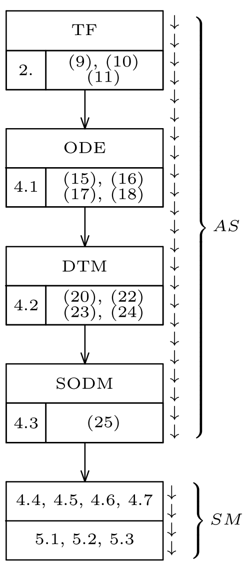


Figure 6. Flow-diagram of works for a software project to implement the Active Principle of parametric system identification in the class of linear, time-invariant, completely observable models. AS = application-specific and SM = standard matrix calculations. The paper section numbers and equation numbers (within parentheses) are shown

6. Conclusions. Returning to the problem issues posed at the beginning, we believe the goals have been achieved.

The incompatibility of the theoretical (direct) criterion of optimality of the system model and practical methods of optimization has shown itself to be the most difficult or even impossible obstacle to overcome under conditions of uncertainty directly. In this article, incongruity between theoretic perception of the system optimality and practical on-computer optimization is overcome through the construction of an indirect proximity criterion of the adaptive and optimal system models to each other, which can become a practical tool for parametric system identification. This is done here for a class of linear time-invariant models characterized by a transfer function, relying on Kalman filter theory. As proven here, it is necessary and sufficient to modify a physically specified structure into the discrete-time standard observable model in both the observed data and the adaptive Kalman filter to implement this idea.

The advantage of this modification is twofold. First, the restrictions on the permissible size of a'priori parametric uncertainty are removed because the measurement channel parameters are transfered formally into the modified state equation. Second, and most importantly, we replace the direct, but unattainable for identification, objective function with the indirect objective function, which is equivalent to the original direct function, but—to our satisfaction—attainable and suitable for conventional optimization methods. The work of this preliminary modification is difficult to perform manually. Fortunately, it is greatly facilitated and accurately performed using well-known symbolic computation tools (`Maple`).

We prefer to denote the above-used concept of 'equivalence' of the two objective functions by the new term 'equimodality,' which simply means the coincidence of their minimizers in the argument space. This coincidence is important because ensures that minimization of the constructed practical indirect cost function does lead to the unbiased state estimates along with the unbiased parameter estimates, as it should be in the optimal filter.

The inclusion of a new illustrative example from modern digital communication technology increases the visibility of the approach and thereby encourages its extension to broad real-world applications.

Theoretical questions should not overshadow the practical side of the case. Therefore, this paper also includes practical critical issues: the organization of calculations in the computer time-scale, the structural algorithmic construction of the identification procedure, and the planning of the corresponding design work.

As a limitation of the work, it could be pointed out that underlying its results are the assumptions that the system to be modeled is linear and time-invariant. There is nothing to argue against this, except for the famous aphorism by George E. P. Box [36, p. 2]: "*Models, of course, are never true, but fortunately it is only necessary that they be useful.*"[1] Accordingly, if the system output measurement shows the presence of nonlinear distortions, it may mean that the suitability of the proposed method to identify a nonlinear model with a dominant linear kernel defined by the *Best Linear Approximation* concept, BLA, based on [2] propositions, should be considered and recommended for extended study.

[1] https://www.tandfonline.com/doi/epdf/10.1080/01621459.1979.10481600?needAccess=true&role=button

Competing interests. The author declares no competing interests.

Authorship contribution and responsibility. The author has approved the final version of the manuscript.

Funding. The research has not had any funding.

Acknowledgments. In the preparation of this paper, the author has benefited from the discussions with Dr. Alexandru Murgu (University of Cape Town) who provided extended comments and gave valuable suggestions on the manuscript.

References

1. Pillonetto G., Ljung L. Full Bayesian identification of linear dynamic systems using stable kernels, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 2023, vol. 120, no. 18, e2218197120. DOI: https://doi.org/10.1073/pnas.2218197120.
2. Schoukens J., Vaes M., Pintelon R. Linear system identification in a nonlinear setting: Nonparametric analysis of the nonlinear distortions and their impact on the best linear approximation, *IEEE Contr. Systems Magaz.*, 2016, vol. 36, no. 3, pp. 38–69. DOI: https://doi.org/10.1109/MCS.2016.2535918.
3. Ljung L. Convergence analysis of parametric identification methods, *IEEE Trans. Auto. Contr.*, 1978, vol. 23, no. 5, pp. 770–783. DOI: https://doi.org/10.1109/TAC.1978.1101840.
4. Ljung L. System identification, In: *Signal Analysis and Prediction*, Applied and Numerical Harmonic Analysis; eds. A. Procházka, J. Uhlíř, P. W. J. Rayner, N. G. Kingsbury. Boston, MA, Birkhäuser, 1998, pp. 163–173. DOI: https://doi.org/10.1007/978-1-4612-1768-8_11.
5. Ljung L. *System Identification: Theory for the User*. Upper Saddle River, N.J., Prentice Hall, 1999, xxii+609 pp.
6. Gevers M. System identification without Lennart Ljung: what would have been different?, In: *Forever Ljung in System Identification*; eds. T. Glad, G. Hendeby. Lund, Sweden, Studentlitteratur AB, 2006, pp. 61–85.
7. Schoukens J., Pintelon R., Rolain Y. Time domain identification, frequency domain identification. Equivalencies! Differences?, In: *Proc. 2004 American Control Conf.*, vol. 1 (30 June 2004 – 02 July 2004). Boston, MA, USA, 2004, pp. 661–666. DOI: https://doi.org/10.23919/ACC.2004.1383679.
8. Oomen T., van Herpen R., Quist S., et al. Connecting system identification and robust control for next-generation motion control and a wafer stage, *IEEE Trans. Contr. Syst. Technol.*, 2014, vol. 22, no. 1, pp. 102–118. DOI: https://doi.org/10.1109/TCST.2013.2245668.
9. Dedene N., Pintelon R., Lataire P. Estimation of a global synchronous machine model using a multiple-input multiple-ouput estimator, *IEEE Trans. Energy Conver.*, 2003, vol. 18, no. 1, pp. 11–16. DOI: https://doi.org/10.1109/TEC.2002.805198.
10. Wei Y., Mantooth A. LLC resonant converter—frequency domain analysis or time domain analysis, In: *2020 IEEE 9th Int. Power Electronics and Motion Control Conf.* (IPEMC2020-ECCE Asia; 29 November–02 December, 2020). Nanjing, China, 2020, pp. 552–557. DOI: https://doi.org/10.1109/IPEMC-ECCEAsia48364.2020.9367734.
11. Rivera D. E., Lee H., Mittelmann H. D., Braun M. W. Constrained mulisine output signals for plant-friendly identification of chemical process systems, *J. Process Contr.*, 2009, vol. 19, no. 4, pp. 623–635. DOI: https://doi.org/10.1016/j.jprocont.2008.08.006.
12. Peeters B., Ventura C. E. Comparative study of modal analysis techniques for bridge dynamic characteristics, *Mech. Syst. Signal Process.*, 2003, vol. 17, no. 5, pp. 965–988. DOI: https://doi.org/10.1006/mssp.2002.1568.
13. Westwick D. T., Kearney R. E. *Identification of Nonlinear Physiological Systems*. Piscataway, N.J., Wiley-IEEE Press, 2003, xii+261 pp. DOI: https://doi.org/10.1002/0471722960.

14. Semushin I., Tsyganova J., Kulikova M., et al. Identification of human body daily temperature dynamics via minimum state prediction error method, In: *Proc. 2016 Europ. Control Conf.* (ECC2016; June 29–July 1, 2016). Aalborg, Denmark, 2016, pp. 2429–2434. EDN: YVHZMP. DOI: https://doi.org/10.1109/ECC.2016.7810654.
15. Semoushin I. V. Identifying parameters of linear stochastic differential equations from incomplete noisy measurements, In: *Recent Development in Theories and Numerics* (International Conference on Inverse Problems; January 9–12, 2002); eds. H. Yiu-Chung, Y. Masahiro, C. Jin, L. June-Yub. River Edge, NJ, World Scientific032.62073, 2003, pp. 281–290. DOI: https://doi.org/10.1142/9789812704924_0026.
16. Semushin I. V., Tsyganova J. V. Reducing computational complexity for DBZF precoding in xDSL downlinks, *J. Phys.: Conf. Ser.*, 2018, vol. 1096, 012159. EDN: OHQTID. DOI: https://doi.org/10.1088/1742-6596/1096/1/012159.
17. Düngen M. *Crosstalk Mitigation Techniques for Digital Subscriber Line Systems*, Dissertation (Dr.-Ing.). Hamburg, Technische Universität Hamburg, 2016, 160 pp. DOI: https://doi.org/10.15480/882.1293.
18. Begović A., Škaljo N., Behlilović N. A simple model of copper local loop for use in current DSL application, In: *Proc. 2015 23rd Telecommunications Forum Telfor* (TELFOR; November 24–26, 2015). Belgrade, Serbia, 2015, pp. 114–117. DOI: https://doi.org/10.1109/TELFOR.2015.7377427.
19. Begović A., Škaljo N., Behlilović N. An example of modeling local loop transfer function in DSL environment, In: *Proc. ELMAR-2014* (September 10–12, 2014). Zadar, Croatia, 2014, pp. 1–6. DOI: https://doi.org/10.1109/ELMAR.2014.6923362.
20. Rodrigues R. M., Sales C., Klautau A., et al. Transfer function estimation of telephone lines from input impedance measurements, *IEEE Trans. Instrum. Meas.*, 2012, vol. 61, no. 1, pp. 43–54. DOI: https://doi.org/10.1109/TIM.2011.2157431.
21. Foubert W., Neus C., Boets P., van Biesen L. Modeling the series impedance of a quad cable for common mode DSL applications, In: *Proc. 2008 IEEE Instrumentation and Measurement Technology Conf.* (IMTC 2008; May 12–15, 2008). Victoria, BC, Canada, 2008, pp. 250–253. DOI: https://doi.org/10.1109/IMTC.2008.4547040.
22. Neus C., Boets P., van Biesen L. Transfer function estimation of digital subscriber lines with single ended line testing, In: *Proc. 2007 IEEE Instrumentation and Measurement Technology Conf.* (IMTC 2007; May 01–03, 2007). Warsaw, Poland, 2007, pp. 1–5. DOI: https://doi.org/10.1109/IMTC.2007.378980.
23. Bostoen T., Boets P., Zekri M., et al. Estimation of the transfer function of a subscriber loop by means of a one-port scattering parameter measurement at the central office, *IEEE J. Sel. Areas Commun.*, 2002, vol. 20, no. 5, pp. 936–948. DOI: https://doi.org/10.1109/JSAC.2002.1007376.
24. Semushin I. V. Adaptation in stoshastic dynamic systems—Survey and new results II, *Int. J. Commun. Netw. Syst. Sci.*, 2011, vol. 4, no. 4, pp. 266–285. DOI: https://doi.org/10.4236/ijcns.2011.44032.
25. Stolle R. Electromagnetic coupling of twisted pair cables, *IEEE J. Sel. Areas Commun.*, 2002, vol. 20, no. 5, pp. 883–892. DOI: https://doi.org/10.1109/JSAC.2002.1007371.
26. Maybeck P. S. *Stochastic Models, Estination, and Control.* Vol. 1, Mathematics in Science and Engineering, vol. 141. New York, Academic Press, 1979, xix+423 pp. DOI: https://doi.org/10.1016/s0076-5392(08)62169-4.
27. Bierman G. J. *Factorization Methods for Discrete Sequential Estimation*, Mathematics in Science and Engineering, vol. 128. New York, Academic Press, 1977, xvi+241 pp. DOI: https://doi.org/10.1016/s0076-5392(08)x6052-7.
28. Sima V. *Algorithms for Linear-Quadratic Optimization*, Pure and Applied Mathematics, Marcel Dekker. New York, Marcel Dekker, 1996, vii+366 pp. DOI: https://doi.org/10.1201/9781003067450.
29. Fletcher R. *Practical Methods of Optimization.* Chichester, John Wiley & Sons, 2000, xvii+436 pp. DOI: https://doi.org/10.1002/9781118723203.

30. Potter J. E., Stern R. G. Statistical filtering of space navigaton measurements, In: *Proc. 1963 AIAA Guigance and Control Conf.* (AIAA 1963; August 12–14, 1963). Cambridge, MA, 1963, pp. 1–5. DOI: https://doi.org/10.2514/6.1963-333.
31. Tsyganova J. V. *Orthogonalized Array Methods for Parametric Identification of Discrete Linear Stochastic Systems*, Diss. Dr. Sci. (Phys. & Math.). Ulyanovsk, Ulyanovsk State Univ., 2017, 400 pp. (In Russian). EDN: IMPPAX.
32. Kulikova M. V. *Methods of Calculation of the Logarithmic Likelihood Function and its Gradient in Kalman Filtering Algorithms*, Diss. Cand. Sci. (Phys. & Math.). Ulyanovsk, Ulyanovsk State Univ., 2005, 131 pp. (In Russian). EDN: NNNPKP.
33. Semushin I. V., Tsyganova J. V. Numerically implementing the API based solution to learn a plant dynamics for stochastic control concurrently, In: *Proc. 2020 European Control Conference* (ECC 2020; May 12–15, 2020). St. Petersburg, 2020, pp. 1105–1110. EDN: FWJUQS. DOI: https://doi.org/10.23919/ECC51009.2020.9143870.
34. Kulikova M. V., Semoushin I. V. On the evaluation of log likelihood gradient for Gaussian signals, *Int. J. Appl. Math. Stat.*, 2005, vol. 3, no. 5, pp. 1–14.
35. Tsyganova J. V., Kulikova M. V. On modern array algorithms for optimal discrete filtering, *Vestnik YuUrGU. Ser. Mat. Model. Progr.*, 2018, vol. 11, no. 4, pp. 5–30 (In Russian). EDN: YOTRJJ. DOI: https://doi.org/10.14529/mmp180401.
36. Box G. E. P. Some problems of statistics and everyday life, *J. Am. Stat. Assoc.*, 1979, vol. 74, no. 365, pp. 1–4. DOI: https://doi.org/10.1080/01621459.1979.10481600.

Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2023. Т. 27, № 3. С. 544–572
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu2037
EDN: XUQAGA

УДК 681.5.015

Идентификация передаточной функции посредством минимизации рассогласования оценок состояния адаптивного и оптимального фильтров

И. В. Семушин

Ульяновский государственный университет,
Россия, 432017, Ульяновск, ул. Л. Толстого, 42.

Аннотация

Статья посвящена дальнейшему развитию активного принципа параметрической идентификации системы в классе линейных, инвариантных во времени, полностью наблюдаемых моделей. В качестве целевой модели идентификации выбран оптимальный фильтр Калмана (ОФК), который не более чем концептуально присутствует в дискретно наблюдаемом отклике системы на обучающее возбуждение типа белого шума. Путем модификации физически заданной структуры в стандартную наблюдаемую модель как в наблюдаемом отклике, так и в адаптивном фильтре Калмана (АФК), строится так называемый обобщенный остаток (ОО), равный рассогласованию между оценками состояния адаптивного и оптимального фильтров плюс независимая от АФК шумовая составляющая. В силу этой модификации средний квадрат ОО становится новым критерием близости модели для этих фильтров. Минимизация этого критерия с помощью обычных практических методов оптимизации дает точно такой же результат (АФК = ОФК), как и минимизация теоретического критерия, который, к сожалению, недостижим для любых методов численной оптимизации АФК. В статье представлена подробная пошаговая процедура, объясняющая вышеуказанное решение в терминах параметризованной передаточной функции. Для наглядности и стимулирования применения подхода в реальном мире в статье используется модель передаточной функции линии витой пары в типичной системе xDSL. Обсуждаются проблемы реализации теоретических положений метода. Вопрос о распространении предложенного подхода на проблемы идентификации линейных моделей для нелинейных систем обозначен в направлениях дальнейших исследований.

Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ
Научная статья

Образец для цитирования
Semushin I. V. Transfer function identification by minimizing the adaptive vs. optimal filter state estimates mismatch, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2023, vol. 27, no. 3, pp. 544–572. EDN: XUQAGA. DOI: 10.14498/vsgtu2037.

Сведения об авторе
Иннокентий Васильевич Семушин https://orcid.org/0000-0002-3687-1110
доктор технических наук, профессор; член IEEE; профессор; каф. информационных систем; e-mail: kentvsem@gmail.com

Ключевые слова: LTI-модель, полная наблюдаемость, фильтр Калмана, адаптивный фильтр, косвенный показатель качества, проблемы реализации.

Получение: 23 июня 2023 г. / Исправление: 5 августа 2023 г. /
Принятие: 21 августа 2023 г. / Публикация онлайн: 28 сентября 2023 г.

Конкурирующие интересы. Автор заявляет об отсутствии конкурирующих интересов.

Авторский вклад и ответственность. Окончательная версия рукописи одобрена автором.

Финансирование. Исследование выполнялось без финансирования.

Благодарности. При подготовке этой статьи автору были полезны дискуссии с доктором А. Мургу (Университет Кейптауна), который дал расширенные комментарии и ценные предложения по рукописи.

Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2023. Т. 27, № 3. С. 573–592
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu2016
EDN: NYJIOO

УДК 517.958:621.311.245

Стереопанорамный анеморумбометр для системы ориентации горизонтально-осевой ветроэнергетической установки

Е. В. Соломин, А. С. Мартьянов, А. А. Ковалёв, Г. Н. Рявкин, К. В. Осинцев, Я. С. Болков, Д. С. Антипин

Южно-Уральский государственный университет
(национальный исследовательский университет),
Россия, 454080, Челябинск, пр. Ленина, 76.

Аннотация

Традиционный подход к ориентации ротора горизонтально-осевой ветроэнергетической установки по ветру приводит к появлению известной дифференциальной ошибки ориентации из-за вращающихся лопастей и периодического отклонения воздушного потока. Для снижения ее величины в традиционном подходе используется флюгер, расположенный сверху гондолы.

В настоящем исследовании предлагается новый подход — использование комплексного или «стереодатчика» в виде двух устройств, симметрично расположенных по обе стороны гондолы (аналогично стереоскопическим устройствам). Для доказательства эффективности подхода были выбраны несколько характерных точек вблизи гондолы для последующего моделирования воздушных потоков в ее области в программе ANSYS® CFX с использованием k–ε модели турбулентности на основе дифференциальных уравнений Навье–Стокса.

В каждой точке была рассчитана средняя величина ошибки угла ориентации при следующих условиях: различных скоростях ветра, значениях быстроходности и углов направления на ветер. В результате выявлены две наиболее подходящие для размещения приборов точки. В численном виде показано преимущество стереопанорамного анеморумбометра перед традиционным на примере расчетного случая с номинальными

Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ
Научная статья

Образец для цитирования
Соломин Е. В., Мартьянов А. С., Ковалёв А. А., Рявкин Г. Н., Осинцев К. В., Болков Я. С., Антипин Д. С. Стереопанорамный анеморумбометр для системы ориентации горизонтально-осевой ветроэнергетической установки // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2023. Т. 27, № 3. С. 573–592. EDN: NYJIOO. DOI: 10.14498/vsgtu2016.

Сведения об авторах

Евгений Викторович Соломин https://orcid.org/0000-0002-4694-0490
доктор технических наук, профессор; каф. электрических станций, сетей и систем электроснабжения; e-mail: solominev@susu.ru

Андрей Сергеевич Мартьянов https://orcid.org/0000-0002-9997-9989
кандидат технических наук, доцент; каф. электрических станций, сетей и систем электроснабжения; e-mail: martianovas@susu.ru

параметрами. Анализ в Matlab/Simulink показал прирост производительности ветроэнергетической установки за счет повышения достоверности определения направления ветра при применении правильно расположенных датчиков ветрового потока.

Данная статья не дает представления о конструкции датчика, поскольку для определения правильного направления ветра можно использовать любой принцип. Однако авторами рассматривается новый «стереодатчик», который будет более детально исследоваться в следующих работах.

Ключевые слова: горизонтально-осевая ветроэнергетическая установка, система управления ориентацией, CFD-анализ, дифференциальная ошибка, имитационное моделирование отклонения флюгера, сокращение энергетических потерь.

Получение: 3 мая 2023 г. / Исправление: 29 мая 2023 г. / Принятие: 25 июня 2023 г. / Публикация онлайн: 26 сентября 2023 г.

Введение. На сегодняшний день существует несколько способов определения направления набегающего потока ветра на горизонтально-осевую ветроэнергетическую установку (ГО ВЭУ). Для этого в современных системах ориентации используются такие приборы, как LiDAR, SoDAR, и флюгеры различной конструкции, о чем говорится в многочисленных публикациях [1, 2]. В последнее время исследователи также обращаются к методам прогнозирования [3], некоторые из которых используют системы SCADA [4] и нейронные сети [5]. В части предложенных методов датчики для определения направления ветрового потока не применяются вовсе, используется только информация о мгновенной генерируемой мощности [6].

Однако применение любого из них, особенно когда датчик расположен на гондоле ВЭУ, дает определенную погрешность из-за того, что лопасти, вращающиеся перед гондолой, влияют на истинное направление ветрового потока [7]. Подробное описание этого явления, называемого «дифференциальной ошибкой ориентации» (или периодической), было представлено в [8]. Погрешность возникает из-за отклонения потока ветра вращающимися лопастями и дальнейшей регистрации неправильного среднего направления флюгером, расположенным на гондоле.

Антон Александрович Ковалёв https://orcid.org/0000-0001-6952-277X
аспирант; каф. электрических станций, сетей и систем электроснабжения;
e-mail: alpenglow305@yandex.ru

Глеб Николаевич Рявкин https://orcid.org/0000-0002-7637-0310
аспирант; каф. электрических станций, сетей и систем электроснабжения;
e-mail: amdx3@bk.ru

Константин Владимирович Осинцев https://orcid.org/0000-0002-0791-2980
кандидат технических наук, доцент; каф. промышленная теплоэнергетика;
e-mail: osintsev2008@yandex.ru

Ярослав Сергеевич Болков https://orcid.org/0000-0003-0807-1623
аспирант; каф. промышленная теплоэнергетика; e-mail: iar-bolkov@yandex.ru

Дмитрий Сергеевич Антипин https://orcid.org/0009-0005-3372-6718
аспирант; каф. электрические станции, сети и системы электроснабжения;
e-mail: andimas98@gmail.com

Анализ публикаций показывает, что ошибка ориентации изучается многими исследователями. В [9] авторы предложили ее уменьшить, используя данные SCADA для обнаружения погрешности смещения нулевой точки. Обзор активных систем ориентации и датчиков, применяемых в современных ВЭУ, приведен в [10].

Однако любой из упомянутых подходов не дает истинного ответа, если известно реальное направление ветрового потока. В частности, механические флюгеры на гондолах, а также LiDAR и SoDAR (используемые в основном в ветропарках) измеряют поток ветра, отклоняемый вращающимися лопастями. Это означает, что данные, зарегистрированные датчиком(-ами), фактически несут в себе ошибку об изначальном направлении потока. В случаях без применения датчиков методы основаны на расчете электрических параметров генератора ВЭУ в текущем положении гондолы, на которые изначально влияет дифференциальная ошибка. Кроме того, в этих методах используется постоянный поиск направления, что приводит к большим потерям энергии.

На рис. 1 показаны завихрения в виде обтекаемых линий, вызванные вращающимися лопастями, разрезающими воздух и вызывающими даже противоположное направление потока. Завихрения, создаваемые вращающимися лопастями, вызывают колебания воздушного потока, которые в дальнейшем регистрируются флюгером с мгновенной средней дифференциальной ошибкой угла ориентации.

По мере приближения лопасти к верхнему положению и от него (на рис. 1 снизу-вверх) вихри становятся более сильными, меняя направление первоначального потока, тем самым внося искажение в данные, которые далее считываются флюгером (схематично показан красным кругом на задней части гондолы).

Возникновение дифференциальной ошибки приводит к неадекватной реакции системы управления ориентацией ВЭУ, которая поворачивает ротор на недостаточный или даже неправильный угол. Поскольку мощность ВЭУ зависит от ометаемой площади ротора, а максимальная выработка энергии происходит только тогда, когда она перпендикулярна направлению набегающего потока (когда вектор потока коллинеарен оси вращения ротора), ошибка ориентации приводит к значительным потерям электроэнергии, которые в мире оцениваются в $7 млрд в год. Сегодня почти все коммерческие ГО ВЭУ оснащены различными видами флюгеров на гондолах, которые считывают данные с дифференциальной ошибкой. В [11] говорится о средней величине ошибки на уровне 4° в зависимости от скорости ветра, способа управления шагом, быстроходности и т.д. Ошибка ориентации пропорциональна квадрату ее косинуса, как указано в [11]. Систематическая ошибка в 4° снижает годовую выработку энергии примерно на 1.5 % согласно результатам, указанным в [12]. В некоторых случаях она может достигать от 30 до 40° с соответствующими потерями до 24 % [13].

Чтобы как можно больше снизить дифференциальную ошибку ориентации, предлагается следующее решение: если два флюгера будут расположены симметрично с обеих сторон по бокам гондолы, то их совместные показания могут определить истинное направление ветра. При таком расположении, если измерения одного прибора (например, левого) покажут некоторое давление ветра, а правый не зарегистрирует никакого ветра, то очевидно, что он дует с одной (левой) стороны и, следовательно, гондола ориентирована непра-

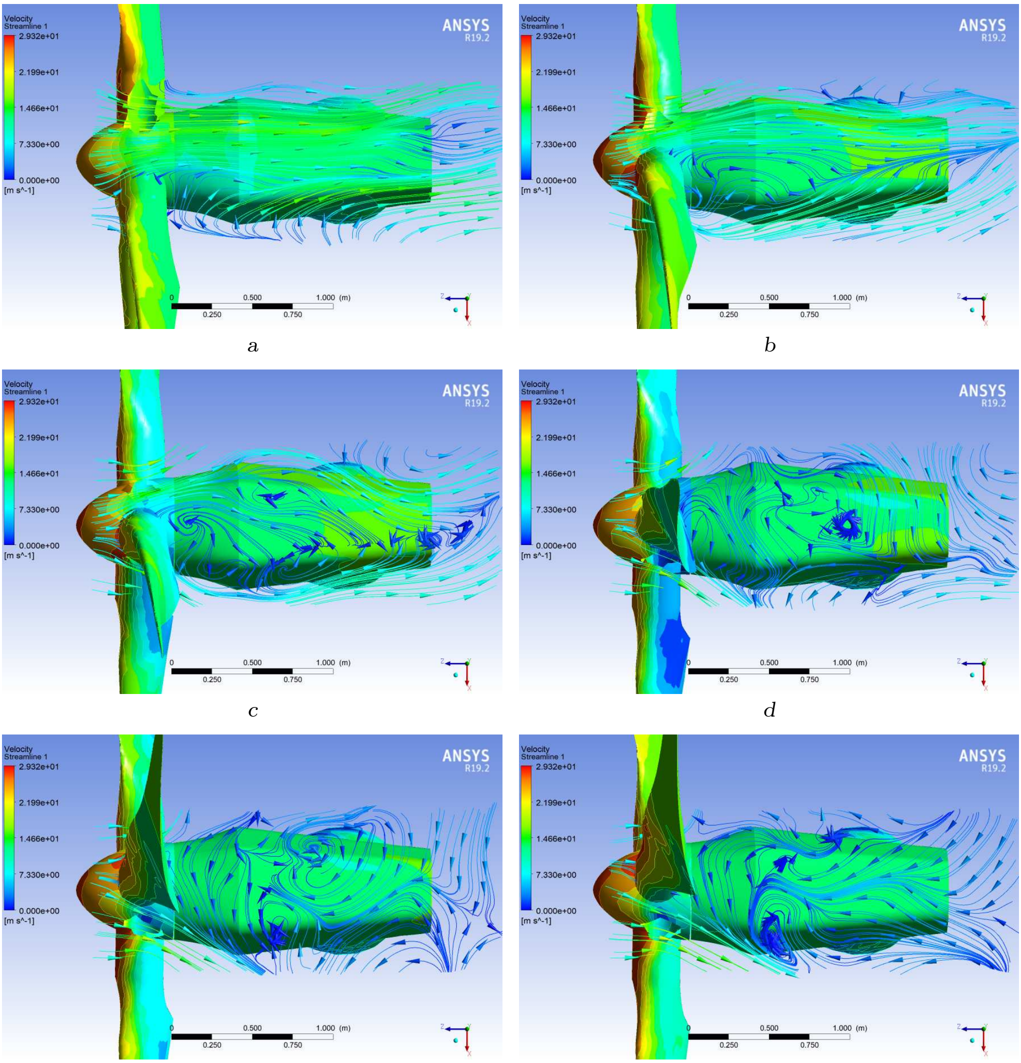


Рис. 1. Вид сверху на гондолу при моделировании потока: a — положение 1; b — положение 2; c — положение 3; d — положение 4; e — положение 5; f — положение 6

[Figure 1. Nacelle top view in the flow simulation: a — Position 1; b — Position 2; c — Position 3; d — Position 4; e — Position 5; f — Position 6]

вильно. Если показания обоих приборов равны, то с большой долей вероятности ВЭУ ориентирована правильно или близка к идеальному положению. На основе этой гипотезы, было начато представленное ниже исследование. В данной работе взят набор точек в пространстве, среди которых определены наиболее подходящие для размещения устройств(-а) в соответствии с несколькими критериями. Расчеты выполнены в программе ANSYS® CFX для различных скоростей ветра, значений быстроходности и углов направления на ветер. В данной работе не предполагалось обсуждать устройство флюгера, так как в целом нет разницы, какой вид прибора установлен. Идея исследования состоит в том, чтобы определить наилучшее место для его установки, чтобы одновременно уменьшить влияние турбулентности в пристеночных слоях.

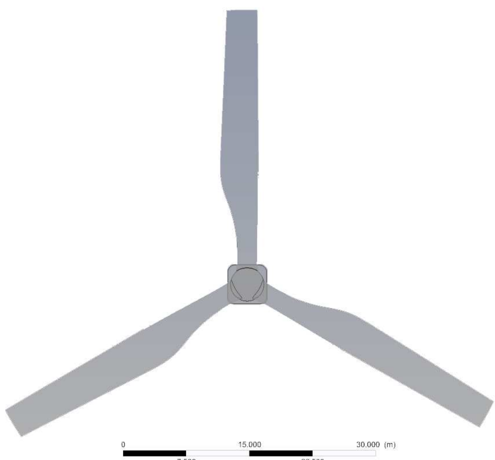
1. Построение геометрии и сетки. Исследование сосредоточено на изучении аэродинамических условий в области гондолы ВЭУ Siemens SWT-3.6-120 [14], 3D-модель которой, показанная на рис. 2, построена в `SolidWorks` и затем использована в `ANSYS`® `CFX`.

Указанная ВЭУ выбрана по критерию наибольшей распространенности в мегаваттном классе.

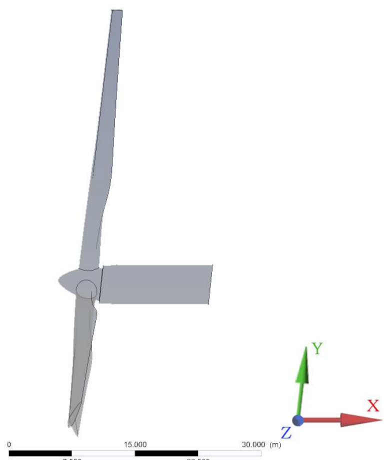
Для оптимизации вычислительной мощности и повышения точности результатов в области гондолы влияние мачты не учитывается, а лопасти усечены по 32-метровому радиусу. Эти допущения позволяют снизить требования к вычислительным ресурсам и выполнить расчеты для различных углов направления на ветер, скоростей ветра и значений быстроходности за приемлемый промежуток времени.

На рис. 2, b отчетливо видно, что система координат повернута в направлении гондолы (вокруг оси Z) на угол наклона модели в 6°. Она введена для правильного вращения ротора во время моделирования. При использовании системы координат по умолчанию ротор периодически сливался бы с гондолой или отделялся от нее, что не соответствовало бы реальному процессу вращения.

Построение сетки выполнено в модуле `ICEM`, позволяющем детально ее настроить. Для расчетов в динамике она создана по отдельности для вращающейся и неподвижной частей. В пристеночной области гондолы выполнено сгущение сетки с целью получения более точных данных в месте, представляющем наибольший исследовательский интерес. Количество элементов сетки неподвижной части модели (статора) составляет 5.3 млн ячеек. У вращающейся части (ротора), к которой относятся лопасти и ступица, — 1 млн ячеек. Форма ячеек — тетраэдрическая.



a



b

Рис. 2. 3D-модель ВЭУ: *a* — вид спереди; *b* — вид сбоку

[Figure 2. 3D model of the wind turbine: *a* — Front view; *b* — Side view]

2. Назначение расчетных условий. При настройке расчетных параметров принята модель турбулентности k–ε, приемлемость использования которой для подобного случая обоснована в [15].

Для моделирования определенного угла направления на ветер скорость задана через составляющие ее векторы по осям X и Z. Нужные величины определены по правилу сложения векторов.

Список расчетных случаев с назначенными параметрами представлен в табл. 1. Угол направления на ветер имеет обозначение α. Угловая скорость вращения ротора, задаваемая в программе, находится по формуле

$$\omega = V\lambda/R \text{ [рад/с]},$$

где V — скорость набегающего потока ветра, м/с; λ — быстроходность ротора; R — радиус ротора, м.

Быстроходность принимается постоянной во время моделирования, так как она не должна меняться, если ВЭУ работает в установившемся режиме.

Таблица 1

Параметры расчетных случаев [Parameters of calculated cases]

nos.	λ	V, m/s	α, deg.	ω, rad/s	nos.	λ	V, m/s	α, deg.	ω, rad/s
1	3	3	1	0.15	15	5	7	30	0.58
2	3	3	20	0.15	16	5	12	1	1
3	3	3	30	0.15	17	5	12	20	1
4	3	7	1	0.35	18	5	12	30	1
5	3	7	20	0.35	19	7	3	1	0.35
6	3	7	30	0.35	20	7	3	20	0.35
7	3	12	1	0.6	21	7	3	30	0.35
8	3	12	20	0.6	22	7	7	1	0.81
9	3	12	30	0.6	23	7	7	20	0.81
10	5	3	1	0.25	24	7	7	30	0.81
11	5	3	20	0.25	25	7	12	1	1.4
12	5	3	30	0.25	26	7	12	20	1.4
13	5	7	1	0.58	27	7	12	30	1.4
14	5	7	20	0.58					

3. Расположение исследуемых точек. Покоординатное размещение исследуемых точек на высоте средней горизонтальной линии гондолы представлено на рис. 3. Это расположение обусловлено необходимостью избежать влияния краевых эффектов верхней и нижней частей. Ветер набегает с левой стороны под определенным углом α. Большинство точек в нижней части рис. 3 имеет зеркальные копии в верхней части. Оценочные точки `E` (estimated) и `SE` (specular estimated) взяты для проверки правильности выставленного угла направления на ветер. Например, если в расчетном случае назначен определенный угол направления на ветер, то в указанных точках будет точно такая же величина. В других точках значения явно будут отличаться. Левые по отношению к положению гондолы точки `L` и `SL` должны показать высокий уровень колебаний ветрового потока для оценки верхней границы возмущения потока. Точки `C`, `SC`, `R5`, `SR5`, `D` и `SD` (центральные, правые и диагональные) являются теоретически пригодными для размещения прибора и приняты для рассмотрения в них характера течения. Первые че-

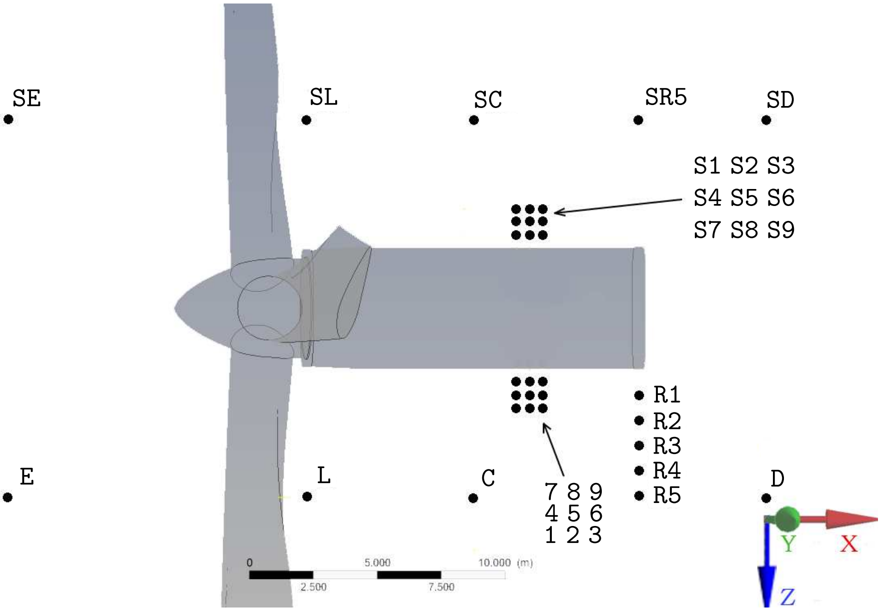


Рис. 3. Расположение расчетных точек (вид сверху)
[Figure 3. Location of calculated points (top view)]

тыре удалены на 5 м от стенок гондолы. Точки `R1`–`R5` нужны для проведения анализа изменчивости ветрового потока по мере отдаления от стенки. Каждая из этой группы имеет шаг в 1 м. Наиболее вероятными для размещения прибора являются точки `5` и `S5`. В них исключается проблема с большой длиной опорного штока, характерная для ранее описанных точек. Точки `5` и `S5` располагаются на расстоянии 1 м от гондолы. Они окружены скоплением из других точек на расстоянии 0.5 м друг от друга для получения более четкой картины поведения воздушного потока в этой области. Однако очевидно, что чем больше расстояние от точки до стенки, тем длиннее и массивнее должен быть опорный шток.

Во всех точках выполнен расчет следующих параметров:

– `Velocity` — скорость набегающего потока, м/с;
– `Velocity u` — составляющая вектора скорости по оси X, м/с;
– `Velocity w` — составляющая вектора скорости по оси Z, м/с;
– `Pressure` — давление, Па.

4. Шаг по времени. Производится вычисление оптимального шага и времени расчета. Установившийся режим обычно достигается после первого перехода лопасти на место другой. Периодичность вращения можно выразить через синусоидальный закон для угловой скорости в 1 рад/с, что будет достаточным для расчетных случаев с низкой быстроходностью и скоростью ветра.

Функция $\sin(t)$ для пяти периодов соответствует расчетному времени

$$t_{\text{calc}} = \frac{2\pi \cdot \lambda}{\omega} = \frac{2\pi \cdot 5}{1} = 31.416 \text{ [с]}.$$

Один период равен
$$t_{\text{per}} = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{1} = 6.2832 \text{ [с]}.$$
Для достаточного итерационного совпадения с синусоидой период делится на 40 частей:
$$t_{\text{step}} = \frac{t_{\text{per}}}{40} = \frac{6.2832}{40} = 0.15708 \text{ [с]}.$$

5. Обработка результатов. Вычисление мгновенных значений дифференциальной ошибки ориентации производится по формуле

$$\Theta_i = \arccos\Big(\frac{|V_x|}{\sqrt{{V_x}^2 + {V_z}^2}}\Big) + \alpha \text{ [град.]}.$$

Выполняется подсчет среднего арифметического для каждой точки:

$$\langle\Theta\rangle = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \Theta_i \text{ [град.]}, \tag{1}$$

где n — количество итераций.

Данный подход справедлив только при отсутствии периодичности колебаний. В противном случае, если на графике ее можно четко отследить, то ведется подсчет среднего арифметического начиная с момента появления первого выраженного периода. Такой подход позволяет более точно определить результирующее значение в каждой точке. Тогда формула (1) принимает следующий вид:

$$\langle\Theta\rangle = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} \Theta_i \text{ [град.]}, \tag{2}$$

где m — количество итераций установившегося режима.

На основании представленных выше исходных данных и допущений было выполнено моделирование изменения аэродинамических параметров для каждого расчетного случая. В результате были получены значения дифференциальной ошибки для каждой точки при различных величинах скорости ветра, быстроходности ротора и угла направления на ветер.

Все эти данные были проверены на наличие заведомо неверных результатов в виде случайных выбросов, существенно отличающихся по величине от соседних значений. Такие мгновенные значения приняты за ошибки численного метода и скорректированы вручную до рядом стоящих величин.

Далее значения дифференциальной ошибки для различных режимов были сведены в единую таблицу по следующему правилу: средние арифметические по каждой точке, посчитанные по формулам (1) и (2) в зависимости от характера колебаний, сравниваются между собой на предмет наименьшей величины (табл. 2). Расчетные случаи имеют сокращенные обозначения вида $\lambda\langle\text{значение}\rangle V\langle\text{значение}\rangle\alpha\langle\text{значение}\rangle$, что означает указание по порядку параметров быстроходности, скорости ветра и угла направления на ветер.

В табл. 2 представлены только наиболее значимые точки, выбор которых будет обоснован далее. Также в таблице не представлены столбцы оценочных точек.[1]

[1]Полные результаты расчетов могут быть предоставлены читателю авторами статьи по отдельному запросу.

Таблица 2

Сводная таблица результатов по точкам [Summary table of results by points]

Case Study	D	R1	R5	5	S5	Case Study	D	R1	R5	5	S5
$\lambda\langle 3\rangle V\langle 3\rangle\alpha\langle 1\rangle$	5.9	5.2	6.7	7.4	10.2	$\lambda\langle 5\rangle V\langle 7\rangle\alpha\langle 30\rangle$	5.33	14.56	4.95	17.56	93.61
$\lambda\langle 3\rangle V\langle 3\rangle\alpha\langle 20\rangle$	1.5	10.1	2.5	13.2	73.4	$\lambda\langle 5\rangle V\langle 12\rangle\alpha\langle 1\rangle$	4.4	3.9	5.9	3.9	4.7
$\lambda\langle 3\rangle V\langle 3\rangle\alpha\langle 30\rangle$	2.25	15.89	5.02	19.56	55.75	$\lambda\langle 5\rangle V\langle 12\rangle\alpha\langle 20\rangle$	7.7	9.6	7.6	12.3	133.5
$\lambda\langle 3\rangle V\langle 7\rangle\alpha\langle 1\rangle$	5.4	6.7	5.7	8.2	12.2	$\lambda\langle 5\rangle V\langle 12\rangle\alpha\langle 30\rangle$	8.48	15.05	8.01	18.23	112.64
$\lambda\langle 3\rangle V\langle 7\rangle\alpha\langle 20\rangle$	3.2	12.2	4.6	13.5	69.7	$\lambda\langle 7\rangle V\langle 3\rangle\alpha\langle 1\rangle$	8.1	4.9	6.9	3.7	6
$\lambda\langle 3\rangle V\langle 7\rangle\alpha\langle 30\rangle$	3.44	15.33	5.04	19.05	60.93	$\lambda\langle 7\rangle V\langle 3\rangle\alpha\langle 20\rangle$	11.3	9.1	6.9	10.8	33.4
$\lambda\langle 3\rangle V\langle 12\rangle\alpha\langle 1\rangle$	5.7	6.1	7.3	9.4	30	$\lambda\langle 7\rangle V\langle 3\rangle\alpha\langle 30\rangle$	5.2	13.62	5.08	16.44	48
$\lambda\langle 3\rangle V\langle 12\rangle\alpha\langle 20\rangle$	3.7	10	4.6	12.3	91.6	$\lambda\langle 7\rangle V\langle 7\rangle\alpha\langle 1\rangle$	4.2	5.1	5.1	4.2	6.5
$\lambda\langle 3\rangle V\langle 12\rangle\alpha\langle 30\rangle$	3.69	15.72	4.89	18.71	74.37	$\lambda\langle 7\rangle V\langle 7\rangle\alpha\langle 20\rangle$	9.2	8.8	8.7	11.3	66.6
$\lambda\langle 5\rangle V\langle 3\rangle\alpha\langle 1\rangle$	5.1	5.3	5.4	4.6	3.9	$\lambda\langle 7\rangle V\langle 7\rangle\alpha\langle 30\rangle$	8.43	13.72	8.46	16.9	79.26
$\lambda\langle 5\rangle V\langle 3\rangle\alpha\langle 20\rangle$	3.7	9.1	3	9.9	28.2	$\lambda\langle 7\rangle V\langle 12\rangle\alpha\langle 1\rangle$	5	6.5	6.4	7.6	6.6
$\lambda\langle 5\rangle V\langle 3\rangle\alpha\langle 30\rangle$	3.95	14.94	5.52	17.84	51.19	$\lambda\langle 7\rangle V\langle 12\rangle\alpha\langle 20\rangle$	12	9.6	12.3	12.4	105.5
$\lambda\langle 5\rangle V\langle 7\rangle\alpha\langle 1\rangle$	6.7	5.6	9.7	5.6	5.3	$\lambda\langle 7\rangle V\langle 12\rangle\alpha\langle 30\rangle$	11.99	14.09	14.24	18.31	139.72
$\lambda\langle 5\rangle V\langle 7\rangle\alpha\langle 20\rangle$	2.8	8.9	4.4	11.1	65.5						

Последующая обработка состояла в обобщении полученных результатов для каждой точки. Необходимо было учесть, что ветер чаще всего меняет свое направление не мгновенно, а большие углы направления представляют собой редкое явление даже на малом промежутке времени из-за того, что при постепенном изменении угла система управления успевает переориентировать ротор вслед за ветровым потоком. Поэтому для каждой точки была рассчитана относительная суммарная ошибка, учитывающая статистическое распределение/вероятность каждого режима по времени. Относительная суммарная ошибка рассчитана по формуле

$$e = \sum k_i e_i,$$

где e_i — значение отклонения для i-го режима; k_i — весовой коэффициент для i-го режима, учитывающий относительную длительность работы ВЭУ в этом режиме.

Рассчитанные значения относительной суммарной ошибки в большинстве точек для наглядности были выведены на диаграмму, представленную на рис. 4.

Анализируя полученные данные, можно заметить, что наименьшие значения отклонения воздушного потока наблюдаются в точках D, SD, R1–R5, 5 и 8. При этом обнаружено, что низкие величины дифференциальной ошибки ориентации наблюдаются в точках D, R4, R5, SD на низких скоростях ветра и малой быстроходности. При высокой быстроходности преимущество имеют точки R2 и R3. Но с практической точки зрения ни одна из них не является оптимальной по удаленности от гондолы. При этом на углах направления на ветер в 1 и 20° точки R1 и 5 имеют невысокий уровень ошибки при сравнении с обозначенными выше точками. Обе точки расположены на расстоянии 1 м

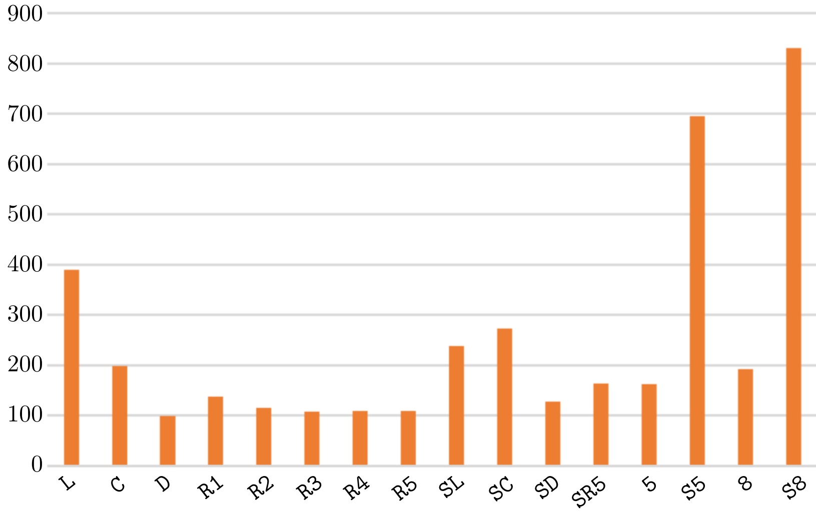


Рис. 4. Относительная суммарная величина дифференциальной ошибки в исследуемых точках

[Figure 4. Relative total value of the differential error for the studied points]

от стенки гондолы и могут быть использованы для размещения прибора на штоке приемлемой длины.

Для более наглядного представления результатов моделирования было выполнено построение трехмерных графиков для указанных точек с использованием полиномиального осреднения при разной быстроходности и различных скоростях ветра (рис. 5).

При анализе графиков приоритет отдается углам направления на ветер в 1 и 20° в связи с тем, что углы порядка 30° и выше являются редким явлением. Чаще всего система ориентации ротора ВЭУ корректирует направление на ветер раньше, чем установится такой угол направления.

Из графиков видно, что амплитудные значения отклонений для точки `5` выше, чем для `R1`, при любых углах направления ветер. Влияние завихрений в середине пристеночной области гондолы сильнее, чем на ее конце. При высокой быстроходности и низкой скорости ветра во всех случаях наблюдается снижение дифференциальной ошибки. В точке `5` наибольшая величина ошибки проявляется при низкой быстроходности и высокой скорости ветра независимо от величины угла направления на ветер. Таким образом, точка `R1` является более предпочтительной.

Чтобы оценить преимущество стереопанорамного анеморумбометра, т.е. размещения приборов по бокам гондолы (для точки `R1` и зеркальной ей) перед стандартным одиночным (на расстоянии 8 м от ротора и на высоте 3 м), были выполнены дополнительные расчеты при номинальном режиме работы ВЭУ (скорость набегающего потока 12.5 м/с [14]) при быстроходности, равной 5. В табл. 3 представлены значения среднеарифметической дифференциальной ошибки ориентации для четырех углов направления на ветер.

Моделирование показало, что точность определения направления ветрового потока в случае с расположением приборов в точках `R1` и зеркальной ей будет значительно выше, т.к. при малых углах направления величина ошибки в 3–4 раза меньше, чем при стандартном расположении прибора. Однако при значении угла направления на ветер0 начиная приблизительно с 15° она

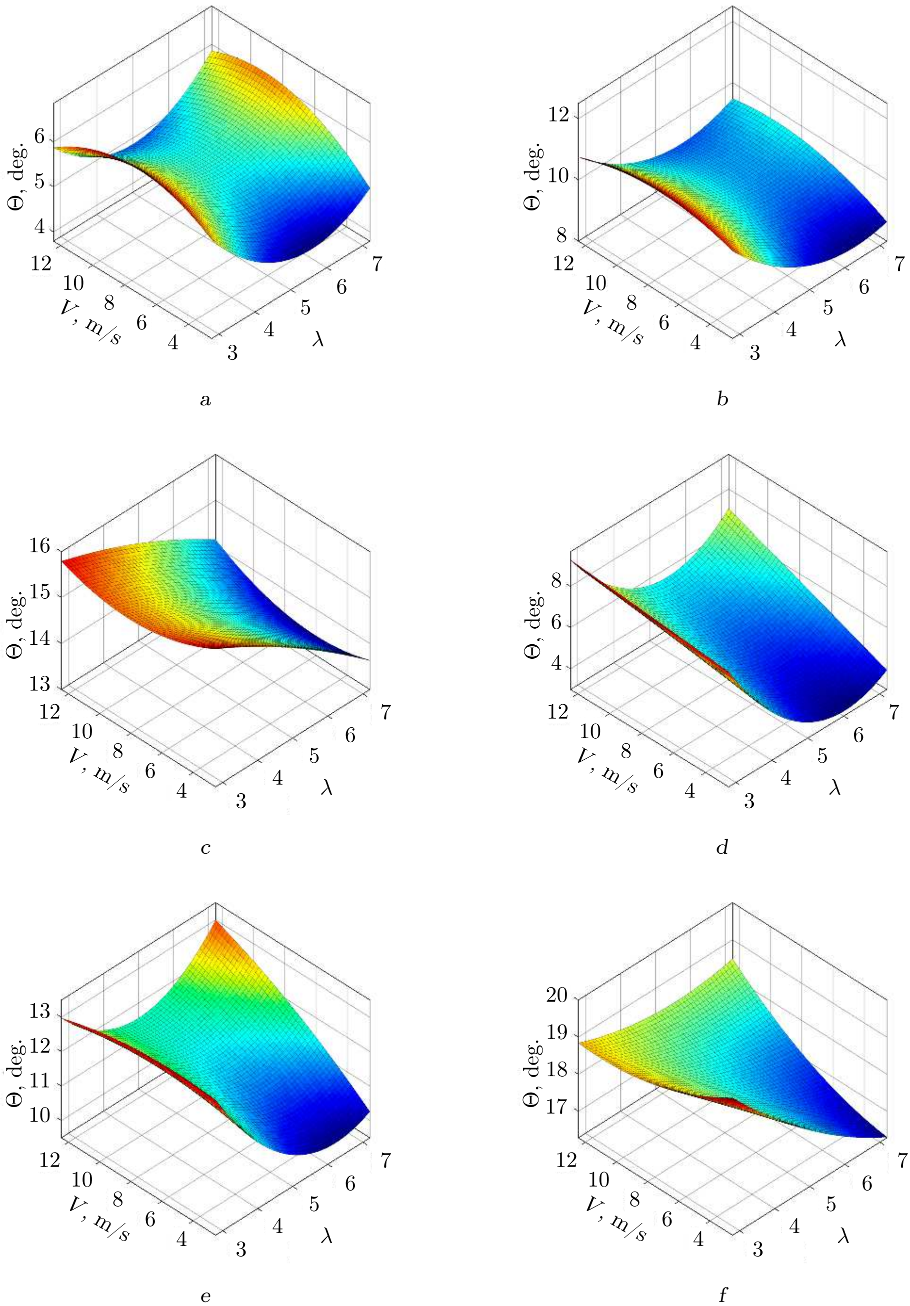


Рис. 5. Графики среднеарифметических значений дифференциальной ошибки: *a* — угол направления на ветер 1° для точки R1; *b* — угол направления на ветер 20° для точки R1; *c* — угол направления на ветер 30° для точки R1; *d* — угол направления на ветер 1° для точки 5; *e* — угол направления на ветер 20° для точки 5; *f* — угол направления на ветер 30° для точки 5

[Figure 5. Graphs of the arithmetic mean values of the differential yaw error: *a* — the yaw angle 1 deg. at the point R1; *b* — the yaw angle 20 deg. at the point R1; *c* — the yaw angle 30 deg. at the point R1; *d* — the yaw angle 1 deg. at the point 5; *e* — the yaw angle 20 deg. at the point 5; *f* — the yaw angle 30 deg. at the point 5]

Таблица 3

Сравнение значений дифференциальной ошибки
[Comparison of differential error values]

Wind direction angle (yaw error), deg.	Error for the standard location of the common single weather vane, deg.	Error for the location of the stereo devices on both sides of the nacelle, deg.
1	14.87	3.93
10	14.53	3.77
20	8.6	9.6
30	6.73	15.05

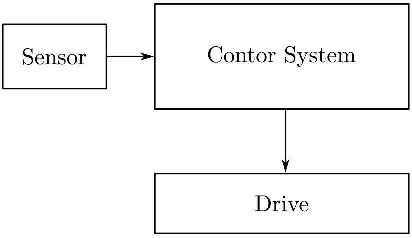
оказывается достаточно высокой, что может быть связано с турбулентным обтеканием гондолы при чрезмерном увеличении угла направления, когда существенная доля воздушного потока имеет поперечное направление.

Таким образом, можно утверждать, что точка `R1` и зеркальная ей являются наиболее предпочтительными и удобными для размещения датчика направления ветра. Заметим, что в этом случае присутствует несимметричность показаний для левых и правых направлений ветра относительно продольной оси гондолы. Для устранения асимметрии сигналы от обоих датчиков складываются друг с другом, а ошибка одного из них вычитается из ошибки другого. Предполагается, что такой подход позволяет уменьшить величину дифференциальной ошибки ориентации практически до нуля.

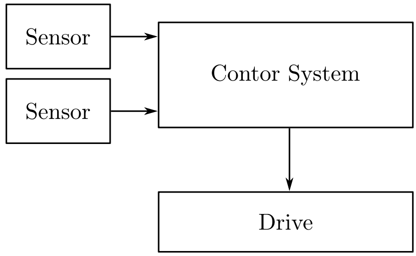
6. Моделирование в Matlab/Simulink. Для подтверждения предположения было проведено моделирование работы ВЭУ с системами управления ориентацией на ветер двух типов: с использованием одного датчика направления, расположенного сверху гондолы, и с использованием двух датчиков, расположенных в оптимальных местах по обеим сторонам гондолы. Структурные схемы таких систем управления приведены на рис. 6, *a* и *b*.

Представленные схемы систем управления были реализованы в соответствующих имитационных моделях, содержащих модели объектов управления с одинаковыми характеристиками и отличающихся лишь алгоритмами управления. В среде `Matlab/Simulink` построена блок-диаграмма имитационной модели ВЭУ, представленная на рис. 6, *c*.

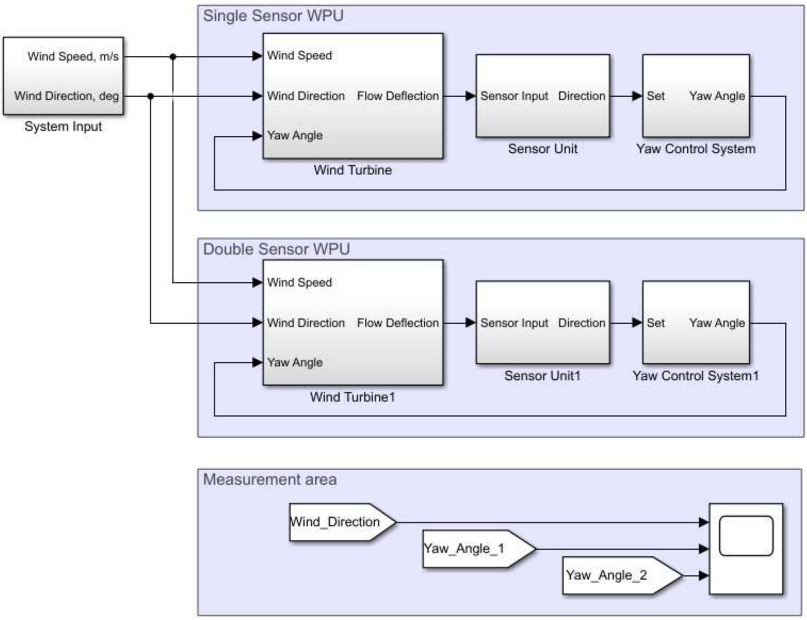
Здесь блок System Input генерирует сигналы скорости и направления воздушного потока, действующего на ВЭУ. Два модуля — Single Sensor WPU и Double Sensor WPU имитируют работу ВЭУ. Эти модули идентичны по своей структуре и отличаются алгоритмом работы блока Sensor Unit. Каждый модуль состоит из трех блоков: Wind Turbine, Sensor Unit и Yaw Control System. Блок Wind Turbine принимает задающие сигналы от System Input, в которых содержится информация о скорости и направлении ветра. Внутри блока эти сигналы подвергаются обработке таким образом, чтобы сформировать сигнал, соответствующий параметрам воздушного потока, падающего на датчик/датчики направления ветра. Здесь моделируется отклонение воздушного потока для соответствующего режима работы ротора (учитываются скорость ветра и текущая быстроходность ротора) и задается место расположения датчика. Таким образом, на выходе Flow Deflection блока Wind Turbine формируется сигнал, действующий на датчик, расположенный сверху гондолы для модуля Single Sensor WPU. Аналогично, для модуля Double Sensor



a



b



c

Рис. 6. Моделирование в `Matlab/Simulink`: *a* — схема систем управления ориентации на ветер с одним датчиком направления; *b* — схема систем управления ориентации на ветер с двумя датчиками направления; *c* — блок-диаграмма имитационной модели ВЭУ в среде `Matlab/Simulink`

[Figure 6. Simulation in `Matlab/Simulink`: *a* — the block diagrams of yaw control systems with one direction sensor; *b* — the block diagrams of yaw control systems with two side-based sensors (“stereo” sensor); *c* — the block diagram of simulation model in `Matlab/Simulink`]

WPU формируется двойной сигнал, действующий на пару датчиков направления ветра, расположенных по обеим сторонам гондолы.

Далее сигнал поступает на блок Sensor Unit, в котором моделируется работа датчика направления воздушного потока, который по этому сигналу оценивает направление на ветер. Для модуля Single Sensor WPU реализован алгоритм определения направления по одиночному сигналу, а для модуля Double Sensor WPU направление определяется по двум сигналам для левого и правого датчиков.

В следующем блоке Yaw Control System моделируется работа системы ориентации на ветер. Входным сигналом для этого блока является значение необходимого угла направления, и система управления ориентацией ВЭУ поворачивает гондолу ВЭУ на заданный угол. Система ориентации реализована по замкнутому типу с пропорционально-интегральным регулятором и обратной связью по положению. В качестве исполнительного устройства принят электрический привод с понижающим редуктором, а объектом управления является распределенная масса с моментом инерции, эквивалентным моменту инерции гондолы, моделируемой ВЭУ.

Для сравнительного анализа работы двух систем в модуле Measurement Area производилась регистрация входного сигнала, содержащего изменяющееся во времени направление ветра, и двух выходных сигналов, соответствующих рассчитанному значению направления гондолы для систем управления с одним датчиком направления и двумя в соответствии с рассматриваемыми случаями.

Результаты моделирования системы управления ориентацией ВЭУ на ветер с использованием двух подходов приведены на рис. 7.

На рис. 7 зеленым цветом показан входной сигнал, соответствующий направлению ветра. Сигнал формирует входное воздействие в виде направления ветра, в начальный момент времени равного значению 0° в глобальной системе координат. После этого начиная с 20 по 30 секунду направление ветра меняется с угла 0 до 10°, после чего до конца моделируемого временного интервала сохраняет это значение. Для большего соответствия реальной картине в сигнал добавлена случайная компонента.

Синим цветом показан отклик при работе с одним датчиком направления. Из результатов моделирования видно, что с самого начала работы возникает дифференциальная ошибка ориентации, и система управления ВЭУ разворачивает гондолу на величину от 6 до 7° (участок от 0 до 20 секунд). Затем наступает смена направления ветра, система управления ориентацией замечает это и начинает поворачивать гондолу для устранения рассогласования (участок 20–30 секунд). При этом видно, что дифференциальная ошибка сохраняется и не устраняется, что приводит к неэффективной работе ВЭУ и снижению выработки электрической энергии.

График красного цвета соответствует работе системы управления ориентацией ВЭУ на ветер с использованием двух датчиков, расположенных по

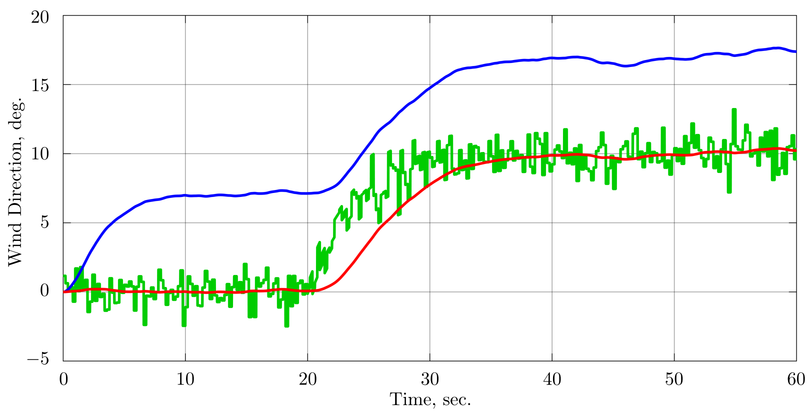


Рис. 7. Результаты моделирования в среде `Matlab/Simulink` (онлайн в цвете)

[Figure 7 (color online). Simulation results in `Matlab/Simulink`: the green line represents the input signal corresponding to a wind direction; the blue line represents the operation of the wind turbine orientation system with a single direction sensor; the red line represents the operation of the wind turbine orientation system using two sensors] обеим сторонам гондолы в оптимальных местах. Из него видно, что система управления верно определяет направление ветра, устраняя ошибку ориентации до нуля.

Таким образом, сравнительный анализ работы ВЭУ, где вместо одного датчика направления ветра, расположенного сверху гондолы, используется два датчика, расположенных по обеим сторонам гондолы в оптимальных точках, показал, что предложенный способ определения направления ветра практически полностью устраняет дифференциальную ошибку ориентации и обеспечивает правильную ориентацию ротора ВЭУ.

Заключение. Сформулированы выводы, основанные на анализе публикаций и результатах моделирования.

1. В результате анализа публикаций выявлено, что усредненная ошибка ориентации ГО ВЭУ составляет от 3 до 4°, что соответствует энергетическим потерям порядка 1 %. Однако в ряде случаев ошибка может достигать от 30 до 40°, что соответствует потерям порядка 24 %.
2. Анализ результатов численного моделирования вихреобразования в пристеночных областях гондолы в пакете `ANSYS® CFX` позволил рассчитать усредненное значение дифференциальной ошибки в отобранных для исследования точках при различных значениях скорости потока и быстроходности ротора, тем самым оптимизировав оптимальное местоположение датчика направления и скорости ветра с учетом конструктивных особенностей гондолы и непосредственно самого датчика.
3. Анализ поведения воздушного потока в пристеночной области гондолы показывает, что использование двух симметрично расположенных датчиков направления и скорости ветра (названных «стереодатчиками») с обеих сторон гондолы предпочтительнее, чем один датчик сверху гондолы, при этом ошибка ориентации может быть уменьшена в 3–4 раза.[2] Возможно, большее количество датчиков еще сильнее уменьшит ошибку ориентации, но также окажет некоторое влияние на взаимные показания.[3]
4. Моделирование работы датчиков в пакете `Matlab/Simulink` показало полное устранение ошибки ориентации ротора при использовании «стереодатчика» и сохранение ошибки при использовании одного («классического») датчика.[4]

Приведенные результаты показывают преимущество использования «стереодатчика» в системе управления ориентацией ГО ВЭУ по сравнению с «классическим».

Следует отметить, что существует широкий спектр датчиков, которые могут быть использованы для рассматриваемой задачи, поэтому конструкция прибора для бокового расположения в данной работе не раскрывается. С этой точки зрения, представленные результаты порождают множество областей для исследований.

Конкурирующие интересы. Заявляем, что в отношении авторства и публикации

[2]Эта концепция похожа на стереовидение, когда картинка выглядит более четкой. Также она пересекается с принципом навигации «чем больше датчиков – тем выше точность», как указано в [16].

[3]Это утверждение требует дополнительных исследований.

[4]Таким образом, результаты данного исследования будут полезны разработчикам датчиков направления ветра, а также инженерам ВЭУ.

этой статьи конфликта интересов не имеем.

Авторский вклад и ответственность. Е.В. Соломин — разработка концепции исследования, систематизация материала, работа с чистовиком рукописи. А.С. Мартьянов — обобщение результатов расчета в ANSYS® CFX, расчет относительной суммарной величины дифференциальной ошибки, имитационное моделирование в Matlab/Simulink. А.А. Ковалёв — выполнение расчетов в ANSYS® CFX, обработка результатов, работа с чистовиком рукописи. Г.Н. Рявкин — визуализация и подготовка графических материалов, работа с черновиком рукописи. К.В. Осинцев — визуализация и подготовка графических материалов, работа с черновиком рукописи. Я.С. Болков — предварительный расчет в Excel и MathCad. Д.С. Антипин — обзор литературы, работа с черновиком рукописи. Все авторы утвердили окончательный вариант рукописи и несут ответственность за все аспекты работы.

Финансирование. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23–11–20016, https://rscf.ru/project/23-11-20016/, а также гранта Фонда Содействия инновациям, № 16918ГУ/2021. Исследования выполнены с использованием суперкомпьютерных ресурсов ЮУрГУ.

Используемое программное обеспечение. Информация о лицензиях на программное обеспечение находится по следующим ссылкам:
- https://supercomputer.susu.ru/users/simulation/ansyscfx/
- https://supercomputer.susu.ru/users/simulation/SolidWorks/
- https://supercomputer.susu.ru/users/simulation/matlab/

Библиографический список

1. Scholbrock A. K., Fleming P. A., Fingersh L. J., et al. *Field testing LIDAR based feed-forward controls on the NREL controls advanced research rurbine*: 51st AIAA Aerospace Sciences Meeting including the New Horizons Forum and Aerospace Exposition (Grapevine, Texas; January 7–10, 2013). Conference Paper NREL/CP-5000-57339, 2013. 8 pp. DOI: https://doi.org/10.2514/6.2013-818.
2. Steven L., Eamon McK. LIDAR and SODAR measurements of wind speed and direction in upland terrain for wind energy purposes // *Remote Sens.*, 2011. vol. 3, no. 9. pp. 1871–1901. DOI: https://doi.org/10.3390/rs3091871.
3. Dongran S., Yang J., Fan X., et al. Maximum power extraction for wind turbines through a novel yaw control solution using predicted // *Energy Con. Man.*, 2018. vol. 157, no. 4. pp. 587–599. DOI: https://doi.org/10.1016/j.enconman.2017.12.019.
4. Qu C., Lin Z., Chen P., et al. An improved data-driven methodology and field-test verification of yaw misalignment calibration on wind turbines // *Energy Con. Man.*, 2022. vol. 266, no. 4, 115786. DOI: https://doi.org/10.1016/j.enconman.2022.115786.
5. Liu Z., Gao W., Wan Y.-H., Muljadi E. *Wind power plant prediction by using neural networks*: IEEE Energy Conversion Conference and Exposition (Raleigh, North Carolina; September 15–20, 2012). Conference Paper NREL/CP-5500-55871, 2012. 7 pp. DOI: https://doi.org/10.1109/ECCE.2012.6342351.
6. Karakasis N., Mesemanolis A., Nalmpantis T., Mademlis C. Active yaw control in a horizontal axis wind system without requiring wind direction measurement // *IET Renewable Power Generation*, 2016. vol. 10, no. 9. pp. 1441–1449. DOI: https://doi.org/10.1049/iet-rpg.2016.0005.
7. Mamidipudi P., Dakin E., Hopkins A., et al. *Yaw Control: The Forgotten Controls Problem.* Virginia: Catch the Wind, Inc., 2011.
8. Solomin E., Terekhin A., Martyanov A., et al. Horizontal axis wind turbine yaw differential error reduction approach // *Energy Con. Man.*, 2022. vol. 254, no. 9, 115255. DOI: https://doi.org/10.1016/j.enconman.2022.115255.

9. Pei Y., Qian Z., Jing B., et al. Data-driven method for wind turbine yaw angle sensor zero-point shifting fault detection // *Energies*, 2018. vol. 11, no. 3, 553. DOI: https://doi.org/10.3390/en11030553.
10. Kim M.-G., Dalhof P. Yaw systems for wind turbines – Overview of concepts, current challenges and design methods // *J. Phys.: Conf. Ser.*, 2014. vol. 524, no. 1, 012086. DOI: https://doi.org/10.1088/1742-6596/524/1/012086.
11. *Total Energy*: World Energy & Climate Statistics – Yearbook 2023 [Electronic resource]. URL: https://yearbook.enerdata.net/total-energy/world-energy-production.html (Accessed: May 29, 2023).
12. Astolfi D., Castellani F., Becchetti M., et al. Wind turbine systematic yaw error: Operation data analysis techniques for detecting it and assessing its performance impact // *Energies*. vol. 13, no. 9, 2351. DOI: https://doi.org/10.3390/en13092351.
13. Churchfield M., Lee S., Moriarty P., et al. *A large-eddy simulation of wind-plant aerodynamics*: 50th AIAA Aerospace Sciences Meeting including the New Horizons Forum and Aerospace Exposition (Nashville, Tennessee; January 9–12, 2012). Conference Paper NREL/CP-5000-53554, 2012. 19 pp. DOI: https://doi.org/10.2514/6.2012-537.
14. *Siemens SWT-3.6-120 Offshore — 3,60 MW — Wind turbine* [Electronic resource]. URL: https://en.wind-turbine-models.com/turbines/669-siemens-swt-3.6-120-offshore (Accessed: May 29, 2023).
15. Соломин Е. В., Терехин А. А., Мартьянов А. С. [и др.] Оценка влияния моделей турбулентности на описание процессов вихреобразования в ветроэнергетике // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2022. Т. 26, № 2. С. 339–354. EDN: SVRJGF. DOI: https://doi.org/10.14498/vsgtu1885.
16. Mueller K., Atman J., Kronenwett N., et al. A multi-sensor navigation system for outdoor and indoor environments / *Proceedings of the 2020 International Technical Meeting of The Institute of Navigation*. San Diego, California, 2020. pp. 612–625. DOI: https://doi.org/10.33012/2020.17165.

Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2023, vol. 27, no. 3, pp. 573–592
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu2016

MSC: 76G25, 76N15, 76F05

Wind direction stereo sensor for the wind turbine active yaw system

E. V. Solomin, A. S. Martyanov, A. A. Kovalyov, G. N. Ryavkin, K. V. Osintsev, Ya. S. Bolkov, D. S. Antipin

South Ural State University (National Research University),
76, Lenin pr., Chelyabinsk, 454080, Russian Federation.

Abstract

The traditional approach to the horizontal axis wind turbine yawing process leads to the appearance of a known differential yawing error due to the periodic deflection of the air flow by the rotating blades. To reduce its amplitude, usually recorded by a single weather vane located on the top of the nacelle.

This study proposes a new approach, namely the usage of a complex or "stereo" sensor in the form of two devices symmetrically located on both sides of the nacelle (similar to stereoscopic devices). To prove the effectiveness of the approach, several specific points near the nacelle were selected for subsequent modeling of air flows in `ANSYS® CFX` software using the k–ε turbulence model based on the Navier–Stokes differential equations. At each point, the average value of the orientation angle error was calculated under the following conditions: different wind speeds, tip speed ratios, and wind direction angles. As a result, two points most suitable for the placement of devices were identified. Also, the advantage of a stereo-panoramic device over a traditional one is clearly shown numerically by the example of a case study with nominal parameters. The `Matlab/Simulink` analysis showed an increase in wind turbine performance due to improved reliability of wind direction determination when properly positioned wind flow sensors are used.

This article does not give any idea of a sensor design, since any principle can be used to determine the correct wind direction. However, the authors

Mathematical Modeling, Numerical Methods and Software Complexes
Research Article

Please cite this article in press as:
Solomin E. V., Martyanov A. S., Kovalyov A. A., Ryavkin G. N., Osintsev K. V., Bolkov Ya. S., Antipin D. S. Wind direction stereo sensor for the wind turbine active yaw system, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2023, vol. 27, no. 3, pp. 573–592. EDN: NYJIOO. DOI: 10.14498/vsgtu2016 (In Russian).

Authors' Details:

Evgeny V. Solomin https://orcid.org/0000-0002-4694-0490
Dr. Tech. Sci., Professor; Dept. of Power Stations, Networks and Power Supply Systems; e-mail: solominev@susu.ru

Andrey S. Martyanov https://orcid.org/0000-0002-9997-9989
Cand. Techn. Sci., Associate Professor; Dept. of Power Stations, Networks and Power Supply Systems; e-mail: martianovas@susu.ru

are considering a new "stereo sensor", which will be studied in more detail in the following articles.

Keywords: horizontal axis wind turbine, attitude control system, CFD analysis, differential error, weather vane deflection simulation, energy loss reduction.

Received: 3rd May, 2023 / Revised: 29th May, 2023 /
Accepted: 25th June, 2023 / First online: 26th September, 2023

Competing interests. We declare that we have no conflicts of interest in the authorship

Authors' contributions and responsibilities. E.V. Solomin: Development of the research concept; Material systematization; Writing — review & editing. A.S. Martynov: Generalization of the calculation results in `ANSYS® CFX`; Calculation of the relative total value of the differential error; Simulation modeling in `Matlab/Simulink`. A.A. Kovalyov: Performing calculations in `ANSYS® CFX`; Results Analysis; Writing — original draft. G.N. Ryavkin: Visualization and preparation of graphical materials; Writing — original draft. K.V. Osintsev: Visualization and preparation of graphical materials; Writing — original draft. Ya.S. Bolkov: Preliminary calculation in `Excel` and `MathCad`. D.S. Antipin: Literature review; Writing — original draft. All the authors approved the final version of the manuscript and are accountable for all aspects of the work.

Funding. The study was supported by the Russian Science Foundation grant no. 23–11–20016, https://rscf.ru/en/project/23-11-20016/, and by the Foundation for Assistance to Small Innovative Enterprises grant no. 16918GU/2021. The reported study was performed using supercomputer resources of the South Ural State University.

Used Software. Software licenses can be found at the following links (In Russian):
- https://supercomputer.susu.ru/users/simulation/ansyscfx/
- https://supercomputer.susu.ru/users/simulation/SolidWorks/
- https://supercomputer.susu.ru/users/simulation/matlab/

References

1. Scholbrock A. K., Fleming P. A., Fingersh L. J., et al. *Field testing LIDAR based feed-forward controls on the NREL controls advanced research rurbine*, 51st AIAA Aerospace Sciences Meeting including the New Horizons Forum and Aerospace Exposition (Grapevine, Texas; January 7–10, 2013). Conference Paper NREL/CP-5000-57339, 2013, 8 pp. DOI: https://doi.org/10.2514/6.2013-818.

Anton A. Kovalyov https://orcid.org/0000-0001-6952-277X
Postgraduate Student; Dept. of Power Stations, Networks and Power Supply Systems;
e-mail: alpenglow305@yandex.ru

Gleb N. Ryavkin https://orcid.org/0000-0002-7637-0310
Postgraduate Student; Dept. of Power Stations, Networks and Power Supply Systems;
e-mail: amdx3@bk.ru

Konstantin V. Osintsev https://orcid.org/0000-0002-0791-2980
Cand. Techn. Sci., Associate Professor; Dept. of Industrial Heat and Power Engineering;
e-mail: osintsev2008@yandex.ru

Yaroslav S. Bolkov https://orcid.org/0000-0003-0807-1623
Postgraduate Student; Dept. of Industrial Heat and Power Engineering;
e-mail: iar-bolkov@yandex.ru

Dmitry S. Antipin https://orcid.org/0009-0005-3372-6718
Postgraduate Student; Dept. of Power Stations, Networks and Power Supply Systems;
e-mail: andimas98@gmail.com

2. Steven L., Eamon McK. LIDAR and SODAR measurements of wind speed and direction in upland terrain for wind energy purposes, *Remote Sens.*, 2011, vol. 3, no. 9, pp. 1871–1901. DOI: https://doi.org/10.3390/rs3091871.
3. Dongran S., Yang J., Fan X., et al. Maximum power extraction for wind turbines through a novel yaw control solution using predicted, *Energy Con. Man.*, 2018, vol. 157, no. 4, pp. 587–599. DOI: https://doi.org/10.1016/j.enconman.2017.12.019.
4. Qu C., Lin Z., Chen P., et al. An improved data-driven methodology and field-test verification of yaw misalignment calibration on wind turbines, *Energy Con. Man.*, 2022, vol. 266, no. 4, 115786. DOI: https://doi.org/10.1016/j.enconman.2022.115786.
5. Liu Z., Gao W., Wan Y.-H., Muljadi E. *Wind power plant prediction by using neural networks*, IEEE Energy Conversion Conference and Exposition (Raleigh, North Carolina; September 15–20, 2012). Conference Paper NREL/CP-5500-55871, 2012, 7 pp. DOI: https://doi.org/10.1109/ECCE.2012.6342351.
6. Karakasis N., Mesemanolis A., Nalmpantis T., Mademlis C. Active yaw control in a horizontal axis wind system without requiring wind direction measurement, *IET Renewable Power Generation*, 2016, vol. 10, no. 9, pp. 1441–1449. DOI: https://doi.org/10.1049/iet-rpg.2016.0005.
7. Mamidipudi P., Dakin E., Hopkins A., et al. *Yaw Control: The Forgotten Controls Problem.* Virginia, Catch the Wind, Inc., 2011.
8. Solomin E., Terekhin A., Martyanov A., et al. Horizontal axis wind turbine yaw differential error reduction approach, *Energy Con. Man.*, 2022, vol. 254, no. 9, 115255. DOI: https://doi.org/10.1016/j.enconman.2022.115255.
9. Pei Y., Qian Z., Jing B., et al. Data-driven method for wind turbine yaw angle sensor zero-point shifting fault detection, *Energies*, 2018, vol. 11, no. 3, 553. DOI: https://doi.org/10.3390/en11030553.
10. Kim M.-G., Dalhof P. Yaw systems for wind turbines – Overview of concepts, current challenges and design methods, *J. Phys.: Conf. Ser.*, 2014, vol. 524, no. 1, 012086. DOI: https://doi.org/10.1088/1742-6596/524/1/012086.
11. *Total Energy*: World Energy & Climate Statistics – Yearbook 2023 [Electronic resource]. URL: https://yearbook.enerdata.net/total-energy/world-energy-production.html (Accessed: May 29, 2023).
12. Astolfi D., Castellani F., Becchetti M., et al. Wind turbine systematic yaw error: Operation data analysis techniques for detecting it and assessing its performance impact, *Energies*, vol. 13, no. 9, 2351. DOI: https://doi.org/10.3390/en13092351.
13. Churchfield M., Lee S., Moriarty P., et al. *A large-eddy simulation of wind-plant aerodynamics*, 50th AIAA Aerospace Sciences Meeting including the New Horizons Forum and Aerospace Exposition (Nashville, Tennessee; January 9–12, 2012). Conference Paper NREL/CP-5000-53554, 2012, 19 pp. DOI: https://doi.org/10.2514/6.2012-537.
14. *Siemens SWT-3.6-120 Offshore — 3,60 MW — Wind turbine* [Electronic resource]. URL: https://en.wind-turbine-models.com/turbines/669-siemens-swt-3.6-120-offshore (Accessed: May 29, 2023).
15. Solomin E. V., Terekhin A. A., Martyanov A. S., et. al. Evaluation of influence of turbulence models on the vortex formation processes modeling in wind power, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2022, vol. 26, no. 2, pp. 339–354 (In Russian). EDN: SVRJGF. DOI: https://doi.org/10.14498/vsgtu1885.
16. Mueller K., Atman J., Kronenwett N., et al. A multi-sensor navigation system for outdoor and indoor environments, In: *Proceedings of the 2020 International Technical Meeting of The Institute of Navigation.* San Diego, California, 2020, pp. 612–625. DOI: https://doi.org/10.33012/2020.17165.

Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2023, vol. 27, no. 3, pp. 593–601
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu1990

MSC: 74B05

The study of the stress-strain state of an elastically supported compressed strip*

N. V. Minaeva[1], *S. Yu. Gridnev*[2,3], *Yu. I. Skalko*[3], *V. S. Safronov*[2], *E. E. Alexandrova*[1]

[1] Voronezh State University,
1, Universitetskaya pl., Voronezh, 364018, Russian Federation.
[2] Voronezh State Technical University,
84, 20-letiya Oktyabrya st., Voronezh, 364022, Russian Federation.
[3] Moscow Institute of Physics and Technology (National Research University),
9, Institutsky per., Dolgoprudny, 141701, Russian Federation.

Abstract

An analysis has been conducted on the continuous dependence of the function describing the behavior of the real structure on the characteristics of initial imperfections. A condition has been obtained, imposed on the parameter of external influence and the stiffness coefficient of the foundation, when that is violated, the shape of the cross-section of the strip will no longer be close to a rectangle, i.e. the strip loses shape stability. During the study, the parameters of external influences remained independent.

Keywords: elastic strip, elastic support, continuous dependence, stability.

Received: 15th January, 2023 / Revised: 18th May, 2023 /
Accepted: 25th May, 2023 / First online: 21st August, 2023

*The first version of the article was published in *Aktual'nye problemy prikladnoi matematiki, informatiki i mekhaniki* [Current Problems of Applied Mathematics, Computational Science and Mechanics]. Voronezh, 2022. Pp. 1265–1269. (In Russian). EDN: HZAHMU.

Mechanics of Solids
Short Communication

Please cite this article in press as:
Minaeva N. V., Gridnev S. Yu., Skalko Yu. I., Safronov V. S., Alexandrova E. E. The study of the stress-strain state of an elastically supported compressed strip, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2023, vol. 27, no. 3, pp. 593–601. EDN: MCRSVR. DOI: 10.14498/vsgtu1990.

Authors' Details:

Nadezhda V. Minaeva https://orcid.org/0000-0002-9366-5575
Dr. Phys. & Math. Sci.; Professor; Dept. of Mechanics and Computer Simulation;
e-mail: nminaeva@yandex.ru

Sergey Yu. Gridnev https://orcid.org/0000-0003-2018-6255
Dr. Techn. Sci.; Professor; Dept. of Theoretical and Structural Mechanics[2]; Leading Researcher; Lab. of Fluid Dynamics and Seismoacoustics[3]; e-mail: gridnev_s_y@rambler.ru

Yurii I. Skalko https://orcid.org/0000-0002-1370-503X
Cand. Phys. & Math. Sci.; Associate Professor; Dept. of Computational Mathematics;
e-mail: skalko@mail.mipt.ru

Introduction. During the operation of products, various internal processes occur, which can lead to changes in the geometric and physical parameters. However, when designing such products, it is typically assumed that these changes are insignificant. Additionally, during production, there are tolerances for the geometric dimensions of parts as well as for their mechanical, physical, and chemical properties [1–5]. By conducting a study based on a mathematical model, it is assumed that such imperfections do not have a significant effect on the stress-strain state. Thus, the solution describing the stress-strain state is continuously dependent on the initial data (imperfections) [1].

The works on this problem include studies of the stability on the solution of quasi-static problems [2–4]. In most studies, the load parameters ceased to be independent at a certain stage of research and a loading trajectory was introduced.

In this study, an analysis of the continuous dependence of the solution for the state of a compressed elastically supported strip on the functions that characterize the geometry of its cross-section was carried out.

1. Problem statement. Consider a strip made of elastic material. The shape of the cross-section is rectangular. The classical model of a one-parameter Winkler foundation with stiffness coefficient k was chosen as the foundation model. The strip is compressed along the side edges by forces, which makes it impossible to set the exact boundary conditions for the normal stresses. Let them be reduced to the main vector equal to modulus $2ph$, where p is the parameter of external influence, and h is the cross-section height. Similar situations arise, for example, if the load is a concentrated force or a distributed force is applied along a line running along the strip.

Let the upper and lower edges of the strip before deformation be characterized by the following functions:

$$y = (-1)^i (h + f(x)), \quad x \in [-l; l], \ i = 1, 2,$$

and after deformation:

$$y = g_i(x), \quad x \in [-l; l], \ i = 1, 2,$$

where $f(x)$, $g_i(x) \in C^1[-l; l]$; $i = 1$ corresponds to the upper edge of the strip, $i = 2$ corresponds to the bottom edge. In the case of plane strain, the stress-strain state of the strip is described by solving the following problem [6]:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial y} = 0, && \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau}{\partial x} = 0, \\ &\sigma_x = \lambda\theta + 2\mu\frac{\partial u}{\partial x}, && \sigma_y = \lambda\theta + 2\mu\frac{\partial v}{\partial y}, \\ &\tau = \mu\Big(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\Big), && \theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}, \end{aligned} \tag{1}$$

Vladimir S. Saphronov https://orcid.org/0000-0002-3780-2838
Dr. Techn. Sci.; Professor; Dept. of Theoretical and Structural Mechanics; e-mail: vss22@mail.ru
Ekaterina E. Alexandrova https://orcid.org/0009-0009-9913-4853
Postgraduate Student; Dept. of Mechanics and Computer Simulation;
e-mail: ilinova-1996@yandex.ru

with boundary conditions:

$$\tau_n\big|_{y=g_i(x)} = 0, \quad \sigma_n\big|_{y=g_i(x)} = k(g_i(x) - y_i(x)), \quad i = 1, 2, \tag{2}$$

$$\begin{gathered} \int_{\eta_1}^{\eta_2} \sigma_x dy = \int_{\eta_3}^{\eta_4} \sigma_x dy = -2ph, \\ \int_{\eta_1}^{\eta_2} \sigma_x y dy = \int_{\eta_3}^{\eta_4} \sigma_x y dy = \int_{\xi_1}^{\xi_2} v dy = \int_{\xi_3}^{\xi_4} v dy = 0, \end{gathered} \tag{3}$$

where

$$\begin{aligned} &\xi_1 = -h - f(l), && \xi_2 = h + f(l), \\ &\xi_3 = -h - f(-l), && \xi_2 = h + f(-l), \\ &\eta_1 = -h - f(l) + v(l, \xi_1), && \eta_2 = h + f(l) + v(l, \xi_2), \\ &\eta_3 = -h - f(-l) + v(-l, \xi_3), && \eta_4 = h + f(-l) + v(-l, \xi_4). \end{aligned}$$

For $f(x) = 0$ the problem (1)–(3) admits the solution

$$\begin{aligned} &v = v^{(0)} = \varepsilon_y^0 y, \quad \varepsilon_y^0 = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{\lambda}{\lambda^2 - (kh + 2\mu + \lambda)(2\mu + \lambda)} p}; \\ &u = u^{(0)} = \frac{kh + 2\mu + \lambda}{\lambda} \varepsilon_y^0 x; \\ &\sigma_x = \sigma_x^{(0)} = -\frac{\lambda^2 - (kh + 2\mu + \lambda)(2\mu + \lambda)}{\lambda} \varepsilon_y^0; \\ &\sigma_y = \sigma_y^{(0)} = -kh\varepsilon_y^0; \qquad \tau = \tau^{(0)} = 0. \end{aligned} \tag{4}$$

If the functions that are the solution of problems (1)–(3), depend continuously[1] on $f(x)$ for $f(x) = f_0(x) \equiv 0$, then we obtain that, when there is a small difference in the unloaded state between the cross-sectional shape of the strip and a rectangle ($|f(x)| \ll h$), the stress-strain state after loading is close to (4). In particular, the shape of the cross-section of the strip remains close to rectangular.

2. The study of continuous dependence. Let us determine the conditions under which the solutions of problems (1)–(3) continuously depend on $f(x)$ for $f(x) \equiv 0$. To do this, as shown in [7, 8], it is necessary to compose the following problem regarding auxiliary functionsit is necessary to compose the following task regarding auxiliary functions which are indicated by a prime:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \sigma_x'}{\partial x} + \frac{\partial \tau'}{\partial y} = 0, && \frac{\partial \sigma_y'}{\partial y} + \frac{\partial \tau'}{\partial x} = 0, \\ &\sigma_x' = \lambda\theta' + 2\mu \frac{\partial u'}{\partial x}, && \sigma_y' = \lambda\theta' + 2\mu \frac{\partial v'}{\partial y}, \\ &\tau' = \mu\Big(\frac{\partial v'}{\partial x} + \frac{\partial u'}{\partial y}\Big), && \theta' = \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y}; \end{aligned} \tag{5}$$

[1] By the continuous dependence of the solution of the original problem on $f(x)$ it is meant here that the solution found for $f(x)$ from a sufficiently small neighborhood of $f_0(x)$, will differ little from the one corresponding to the given $f_0(x)$ [10, the result arising from the implicit function theorem; p. 492]. In this paper we consider the case when $f_0(x) \equiv 0$.

$$
\begin{aligned}
&(\tau_n^0 + \tau_n')\big|_{y=g_i^0(x)+g_i'(x)} = 0,\\
&(\sigma_n^0 + \sigma_n')\big|_{y=g_i^0(x)+g_i'(x)} = k\big(v^0(\bar{\varphi}_i^0 + \bar{\varphi}'_i, h) + v'(\bar{\varphi}_i^0 + \bar{\varphi}'_i, h)\big), \quad i = 1,2;
\end{aligned} \tag{6}
$$

$$
\begin{aligned}
&\int_{\eta_1^0+\eta_1'}^{\eta_2^0+\eta_2'} (\sigma_x^0 + \sigma_x')dy = \int_{\eta_3^0+\eta_3'}^{\eta_4^0+\eta_4'} (\sigma_x^0 + \sigma_x')dy = -2ph,\\
&\int_{\eta_1^0+\eta_1'}^{\eta_2^0+\eta_2'} (\sigma_x^0 + \sigma_x')ydy = \int_{\eta_3^0+\eta_3'}^{\eta_4^0+\eta_4'} (\sigma_x^0 + \sigma_x')ydy = 0,\\
&\int_{\xi_1^0}^{\xi_2^0} (v^0 + v')dy = \int_{\xi_3^0}^{\xi_4^0} (v^0 + v')dy = 0,
\end{aligned} \tag{7}
$$

where

$$
\begin{aligned}
&g_1^0 = (1+\varepsilon_y^0)h, && g_2^0 = -(1+\varepsilon_y^0)h;\\
&\bar{\varphi}_1^0 = \bar{\varphi}_2^0 = \frac{x}{1+\varepsilon_x^0};\\
&\bar{\varphi}'_1 = u'\Big(\frac{x}{1+\varepsilon_x^0}, +h\Big), && \bar{\varphi}'_2 = u'\Big(\frac{x}{1+\varepsilon_x^0}, -h\Big);\\
&g_1' = v'\Big(\frac{x}{1+\varepsilon_x^0}, h\Big), && g_2' = v'\Big(\frac{x}{1+\varepsilon_x^0}, -h\Big);\\
&q_1' = u'\Big(l, \frac{y}{1+\varepsilon_y^0}\Big), && q_2' = u'\Big(-l, \frac{y}{1+\varepsilon_y^0}\Big);\\
&\xi_1^0 = -h, \qquad \xi_2^0 = h, && \xi_3^0 = -h, \qquad \xi_4^0 = h;\\
&\eta_1^0 = -h + v^0(l,-h), && \eta_2^0 = h + v^0(l,h),\\
&\eta_3^0 = -h + v^0(-l,-h), && \eta_4^0 = h + v^0(-l,h);\\
&\eta_1' = v'(l,-h), && \eta_2' = v'(l,h),\\
&\eta_3' = v'(-l,-h), && \eta_4' = v'(-l,h).
\end{aligned} \tag{8}
$$

For the solution of the original problem to depend continuously on the function $f(x)$ for $f(x) \equiv 0$ it is necessary that the homogeneous problem corresponding to linearized (5)–(8), admits only a trivial solution [8, 11]. It is quite difficult to conduct research on the general case; therefore we will consider a case that often occurs in practice when $p/\mu \ll 1$. Then the deformations will also be small ($|\varepsilon_y^0| \ll 1$, $|\varepsilon_x^0| \ll 1$).

This allows the linearized boundary conditions [11], corresponding to (6) and (7), to replace by the following approximate ones (here, it is already taken into account that (4) is the solution of the problem (1)–(3) for $f(x) = 0$):

for $y = \pm h$:

$$
\tau' - (\sigma_x^{(0)} + \sigma_y^{(0)})\frac{\partial v'}{\partial x} = \sigma_y' + kv' = 0; \tag{9}
$$

for $x = \pm l$:

$$
\begin{aligned}
&\sigma_x^{(0)} h\big(v'(x,h) + v'(x,-h)\big) \int_{-h}^{h} (\sigma_x'(x,y)ydy = 0,\\
&\big(v'(x,h) - v'(x,-h)\big) \int_{-h}^{h} (\sigma_x'(x,y)dy = 0,\\
&\int_{-h}^{h} v'(x,y)ydy = 0.
\end{aligned} \tag{10}
$$

The general solution of the system of equations from (5) is presented in the form [2]

$$u' = q(\eta)\cos ax, \quad v' = r(\eta)\sin ax, \quad \eta = ay. \tag{11}$$

As a result of substituting (11) into (5), we obtained a system for finding unknown functions $q(\eta)$, $r(\eta)$:

$$\mu\frac{d^2q}{d\eta^2} - (\lambda+2\mu)q + (\lambda+\mu)\frac{dr}{d\eta} = 0, \quad (\lambda+2\mu)\frac{d^2r}{d\eta^2} - \mu r - (\lambda+\mu)\frac{dq}{d\eta} = 0.$$

From here we obtain

$$\begin{aligned} q(\eta) &= C_1 \operatorname{ch}\eta + C_2 \operatorname{sh}\eta + C_3\eta\operatorname{ch}\eta + C_4\eta\operatorname{sh}\eta,\\ r(\eta) &= (C_2 - a_1C_3)\operatorname{ch}\eta + (C_1 - a_1C_4)\operatorname{sh}\eta + C_1\eta\operatorname{ch}\eta + C_3\eta\operatorname{sh}\eta, \end{aligned}$$

where $a_1 = (\lambda+3\mu)/(\lambda+\mu)$; C_1, C_2, C_3, C_4 are arbitrary constants.

From (5) and (11) follows

$$\sigma'_x = a\Big(\lambda\frac{dr}{d\eta} - (\lambda+2\mu)q\Big)\sin ax.$$

Then the boundary conditions (10) are satisfied when $a = \pi n/l$. For other unknowns we obtain

$$\begin{aligned} \sigma'_y &= a\Big((\lambda+2\mu)\frac{dr}{d\eta} - \lambda q\Big)\sin ax,\\ \tau' &= a\mu\Big(\frac{dq}{d\eta} + r\Big)\cos ax. \end{aligned} \tag{12}$$

As a result of substituting (11), (12) into the boundary conditions (9) we obtain the following system of equations:

$$\begin{aligned} \alpha_{11}C_1 + \alpha_{12}C_2 + \alpha_{13}C_3 + \alpha_{14}C_4 &= 0,\\ -\alpha_{11}C_1 + \alpha_{12}C_2 + \alpha_{13}C_3 - \alpha_{14}C_4 &= 0,\\ \alpha_{31}C_1 + \alpha_{32}C_2 + \alpha_{33}C_3 + \alpha_{34}C_4 &= 0,\\ \alpha_{41}C_1 + \alpha_{42}C_2 + \alpha_{43}C_3 + \alpha_{44}C_4 &= 0; \end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned} &\alpha_{11} = (2\mu - \sigma_x^{(0)} - \sigma_y^{(0)})\operatorname{sh}\beta, \qquad \alpha_{12} = (2\mu - \sigma_x^{(0)} - \sigma_y^{(0)})\operatorname{ch}\beta,\\ &\alpha_{13} = \big(1 + a_1(1+\sigma_x^{(0)} + \sigma_y^{(0)})\big)\operatorname{ch}\beta + \beta(1 - \sigma_x^{(0)} - \sigma_y^{(0)})\operatorname{sh}\beta,\\ &\alpha_{14} = (1 - \sigma_x^{(0)} - \sigma_y^{(0)})\operatorname{ch}\beta + \big(1 - a_1(\sigma_x^{(0)} + \sigma_y^{(0)})\big)\operatorname{sh}\beta,\\ &\alpha_{31} = 2\mu\operatorname{ch}\beta + \frac{k}{a}\operatorname{sh}\beta, \qquad \alpha_{32} = 2\mu\operatorname{sh}\beta + \frac{k}{a}\operatorname{ch}\beta,\\ &\alpha_{33} = \Big((\lambda+2\mu)(1-a_1) + \beta\frac{k}{a}\Big)\operatorname{sh}\beta + \Big(2\mu\beta - a_1\frac{k}{a}\Big)\operatorname{ch}\beta,\\ &\alpha_{34} = \Big((\lambda+2\mu)(1-a_1) + \beta\frac{k}{a}\Big)\operatorname{ch}\beta + \Big(2\mu\beta - a_1\frac{k}{a}\Big)\operatorname{sh}\beta,\\ &\alpha_{41} = 2\mu\operatorname{ch}\beta - \frac{k}{a}\operatorname{sh}\beta, \qquad \alpha_{42} = -2\mu\operatorname{sh}\beta + \frac{k}{a}\operatorname{ch}\beta,\\ &\alpha_{43} = \Big(-(\lambda+2\mu)(1-a_1) + \beta\frac{k}{a}\Big)\operatorname{sh}\beta - \Big(2\mu\beta + a_1\frac{k}{a}\Big)\operatorname{ch}\beta,\\ &\alpha_{44} = \Big((\lambda+2\mu)(1-a_1) - \beta\frac{k}{a}\Big)\operatorname{ch}\beta + \Big(2\mu\beta + a_1\frac{k}{a}\Big)\operatorname{sh}\beta, \end{aligned} \tag{14}$$

where $\beta = ah$.

From (13) and (14) we have a relation that, when satisfied, the problem (5), (9), (10) has a non-trivial solution:

$$\begin{vmatrix} \alpha_{13} & \alpha_{33} \\ \alpha_{12} & \alpha_{32} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{14} \\ \alpha_{41} & \alpha_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_{12} & \alpha_{42} \\ \alpha_{13} & \alpha_{43} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{14} \\ \alpha_{31} & \alpha_{34} \end{vmatrix} = 0. \tag{15}$$

Conclusions. Equation (15) is the equation of a curve at the points where the continuous dependence of the solution of the original problems (1)–(3) on $f(x)$ is violated when $f(x) \equiv 0$. In particular, (15) determines the critical values of the external action parameter p and the stiffness parameter of the foundation k. On the plane of these parameters, equation (15) sets a statically special curve when crossing by the loading trajectory, in which the shape of the cross-section will no longer be close to rectangular (the strip loses stability).

Competing interests. We declare that we have no conflict of interest regarding the authorship and publication of this article.

Authors' contributions and responsibilities. N.V. Minaeva: Idea of study; Formulation of research objectives; Analysis of research results; Writing — review & editing. Yu.I. Skalko: Mathematical modeling of deformation of an elastically supported strip, loaded with compressive forces on the side edges, for which it is impossible to establish exact boundary conditions for normal stresses; Processing and analysis of modeling results. V.S. Safronov: Interpretation of the obtained results; Writing — review & editing. S.Yu. Gridnev: Continuous dependence study; Interpretation of results; Writing — review & editing. E.E. Alexandrova: Conducting research using symbolic mathematics packages; Writing — review & editing. The authors are fully responsible for submitting the final manuscript for printing. The final version of the manuscript has been approved by all authors.

Funding. The research was conducted without funding.

References

1. Bolotin V. V. *Nonconservative Problems of the Theory of Elastic Stability*. New York, Pergamon Press, 1963, 320 pp.
2. Ershov L. V., Ivlev D. D. The stability of a strip under compression, *Sov. Phys., Dokl.*, 1961, vol. 6, no. 5, pp. 512–514.
3. Papkovich P. F. On one form of solution of the plane problem of the theory of elasticity for the rectangular strip, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1944, vol. 27, no. 4, pp. 359–374 (In Russian).
4. Sporykhin A. N., Shashkin A. I. *Ustoichivost' ravnovesiia prostranstvennykh tel i zadachi mekhaniki gornykh porod* [Stability of Spatial Equilibrium of Bodies and Problems of the Mechanics of Rock]. Moscow, Fizmatlit, 2004, 232 pp. (In Russian)
5. Vol'mir A. S. *Ustoichivost' uprugikh sistem* [Stability of Elastic Systems]. Moscow, Fizmatgiz, 1963, 880 pp.
6. Ishlinsky A. Yu. On the problem of elastic bodies equilibrium stability in mathematical theory of elasticity, *Ukr. Mat. Zh.*, 1954, vol. 6, no. 2, pp. 140–146 (In Russian).
7. Zachepa V. R., Sapronov Yu. I. *Lokal'nyi analiz fredgol'movykh uravnenii* [Local Analysis of Fredholm Equations]. Voronezh, Voronezh State Univ., 2002, 185 pp. (In Russian)
8. Minaeva N. V. *Adekvatnost' matematicheskikh modelei deformiruemykh tel* [The Adequacy of Mathematical Models of Deformable Bodies]. Moscow, Nauchn. Kniga, 2006, 236 pp. (In Russian)

9. Kolmogorov A. N., Fomin S. V. *Elementy teorii funktsii i funktsional'nogo analiza* [Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis]. Moscow, Fizmatlit, 1976, 543 pp. (In Russian)
10. Minaeva N. V. Stress strain state of the elastic strip with nearly rectangular cross section, *J. Phys.: Conf. Ser.*, 2018, vol. 973, 012012. EDN: XYEFCX. DOI: https://doi.org/10.1088/1742-6596/973/1/012012.
11. Minaeva N. V. Linearization of boundary conditions given in integral form on the boundary of a body in a deformed state, *Bulletin of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Ser. Mechanics of Limit State*, 2010, no. 2(8), pp. 344–348 (In Russian). EDN: NXVSIV.

Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2023. Т. 27, № 3. С. 593–601
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu1990
EDN: MCRSVR

УДК 517.958:539.3

Исследование напряженно-деформированного состояния упругоподкрепленной сжатой полосы*

***Н. В. Минаева*[1], *С. Ю. Гриднев*[2,3], *Ю. И. Скалько*[3], *В. С. Сафронов*[2], *Е. Е. Александрова*[1]**

[1] Воронежский государственный университет,
Россия, 364018, Воронеж, Университетская площадь, 1.
[2] Воронежский государственный технический университет,
Россия, Воронеж, 364022, ул. 20-летия Октября, 84.
[3] Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет),
Россия, 141701, Долгопрудный, Институтский пер., 9.

Аннотация

Проведен анализ непрерывной зависимости функции, описывающей поведение реальной конструкции, от характеристик начальных несовершенств. Получено условие, накладываемое на параметр внешнего воздействия и коэффициент жесткости основания, при нарушении которого форма поперечного сечения полосы уже не будет близкой к прямоугольнику, т.е. полоса теряет устойчивость формы. При проведении исследования параметры внешних воздействий оставались независимыми.

Ключевые слова: упругая полоса, упругое подкрепление, непрерывная зависимость, устойчивость.

Получение: 15 января 2023 г. / Исправление: 18 мая 2023 г. / Принятие: 25 мая 2023 г. / Публикация онлайн: 21 августа 2023 г.

---

*Исходный вариант статьи был опубликован в сборнике *Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики.* Воронеж, 2022. С. 1265–1269. EDN: HZAHMU.

Механика деформируемого твердого тела
Краткое сообщение

Образец для цитирования
Minaeva N.V., Gridnev S.Yu., Skalko Yu.I., Safronov V.S., Alexandrova E.E. The study of the stress-strain state of an elastically supported compressed strip, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2023, vol. 27, no. 3, pp. 593–601. EDN: MCRSVR. DOI: 10.14498/vsgtu1990.

Сведения об авторах

Надежда Витальевна Минаева https://orcid.org/0000-0002-9366-5575
доктор физико-математических наук, доцент; профессор каф. механики и компьютерного моделирования; e-mail: nminaeva@yandex.ru

Сергей Юрьевич Гриднев https://orcid.org/0000-0003-2018-6255
доктор технических наук, профессор; профессор каф. теоретической и строительной механики[2]; ведущий научный сотрудник лаб. флюидодинамики и сейсмоакустики[3]; e-mail: gridnev_s_y@rambler.ru

Конкурирующие интересы. Конфликта интересов в отношении авторства и публикации этой статьи нет.

Авторский вклад и ответственность. Н.В. Минаева — идея исследования; постановка задач исследования; анализ результатов исследований; работа с переработанным вариантом рукописи. Ю.И. Скалько — математическое моделирование деформирование упругоподкрепленной полосы, нагруженной по боковым кромкам сжимающими усилиями, при которых невозможна постановка точных граничных условий для нормальных напряжений; обработка и анализ результатов моделирования. В.С. Сафронов — интерпретация полученных результатов; подготовка первичного варианта рукописи; работа с черновиком и переработанным вариантом рукописи. С.Ю. Гриднев — исследование непрерывной зависимости; интерпретация результатов; работа с черновиком и переработанным вариантом рукописи. Е.Е. Александрова — проведение исследований с использованием пакетов символьной математики; обработка и анализ результатов моделирования; работа с переработанным вариантом рукописи. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

Финансирование. Исследование выполнялось без финансирования.

Юрий Иванович Скалько https://orcid.org/0000-0002-1370-503X
кандидат физико-математических наук, доцент; доцент каф. вычислительной математики; e-mail: skalko@mail.mipt.ru

Владимир Сергеевич Сафронов https://orcid.org/0000-0002-3780-2838
доктор технических наук, профессор; профессор каф. теоретической и строительной механики; e-mail: vss22@mail.ru

Екатерина Евгеньевна Александрова https://orcid.org/0009-0009-9913-4853
аспирант; каф. механики и компьютерного моделирования; e-mail: ilinova-1996@yandex.ru

Учебная литература, изданная в СамГТУ

ПОДПИСКА
на сайте «ООО Урал-Пресс Округ»
http://www.ural-press.ru/

014827 **Технология производства смазочных масел и спецпродуктов.** Учебное пособие / В.А. Тыщенко, И.А. Агафонов, А.А. Пимерзин, Н.Н. Томина, С.А. Антонов, Е.О. Жилкина. – Самара: Самар. гос. техн. ун-т, 2014 – 240 с.

014828 **Номограммы, графики и табличные данные для технологических расчетов процессов переработки нефти и газа:** справочное пособие / В.Г. Власов, И.Г. Агафонов, А.А. Пимерзин, Н.М. Максимов, Е.Е. Вишневская, Д.И. Ишутенко. – Самара: Самар. гос. техн. ун-т, 2017. – 91 с.

014829 **Проектирование установки ЭЛОУ-АВТ:** учебно-методическое пособие / В.Г. Власов, И.А. Агафонов – Изд. 2-е, испр. и доп. – Самара: Самар. гос. техн. ун-т, 2018. – 159 с.

014832 **Химия и технология вторичных процессов переработки нефти:** учебное пособие / Л.И. Заботин. – Самара: Самар. гос. техн. ун-т, 2017. – 332 с.

014833 **Каталитический риформинг**: учеб.-метод. пособие / Л.И. Заботин. – Самара: Самар. гос. техн. ун-т, 2016. – 166 с.

014834 **Проектирование нефтеперерабатывающих заводов:** учеб. пособие / Л.И. Заботин, А.А. Пимерзин, А.В. Можаев. – Самара: Самар. гос. техн. ун-т, 2018. – 129 с.

014835 **Методы очистки нефтяных фракций:** учебное пособие / Н.Н. Томина, Н.М. Максимов, А.А. Пимерзин. – Самара: Самар. гос. техн. ун-т, 2014. – 293 с.

014837 **Катализ в химической промышленности**: учебное пособие / Н.Н. Томина, П.А. Никульшин, Н.М. Максимов, А.А. Пимерзин. – Самара: Самар. гос. техн. ун-т, 2017. – 374 с.

014839 **Процессы нефтехимического синтеза в нефтепереработке:** учебное пособие / В.А. Пильщиков, Ал.А. Пимерзин, А.А. Пимерзин. – Самара: Самар. гос. техн. ун-т, 2017. – 207 с.

014840 **Подготовка и первичная переработка нефти. Проектирование установок ЭЛОУ-АВТ:** учебно-методическое пособие / В.Г Власов, И.А. Агафонов. – Самара: Самар. гос. техн. ун-т, 2015. – 327 с.

014841 **Каталитический кретинг:** учеб.-метод. пособие / Л.И. Заботин. – Самара: Самар. гос. техн. ун-т, 2020. – 97 с.

014842 **Синтетические моторные масла и присадки:** учебное пособие / В.А. Тыщенко, С.В. Котов, А.А. Пимерзин. – Самара: Самар. гос. техн. ун-т, 2020. – 260 с.

014843 **Алкилирование спиртов олефинами. Получение топливных оксигенатов:** учебное пособие / В.А. Пильщиков, Ал.А. Пимерзин, А.А. Пимерзин. – Самара: Самар. гос. техн. ун-т, 2020. – 115 с.

014844 **Методы очистки нефтяных фракций ч. 1.** учебное пособие / Н.Н. Томина, Н.М. Максимов, В.А. Тыщенко, А.А. Пимерзин. – Самара: Самар. гос. техн. ун-т, 2014. – 293 с.