

ISSN 1991-8615 (print)
ISSN 2310-7081 (online)



ВЕСТНИК

САМАРСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО
ТЕХНИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

Серия
«Физико-математические науки»

Т. 27, № 4 – 2023

Вестник Самарского государственного технического университета

ISSN 1991–8615 (print)
ISSN 2310–7081 (online)
НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ
Издаётся с 1996 г.
Выходит 4 раза в год

Декабрь — 2023

Серия

«ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ» (Т. 27, № 4/73 – 2023)

Главный редактор В. П. Радченко — д.ф.-м.н., проф. (Самара, Россия)
Заместитель главного редактора А. И. Жданов — д.ф.-м.н., проф. (Самара, Россия)
Отв. секретарь М. Н. Саушкин — к.ф.-м.н., доц. (Самара, Россия)
Отв. секретарь Е. В. Мурашкин — к.ф.-м.н. (Москва, Россия)
Секретарь Е. А. Козлова — к.ф.-м.н. (Самара, Россия)

Редакционный совет:

- С. А. Авдонин — д.ф.-м.н., проф. (Фэрбенкс, Аляска, США)
- Б. Д. Аннин — акад. РАН, д.ф.-м.н., проф. (Новосибирск, Россия)
- А. А. Буренин — чл. кор. РАН, д.ф.-м.н., проф. (Комсомольск-на-Амуре, Россия)
- Р. Вельмураган — доктор наук (Ченнай, Индия)
- С. П. Верёвкин — д.х.н., проф. (Росток, Германия)
- Ш. Иматани — доктор наук (Киото, Япония)
- О. И. Маричев — д.ф.-м.н., проф. (Ларами, Вайоминг, США)
- В. П. Матвеев — акад. РАН, д.т.н., проф. (Пермь, Россия)
- П. В. Севастьянов — д.т.н., проф. (Ченстохова, Польша)

Редакционная коллегия:

- В. Н. Акопян — д.ф.-м.н., проф. (Ереван, Армения)
- А. П. Амосов — д.ф.-м.н., проф. (Самара, Россия)
- А. В. Боровских — д.ф.-м.н., проф. (Москва, Россия)
- Л. А. Игумнов — д.ф.-м.н., проф. (Нижний Новгород, Россия)
- Ф. дель Изола — д. н., проф. (Рим, Италия)
- В. А. Ковалёв — д.ф.-м.н., проф. (Москва, Россия)
- А. И. Кожанов — д.ф.-м.н., проф. (Новосибирск, Россия)
- В. А. Кудинов — д.ф.-м.н., проф. (Самара, Россия)
- Д. С. Лисовенко — д.ф.-м.н. (Москва, Россия)
- А. Н. Миронов — д.ф.-м.н., проф. (Елабуга, Россия)
- Е. Ю. Просвириков — д.ф.-м.н., (Екатеринбург, Россия)
- Л. С. Пулькина — д.ф.-м.н., проф. (Самара, Россия)
- Ю. Н. Радаев — д.ф.-м.н., проф. (Москва, Россия)
- Е. В. Радкевич — д.ф.-м.н., проф. (Москва, Россия)
- А. В. Саакян — д.ф.-м.н., проф. (Ереван, Армения)
- К. Б. Сабитов — д.ф.-м.н., проф. (Стерлитамак, Россия)
- Л. А. Сараев — д.ф.-м.н., проф. (Самара, Россия)
- А. П. Солдатов — д.ф.-м.н., проф. (Москва, Россия)
- В. В. Стружанов — д.ф.-м.н., проф. (Екатеринбург, Россия)

НАУЧНОЕ ИЗДАНИЕ

Вестник Самарского государственного технического университета.
Серия «Физико-математические науки» (Т. 27, № 4/73 – 2023)

Учредитель — ФГБОУ ВО «Самарский государственный технический университет» 443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244

Редактор Е. С. Захарова

Выпускающий редактор Е. В. Абрамова

Компьютерная вёрстка М. Н. Саушкин, О. С. Афанасьева,
Е. Ю. Арланова

Адрес редакции и издателя:

ФГБОУ ВО «СамГТУ»,

443100, г. Самара,

ул. Молодогвардейская, 244

Тел.: +7 (846) 337 04 43

Факс: +7 (846) 278 44 00

E-mail: vsgtu@samgtu.ru

URL: <http://www.mathnet.ru/vsgtu>

Оригинал-макет изготовлен
на кафедре прикладной математики
и информатики СамГТУ

Свидетельство о регистрации

ПИ № ФС 77–66685 от 27.07.2016.

Федеральная служба по надзору
в сфере связи информационных
технологий и массовых коммуникаций

Подписано в печать 26 декабря 2023 г.

Дата выхода в свет 28 декабря 2023 г.

Формат 70 × 108 1/16.

Усл. печ. л. 13.00. Уч.-изд. л. 12.97.

Тираж 500 экз. Рег. № 211/23.

Заказ № 689.

Отпечатано в типографии
Самарского государственного
технического университета

443100, г. Самара,

ул. Молодогвардейская, 244.

Журнал индексируется в Web of Science Core Collection (Emerging Sources Citation Index), Scopus, Russian Science Citation Index, Zentralblatt MATH, DOAJ и входит в ядро Российского индекса научного цитирования.

Журнал включен в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук, по научным специальностям и соответствующим им отраслям науки:

- 1.1.2 – Дифференциальные уравнения и математическая физика (физико-математические науки);
- 1.1.8 – Механика деформируемого твердого тела (физико-математические науки);
- 1.2.2 – Математическое моделирование численные методы и комплексы программ (физико-математические науки).

Полнотекстовый доступ к статьям журнала осуществляется на Общероссийском математическом портале (<http://www.mathnet.ru>), портале научных журналов «Эко-Вектор» (<https://journals.eco-vector.com>), сайтах научных электронных библиотек eLibrary.ru (<http://elibrary.ru>) и КиберЛенинка (<http://cyberleninka.ru>).

© Коллектив авторов, 2023

© СамГТУ, 2023 (составление, дизайн, макет)

♾️ Контент публикуется на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

Подписной индекс в каталоге агентства «Урал-Пресс» 18108 Цена свободная

Journal of Samara State Technical University

ISSN 1991–8615 (print)
ISSN 2310–7081 (online)
SCIENTIFIC JOURNAL
Published since 1996
4 issues per year
December — 2023

Ser. Physical & Mathematical Sciences, 2023, vol. 27, no. 4

Founder — Samara State Technical University, Samara, 443100, Russian Federation

Editor-in-Chief V. P. Radchenko (Samara, Russian Federation)
Deputy Editor-in-Chief A. I. Zhdanov (Samara, Russian Federation)
Executive Secretary M. N. Saushkin (Samara, Russian Federation)
Executive Secretary E. V. Murashkin (Moscow, Russian Federation)
Secretary E. A. Kozlova (Samara, Russian Federation)

Editorial Council:

- B. D. Annin (Novosibirsk, Russian Federation)
- S. A. Avdonin (Fairbanks, Alaska, USA)
- A. A. Burenin (Komsomolsk-on-Amur, Russian Federation)
- Shōji Imatani (Kyoto, Japan)
- O. I. Marichev (Laramie, Wyoming, USA)
- V. P. Matveenko (Perm, Russian Federation)
- P. V. Sevastiyarov (Częstochowa, Poland)
- Ramachandran Velmurugan (Chennai, India)
- S. P. Verevkin (Rostock, Germany)

Editorial Board:

- A. P. Amosov (Samara, Russian Federation)
- A. V. Borovskikh (Moscow, Russian Federation)
- F. dell'Isola (Rome, Italy)
- V. N. Hakobyan (Yerevan, Armenia)
- L. A. Igumnov (N. Novgorod, Russian Federation)
- V. A. Kovalev (Moscow, Russian Federation)
- A. I. Kozhanov (Novosibirsk, Russian Federation)
- V. A. Kudinov (Samara, Russian Federation)
- D. S. Lisovenko (Moscow, Russian Federation)
- A. N. Mironov (Elabuga, Russian Federation)
- E. Yu. Prosviryakov (Ekaterinburg, Russian Federation)
- L. S. Pulkina (Samara, Russian Federation)
- Yu. N. Radayev (Moscow, Russian Federation)
- E. V. Radkevich (Moscow, Russian Federation)
- K. B. Sabitov (Sterlitamak, Russian Federation)
- A. V. Sahakyan (Yerevan, Armenia)
- L. A. Saraev (Samara, Russian Federation)
- A. P. Soldatov (Moscow, Russian Federation)
- V. V. Struzhanov (Ekaterinburg, Russian Federation)

Edited by E. S. Zakharova, E. V. Abramova
Compiled and typeset by M. N. Saushkin, O. S. Afanas'eva,
E. Yu. Arlanova

The Editorial Board Address:

Dept. of Applied Mathematics and Computer Science,
Samara State Technical University,
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russian Federation

Phone: +7 (846) 337 04 43

Phax: +7 (846) 278 44 00

E-mail: vsgtu@samgtu.ru

URL: <http://www.mathnet.ru/eng/vsgtu>

Printed at the Samara State Technical University Press.

The journal covered in Web of Science Core Collection (Emerging Sources Citation Index), Zentralblatt MATH, Scopus, Russian Science Citation Index, and DOAJ.

The full-text electronic version of journal is hosted by the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru (<http://www.mathnet.ru>), the Eco-Vector Journals Portal (<https://journals.eco-vector.com>), and by the web-sites of scientific electronic libraries eLibrary.ru (<http://elibrary.ru>) and CyberLeninka (<http://cyberleninka.ru>).

© Authors, 2023

© Samara State Technical University, 2023 (Compilation, Design, and Layout)

 The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Содержание

Дифференциальные уравнения и математическая физика

Дурдиев Д. К. “Обратная задача для уравнения смешанного парабола-гиперболического типа с характеристической линией изменения” 607

Уринов А. К., Орипов Д. Д. “О разрешимости одной начально-граничной задачи для вырождающегося уравнения высокого четного порядка” 621

Механика деформируемого твёрдого тела

Глазова Е. Г., Кочетков А. В., Лисицын А. А., Модин И. А. “Численное моделирование взаимодействия деформируемого газопроницаемого фрагмента гранулированного слоя с ударной волной в трехмерной постановке” 645

Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. “Термомеханические состояния гиротропных микрополярных тел” 659

Севодина Н. В., Юрлова Н. А., Ошмарин Д. А. “Способ определения параметров электрического сигнала для управления вынужденными установившимися колебаниями электровязкоупругих тел. Математические соотношения” 679

Худойназаров Х. Х. “Моделирование нелинейных крутильных колебаний усеченного конического стержня” 704

Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

Романов Д. В., Романов К. В., Романов В. А., Степанов Е. А., Лебедев А. А. “Математическое моделирования зарождения солнечных пятен на фотосферном уровне Солнца” 723

Краткие сообщения

Touail Y., Jaid A., El Moutawakil D. “Новая общая теорема о неподвижной точке в ортогональных метрических пространствах и ее приложение” 737

Сабитов К. Б. “Об одном способе суммирования многомерных рядов” 745

Ганигин С. Ю., Гречухина М. С., Нечаев А. С. “Оценка вероятности столкновения разноразмерных частиц порошков при формировании композиционных покрытий детонационным способом” 753

Contents

Differential Equations and Mathematical Physics

Durdiev D. K. “Inverse problem for an equation of mixed parabolic-hyperbolic type with a characteristic line of change” 607

Urinov A. K., Oripov D. D. “On the solvability of an initial boundary problem for a high even order degenerate equation” 621

Mechanics of Solids

Glazova E. G., Kochetkov A. V., Lisitsyn A. A., Modin I. A. “Numerical simulation of the interaction of a deformable gas permeable fragment of a granular layer with a shock wave in a three-dimensional formation” 645

Murashkin E. V., Radayev Yu. N. “Thermomechanical states of gyrotropic micropolar solids” 659

Sevodina N. V., Iurlova N. A., Oshmarin D. A. “Method for determining the parameters of an electrical signal for controlling forced steady-state vibrations of electroviscoelastic bodies. Mathematical relations” 679

Khudoynazarov Kh. Kh. “Modeling of nonlinear torsional vibrations of a truncated conical rod” 704

Mathematical Modeling, Numerical Methods and Software Complexes

Romanov D. V., Romanov K. V., Romanov V. A., Stepanov E. A., Lebedev A. A. “Mathematical modeling of sunspot nucleation at the photospheric level of the Sun” 723

Short Communications

Touail Y., Jaid A., El Moutawakil D. “A new common fixed point theorem on orthogonal metric spaces and an application” 737

Sabitov K. B. “One way of summing multidimensional series” 745

Ganigin S. Yu., Grechukhina M. S., Nechaev A. S. “Estimation of the probability of collision of heterogeneous particles of composite powders during the formation of coatings by detonation method” 753



УДК 517.956.6

Обратная задача для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа с характеристической линией изменения

Д. К. Дурдиев

- ¹ Бухарское отделение Института математики Академии наук Республики Узбекистан, Узбекистан, 705018, Бухара, ул. М. Икбол, 11.
² Бухарский государственный университет, Узбекистан, 705018, Бухара, ул. М. Икбол, 11.

Аннотация

Изучены прямая и обратная задачи для модельного уравнения смешанного параболо-гиперболического типа. В прямой задаче рассмотрен аналог задачи Трикоми для этого уравнения с характеристической линией изменения типа. Неизвестным обратной задачи является переменный коэффициент при младшем члене параболического уравнения. Для его определения относительно решения, определяемого в параболической части области, задается интегральное условие переопределения. Доказаны локальные теоремы однозначной разрешимости поставленных задач в смысле классического решения.

Ключевые слова: параболо-гиперболическое уравнение, характеристика, функция Грина, обратная задача, принцип сжатых отображений.

Получение: 30 мая 2023 г. / Исправление: 10 ноября 2023 г. /

Принятие: 13 декабря 2023 г. / Публикация онлайн: 25 декабря 2023 г.

Дифференциальные уравнения и математическая физика Научная статья

© Коллектив авторов, 2023

© СамГТУ, 2023 (составление, дизайн, макет)

📄 🌐 📄 Контент публикуется на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

Образец для цитирования

Дурдиев Д. К. Обратная задача для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа с характеристической линией изменения // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2023. Т. 27, № 4. С. 607–620. EDN: AFYBZR. DOI: 10.14498/vsgtu2027.

Сведения об авторе

Дурдимурод Каландарович Дурдиев ✉ <https://orcid.org/0000-0002-6054-2827>

доктор физико-математических наук, профессор; заведующий отделением¹; профессор, каф. дифференциальных уравнений²; e-mail: d.durdiev@mathinst.uz

Постановка задачи. Пусть Ω_{lT} — область на плоскости (x, y) , состоящая из объединения двух подобластей, т.е. $\Omega_{lT} = \Omega_{1lT} \cup \Omega_{2l}$, где $\Omega_{1lT} = \{(x, y) : 0 < x < l, 0 < y \leq T\}$, $\Omega_{2l} = \{(x, y) : -y < x \leq y + l, -l/2 < y < 0\}$; l, T — фиксированные положительные числа. В этой области рассмотрим уравнение смешанного парабола-гиперболического типа:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1 - \operatorname{sign} y}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{1 + \operatorname{sign} y}{2} \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{1 + \operatorname{sign} y}{2} q(x)u(x, y) = 0. \quad (1)$$

Для уравнения (1) линия изменения типа $y = 0$ является характеристикой (линией параболического вырождения второго рода [1, стр. 258]).

Прямая задача. В области Ω_{lT} найти решение уравнения (1), удовлетворяющее следующим граничным условиям:

$$u|_{x=0} = \varphi_1(y), \quad u|_{x=l} = \varphi_2(y), \quad y \in [0, T], \quad (2)$$

$$u|_{y=-x} = \psi(x), \quad x \in [0, l/2], \quad (3)$$

где $\varphi_1(y), \varphi_2(y), \psi(x)$ — заданные функции.

Под классическим решением прямой задачи (1)–(3) понимается функция $u(x, y)$ из класса $C(\Omega_{lT}) \cap C^1(\Omega_{lT}) \cap C_{x,y}^{1,2}(\Omega_{1lT}) \cap C^2(\Omega_{2l})$, которая удовлетворяет уравнению (1) и условиям (2), (3).

В обратной задаче требуется определить переменный коэффициент $q(x) \in C[0, l]$ уравнения (1), если относительно решения прямой задачи (1)–(3) задано следующее дополнительное условие:

$$\int_0^T h(y)u(x, y)dy = f(x), \quad x \in [0, l], \quad (4)$$

где $h(y), f(x)$ — заданные достаточно гладкие функции.

Уравнения смешанного парабола-гиперболического типа возникают при математическом моделировании различных процессов из области естествознания, например, при изучении движения газа или малосжимаемой жидкости в канале, окруженном пористой средой — в канале газодинамическое давление жидкости или газа удовлетворяет волновому уравнению, а в пористой среде описывается уравнением диффузии. Математическое исследование напряженности электромагнитного поля в неоднородной среде, состоящей из диэлектрика и проводящей среды, приводит к системе, состоящей из волнового уравнения и уравнения теплопроводности. Многие задачи теплообмена в средах с различным временем релаксации и массообмена в капиллярно-пористых средах также сводятся к задачам для смешанных парабола-гиперболических уравнений. С математическими моделями таких процессов можно ознакомиться в работах [2–5].

Впервые аналог задачи Трикоми для парабола-гиперболического уравнения был исследован в работе [6]. Методы исследования прямых и обратных задач, связанных с поиском решения начально-краевой задачи для уравнений смешанного парабола-гиперболического типа и неизвестной правой части этого уравнения в прямоугольной области, были предложены в монографии [7]

(см. также работы [8–13]). Широкий класс прямых начально-краевых и обратных задач для вырождающихся уравнений смешанного парабола-гиперболического типа исследован в работах [14–17]. В работе [18] такие задачи изучены для уравнений смешанного типа с дробными производными по времени в параболической части уравнения.

Отметим, что обратные задачи для уравнений смешанного типа не так хорошо изучены, как аналогичные задачи для классических уравнений. Обратные задачи определения переменных коэффициентов и правых частей отдельных параболических уравнений второго порядка исследовались в работах [19–21] (см. также монографии [22, 23]). В работах [24–27] рассматривались задачи восстановления сверточного ядра в параболических уравнениях, описывающих явления запаздывания. В монографиях [28–31] (см. также обширную библиографию в них) можно ознакомиться с различными обратными задачами для уравнений гиперболического типа второго порядка.

Настоящая статья продолжает исследования работы [32], в которой изучена однозначная разрешимость обратной задачи определения переменного коэффициента при младшем члене гиперболического уравнения для смешанного парабола-гиперболического уравнения с нехарактеристической линией изменения типа.

Всюду в данной работе относительно заданных функций будем предполагать выполненными следующие условия:

$$(B1) \quad \varphi_1(y), \varphi_2(y) \in C^1[0, T]; \quad \psi(x) \in C^2[0, l/2];$$

$$(B2) \quad \varphi_1(0) = \varphi_2(0) = \psi(0) = 0;$$

$$(B3) \quad h(y) \in C^1[0, T]; \quad h(0) = h(T) = 0; \quad f(x) \in C^2[0, l]; \quad \int_0^T h(y)\varphi_1(y)dy = f(0), \\ \int_0^T h(y)\varphi_2(y)dy = f(l), \quad f(x) \neq 0 \text{ для всех } x \in [0, l].$$

Исследование прямой задачи. Предположим, что функция $q(x)$ известна.

ТЕОРЕМА 1. Пусть выполнены условия (B1), (B2), $q(x) \in C[0, l]$ и

$$l\|q\|_{C[0, l]} < 1. \quad (5)$$

Тогда в области Ω_{lT} существует единственное решение прямой задачи (1)–(3).

Доказательство. Введем обозначения $\tau(x) := u(x, 0)$, $\nu(x) = \frac{\partial}{\partial y}u(x, 0)$. Тогда в силу однозначной разрешимости задачи Коши для волнового уравнения решение уравнения (1) в области Ω_{2l} может быть выписано по формуле Даламбера:

$$u(x, y) = \frac{1}{2}[\tau(x+y) + \tau(x-y)] - \frac{1}{2} \int_{x+y}^{x-y} \nu(s)ds. \quad (6)$$

С учетом равенства (3) и условий (B2) из последнего соотношения следует, что

$$\tau(x) = 2\psi\left(\frac{x}{2}\right) + \int_0^x \nu(s)ds, \quad x \in [0, l]. \quad (7)$$

Дифференцируя это равенство, имеем

$$\tau'(x) = \psi'\left(\frac{x}{2}\right) + \nu(x), \quad x \in [0, l]. \quad (8)$$

Равенства (6) и (7) можно условно назвать основными соотношениями для $\tau(x)$ и $\nu(x)$, полученными из гиперболической части области.

Известно [1, стр. 197], что функция Грина первой начально-краевой задачи для уравнения $u_{xx} - u_y = 0$, $x \in (0, l)$, $y > 0$ имеет вид

$$G(x, \xi, y) = \frac{1}{2\sqrt{\pi y}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\exp\left(-\frac{(x - \xi + 2n)^2}{4y}\right) - \exp\left(-\frac{(x + \xi + 2n)^2}{4y}\right) \right].$$

Используя это представление, решение (1) в области Ω_{lT} с условиями (2) запишем в виде интегрального уравнения

$$u(x, y) = \int_0^l G(x, \xi, y)\tau(\xi)d\xi + \int_0^y G_\xi(x, 0, y - \eta)\varphi_1(\eta)d\eta - \int_0^y G_\xi(x, l, y - \eta)\varphi_2(\eta)d\eta - \int_0^y \int_0^l G(x, \xi, y - \eta)q(\xi)u(\xi, \eta)d\xi d\eta. \quad (9)$$

Продифференцируем (9) по y , учитывая формулу $\lim_{\eta \rightarrow y} G(x, \xi, y - \eta) = \delta(x - \xi)$, где $\delta(\cdot)$ — дельта-функция Дирака. Полагая в получающемся уравнении $y = 0$, учитывая, что $u_y(x, 0) = \nu(x)$, и используя соотношение

$$\int_0^l G_y(x, \xi, y)\tau(\xi)d\xi = \int_0^l G(x, \xi, y)\tau''(\xi)d\xi,$$

которое может быть получено на основе равенств $G_y(x, \xi, y) = G_{\xi\xi}(x, \xi, y)$, $\tau(0) = \tau(l)$ (следствие соотношений (B1)), интегрированием по частям с использованием свойств функции $G(x, \xi, y)$ [33, стр. 32–52] получим

$$\nu(x) = \tau''(x) - q(x)\tau(x). \quad (10)$$

Сопоставляя (8) и (10), находим обыкновенное дифференциальное уравнение для определения неизвестной $\tau(x)$

$$\tau''(x) - \tau'(x) - q(x)\tau(x) = -\psi'\left(\frac{x}{2}\right), \quad x \in (0, l) \quad (11)$$

с краевыми условиями

$$\tau(0) = 0, \quad \tau(l) = 0. \quad (12)$$

Задача (11), (12) эквивалентна интегральному уравнению

$$\tau(x) = \tau_0(x) + \int_0^l K(x, t)q(t)\tau(t)dt, \quad (13)$$

где

$$\tau_0(x) = - \int_0^l K(x, t)\psi'\left(\frac{t}{2}\right)dt,$$

$$K(x, t) = \frac{1}{e^l - 1} \begin{cases} (e^x - 1)(1 - e^{l-x}), & 0 \leq x \leq t, \\ (e^x - e^l)(1 - e^{-t}), & t \leq x \leq l. \end{cases}$$

Задача (11), (12) имеет единственное решение тогда и только тогда, когда однородное уравнение, соответствующее (11) с однородными граничными условиями (12), имеет только нулевое решение [34, стр. 225–240]. Это эквивалентно тому, что однородное интегральное уравнение, соответствующее (13), имеет только нулевое решение.

ЛЕММА. Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда уравнение (13) с $\tau_0(x) = 0$ имеет только тривиальное решение.

Доказательство. Введем обозначение

$$\Lambda(\tau(x)) := \int_0^l K(x, t)q(t)\tau(t)dt.$$

Тогда уравнение (13) с $\tau_0(x) = 0$ может быть переписано в виде операторного уравнения

$$\tau(x) = \Lambda(\tau(x)). \tag{14}$$

Очевидно, что оператор Λ непрерывен в классе функций $C[0, l]$.

Покажем, что Λ является оператором сжатия в $C[0, l]$. Поскольку

$$\max_{0 \leq x, t \leq l} |K(x, t)| \leq 1,$$

легко видеть, что неравенство

$$\|\Lambda(\tau_1) - \Lambda(\tau_2)\|_{C[0, l]} \leq l \|q\|_{C[0, l]} \|\tau_1 - \tau_2\|_{C[0, l]}$$

выполняется для любых функций $\tau_1(x), \tau_2(x) \in C[0, l]$. Отсюда с учетом (5) следует, что оператор Λ является сжимающим в $C[0, l]$. Следовательно, оператор Λ имеет единственную неподвижную точку в пространстве $C[0, l]$. Так как $\tau(x) = 0$ является решением уравнение (14), оно единственно. Лемма доказана. \square

После того как найдем функцию $\tau(x)$, запишем (6) с учетом (8) в виде

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \frac{1}{2}[\tau(x+y) + \tau(x-y)] - \frac{1}{2} \int_{x+y}^{x-y} \left[\tau'(s) - \psi'\left(\frac{s}{2}\right) \right] ds = \\ &= \tau(x+y) + \psi\left(\frac{x-t}{2}\right) - \psi\left(\frac{x+t}{2}\right). \end{aligned}$$

Отсюда ясно, что при выполнении условий (B1) (касательно ψ) имеем $u(x, y) \in C^2(\Omega_{2l})$.

Заметим также, что уравнение (9) на основе условий, наложенных на φ_1, φ_2 в (B1), определяет функцию $u(x, y) \in C_{x,y}^{1,2}(\Omega_{1lT})$, т.е. решение задачи (1), (2) в области Ω_{1lT} .

Таким образом, построенные функции в Ω_{1lT} и Ω_{2l} в совокупности являются классическим решением прямой задачи (1)–(3) в области Ω_{lT} . Теорема 1 доказана. \square

ЗАМЕЧАНИЕ 1. На самом деле, используя принцип максимума, можно доказать единственность решения прямой задачи. При этом условие (5) можно ослабить, заменив его на $q(x) \geq 0$ (см. [7, стр. 15–17]).

Исследование обратной задачи. Пусть выполнены условия (B3). Умножая уравнение (1) в области Ω_{lT} на функцию $h(y)$, интегрируя полученное по отрезку $[0, T]$ и учитывая (4), находим

$$q(x) = \frac{f''(x)}{f(x)} + \frac{1}{f(x)} \int_0^T h'(y)u(x, y)dy, \quad x \in [0, l]. \quad (15)$$

Теперь с помощью этой формулы исключим функцию $q(x)$ из (9), (13) и запишем эти уравнения в операторно-векторном виде:

$$v(x, y) = U[v](x, y), \quad (x, y) \in \bar{\Omega}_{lT}, \quad (16)$$

где

$$v(x, y) = [v_1(x, y), v_2(x)]^* := \left[u(x, y) - \int_0^l G(x, \xi, y)\tau(\xi)d\xi, \tau(x) \right]^*,$$

* — знак транспонирования, а компоненты оператора $U = [U_1, U_2]^*$ определяются равенствами

$$U_1 v(x, y) = v_{01}(x, y) - \int_0^y \int_0^l G(x, \xi, y) \left[\frac{f''(\xi)}{f(\xi)} + \frac{1}{f(\xi)} \int_0^T h'(s)v_1(\xi, s)ds \right] \times \\ \times \left[v_1(\xi, \eta) + \int_0^l G(\xi, s, \eta)v_2(s)ds \right] d\xi d\eta, \quad (17)$$

$$U_2 v(x) = v_{02}(x) + \int_0^l K(x, \xi) \left[\frac{f''(\xi)}{f(\xi)} + \frac{1}{f(\xi)} \int_0^T h'(s)v_1(\xi, s)ds \right] v_2(\xi)d\xi, \quad (18)$$

где в (17) и (18) через v_{01} и v_{02} обозначены свободные от неизвестных члены интегральных уравнений:

$$v_{01}(x, y) := \int_0^y G_\xi(x, 0, y-\eta)\varphi_1(\eta)d\eta - \int_0^y G_\xi(x, l, y-\eta)\varphi_2(\eta)d\eta, \quad v_{02}(x) := \tau_0(x).$$

Основным результатом настоящего раздела является следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 2. Пусть выполнены условия (B1), (B2) и (B3). Тогда существуют числа $l^* \in (0, l)$, $T^* \in (0, T)$ такие, что в области $\bar{\Omega}_{l^*T^*}$ уравнение (16) имеет единственное решение $u(x, y) \in C(\bar{\Omega}_{l^*T^*})$, $\tau(x) \in C[0, l^*]$.

Доказательство. Обратимся к уравнению (16). Очевидно, что оператор U переводит функции $v(x, y) \in C(\bar{\Omega}_{lT})$ в функции, также принадлежащие пространству $C(\bar{\Omega}_{lT})$. Определим в $C(\bar{\Omega}_{lT})$ следующую норму:

$$\|v\|_{lT} = \max \left\{ \max_{(x,y) \in \bar{\Omega}_{lT}} |v_1(x, y)|, \max_{x \in [0, l]} |v_2(x)| \right\}.$$

Для сокращения записей введем обозначения

$$f_0 := \min_{x \in [0, l]} |f(x)|, \quad f_1 := \max_{x \in [0, l]} |f''(x)|, \quad h_0 := \max_{x \in [0, T]} |h'(y)|.$$

Покажем теперь, что при достаточно малых l и T оператор U осуществляет сжатое отображение шара

$$S(v_0, r) := \{v : \|v - v_0\|_{lT} \leq r\} \subset C(\bar{\Omega}_{lT})$$

радиуса r (r — известное число) с центром в точке $v_0(x, y) = (v_{01}(x, y), v_{02}(x))$ на себя и является сжатием. Тем самым мы покажем, что уравнение (16) имеет в области $\bar{\Omega}_{lT}$ единственное непрерывное решение, удовлетворяющее неравенству $\|v - v_0\|_{lT} \leq r$.

Очевидно, что для элементов $v \in S(v_0, r)$ имеет место оценка

$$\|v\|_{lT} \leq \|v_0\|_{lT} + r =: R,$$

где

$$\|v_0\|_{lT} = \max \left\{ \max_{(x, y) \in \bar{\Omega}_{lT}} |v_{01}(x, y)|, \max_{x \in [0, l]} |v_{02}(x)| \right\}.$$

Пусть

$$T_1 := \frac{1}{Rh_0} \left(\frac{f_0}{l} - f_1 \right), \quad T_2 := \frac{1}{2Rh_0} [(f_1^2 + 2Rf_0h_0)^{1/2} - f_1], \quad l^* = \frac{f_0}{f_1}.$$

Оценим $\|v_0\|_{lT}$. Для этого получим оценки интегралов, в которых присутствуют функции G , G_ξ в определениях компонент вектор-функции $v_0(x, y)$. Будем использовать равенство

$$\int_0^l G(x, \xi, y) d\xi = 1,$$

вытекающее из определения функции G . Заметим, что G имеет эквивалентное выражение [33, стр. 200–204]:

$$G(x, \xi, y) = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \exp \left[- \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 y \right] \sin \frac{n\pi x}{2} \sin \frac{n\pi \xi}{2}.$$

С учетом этого выражения имеем равенство

$$\begin{aligned} G_\xi(x, 0, y - \eta) &= \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \exp \left[- \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 (y - \eta) \right] \frac{n\pi}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} = \\ &= \frac{1}{l} \int_0^l G_\eta(x, \xi, y - \eta) (l - \xi) d\xi, \end{aligned}$$

которое проверяется непосредственно. Воспользовавшись последним равенством, преобразуем следующий интеграл:

$$\begin{aligned} \int_0^y G_\xi(x, 0, y - \eta)\varphi_1(\eta)d\eta &= \frac{1}{l} \int_0^l (l - \xi) \int_0^y G_\eta(x, \xi, y - \eta)\varphi_1(\eta)d\eta d\xi = \\ &= \frac{1}{l} \int_0^l (l - \xi) \left\{ \left[G(x, \xi, y - \eta)\varphi_1(\eta) \right]_0^y - \int_0^y G(x, \xi, y - \eta)\varphi_1'(\eta)d\eta \right\} d\xi = \\ &= \frac{l - x}{l} \varphi_1(y) + \frac{1}{l} \int_0^l (l - \xi) \int_0^y G(x, \xi, y - \eta)\varphi_1'(\eta)d\eta d\xi. \end{aligned}$$

Из этих соотношений для $(x, y) \in C(\overline{\Omega}_{1lT})$ легко вытекает оценка

$$\left| (1 + l) \int_0^y G_\xi(x, 0, y - \eta)\varphi_1(\eta)d\eta \right| \leq \| \varphi_1 \|_{C^1[0, T]}. \quad (19)$$

Подобным образом для $(x, y) \in C(\overline{\Omega}_{1lT})$ может быть получена оценка

$$\left| \int_0^y G_\xi(x, l, y - \eta)\varphi_2(\eta)d\eta \right| \leq (1 + l) \| \varphi_2 \|_{C^1[0, T]}. \quad (20)$$

Тогда из неравенств (19), (20) следует оценка

$$\| v_0 \|_l \leq \max \left\{ 2(1 + l) \max (\| \varphi_1 \|_{C^1[0, T]}, \| \varphi_2 \|_{C^1[0, T]}), \| \psi'(x) \|_{C[0, l/2]} \right\}. \quad (21)$$

Определим условия, при которых возможно применение теоремы о неподвижной точке к оператору U . Пусть $v \in S(v_0, r)$. Тогда из (17), (18) нетрудно заметить, что $Uv \in S(v_0, r)$. Кроме того, для всех $(x, y) \in \overline{\Omega}_{1lT}$ с учетом оценок (19)–(21) получим неравенства

$$\begin{aligned} |U_1v - v_{01}| &\leq \int_0^y \int_0^l G(x, \xi, y) \left[\frac{|f''(\xi)|}{|f(\xi)|} + \frac{1}{|f(\xi)|} \int_0^T |h'(s)| |v_1(\xi, s)| ds \right] \times \\ &\times \left[|v_1(\xi, \eta)| + \int_0^l G(\xi, s, \eta) |v_2(s)| ds \right] d\xi d\eta \leq \frac{2RT}{f_0} (f_1 + RT h_0); \quad (22) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |U_2v - v_{02}| &\leq \int_0^l K(x, \xi) \left[\frac{|f''(\xi)|}{|f(\xi)|} + \frac{1}{|f(\xi)|} \int_0^T |h'(s)| |v_1(\xi, s)| ds \right] |v_2(\xi)| d\xi \leq \\ &\leq \frac{1}{f_0} (f_1 + RT h_0) Rl, \quad (23) \end{aligned}$$

из которых следует, что для $T \leq T^*$ и $l \leq l^*$ имеет место $\| v - v_0 \|_{lT} \leq r$, т.е. $Uv \in S(v_0, r)$.

Осталось показать, что оператор U сжимает расстояние между элементами шара $S(v_0, r)$. Для доказательства этого факта возьмем любые два элемента $v^1, v^2 \in S(v_0, r)$ и оценим норму разности между их образами Uv^1, Uv^2 . Обозначим компоненты элементов v^1, v^2 через $v_i^1, v_i^2, i = 1, 2$. При оценке $\| Uv^1 - Uv^2 \|_{lT}$ воспользуемся неравенством

$$|(v_i^1)^2 - (v_i^2)^2| = |v_i^1 + v_i^2| |v_i^1 - v_i^2| \leq 2R \| v^1 - v^2 \|_{lT}, \quad i = 1, 2,$$

которое имеет место для произвольных $v^1, v^2 \in S(v_0, r)$. Используя формулы (17), (18) и оценки (19)–(21), подобно неравенствам (22), (23) найдем

$$\begin{aligned} \max \left\{ \max_{(x,y) \in \Omega_{lT}} |U_1 v^1 - U_1 v^2|, \max_{x \in [0,l]} |U_2 v^1 - U_2 v^2| \right\} &\leq \\ &\leq \frac{1}{f_0} (f_1 + 2RT h_0) \max\{l, 2T\} \|v^1 - v^2\|_{lT}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\|Uv^1 - Uv^2\|_{lT} \leq \frac{T}{T^*} \|v^1 - v^2\|_{lT},$$

и оператор U при $T \in (0, T^*)$ и $l \in (0, l^*)$ осуществляет сжатое отображение шара $S(v_0, r)$ на себя. Тогда, согласно принципу сжимающих отображений, уравнение (16) определяет единственное решение, принадлежащее этому шару. Теорема 2 доказана. \square

Введем обозначение $l_1 := f_0 [f_1 + 2h_0(\|v_0\|_{l^*T^*} + r)T^*]^{-1}$.

ТЕОРЕМА 3. При выполнении условий теоремы 2 на отрезке $[0, l_0]$, где $l_0 = \min\{l^*, l_1\}$, существует единственное непрерывное решение обратной задачи (1)–(4).

Для доказательства заметим, что из $v(x, y) \in S(v_0, r)$ с учетом

$$u(x, y) = v_1(x, y) + \int_0^{l^*} G(x, \xi, y) v_2(\xi) d\xi$$

следует оценка $|u(x, y)| \leq 2R = 2(\|v_0\|_{l^*T^*} + r)$. Используя эту оценку, из (15) получим неравенство $\|q\|_{C[0,l]} \leq (l/f_0) [f_1 + 2h_0(\|v_0\|_{l^*T^*} + r)T^*]$. Ввиду (5) из последнего неравенства следует доказательство теоремы 3.

Конкурирующие интересы. Конкурирующих интересов не имею.

Авторская ответственность. Я несу полную ответственность за предоставление окончательной версии рукописи в печать. Окончательная версия рукописи мною одобрена.

Финансирование. Исследование выполнялось без финансирования.

Благодарность. Автор благодарен рецензентам за тщательное прочтение статьи, ценные замечания и предложения.

Библиографический список

1. Бабич В. М., Капилевич М. Б., Михлин С. Г. [и др.] *Линейные уравнения математической физики* / Справочная математическая библиотека. М.: Наука, 1964. 368 с.
2. Азиз Х., Сеттари Э. *Математическое моделирование пластовых систем*. Москва, Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2004. 416 с. EDN: RYRUBF.
3. Уфлянд Я. С. *Интегральные преобразования в задачах теории упругости*. М.: Наука, 1968. 402 с.
4. Пашков А. Г. *Системно-структурный анализ процессов теплообмена и его применение*. М.: Энергоатомиздат, 1983. 280 с.

5. Нахушев А. М. *Уравнения математической биологии*. М.: Высш. шк., 1995. 301 с. EDN: PDBBNB.
6. Золина Л. А. О краевой задаче для модельного уравнения гипербола-параболического типа // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 1966. Т. 6, № 6. С. 991–1001.
7. Сабитов К. Б. *Прямые и обратные задачи для уравнений смешанного парабола-гиперболического типа*. М.: Наука, 2016. 271 с. EDN: QWTYOF.
8. Сабитов К. Б., Сафин Э. М. Обратная задача для уравнения смешанного парабола-гиперболического типа в прямоугольной области // *Изв. вузов. Матем.*, 2010. № 4. С. 55–62. EDN: KYKDWZ.
9. Сабитов К. Б., Сафин Э. М. Обратная задача для уравнения смешанного парабола-гиперболического типа // *Матем. заметки*, 2010. Т. 87, № 6. С. 907–918. EDN: RLREGJ. DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm6577>.
10. Сабитов К. Б. Начально-граничная и обратные задачи для неоднородного уравнения смешанного парабола-гиперболического уравнения // *Матем. заметки*, 2017. Т. 102, № 3. С. 415–435. EDN: ZDNXPZ. DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm11521>.
11. Джамалов С. З. Об одной нелокальной краевой задаче с постоянными коэффициентами для многомерного уравнения смешанного типа // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2017. Т. 21, № 4. С. 597–610. EDN: YUGZUW. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1536>.
12. Сабитов К. Б., Мартемьянова Н В. Нелокальная обратная задача для уравнения смешанного типа // *Изв. вузов. Матем.*, 2011. № 2. С. 71–85. EDN: MXAIQZ.
13. Юнусова Г. Р. Нелокальные задачи для уравнения смешанного парабола-гиперболического типа // *Вестн. СамГУ. Естественнонаучн. сер.*, 2011. № 8(89). С. 108–117. EDN: POMWCT.
14. Сабитов К. Б., Сидоров С. Н. Обратная задача для вырождающегося парабола-гиперболического уравнения с нелокальным граничным условием // *Изв. вузов. Матем.*, 2015. № 1. С. 46–59. EDN: RARUBX.
15. Сидоров С. Н. Обратные задачи для вырождающегося смешанного парабола-гиперболического уравнения по нахождению сомножителей правых частей, зависящих от времени // *Уфимск. матем. журн.*, 2019. Т. 11, № 1. С. 72–86. EDN: HSNBHX.
16. Сабитов К. Б., Сидоров С. Н. Об одной нелокальной задаче для вырождающегося парабола-гиперболического уравнения // *Диффер. уравн.*, 2014. Т. 50, № 3. С. 356–365. EDN: RWZWFY. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0374064114030091>.
17. Сабитов К. Б., Сидоров С. Н. Начально-граничная задача для неоднородных вырождающихся уравнений смешанного парабола-гиперболического типа / *Дифференциальные уравнения. Математическая физика* / Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз., Т. 137. М.: ВИНТИ РАН, 2017. С. 26–60. EDN: AQKFYP.
18. Durdiev D. K. Inverse source problem for an equation of mixed parabolic-hyperbolic type with the time fractional derivative in a cylindrical domain // *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2022. vol. 26, no. 2. pp. 355–367. EDN: TWHCKX. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1921>.
19. Прилепко А. И., Костин А. В., Соловьев В. В. Обратные задачи нахождения источника и коэффициентов для эллиптических и параболических уравнений в пространствах Гельдера и Соболева // *Сиб. журн. чист. и прикл. матем.*, 2017. Т. 17, № 3. С. 67–85. EDN: RSFCQR. DOI: <https://doi.org/10.17377/PAM.2017.17.7>.
20. Иванов Н. И. Об обратной задаче одновременного определения коэффициентов теплопроводности и теплоемкости // *Сиб. матем. журн.*, 1994. Т. 35, № 3. С. 612–621.
21. Durdiev D. K., Durdiev D. D. The Fourier spectral method for determining a heat capacity coefficient in a parabolic equation // *Turk. J. Math.*, 2022. vol. 46, no. 8. pp. 3223–3233. DOI: <https://doi.org/10.55730/1300-0098.3329>.
22. Денисов А. М. *Введение в теорию обратных задач*. М.: Моск. ун-т, 1994. 208 с.
23. Prilepko A. I., Orlovsky D. G., Vasin I. A. *Methods for Solving Inverse Problems in Mathematical Physics* / Pure and Applied Mathematics. vol. 231. New York, NY: Marcel Dekker, 2000. xiii+709 pp. DOI: <https://doi.org/10.1201/9781482292985>.

24. Durdiev D. K., Zhumaev Zh. Zh. Memory kernel reconstruction problems in the integro-differential equation of rigid heat conductor // *Math. Meth. Appl. Sci.*, 2022. vol. 45, no. 14. pp. 8374–8388. EDN: AWTYYE DOI: <https://doi.org/10.1002/mma.7133>.
25. Durdiev D. K., Zhumaev Zh. Zh. One-dimensional inverse problems of finding the kernel of integrodifferential heat equation in a bounded domain // *Ukr. Math. J.*, 2022. vol. 73, no. 11. pp. 1723–1740. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11253-022-02026-0>.
26. Durdiev D. K., Zhumaev Zh. Zh., Atoev D. D. Inverse problem on determining two kernels in integro-differential equation of heat flow // *Ufimsk. Mat. Zh.*, 2023. vol. 15, no. 2. pp. 120–135.
27. Дурдиев Д. К., Жумаев Ж. Ж. Задача определения тепловой памяти проводящей среды // *Диффер. уравн.*, 2020. Т. 56, № 6. С. 796–807. EDN: WPINKQ. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0374064120060114>.
28. Романов В. Г. *Обратные задачи математической физики*. М.: Наука, 1984. 264 с.
29. Кабанихин С. И. *Обратные и некорректные задачи*. Новосибирск: Сибирское научное изд-во, 2009. 457 с.
30. Hasanoglu A. H., Romanov V. G. *Introduction to Inverse Problems for Differential Equations*. Cham: Springer, 2017. xiii+261 pp. EDN: PLGFAS. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-319-62797-7>.
31. Durdiev D. K., Totieva Z. D. *Kernel Determination Problems in Hyperbolic Integro-Differential Equations* / Infosys Science Foundation Series. Singapore: Springer, 2023. xxvi+368 pp. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-981-99-2260-4>.
32. Дурдиев Д. К. Об определении коэффициента уравнения смешанного парабола-гиперболического типа с нехарактеристической линией изменения // *Диффер. уравн.*, 2022. Т. 58, № 12. С. 1633–1644. EDN: NCCOHF. DOI: <https://doi.org/10.31857/S0374064122120056>.
33. Тихонов А. Н., Самарский А. А. *Уравнения математической физики*. М.: Наука, 1977. 734 с.
34. Смирнов В. И. *Курс высшей математики*. Т. 4, Часть 2. М.: Наука, 1981. 551 с.

MSC: 35R11

Inverse problem for an equation of mixed parabolic-hyperbolic type with a characteristic line of change

D. K. Durdiev

¹ Bukhara Branch of the Institute of Mathematics named after V. I. Romanovskiy at the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan, 11, Muhammad Igbol st., Bukhara, 705018, Uzbekistan.

² Bukhara State University, 11, Muhammad Igbol st., Bukhara, 705018, Uzbekistan.

Abstract

This study investigates direct and inverse problems for a model equation of mixed parabolic-hyperbolic type. In the direct problem, an analogue of the Tricomi problem is considered for this equation with a characteristic line of type change. The unknown in the inverse problem is a variable coefficient of the lower-order term in the parabolic equation. To determine it relative to the solution defined in the parabolic part of the domain, an integral overdetermination condition is specified. Local theorems of unique solvability of the posed problems in terms of classical solutions are proven.

Keywords: parabolic-hyperbolic equation, characteristic, Green's function, inverse problem, principle of compressed mappings.

Received: 30th May, 2023 / Revised: 10th November, 2023 /

Accepted: 13th December, 2023 / First online: 25th December, 2023

Competing interests. I have no competing interests.

Author's Responsibilities. I take full responsibility for submitting the final version of the manuscript for publication. I approved the final version of the manuscript.

Funding. The research was conducted without any funding.

Acknowledgments. The author is grateful to the reviewers for their careful reading of the article, valuable comments, and suggestions.

Differential Equations and Mathematical Physics Research Article

© Authors, 2023

© Samara State Technical University, 2023 (Compilation, Design, and Layout)

© The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Please cite this article in press as:

Durdiev D. K. Inverse problem for an equation of mixed parabolic-hyperbolic type with a characteristic line of change, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2023, vol. 27, no. 4, pp. 607–620. EDN: AFYBZR. DOI: 10.14498/vsgtu2027 (In Russian).

Author's Details:

Durdimurod K. Durdiev  <https://orcid.org/0000-0002-6054-2827>

Dr. Phys. & Math. Sci., Professor; Head of Branch¹; Professor, Dept. of Differential Equations²; e-mail: d.durdiev@mathinst.uz

References

1. Babich V. M., Kapilevich M. B., Mikhlin S. G., et al. *Lineinye uravneniia matematicheskoi fiziki* [Linear Equations of Mathematical Physics]. Moscow, Nauka, 1964, 368 pp. (In Russian)
2. Aziz Kh., Settari A. *Matematicheskoe modelirovanie plastovykh sistem* [Petroleum Reservoir Simulation]. Moscow, Izhevsk, Regul. Khaotich. Dinam., 2004, 416 pp. (In Russian). EDN: RYRUBF
3. Uflyand Ya. S. *Integral'nye preobrazovaniia v zadachakh teorii uprugosti* [Integral Transforms in the Problems of Elasticity Theory]. Moscow, Nauka, 1968, 402 pp. (In Russian)
4. Shashkov A. G. *Sistemno-strukturnyi analiz protsessov teploobmena i ego primeneniie* [System-Structural Analysis of the Heat Transfer Process and its Application]. Moscow, Energoatomizdat, 1983, 280 pp. (In Russian)
5. Nakhushiev A. M. *Uravneniia matematicheskoi biologii* [Equations of Mathematical Biology]. Moscow, Vyssh. shk., 1995, 301 pp. (In Russian). EDN: PDBBNB
6. Zolina L. A. On a boundary value problem for a model equation of hyperbolic-parabolic type, *U.S.S.R. Comput. Math. Math. Phys.*, 1966, vol. 6, no. 6, pp. 63–78. DOI: [https://doi.org/10.1016/0041-5553\(66\)90162-5](https://doi.org/10.1016/0041-5553(66)90162-5).
7. Sabitov K. B. *Priamye i obratnye zadachi dlia uravnenii smeshannogo parabolopiperbolicheskogo tipa* [Direct and Inverse Problems for Mixed Parabolic-Hyperbolic Type Equations]. Moscow, Nauka, 2016, 271 pp. (In Russian). EDN: QWTYOF
8. Sabitov K. B., Safin E. M. The inverse problem for a mixed-type parabolic-hyperbolic equation in a rectangular domain, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2010, vol. 54, no. 4, pp. 48–54. EDN: OHMAER. DOI: <https://doi.org/10.3103/S1066369X10040067>.
9. Sabitov K. B., Safin E. M. The inverse problem for an equation of mixed parabolic-hyperbolic type, *Math. Notes*, 2010, vol. 87, no. 6, pp. 880–889. EDN: MXHPLB. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0001434610050287>.
10. Sabitov K. B. Initial boundary and inverse problems for the inhomogeneous equation of a mixed parabolic-hyperbolic equation, *Math. Notes*, 2017, vol. 102, no. 3, pp. 378–395. EDN: ZDNXPZ. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0001434617090085>.
11. Djamalov S. Z. The nonlocal boundary value problem with constant coefficients for the multidimensional mixed type equation of the first kind, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2017, vol. 21, no. 4, pp. 597–610 (In Russian). EDN: YUGZUW. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1536>.
12. Sabitov K. B., Martem'yanova N. V. A nonlocal inverse problem for a mixed-type equation, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2011, vol. 55, no. 2, pp. 61–74. EDN: MWMUAR. DOI: <https://doi.org/10.3103/S1066369X11020083>.
13. Yunusova G. R. Nonlocal problems for the equation of the mixed parabolic-hyperbolic type, *Vestn. Samar. Gos. Univ., Estestvennonauchn. Ser.*, 2011, no. 8(89), pp. 108–117 (In Russian). EDN: POMWCT.
14. Sabitov K. B., Sidorov S. N. Inverse problem for degenerate parabolic-hyperbolic equation with nonlocal boundary condition, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2015, vol. 59, no. 1, pp. 39–50. EDN: UEKPBJ. DOI: <https://doi.org/10.3103/S1066369X15010041>.
15. Sidorov S. N. Inverse problems for a degenerate mixed parabolic-hyperbolic equation on finding time-dependent factors in right hand sides, *Ufa Math. J.*, 2019, vol. 11, no. 1, pp. 75–89. EDN: AEKCTZ. DOI: <https://doi.org/10.13108/2019-11-1-75>.
16. Sabitov K. B., Sidorov S. N. On a nonlocal problem for a degenerating parabolic-hyperbolic equation, *Differ. Equ.*, 2014, vol. 50, no. 3, pp. 352–361. EDN: SKREFP. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0012266114030094>.
17. Sabitov K. B., Sidorov S. N. Initial-boundary-value problem for inhomogeneous degenerate equations of mixed parabolic-hyperbolic type, *J. Math. Sci. (N. Y.)*, 2019, vol. 236, no. 6, pp. 603–640. EDN: WUNHGJ. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10958-018-4136-y>.
18. Durdiev D. K. Inverse source problem for an equation of mixed parabolic-hyperbolic type with the time fractional derivative in a cylindrical domain, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn.*

- Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2022, vol. 26, no. 2, pp. 355–367. EDN: TWHCKX. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1921>.
19. Prilepko A. I., Kostin A. B., Solov'ev V. V. Inverse source and inverse coefficients problems for elliptic and parabolic equations in Hölder and Sobolev spaces, *Sib. J. Pure and Appl. Math.*, 2017, vol. 17, no. 3, pp. 67–85 (In Russian). EDN: RSFCQR. DOI: <https://doi.org/10.17377/PAM.2017.17.7>.
 20. Ivanchov N. I. On the inverse problem of simultaneous determination of thermal conductivity and specific heat capacity, *Sib. Math. J.*, 1994, vol. 35, no. 3, pp. 547–555. EDN: IWBQBE. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF02104818>.
 21. Durdiev D. K., Durdiev D. D. The Fourier spectral method for determining a heat capacity coefficient in a parabolic equation, *Turk. J. Math.*, 2022, vol. 46, no. 8, pp. 3223–3233. DOI: <https://doi.org/10.55730/1300-0098.3329>.
 22. Denisov A. M. *Elements of the Theory of Inverse Problems*, Inverse and Ill-Posed Problems Series, vol. 14. Utrecht, VSP, 1999, iv+272 pp.
 23. Prilepko A. I., Orlovsky D. G., Vasin I. A. *Methods for Solving Inverse Problems in Mathematical Physics*, Pure and Applied Mathematics, vol. 231. New York, NY, Marcel Dekker, 2000, xiii+709 pp. DOI: <https://doi.org/10.1201/9781482292985>.
 24. Durdiev D. K., Zhumaev Zh. Zh. Memory kernel reconstruction problems in the integro-differential equation of rigid heat conductor, *Math. Meth. Appl. Sci.*, 2022, vol. 45, no. 14, pp. 8374–8388. EDN: AWTYYE DOI: <https://doi.org/10.1002/mma.7133>.
 25. Durdiev D. K., Zhumaev Zh. Zh. One-dimensional inverse problems of finding the kernel of integrodifferential heat equation in a bounded domain, *Ukr. Math. J.*, 2022, vol. 73, no. 11, pp. 1723–1740. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11253-022-02026-0>.
 26. Durdiev D. K., Jumaev J. J., Atoev D. D. Inverse problem on determining two kernels in integro-differential equation of heat flow, *Ufa Math. J.*, 2023, vol. 15, no. 2, pp. 119–134. DOI: <https://doi.org/10.13108/2023-15-2-119>.
 27. Durdiev D. K., Zhumaev Zh. Zh. Problem of determining the thermal memory of a conducting medium, *Differ. Equ.*, 2020, vol. 56, no. 6, pp. 785–796. EDN: QCYFTB. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0012266120060117>.
 28. Romanov V. G. *Obratnye zadachi matematicheskoi fiziki* [Inverse Problems of Mathematical Physics]. Moscow, Nauka, 1984, 264 pp. (In Russian)
 29. Kabanikhin S. I. *Obratnye i nekorrektnye zadachi* [Inverse and Ill-posed Problems]. Novosibirsk, Sibirskoe Nauchnoe Izd., 2009, 457 pp. (In Russian)
 30. Hasanoglu A. H., Romanov V. G. *Introduction to Inverse Problems for Differential Equations*. Cham, Springer, 2017, xiii+261 pp. EDN: PLGFAS. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-319-62797-7>.
 31. Durdiev D. K., Totieva Z. D. *Kernel Determination Problems in Hyperbolic Integro-Differential Equations*, Infosys Science Foundation Series. Singapore, Springer, 2023, xxvi+368 pp. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-981-99-2260-4>.
 32. Durdiev D. K. Determining the coefficient of a mixed parabolic-hyperbolic equation with noncharacteristic type change line, *Differ. Equ.*, 2022, vol. 58, no. 2, pp. 1618–1629. DOI: <https://doi.org/10.1134/S00122661220120059>.
 33. Tikhonov A. N., Samarskii A. A. *Uravneniia matematicheskoi fiziki* [Equations of Mathematical Physics]. Moscow, Nauka, 1977, 734 pp. (In Russian)
 34. Smirnov V. I. *Kurs vysshei matematiki* [Course of Higher Mathematics], vol. 4, part 2. Moscow, Nauka, 1981, 551 pp. (In Russian)



УДК 517.956

О разрешимости одной начально-граничной задачи для вырождающегося уравнения высокого четного порядка

А. К. Уринов^{1,2}, Д. Д. Орипов¹

¹ Ферганский государственный университет, Узбекистан, 150100, Фергана, ул. Мураббийлар, 19.

² Институт математики имени В. И. Романовского АН Республики Узбекистан, Узбекистан, 100174, Ташкент, ул. Университетская, 46.

Аннотация

Рассмотрено вырождающееся дифференциальное уравнение в частных производных высокого четного порядка в прямоугольнике. Для рассматриваемого уравнения сформулирована одна начально-граничная задача и исследованы единственность, существование и устойчивость её решения. Единственность решения задачи доказана методом интегральных тождеств. Существование решения задачи исследовано методом разделения переменных. Здесь сначала исследована спектральная задача для обыкновенного дифференциального уравнения высокого четного порядка, вытекающая из поставленной задачи при разделении переменных. Построена функция Грина спектральной задачи. С её помощью спектральная задача эквивалентно сведена к интегральному уравнению Фредгольма второго рода с симметричным ядром. Отсюда на основании теории интегральных уравнений заключено, что существует счетное число собственных значений и собственных функций спектральной задачи. Найдены условия, при которых заданная функция разлагается в равномерно сходящийся ряд Фурье по собственным функциям спектральной задачи. С использованием свойств функции Грина и собственных функций спектральной задачи доказана лемма о равномерной сходимости некоторых билинейных рядов. Доказаны также леммы о порядке коэффициентов Фурье заданной функции. Решение изучаемой задачи выписано в виде суммы ряда Фурье по системе собственных функций спектральной задачи. Равномерная сходимость этого ряда и рядов,

Дифференциальные уравнения и математическая физика

Научная статья

© Коллектив авторов, 2023

© СамГТУ, 2023 (составление, дизайн, макет)

Контент публикуется на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

Образец для цитирования

Уринов А. К., Орипов Д. Д. О разрешимости одной начально-граничной задачи для вырождающегося уравнения высокого четного порядка // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, 2023. Т. 27, № 4. С. 621–644. EDN: AYWFBD. DOI: 10.14498/vsgtu2023.

Сведения об авторах

Азмаджон Кушакович Уринов  <https://orcid.org/0000-0002-9586-1799>

доктор физико-математических наук, профессор; профессор каф. математического анализа и дифференциальных уравнений¹; ведущий научный сотрудник²; e-mail: urinovak@mail.ru

Дастонбек Диллиодбек угли Орипов  <https://orcid.org/0000-0002-0212-6964>

базовый докторант; каф. математического анализа и дифференциальных уравнений¹; e-mail: dastonbekoripov94@gmail.com

полученных из него почленным дифференцированием, доказана с помощью лемм, перечисленных выше. В конце статьи получены две оценки для решения поставленной задачи, одна из которых — в пространстве квадратично суммируемых функций с весом, а другая — в пространстве непрерывных функций. Из этих неравенств следует устойчивость решения в соответствующих пространствах.

Ключевые слова: вырождающееся дифференциальное уравнение, начально-граничная задача, спектральная задача, существование, единственность и устойчивость решения, метод разделения переменных.

Получение: 14 мая 2023 г. / Исправление: 9 октября 2023 г. /

Принятие: 13 декабря 2023 г. / Публикация онлайн: 23 декабря 2023 г.

Введение

Рассматривается вырождающееся уравнение высокого четного порядка вида

$$\frac{\partial^{2n}}{\partial x^{2n}} \left(x^\alpha \frac{\partial^{2n} u}{\partial x^{2n}} \right) + u_{tt} + \frac{2\gamma}{t} u_t + bu = f(x, t) \quad (1)$$

в прямоугольнике $\Omega = \{(x, t) : 0 < x < 1; 0 < t < T\}$. Здесь $u(x, t)$ — неизвестная функция; $f(x, t)$ — заданная функция, а $\alpha, \gamma, b, n \in \mathbb{R}$ — заданные числа, причем $0 < \alpha < 1, 0 \leq \gamma < 1/2, b \geq 0, n \in \mathbb{N}$.

Из уравнения (1) при $\gamma = b = \alpha = 0, n = 1, f(x, t) \equiv 0$ следует уравнение, описывающее свободное колебание балки, которое имеет многочисленные приложения в строительной механике, авиастроении, машиностроении, судостроении и т.д. [1–5]. В работе [6] для данного частного случая уравнения (1) изучена начальная задача, а в работах [7–13] — различные начально-граничные и обратные задачи. Для уравнений четвертого порядка, описывающих колебания прямоугольной пластинки, в работах [14–15] изучены различные начально-граничные задачи; уравнения колебаний балки в многомерном случае рассматривались в работе [16].

Обратим также внимание на работы [17–22], в которых ставятся и изучаются различные начально-граничные задачи для уравнений в частных производных высокого четного порядка с различными локальными и нелокальными граничными условиями.

Отметим, что в работах, посвященных изучению начально-граничных задач, в качестве объекта исследования в основном взяты невырождающиеся уравнения. Начально-граничные задачи для вырождающихся уравнений в частных производных высокого четного порядка изучены сравнительно мало. В частности, в работах [23–25] для уравнений четвертого порядка с тремя линиями вырождения изучены локальные и нелокальные начально-граничные задачи. В работах [26–27] рассматриваются вырождающиеся дифференциальные уравнения $2k$ порядка и исследованы задачи с граничными условиями вида

$$\frac{\partial^j u}{\partial x^j} \Big|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial^j u}{\partial x^j} \Big|_{x=1} = 0, \quad j = \overline{0, k-1},$$

а в работах [28, 29] — с условиями вида

$$\frac{\partial^j u}{\partial x^j} \Big|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial^{k+j} u}{\partial x^{k+j}} \Big|_{x=1} = 0, \quad j = \overline{0, k-1}.$$

В настоящей работе в области Ω для уравнения (1) формулируется и исследуется начально-граничная задача с условиями на $x = 0$ и $x = 1$, связанными со значениями частных производных искомой функции четного порядка по x .

1. Постановка задачи

Задача A_1 . Найти функцию $u(x, t)$, обладающую следующими свойствами:

- 1) $(\partial^j / \partial x^j)u, (\partial^j / \partial x^j)[x^\alpha (\partial^{2n} / \partial x^{2n})u] \in C(\overline{\Omega}), j = \overline{0, 2n-1}; t^{2\gamma} u_t \in C(\overline{\Omega}); (\partial^{2n} / \partial x^{2n})[x^\alpha (\partial^{2n} / \partial x^{2n})u] \in C(\Omega); (u_{tt} + \frac{2\gamma}{t} u_t) \in C(\Omega);$
- 2) в области Ω удовлетворяет уравнению (1);
- 3) на границе области Ω выполняются следующие начальные и граничные условия:

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in [0, 1]; \quad \lim_{t \rightarrow 0} t^{2\gamma} u_t = \psi(x), \quad x \in (0, 1); \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{2j}}{\partial x^{2j}} u(x, t) \Big|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial^{2j}}{\partial x^{2j}} \left(x^\alpha \frac{\partial^{2n}}{\partial x^{2n}} u(x, t) \right) \Big|_{x=0} = 0, \\ \frac{\partial^{2j}}{\partial x^{2j}} u(x, t) \Big|_{x=1} = 0, \quad \frac{\partial^{2j}}{\partial x^{2j}} \left(x^\alpha \frac{\partial^{2n}}{\partial x^{2n}} u(x, t) \right) \Big|_{x=1} = 0, \end{aligned} \quad (3)$$

$$j = \overline{0, n-1}, \quad t \in [0, T],$$

где $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — заданные функции.

Отметим, что эта задача при $\alpha = \gamma = b = 0, n = 1$ была ранее изучена в работах [8, 10] для уравнения балки, а в работе [9] — для нелинейного уравнения балки. В работе [10] изучены обратные задачи с граничными условиями вида (3) при $\alpha = 0, n = 1$ для уравнения балки, а в работах [14, 15] — начально-граничные задачи с такими же граничными условиями для уравнения колебания пластины. Задача A_1 при $\alpha = 0$ и другие задачи типа A_1 для уравнения

$$u_{tt} + \frac{2\gamma}{t} u_t + (-1)^m \frac{\partial^{2m}}{\partial x^{2m}} u = f(x, t)$$

изучены в работах [20, 22].

Исследуем существование, единственность и устойчивость решения поставленной задачи A_1 .

2. Единственность решения задачи A_1

ТЕОРЕМА 1. *Задача A_1 не может иметь более одного решения.*

Доказательство. Предположим, что существуют два решения $u_1(x, t)$ и $u_2(x, t)$ задачи A_1 . Их разность обозначим через $u(x, t)$. Тогда функция $u(x, t)$ удовлетворяет уравнению (1) при $f(x, t) \equiv 0$, а условиям (2) и (3) — при $\varphi(x) \equiv \psi(x) \equiv 0$.

Пусть $\forall T_0 \in (0, T]$, а $\Omega_0 = \{(x, t) : 0 < x < 1, 0 < t < T_0\}$. Очевидно, что $\overline{\Omega_0} \subset \overline{\Omega}$. Введем следующую функцию:

$$\omega(x, t) = - \int_t^{T_0} \xi^{-2\gamma} u(x, \xi) d\xi, \quad (x, t) \in \overline{\Omega_0}.$$

Эта функция обладает следующими свойствами:

- 1) $(\partial^j / \partial x^j) \omega$, $(\partial^j / \partial x^j) [x^\alpha (\partial^{2n} / \partial x^{2n}) \omega] \in C(\overline{\Omega_0})$, $j = 0, 2n - 1$;
 $t^{2\gamma} \omega_t$, $t^{2\gamma} \frac{\partial}{\partial t} (t^{2\gamma} \omega_t) \in C(\overline{\Omega_0})$;
- 2) удовлетворяет условиям (3) при $t \in [0, T_0]$.

Рассмотрим уравнение (1) при $f(x, t) \equiv 0$, умножим его на функцию $t^{2\gamma} \omega(x, t)$ и проинтегрируем полученное равенство по области Ω_0 :

$$\int_0^1 \int_0^{T_0} t^{2\gamma} \omega(x, t) \left(\frac{\partial^{2n}}{\partial x^{2n}} \left[x^\alpha \frac{\partial^{2n} u(x, t)}{\partial x^{2n}} \right] + t^{-2\gamma} \frac{\partial}{\partial t} \left[t^{2\gamma} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right] + bu(x, t) \right) dt dx = 0.$$

Перепишем полученное в виде

$$\int_0^{T_0} t^{2\gamma} dt \int_0^1 \omega(x, t) \frac{\partial^{2n}}{\partial x^{2n}} \left[x^\alpha \frac{\partial^{2n} u(x, t)}{\partial x^{2n}} \right] dx + \int_0^1 dx \int_0^{T_0} \omega(x, t) \frac{\partial}{\partial t} \left[t^{2\gamma} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right] dt + \int_0^1 dx \int_0^{T_0} bt^{2\gamma} \omega(x, t) u(x, t) dt = 0.$$

Теперь, применяя правило интегрирования по частям к первым двум внутренним интегралам, получим выражение

$$\begin{aligned} & \int_0^{T_0} t^{2\gamma} \left[\omega(x, t) \frac{\partial^{2n-1}}{\partial x^{2n-1}} \left(x^\alpha \frac{\partial^{2n} u(x, t)}{\partial x^{2n}} \right) - \frac{\partial \omega(x, t)}{\partial x} \frac{\partial^{2n-2}}{\partial x^{2n-2}} \left(x^\alpha \frac{\partial^{2n} u(x, t)}{\partial x^{2n}} \right) + \right. \\ & \quad \left. + \dots - \frac{\partial^{2n-1} \omega(x, t)}{\partial x^{2n-1}} \left(x^\alpha \frac{\partial^{2n} u(x, t)}{\partial x^{2n}} \right) \right]_{x=0}^{x=1} dt + \\ & + \int_0^{T_0} t^{2\gamma} dt \int_0^1 x^\alpha \frac{\partial^{2n} \omega(x, t)}{\partial x^{2n}} \frac{\partial^{2n} u(x, t)}{\partial x^{2n}} dx + \\ & + \int_0^1 \left[\omega(x, t) t^{2\gamma} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \Big|_{t=0}^{t=T_0} - \int_0^{T_0} \omega_t(x, t) t^{2\gamma} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} dt \right] dx + \\ & + \int_0^1 dx \int_0^{T_0} bt^{2\gamma} \omega(x, t) u(x, t) dt = 0, \end{aligned}$$

из которого в силу свойств функций $\omega(x, t)$ и $u(x, t)$ следует равенство

$$\int_0^{T_0} t^{2\gamma} dt \int_0^1 x^\alpha \frac{\partial^{2n} \omega(x, t)}{\partial x^{2n}} \frac{\partial^{2n} u(x, t)}{\partial x^{2n}} dx - \int_0^1 dx \int_0^{T_0} t^{2\gamma} \frac{\partial \omega(x, t)}{\partial t} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} dt + \int_0^1 dx \int_0^{T_0} bt^{2\gamma} \omega(x, t) u(x, t) dt = 0.$$

Отсюда, учитывая равенства

$$u = t^{2\gamma} \frac{\partial \omega}{\partial t}, \quad \frac{\partial^{2n} u}{\partial x^{2n}} = t^{2\gamma} \frac{\partial^{2n+1} \omega}{\partial x^{2n} \partial t},$$

имеем

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^\alpha dx \int_0^{T_0} t^{4\gamma} \frac{\partial^{2n} \omega(x, t)}{\partial x^{2n}} \frac{\partial^{2n+1} \omega(x, t)}{\partial x^{2n} \partial t} dt - \int_0^1 dx \int_0^{T_0} u(x, t) \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} dt + \\ + \int_0^1 dx \int_0^{T_0} bt^{4\gamma} \omega(x, t) \frac{\partial}{\partial t} \omega(x, t) dt = 0. \end{aligned}$$

Далее, принимая во внимание равенства

$$u(x, t) \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} [u(x, t)]^2, \quad \frac{\partial^{2n} \omega(x, t)}{\partial x^{2n}} \frac{\partial^{2n+1} \omega(x, t)}{\partial x^{2n} \partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial^{2n} \omega(x, t)}{\partial x^{2n}} \right]^2,$$

$$\frac{\partial^{2n}}{\partial x^{2n}} \omega(x, T_0) = 0, \quad u(x, 0) = 0$$

и применяя правило интегрирования по частям к интегралам по t при $0 < \gamma < 1/2$, получим

$$\int_0^1 u^2(x, T_0) dx + 4\gamma \int_0^1 dx \int_0^{T_0} t^{4\gamma-1} \left(x^\alpha \left[\frac{\partial^{2n} \omega(x, t)}{\partial x^{2n}} \right]^2 + b\omega^2(x, t) \right) dt = 0,$$

а при $\gamma = 0$ имеем

$$\int_0^1 u^2(x, T_0) dx + \int_0^1 x^\alpha \left[\frac{\partial^{2n} \omega(x, t)}{\partial x^{2n}} \right]_{t=0}^2 dx + b \int_0^1 \omega^2(x, 0) dx = 0.$$

В силу свойств функций $u(x, t)$, $\omega(x, t)$ и условий $b \geq 0$, $0 < \gamma < 1/2$, $0 < \alpha < 1$ все интегралы в левой части последних равенств существуют и неотрицательны. Тогда из них следует, что $u(x, T_0) \equiv 0$, $x \in [0, 1]$. Так как $\forall T_0 \in [0, T]$, функция $u(x, t) \equiv 0$, $(x, t) \in \bar{\Omega}$. Тогда $u_1(x, t) \equiv u_2(x, t)$, $(x, t) \in \bar{\Omega}$. Теорема 1 доказана. \square

3. Исследование спектральной задачи

При формальном применении метода Фурье к задаче A_1 возникает следующая спектральная задача: найти значения параметра λ , при которых существуют нетривиальные решения уравнения

$$Mv \equiv (x^\alpha v^{(2n)}(x))^{(2n)} = \lambda v(x), \quad 0 < x < 1, \quad (4)$$

удовлетворяющие условиям

$$\begin{aligned} v^{(j)}(x), \quad (x^\alpha v^{(2n)}(x))^{(j)} \in C[0, 1], \quad j = \overline{0, 2n-1}; \\ v^{(2j)}(0) = 0, \quad (x^\alpha v^{(2n)}(x))^{(2j)} \Big|_{x=0} = 0, \quad j = \overline{0, n-1}; \\ v^{(2j)}(1) = 0, \quad (x^\alpha v^{(2n)}(x))^{(2j)} \Big|_{x=1} = 0, \quad j = \overline{0, n-1}. \end{aligned} \quad (5)$$

Пусть $v(x)$ и $h(x)$ — функции, удовлетворяющие условиям (5), и $Mv(x)$, $Mh(x) \in L_2(0, 1)$. Тогда, применяя правило интегрирования по частям, имеем

$$\begin{aligned} \int_0^1 h(x)Mv(x)dx &= \left[h(x)(x^\alpha v^{(2n)}(x))^{(2n-1)} - h'(x)(x^\alpha v^{(2n)}(x))^{(2n-2)} + \right. \\ &+ h''(x)(x^\alpha v^{(2n)}(x))^{(2n-3)} - \dots - h^{(2n-1)}(x)(x^\alpha v^{(2n)}(x)) + (x^\alpha h^{(2n)}(x))v^{(2n-1)}(x) - \\ &- (x^\alpha h^{(2n)}(x))'v^{(2n-2)}(x) + (x^\alpha h^{(2n)}(x))''v^{(2n-3)}(x) - \dots \\ &\left. \dots - (x^\alpha h^{(2n)}(x))^{(2n-1)}v(x) \right]_{x=0}^{x=1} + \int_0^1 v(x)Mh(x)dx. \end{aligned}$$

Отсюда в силу свойств функций $v(x)$ и $h(x)$ следует равенство

$$\int_0^1 h(x)Mv(x)dx = \int_0^1 v(x)Mh(x)dx.$$

Следовательно, задача с условиями $Mv = 0$ и (5) самосопряжена.

Пусть $v(x) \not\equiv 0$, $x \in [0, 1]$ и удовлетворяет условиям задачи (4), (5). Тогда

$$\begin{aligned} \lambda \int_0^1 v^2(x)dx &= \int_0^1 v(x)(x^\alpha v^{(2n)}(x))^{(2n)}dx = \left[v(x)(x^\alpha v^{(2n)}(x))^{(2n-1)} - \right. \\ &- v'(x)(x^\alpha v^{(2n)}(x))^{(2n-2)} + \dots - v^{(2n-1)}(x)(x^\alpha v^{(2n)}(x)) \left. \right]_{x=0}^{x=1} + \\ &+ \int_0^1 x^\alpha [v^{(2n)}(x)]^2 dx = \int_0^1 x^\alpha [v^{(2n)}(x)]^2 dx, \end{aligned}$$

т.е.

$$\lambda \int_0^1 v^2(x)dx = \int_0^1 x^\alpha [v^{(2n)}(x)]^2 dx.$$

Отсюда в силу $v(x) \not\equiv 0$ следует, что $\lambda \geq 0$. Если $\lambda = 0$, то из последнего равенства следует, что $v^{(2n)}(x) = 0$, $0 < x < 1$. Тогда

$$v(x) = c_1 \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + c_2 \frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!} + \dots + c_{2n-1} \frac{x}{1!} + c_{2n}, \quad x \in (0, 1),$$

где c_j — произвольные действительные числа. Подчиняя эту функцию условиям $v^{(2j)}(x)|_{x=0} = 0$, $v^{(2j)}(x)|_{x=1} = 0$, $j = \overline{0, n-1}$, получим $c_j = 0$, $j = \overline{1, 2n}$. Тогда $v(x) \equiv 0$, $0 \leq x \leq 1$. Следовательно, задача (4), (5) может иметь нетривиальные решения только при $\lambda > 0$.

Для доказательства существования собственных значений задачи (4), (5) применим метод функции Грина. Так как $\lambda = 0$ не является собственным значением, существует единственная функция Грина $G(x, s)$. Построим ее. Она должна обладать следующими свойствами:

- 1) функции $(\partial^j / \partial x^j)G(x, s)$, $j = \overline{0, 2n-1}$, $(\partial^j / \partial x^j)[x^\alpha (\partial^{2n} / \partial x^{2n})G(x, s)]$, $j = \overline{0, 2n-2}$ непрерывны для всех $x, s \in [0, 1]$;

- 2) в каждом из интервалов $[0, s]$ и $(s, 1]$ существует непрерывная производная $(\partial^{2n-1}/\partial x^{2n-1})[x^\alpha(\partial^{2n}/\partial x^{2n})G(x, s)]$, а при $x = s$ имеет место скачок 1:

$$(\partial^{2n-1}/\partial x^{2n-1})[x^\alpha(\partial^{2n}/\partial x^{2n})G(x, s)]_{x=s-0}^{x=s+0} = 1;$$

- 3) в интервалах $(0, s)$ и $(s, 1)$ существует производная $(\partial^{2n}/\partial x^{2n})[x^\alpha(\partial^{2n}/\partial x^{2n})G(x, s)]$ и выполняется равенство $MG(x, s) = 0$;
 4) при $s \in (0, 1)$ и $k = \overline{0, n-1}$ выполняются граничные условия

$$\begin{aligned} (\partial^{2k}/\partial x^{2k})G(x, s)|_{x=0} &= 0, \\ (\partial^{2k}/\partial x^{2k})(x^\alpha(\partial^{2n}/\partial x^{2n})G(x, s))|_{x=0} &= 0; \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} (\partial^{2k}/\partial x^{2k})G(x, s)|_{x=1} &= 0, \\ (\partial^{2k}/\partial x^{2k})(x^\alpha(\partial^{2n}/\partial x^{2n})G(x, s))|_{x=1} &= 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Принимая во внимание вид общего решения уравнения $MG(x, s) = 0$ в промежутках $(0, s)$ и $(s, 1)$, функцию $G(x, s)$ ищем в виде

$$G(x, s) = \begin{cases} \sum_{j=1}^{2n} \frac{a_j x^{4n-\alpha-j}}{(2n-j)!(2n-\alpha-j+1)_{2n}} + \sum_{j=2n+1}^{4n} \frac{a_j x^{4n-j}}{(4n-j)!}, & 0 \leq x \leq s, \\ \sum_{j=1}^{2n} \frac{b_j x^{4n-\alpha-j}}{(2n-j)!(2n-\alpha-j+1)_{2n}} + \sum_{j=2n+1}^{4n} \frac{b_j x^{4n-j}}{(4n-j)!}, & s \leq x \leq 1, \end{cases} \quad (8)$$

где a_j и b_j , $j = \overline{1, 4n}$ — неизвестные функции переменной s , а $(z)_n = z(z+1) \times \dots \times (z+n-1)$ — символ Похгаммера [30].

Если функция (8) удовлетворяет свойствам 1) и 2) функции Грина, получим следующую систему уравнений относительно $(b_j - a_j)$, $j = 1, 2, \dots, 4n$:

$$b_1 - a_1 = 1, \quad \sum_{j=1}^{m_1} \frac{s^{m_1-j}}{(m_1-j)!} (b_j - a_j) = 0, \quad m_1 = \overline{2, 2n},$$

$$\sum_{j=1}^{2n} \frac{s^{2n-\alpha+m_2-j} (b_j - a_j)}{(2n-j)!(2n-\alpha-j+1)_{m_2}} + \sum_{j=1}^{m_2} \frac{s^{m_2-j} (b_{2n+j} - a_{2n+j})}{(m_2-j)!} = 0, \quad m_2 = \overline{1, 2n}.$$

Эта система имеет единственное решение:

$$b_j - a_j = \frac{(-1)^{j-1} s^{j-1}}{(j-1)!}, \quad b_{2n+j} - a_{2n+j} = \frac{(-1)^{j-1} s^{2n+j-1-\alpha}}{(j-1)!(j-\alpha)_{2n}}, \quad j = \overline{1, 2n}. \quad (9)$$

Подставляя (8) в условия (6), последовательно получим

$$a_{4n} = a_{4n-2} = \dots = a_{2n+2} = a_{2n} = \dots = a_4 = a_2 = 0. \quad (10)$$

В силу этих равенств из (9) следует, что

$$b_{2j} = -\frac{s^{2j-1}}{(2j-1)!}, \quad b_{2n+2j} = -\frac{s^{2n-1-\alpha+2j}}{(2j-1)!(2j-\alpha)_{2n}}, \quad j = \overline{1, n}. \quad (11)$$

Далее, подставляя (8) в условия (7), получим систему уравнений

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{m_3} \left(\frac{b_{2j-1}}{(2m_3+1-2j)!} + \frac{b_{2j}}{(2m_3-2j)!} \right) = 0, \quad m_3 = \overline{1, n}; \\ \sum_{j=1}^n \left(\frac{b_{2j-1}}{(2n-2j+1)!(2n-\alpha-2j+2)_{2m_4}} + \right. \\ \left. + \frac{b_{2j}}{(2n-2j)!(2n-\alpha-2j+1)_{2m_4}} \right) + \\ \left. + \sum_{j=1}^{m_4} \left(\frac{b_{2n+2j-1}}{(2m_4-2j+1)!} + \frac{b_{2n+2j}}{(2m_4-2j)!} \right) = 0, \quad m_4 = \overline{1, n}. \end{aligned} \quad (12)$$

Принимая во внимание, что b_{2j} — известные величины вида (11), из (12) однозначно находим b_{2j-1} , $j = \overline{1, 2n}$:

$$\begin{aligned} b_1 &= -b_2; \\ b_{2j-1} &= -b_{2j} - \sum_{i=1}^{2j-2} \frac{b_i}{(2j-i)!}, \quad j = \overline{2, n}; \\ b_{2n+1} &= -b_{2n+2} - \sum_{i=1}^{2n} \frac{b_i}{(2n-i)!(2n-\alpha+1-i)_2}, \\ b_{2n+2j-1} &= -b_{2n+2j} - \sum_{i=1}^{2n} \frac{b_i}{(2n-i)!(2n-\alpha+1-i)_{2j}} - \\ &\quad - \sum_{i=1}^{2j-2} \frac{b_{2n+i}}{(2j-i)!}, \quad j = \overline{2, n}. \end{aligned} \quad (13)$$

Подставляя (13) в (9), находим a_{2j-1} , $j = \overline{1, 2n}$:

$$\begin{aligned} a_1 &= -b_2 - 1 = s - 1; \\ a_{2j-1} &= b_{2j-1} - \frac{s^{2j-2}}{(2j-2)!}, \quad j = \overline{2, n}; \\ a_{2n+1} &= b_{2n+1} - \frac{s^{2n-\alpha}}{(1-\alpha)_{2n}}, \\ a_{2n+2j-1} &= b_{2n+2j-1} - \frac{s^{2n+2j-2-\alpha}}{(2j-2)!(2j-1-\alpha)_{2n}}, \quad j = \overline{2, n}. \end{aligned} \quad (14)$$

Подставляя (10), (11), (13), (14) в (8), находим функцию Грина в виде

$$\begin{aligned} G(x, s) &= \frac{x^{4n-\alpha-1}(s-1)}{(2n-1)!(2n-\alpha)_{2n}} + \\ &+ \sum_{j=2}^n \left(b_{2j-1} - \frac{s^{2j-2}}{(2j-2)!} \right) \frac{x^{4n-\alpha-2j+1}}{(2n-2j+1)!(2n-\alpha-2j+2)_{2n}} + \\ &+ \left(b_{2n+1} - \frac{s^{2n-\alpha}}{(1-\alpha)_{2n}} \right) \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \end{aligned}$$

$$+ \sum_{j=2}^n \left(b_{2n+2j-1} - \frac{s^{2n-\alpha+2j-2}}{(2j-2)!(2j-1-\alpha)_{2n}} \right) \frac{x^{2n-2j+1}}{(2n-2j+1)!}, \quad \text{если } 0 \leq x \leq s,$$

$$\begin{aligned} G(x, s) = & \frac{x^{4n-\alpha-1}s}{(2n-1)!(2n-\alpha)_{2n}} + \\ & + \sum_{j=2}^n b_{2j-1} \frac{x^{4n-\alpha-2j+1}}{(2n-2j+1)!(2n-\alpha-2j+2)_{2n}} + \\ & + \sum_{j=1}^n b_{2j} \frac{x^{4n-\alpha-2j}}{(2n-2j)!(2n-\alpha-2j+1)_{2n}} + b_{2n+1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \\ & + \sum_{j=2}^n b_{2n+2j-1} \frac{x^{2n-2j+1}}{(2n-2j+1)!} + \sum_{j=1}^n b_{2n+2j} \frac{x^{2n-2j}}{(2n-2j)!}, \quad \text{если } s \leq x \leq 1, \quad (15) \end{aligned}$$

где b_{2j-1} , b_{2j} , $j = \overline{2, n}$; b_{2n+2j} , $j = \overline{1, n}$; b_{2n+1} , $b_{2n+2j-1}$, $j = \overline{2, n}$ — определены равенствами (11) и (13).

Так как задача с условиями $Mv = 0$ и (5) самосопряжена, ее функция Грина (15) симметрична относительно аргументов x и s .

С помощью метода, примененного в [31], легко убедиться, что задача (4), (5) эквивалентна следующему интегральному уравнению:

$$v(x) = \lambda \int_0^1 G(x, s)v(s)ds. \quad (16)$$

Так как ядро $G(x, s)$ непрерывно, симметрично, и положительно (т.е. $\lambda > 0$), интегральное уравнение (16), следовательно, задача (4), (5) имеет счетное число собственных значений

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \dots < \lambda_k < \dots, \quad \lambda_k \rightarrow \infty,$$

а соответствующие им собственные функции $v_1(x)$, $v_2(x)$, $v_3(x)$, ..., $v_k(x)$, ... образуют ортонормированную систему в пространстве $L_2(0, 1)$ [32].

ЛЕММА 1. Пусть функция $g(x)$ удовлетворяет следующим условиям:

$$\begin{aligned} g^{(2j)}(x), [x^\alpha g^{(2n)}(x)]^{(2j)} \in C[0, 1], \quad j = \overline{0, n-1}; \quad Mg(x) \in C(0, 1) \cap L_2(0, 1); \\ g^{(2j)}(0) = 0, \quad g^{(2j)}(1) = 0, \quad j = \overline{0, n-1}; \\ (x^\alpha g^{(2n)}(x))^{(2j)}|_{x=0} = 0, \quad (x^\alpha g^{(2n)}(x))^{(2j)}|_{x=1} = 0, \quad j = \overline{0, n-1}. \end{aligned}$$

Тогда ее можно разложить на отрезке $[0, 1]$ в абсолютно и равномерно сходящийся ряд по системе собственных функций задачи (4), (5).

Доказательство. Пользуясь правилом интегрирования по частям, свойствами функции Грина $G(x, s)$ и условиями, наложенными на функцию $g(x)$, нетрудно убедиться, что справедливо равенство

$$\int_0^1 G(x, s)Mg(s)ds = \int_0^1 G(x, s)[s^\alpha g^{(2n)}(s)]^{(2n)}ds = g(x).$$

Следовательно, $g(x)$ — функция, представимая через ядро $G(x, s)$. Кроме того, в силу непрерывности функции $G(x, s)$ имеет место оценка

$$\int_0^1 G^2(x, s) ds \leq A(x) = a_0 = \text{const} < \infty.$$

Тогда на основании теоремы Гильберта—Шмидта [32] справедливо утверждение леммы 1. \square

4. Вспомогательные леммы

В этом пункте под λ_k и $v_k(x)$, $k \in \mathbb{N}$, понимаются собственные значения и собственные функции задачи (4), (5), а под g_k — коэффициенты Фурье функции $g(x)$:

$$g_k = \int_0^1 g(x)v_k(x)dx, \quad k \in \mathbb{N}.$$

ЛЕММА 2. Следующие ряды сходятся равномерно на сегменте $[0, 1]$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{[v_k^{(j)}(x)]^2}{\lambda_k}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{([x^\alpha v_k^{(2n)}(x)]^{(j)})^2}{\lambda_k^2}, \quad j = \overline{0, 2n-1}. \quad (17)$$

Доказательство. В силу (16) и (4) справедливы равенства

$$\begin{aligned} v_k^{(j)}(x) &= \lambda_k \int_0^1 \frac{\partial^j}{\partial x^j} G(x, s)v_k(s)ds = \\ &= \int_0^1 [s^\alpha v_k^{(2n)}(s)]^{(2n)} \frac{\partial^j}{\partial x^j} G(x, s)ds, \quad j = \overline{0, 2n-1}. \end{aligned}$$

Отсюда, применяя правило интегрирования по частям $2n$ раз, а затем принимая во внимание условия (5), получим

$$v_k^{(j)}(x) = \int_0^1 s^\alpha v_k^{(2n)}(s) \frac{\partial^{2n+j}}{\partial x^j \partial s^{2n}} G(x, s)ds, \quad j = \overline{0, 2n-1}.$$

Следовательно, справедливо равенство

$$\frac{v_k^{(j)}(x)}{\sqrt{\lambda_k}} = \int_0^1 \left(s^{\alpha/2} \frac{\partial^{2n+j}}{\partial x^j \partial s^{2n}} G(x, s) \right) \left(\frac{s^{\alpha/2} v_k^{(2n)}(s)}{\sqrt{\lambda_k}} \right) ds, \quad j = \overline{0, 2n-1}. \quad (18)$$

В силу условий (4) и (5), имеют место равенства

$$\int_0^1 \frac{s^\alpha v_k^{(2n)}(s)v_l^{(2n)}(s)}{\sqrt{\lambda_k \lambda_l}} ds = \begin{cases} 1, & k = l, \\ 0, & k \neq l. \end{cases}$$

Следовательно, $\{s^{\alpha/2}v_k^{(2n)}(s)/\sqrt{\lambda_k}\}_{k=1}^{\infty}$ — ортонормальная система. Тогда из выражения (18) следует, что $v_k^{(2j)}(x)/\sqrt{\lambda_k}$ — коэффициенты Фурье функции $s^{\alpha/2}(\partial^{2n+j}/\partial x^j \partial s^{2n})G(x, s)$ по системе $\{s^{\alpha/2}v_k^{(2n)}(s)/\sqrt{\lambda_k}\}_{k=1}^{\infty}$. Поэтому, согласно неравенству Бесселя [32], имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{[v_k^{(j)}(x)]^2}{\lambda_k} \leq \int_0^1 s^{\alpha} \left[\frac{\partial^{2n+j}}{\partial x^j \partial s^{2n}} G(x, s) \right]^2 ds, \quad j = \overline{0, 2n-1}. \quad (19)$$

Интеграл в правой части можно переписать в виде

$$\int_0^1 s^{\alpha} \left[\frac{\partial^{2n+j}}{\partial x^j \partial s^{2n}} G(x, s) \right]^2 ds = \int_0^1 s^{-\alpha} \left[\frac{\partial^j}{\partial x^j} \left(s^{\alpha} \frac{\partial^{2n}}{\partial s^{2n}} G(x, s) \right) \right]^2 ds, \quad j = \overline{0, 2n-1}.$$

Так как

$$s^{\alpha} \frac{\partial^{2n} G(x, s)}{\partial s^{2n}}, \quad \frac{\partial^j G(x, s)}{\partial x^j} \in C(\overline{\Omega}), \quad j = \overline{0, 2n-1},$$

функция в квадратной скобке в последнем интеграле непрерывна на $\overline{\Omega}$. Тогда в силу $0 < \alpha < 1$ интеграл в (19) равномерно ограничен при $j = \overline{0, 2n-1}$, откуда следует, что первые ряды в (17) сходятся равномерно.

Аналогично доказывается сходимость и остальных рядов. \square

ЛЕММА 3. Если выполнены условия

$$\begin{aligned} g^{(j)}(x) &\in C[0, 1], \quad j = \overline{0, 2n-1}; \\ x^{\alpha/2} g^{(2n)}(x) &\in C(0, 1) \cap L_2(0, 1); \\ g^{(2j)}(0) = 0, \quad g^{(2j)}(1) = 0, \quad j &= \overline{0, n-1}, \end{aligned}$$

то справедливо неравенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k g_k^2 \leq \int_0^1 x^{\alpha} [g^{(2n)}(x)]^2 dx, \quad (20)$$

в частности, ряд в левой части сходится.

Доказательство. В силу (4) справедливо равенство

$$\lambda_k^{1/2} g_k = \lambda_k^{1/2} \int_0^1 g(x) v_k(x) dx = \lambda_k^{-1/2} \int_0^1 g(x) [x^{\alpha} v_k^{(2n)}(x)]^{(2n)} dx.$$

Из этого равенства, применяя правило интегрирования по частям $2n$ раз и учитывая свойства функций $g(x)$ и $v_k(x)$, получим

$$\lambda_k^{1/2} g_k = \int_0^1 [x^{\alpha/2} g^{(2n)}(x)] [\lambda_k^{-1/2} x^{\alpha/2} v_k^{(2n)}(x)] dx.$$

Это означает, что числа $\lambda_k^{1/2} g_k$ — коэффициенты Фурье функции $x^{\alpha/2} g^{(2n)}(x)$ по ортонормированной системе функций $\{x^{\alpha/2} v_k^{(2n)}(x)/\sqrt{\lambda_k}\}_{k=1}^{\infty}$. Тогда, согласно неравенству Бесселя [32], справедливо неравенство (20). \square

ЛЕММА 4. Если выполнены условия

$$\begin{aligned} g^{(j)}(x), [x^\alpha g^{(2n)}(x)]^{(j)} &\in C[0, 1], \quad j = \overline{0, 2n-1}; \\ Mg(x) &\in C(0, 1) \cap L_2(0, 1); \\ g^{(2j)}(0) = 0, [x^\alpha g^{(2n)}(x)]^{(2j)}|_{x=0} &= 0, \\ g^{(2j)}(1) = 0, [x^\alpha g^{(2n)}(x)]^{(2j)}|_{x=1} &= 0, \quad j = \overline{0, n-1}, \end{aligned}$$

то справедливо неравенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 g_k^2 \leq \int_0^1 [Mg(x)]^2 dx, \quad (21)$$

в частности, ряд в левой части сходится.

Доказательство. В силу (4) справедливо равенство

$$\lambda_k g_k = \lambda_k \int_0^1 g(x) v_k(x) dx = \int_0^1 g(x) [x^\alpha v_k^{(2n)}(x)]^{(2n)} dx.$$

Применяя правило интегрирования по частям $4n$ раз и учитывая свойства функций $g(x)$ и $v_k(x)$, получим

$$\lambda_k g_k = \int_0^1 [x^\alpha g^{(2n)}(x)]^{(2n)} v_k(x) dx = \int_0^1 [Mg(x)] v_k(x) dx.$$

Отсюда следует, что числа $\lambda_k g_k$ — коэффициенты Фурье функции $Mg(x)$ по ортонормированной системе функций $\{v_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$. Тогда, согласно неравенству Бесселя [32], справедливо неравенство (21). \square

ЛЕММА 5. Если выполнены условия

$$\begin{aligned} g^{(j)}(x), [x^\alpha g^{(2n)}(x)]^{(j)}, [Mg(x)]^{(j)} &\in C[0, 1], \quad j = \overline{0, 2n-1}; \\ x^{\alpha/2} [Mg(x)]^{(2n)} &\in C(0, 1) \cap L_2(0, 1); \\ g^{(2j)}(0) = 0, [Mg(x)]^{(2j)}|_{x=0} &= 0, \\ g^{(2j)}(1) = 0, [Mg(x)]^{(2j)}|_{x=1} &= 0, \quad j = \overline{0, n-1}, \end{aligned}$$

то справедливо неравенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^3 g_k^2 \leq \int_0^1 x^\alpha ([Mg(x)]^{(2n)})^2 dx, \quad (22)$$

в частности, ряд в левой части сходится.

Доказательство. Функция $Mg(x)$ удовлетворяет условиям леммы 3. Как показано выше, $\lambda_k g_k$ — коэффициенты Фурье функции $Mg(x)$ по системе $\{v_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$. Тогда, согласно лемме 3, справедливо неравенство (22). \square

5. Существование и устойчивость решения

Решение задачи A_1 ищем в виде

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t)v_k(x), \quad (23)$$

где $u_k(t)$ — неизвестные функции, которые подлежат определению; $v_k(x)$ — собственные функции задачи (4), (5).

Подставим (23) в уравнение (1) и условия (2), а затем умножим полученные равенства на $v_m(x)$. После этого, интегрируя полученные равенства по x на интервале $(0, 1)$ и принимая во внимание ортонормированность системы функций $\{v_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$, относительно неизвестных функций $u_k(t)$ получим следующую задачу:

$$u_k''(t) + \frac{2\gamma}{t}u_k'(t) + (\lambda_k + b)u_k(t) = f_k(t), \quad t \in (0, T), \quad k \in \mathbb{N}; \quad (24)$$

$$u_k(0) = \varphi_k, \quad \lim_{t \rightarrow 0} t^{2\gamma}u_k'(t) = \psi_k, \quad k \in \mathbb{N}, \quad (25)$$

где

$$\begin{aligned} \varphi_k &= \int_0^1 \varphi(x)v_k(x)dx, & \psi_k &= \int_0^1 \psi(x)v_k(x)dx, \\ f_k(t) &= \int_0^1 f(x, t)v_k(x)dx, & k &\in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Задача (24), (25) имеет единственное решение:

$$\begin{aligned} u_k(t) &= a_k t^{1/2-\gamma} J_{1/2-\gamma}(t\sqrt{\lambda_k + b}) + b_k t^{1/2-\gamma} J_{\gamma-1/2}(t\sqrt{\lambda_k + b}) + \\ &+ \frac{\pi}{2 \cos \gamma \pi} \int_0^t [J_{1/2-\gamma}(t\sqrt{\lambda_k + b}) J_{\gamma-1/2}(\tau\sqrt{\lambda_k + b}) - \\ &- J_{\gamma-1/2}(t\sqrt{\lambda_k + b}) J_{1/2-\gamma}(\tau\sqrt{\lambda_k + b})] \left(\frac{t}{\tau}\right)^{1/2-\gamma} \tau f_k(\tau) d\tau, \quad k \in \mathbb{N}, \quad (26) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{2}(\sqrt{\lambda_k + b}/2)^{\gamma-1/2} \Gamma(1/2 - \gamma) \psi_k, \\ b_k &= \frac{1}{2}(\sqrt{\lambda_k + b}/2)^{1/2-\gamma} \Gamma(1/2 + \gamma) \varphi_k, \end{aligned} \quad (27)$$

$J_\nu(x)$ — функция Бесселя первого рода [33], $\Gamma(z)$ — гамма-функция [30].

ЛЕММА 6. Для функций $u_k(t)$, $k \in \mathbb{N}$, определяемых равенствами (26), при всех $t \in [0, T]$ справедливы неравенства

$$|u_k(t)| \leq |\varphi_k| + \frac{T^{1-2\gamma}}{1-2\gamma} |\psi_k| + \frac{2T^{3/2}}{1-2\gamma} \|f_k(t)\|_{L_2(0,T)}, \quad k \in \mathbb{N}, \quad (28)$$

$$|t^{2\gamma}u'_t(t)| \leq C_1|\psi_k| + \frac{(\lambda_k + b)T^{1+2\gamma}}{1 + 2\gamma}|\varphi_k| + C_2(\lambda_k + b)T^{2\gamma+1/2}\|f_k(t)\|_{L_2(0,T)}, \quad k \in \mathbb{N},$$

$$\left|u''_k(t) + \frac{2\gamma}{t}u'_k(t)\right| \leq (\lambda_k + b)|u_k(t)| + |f_k(t)|, \quad k \in \mathbb{N},$$

где C_1 и C_2 – некоторые действительные положительные числа.

Доказательство. Переписывая функции (26) с помощью функции Бесселя–Клиффорда $\bar{J}_\omega(z) = \Gamma(\omega+1)(z/2)^{-\omega}J_\omega(z)$ и учитывая, что $|\bar{J}_\omega(z)| \leq 1$ при $\omega > -1/2$, а также $0 \leq \tau \leq t \leq T$, получим оценку

$$|u_k(t)| \leq |a_k| \frac{t^{1-2\gamma}(\sqrt{\lambda_k + b/2})^{1/2-\gamma}}{\Gamma(3/2 - \gamma)} + |b_k| \frac{(\sqrt{\lambda_k + b/2})^{\gamma-1/2}}{\Gamma(1/2 + \gamma)} + \frac{2T}{1 - 2\gamma} \int_0^t |f_k(\tau)|d\tau.$$

Отсюда, принимая во внимание равенства (27) и применяя неравенство Коши–Буняковского к интегралу, приходим к неравенству (28).

Остальные неравенства доказываются аналогично. \square

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\gamma \in (0, 1/2)$ и функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ удовлетворяют условиям леммы 5, а функция $f(x, t)$ удовлетворяет условиям леммы 5 по аргументу x равномерно по t . Тогда ряд (23), коэффициенты которого определены равенствами (26), (27), определяет решение задачи A_1 .

Доказательство. Докажем равномерную сходимость в $\bar{\Omega}$ ряда (23) и следующих рядов, формально полученных из (23):

$$\frac{\partial^j u}{\partial x^j} = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t)v_k^{(j)}(x), \quad \frac{\partial^j}{\partial x^j} \left(x^\alpha \frac{\partial^{2n} u}{\partial^{2n}}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t)(x^\alpha v_k^{(2n)}(x))^{(j)}, \quad j = \overline{0, 2n-1};$$

$$t^{2\gamma} \frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{k=1}^{\infty} t^{2\gamma} u'_k(t)v_k(x),$$

и равномерную сходимость в любом компакте $D \subset \Omega$ следующих рядов:

$$\frac{\partial^{2n}}{\partial x^{2n}} \left(x^\alpha \frac{\partial^{2n} u}{\partial^{2n}}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t)(x^\alpha v_k^{(2n)}(x))^{(2n)}, \quad (29)$$

$$u_{tt} + \frac{2\gamma}{t}u_t = \sum_{k=1}^{\infty} \left[u''_k(t) + \frac{2\gamma}{t}u'_k(t)\right]v_k(x).$$

Рассмотрим ряд (29). В силу (4) в любом компакте $D \subset \Omega$ ряд из правой части (29) записывается в виде

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k u_k(t)v_k(t). \quad (30)$$

Для доказательства равномерной сходимости ряда (30), согласно (28) достаточно доказать абсолютную и равномерную сходимость рядов

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \varphi_k v_k(x), \quad \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \psi_k v_k(x), \quad \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \sqrt{\int_0^T f_k^2(\tau) d\tau} v_k(x). \quad (31)$$

К каждому из этих рядов применим неравенство Коши–Буняковского:

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \varphi_k v_k(x) \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \left| \sqrt{\lambda_k^3} \varphi_k \frac{v_k(x)}{\sqrt{\lambda_k}} \right| \leq \left[\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^3 \varphi_k^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{v_k^2(x)}{\lambda_k} \right]^{1/2},$$

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \psi_k v_k(x) \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \left| \sqrt{\lambda_k^3} \psi_k \frac{v_k(x)}{\sqrt{\lambda_k}} \right| \leq \left[\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^3 \psi_k^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{v_k^2(x)}{\lambda_k} \right]^{1/2},$$

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \sqrt{\int_0^T f_k^2(\tau) d\tau} v_k(x) \right| &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \left| \sqrt{\lambda_k^3 \int_0^T f_k^2(\tau) d\tau} \frac{v_k(x)}{\sqrt{\lambda_k}} \right| \leq \\ &\leq \left[\int_0^T \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^3 f_k^2(\tau) d\tau \sum_{k=1}^{\infty} \frac{v_k^2(x)}{\lambda_k} \right]^{1/2}. \end{aligned}$$

Ряды, стоящие в правых частях этих неравенств, в силу условия теоремы 2 согласно леммам 2 и 5 равномерно сходятся. Тогда ряды, стоящие в левых частях, т.е. ряды (31), сходятся абсолютно и равномерно в $\bar{\Omega}$. Следовательно, ряд (30) сходится абсолютно и равномерно в $\bar{\Omega}$. Поэтому ряд в (29) сходится абсолютно и равномерно в любом компакте $D \subset \Omega$.

Равномерная сходимость ряда (23) следует из сходимости ряда (30).

Аналогично доказывается равномерная сходимость и остальных рядов. Теорема 2 доказана. \square

При $\gamma = 0$ в силу $J_{1/2}(x) = \sqrt{2/(\pi x)} \sin x$, $J_{-1/2}(x) = \sqrt{2/(\pi x)} \cos x$ функции (26) записываются в виде

$$\begin{aligned} u_k(t) &= \varphi_k \cos(t\sqrt{\lambda_k + b}) + \frac{\psi_k}{\sqrt{\lambda_k + b}} \sin(t\sqrt{\lambda_k + b}) + \\ &+ \frac{1}{\sqrt{\lambda_k + b}} \int_0^t f_k(\tau) \sin[(t - \tau)\sqrt{\lambda_k + b}] d\tau, \quad k \in \mathbb{N}, \quad (32) \end{aligned}$$

откуда следует оценка

$$|u_k(t)| \leq |\varphi_k| + \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} |\psi_k| + \sqrt{T/\lambda_k} \|f_k(t)\|_{L_2(0,T)}. \quad (33)$$

В этом случае справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\gamma = 0$ и функция $\varphi(x)$ удовлетворяет условиям леммы 5, функция $\psi(x)$ удовлетворяет условиям леммы 4, а функция $f(x, t)$ удовлетворяет условиям леммы 4 по аргументу x равномерно по t . Тогда

ряд (23), коэффициенты которого определены равенствами (32), определяет решение задачи A_1 .

Доказательство. Здесь при рассмотрении ряда (29) [(30)] в силу (32) и (33) вместо (31) получим ряды

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \varphi_k v_k(x), \quad \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_k} \psi_k v_k(x), \quad \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_k \int_0^T f_k^2(\tau) d\tau} v_k(x). \quad (34)$$

Абсолютная и равномерная сходимость первого из рядов (34) доказана выше. Рассмотрим второй и третий ряды. Применяя неравенство Коши—Буняковского к каждому из этих рядов, имеем

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_k} \psi_k v_k(x) \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \left| \lambda_k \psi_k \frac{v_k(x)}{\sqrt{\lambda_k}} \right| \leq \left[\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 \psi_k^2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{v_k^2(x)}{\lambda_k} \right]^{1/2},$$

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_k} \int_0^t f_k(\tau) \sin[(t-\tau)\sqrt{\lambda_k+b}] d\tau \cdot v_k(x) \right| \leq \\ & \leq \sum_{k=1}^{\infty} \left| \sqrt{\lambda_k^2 \int_0^T f_k^2(\tau) d\tau} \cdot \frac{v_k(x)}{\sqrt{\lambda_k}} \right| \leq \left[T \int_0^1 \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 f_k^2(\tau) d\tau \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{v_k^2(x)}{\lambda_k} \right]^{1/2}. \end{aligned}$$

В силу условия теоремы 3 на основании лемм 2 и 4 ряды в правой части последних неравенств сходятся равномерно на $[0, 1]$. Следовательно, ряды, стоящие в левых частях, сходятся равномерно в Ω . Дальнейшие рассуждения аналогичны случаю $0 < \gamma < 1/2$. \square

ТЕОРЕМА 4. Пусть функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$ и $f(x, t)$ удовлетворяют условиям теоремы 2 или 3. Тогда для решения задачи A_1 справедливы оценки

$$\|u(x, t)\|_{L_2(0,1)}^2 \leq K_0 [\|\varphi(x)\|_{L_2(0,1)}^2 + \|\psi(x)\|_{L_2(0,1)}^2 + \|f(x, t)\|_{L_2(\Omega)}^2], \quad (35)$$

$$\begin{aligned} & \|u(x, t)\|_{C(\bar{\Omega})} \leq \\ & \leq K_1 \left[\|\varphi^{(2n)}(x)\|_{L_{2,r}(0,1)} + \|\psi^{(2n)}(x)\|_{L_{2,r}(0,1)} + \left\| \frac{\partial^{2n}}{\partial x^{2n}} f(x, t) \right\|_{L_{2,r}(\Omega)} \right], \quad (36) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \|\varphi(x)\|_{L_{2,r}(0,1)} &= \left[\int_0^1 x^\alpha [\varphi(x)]^2 dx \right]^{1/2}, \\ \|g(x, t)\|_{L_{2,r}(\Omega)} &= \left[\int_0^T \int_0^1 x^\alpha g^2(x, t) dx dt \right]^{1/2}; \end{aligned}$$

$r(x) = x^\alpha$; K_0 и K_1 — некоторые действительные положительные числа.

Доказательство. Учитывая ортонормальность системы $\{v_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ и неравенства (28), (33), из (23) получим

$$\begin{aligned} \|u(x, t)\|_{L_2(0,1)}^2 &= \sum_{k=1}^{\infty} u_k^2(t) \leq K_2 \sum_{k=1}^{\infty} [|\varphi_k| + |\psi_k| + \|f_k(t)\|_{L_2(0,T)}]^2 \leq \\ &\leq 3K_2 \sum_{k=1}^{\infty} [\varphi_k^2 + \psi_k^2 + \|f_k(t)\|_{L_2(0,T)}^2], \end{aligned}$$

где $K_2 = \text{const} > 0$.

Отсюда, учитывая неравенство Бесселя, получим

$$\|u(x, t)\|_{L_2(0,1)}^2 \leq 3K_2 \left(\|\varphi(x)\|_{L_2(0,1)}^2 + \|\psi(x)\|_{L_2(0,1)}^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \|f_k(t)\|_{L_2(0,T)}^2 \right). \quad (37)$$

Принимая во внимание представление $f(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t)v_k(x)$ и ортонормированность системы функций $\{v_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$, имеем

$$\begin{aligned} \|f(x, t)\|_{L_2(\Omega)}^2 &= \left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k(t)v_k(x), \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)v_n(x) \right)_{L_2(\Omega)} = \\ &= \int_0^T \sum_{k=1}^{\infty} [f_k(t)]^2 dt = \sum_{n=1}^{\infty} \|f_k(t)\|_{L_2(0,T)}^2. \end{aligned}$$

Если учесть это равенство, то неравенство (35) сразу следует из (37).

Из (23) на основании (28) и (33) при любых $\bar{\Omega}$ имеем

$$\begin{aligned} |u(x, t)| &= \left| \sum_{k=1}^{\infty} v_k(x)u_k(t) \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |v_k(x)| |u_k(t)| \leq \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|v_k(x)|}{\sqrt{\lambda_k}} (\sqrt{\lambda_k}|\varphi_k| + K_3\sqrt{\lambda_k}|\psi_k| + K_4\sqrt{\lambda_k}\|f_k(t)\|_{L_2(0,T)}), \end{aligned}$$

где K_3 и K_4 — некоторые действительные положительные числа.

Отсюда, применяя неравенство Коши—Буняковского, получим

$$\begin{aligned} |u(x, t)| &\leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{v_k^2(x)}{\lambda_k} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \varphi_k^2 \right)^{1/2} + K_3 \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{v_k^2(x)}{\lambda_k} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \psi_k^2 \right)^{1/2} + \\ &+ K_4 \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{v_k^2(x)}{\lambda_k} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \|f_k(t)\|_{L_2(0,T)}^2 \right)^{1/2}. \quad (38) \end{aligned}$$

Принимая во внимание утверждение лемм 2 и 3, из (38) находим

$$\begin{aligned} \|u(x, t)\|_{C(\bar{\Omega})} &= \sup_{\bar{\Omega}} |u(x, t)| \leq K_5 \left(\int_0^1 x^\alpha [\varphi^{(2n)}(x)]^2 dx \right)^{1/2} + \\ &+ K_3 K_5 \left(\int_0^1 x^\alpha [\psi^{(2n)}(x)]^2 dx \right)^{1/2} + K_4 K_5 \left(\int_0^T \int_0^1 x^\alpha \left[\frac{\partial^{2n}}{\partial x^{2n}} f(x, t) \right]^2 dx dt \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

где

$$K_5 = \left(\sup_{[0,1]} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{v_k^2(x)}{\lambda_k} \right)^{1/2}.$$

Если учесть введенные обозначения, то из последнего сразу следует неравенство (36). Теорема 4 полностью доказана. \square

Заключение. В данной работе рассмотрена начально-граничная задача для дифференциального уравнения в частных производных высокого четного порядка в прямоугольной области. Методом разделения переменных найдено решение задачи в виде ряда, который сходится абсолютно и равномерно в замыкании области рассмотрения уравнения. Доказаны единственность решения задачи и непрерывная зависимость его от заданных функций.

Конкурирующие интересы. Мы не имеем конкурирующих интересов.

Авторский вклад и ответственность. Все авторы принимали участие в разработке концепции статьи и в написании рукописи. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

Финансирование. Исследование выполнялось без финансирования.

Библиографический список

1. Тихонов А. Н., Самарский А. А. *Уравнения математической физики*. М.: Наука, 1966. 724 с.
2. Тимошенко С. П. *Колебания в инженерном деле*. М.: Физматлит, 1967. 444 с.
3. Коренев Б. Г. *Вопросы расчета балок и плит на упругом основании*. М.: Стройиздат, 1954. 156 с.
4. Филиппов А. П. *Колебания деформируемых систем*. М.: Машиностроение, 1970. 734 с.
5. Крылов А. Н. *Вибрация судов*. Л.; М., 1936.
6. Сабитов К. Б. Начальная задача для уравнения колебаний балок // *Диффер. уравн.*, 2017. Т. 53, № 5. С. 665–671. EDN: YSXNEH. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0374064117050090>.
7. Сабитов К. Б. Колебания балки с заделанными концами // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2015. Т. 19, № 2. С. 311–324. EDN: UGXNZR. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1406>.
8. Сабитов К. Б. К теории начально-граничных задач для уравнения стержней и балок // *Диффер. уравн.*, 2017. Т. 53, № 1. С. 89–100. EDN: XRXOV. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0374064117010083>.
9. Сабитов К. Б., Акимов А. А. Начально-граничная задача для нелинейного уравнения колебаний балки // *Диффер. уравн.*, 2020. Т. 56, № 5. С. 632–645. EDN: FUQBLD. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0374064120050076>.
10. Сабитов К. Б. Обратные задачи для уравнения колебаний балки по определению правой части и начальных условий // *Диффер. уравн.*, 2020. Т. 56, № 6. С. 773–785. EDN: ZUQBSX. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0374064120060096>.
11. Сабитов К. Б., Фадеева О. В. Начально-граничная задача для уравнения вынужденных колебаний консольной балки // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2021. Т. 25, № 1. С. 51–66. EDN: SXRWIP. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1845>.
12. Urinov A. K., Azizov M. S. A boundary problem for the loaded partial differential equations of fourth order // *Lobachevskii J. Math.*, 2021. vol. 42, no. 3. pp. 621–631. EDN: GZFFEC. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1995080221030197>.

13. Urinov A. K., Azizov M. S. Boundary value problems for a fourth order partial differential equation with an unknown right-hand part // *Lobachevskii J. Math.*, 2021. vol. 42, no. 3. pp. 632–640. EDN: JDWUYD. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1995080221030203>.
14. Сабитов К. Б. Начально-граничные задачи для уравнения колебаний прямоугольной пластины // *Изв. вузов. Матем.*, 2021. Т. 65, № 10. С. 60–70. EDN: RZSSHV. DOI: <https://doi.org/10.26907/0021-3446-2021-10-60-70>.
15. Сабитов К. Б. Колебания пластины с граничными условиями «шарнир–заделка» // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2022. Т. 26, № 4. С. 650–671. EDN: CXQCQU. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1950>.
16. Касимов Ш. Г., Мадрахимов У. С. Начально-граничная задача для уравнения колебаний балки в многомерном случае // *Диффер. уравн.*, 2019. Т. 55, № 10. С. 1379–1391. EDN: VSFLTA. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0374064119100091>.
17. Amanov D. J., Yuldasheva A. V. Solvability and spectral properties of boundary value problems for equations of even order // *Malays. J. Math. Sci.*, 2009. vol. 3, no. 2. pp. 227–248. EDN: XMCRSN.
18. Amanov D., Ashyralyev A. Well-posedness of boundary value problems for partial differential equations of even order // *AIP Conf. Proc.*, 2012. vol. 1470, no. 1. pp. 3–7. DOI: <https://doi.org/10.1063/1.4747625>.
19. Иргашев Б. Ю. Об одной задаче с условиями сопряжения для уравнения четного порядка с дробной производной в смысле Капуто // *Матем. заметки*, 2022. Т. 112, № 2. С. 218–226. EDN: WUKYZP. DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm13184>.
20. Уринов А. К., Азизов М. С. Начально-граничная задача для уравнения в частных производных высшего четного порядка с оператором Бесселя // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2022. Т. 26, № 2. С. 273–292. EDN: LKMGUE. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1893>.
21. Уринов А. К., Азизов М. С. О разрешимости нелокальных начально-граничных задач для одного дифференциального уравнения в частных производных высокого четного порядка // *Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки*, 2022. Т. 32, № 2. С. 240–255. EDN: HNVGQS. DOI: <https://doi.org/10.35634/vm220206>.
22. Азизов М. С. Об одной начально-граничной задаче для уравнения в частных производных высшего четного порядка с оператором Бесселя // *Бюллетень Института математики*, 2022. Т. 5, № 1. С. 14–24.
23. Уринов А. К., Усмонов Д. А. Начально-граничная задача для вырождающегося гиперболического уравнения второго рода с тремя линиями вырождения // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2022. Т. 26, № 4. С. 672–693. EDN: DIOYZF. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1962>.
24. Urinov A. K., Usmonov D. A. Initial boundary value problems for a fourth order equation with three lines of degeneracy // *Uzbek Math. J.*, 2023. vol. 67, no. 1. pp. 129–136. DOI: <https://doi.org/10.29229/uzmj.2023-1-17>.
25. Уринов А. К., Усмонов Д. А. Нелокальная начально-граничная задача для вырождающегося уравнения четвертого порядка с дробной производной Герасимова–Капуто // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*, 2023. Т. 42, № 1. С. 123–139. EDN: INZPHJ. DOI: <https://doi.org/10.26117/2079-6641-2023-42-1-123-139>.
26. Байкузиев К. Б., Каланов Б. С. О разрешимости смешанной задачи для уравнения высшего порядка, вырождающегося на границе области / *Краевые задачи для дифференциальных уравнений*. Т. 2. Ташкент: Фан, 1972. С. 40–54.
27. Иргашев Б. Ю. Краевая задача с условиями сопряжения для вырождающегося уравнения с дробной производной Капуто // *Изв. вузов. Матем.*, 2022. № 4. С. 27–36. EDN: DLFDSA. DOI: <https://doi.org/10.26907/0021-3446-2022-4-27-36>.
28. Уринов А. К., Азизов М. С. О разрешимости начально-граничной задачи для уравнения высокого четного порядка, вырождающегося на границе области // *Сиб. журн. индустр. матем.*, 2023. Т. 26, № 2. С. 155–170. DOI: <https://doi.org/10.33048/SIBJIM.2023.26.213>.

29. Уринов А. К., Азизов М. С. Об одной начально-граничной задаче для вырождающегося дифференциального уравнения в частных производных высокого четного порядка / *Неклассические уравнения математической физики и их приложения*: Международная научная конференция (Ташкент, 6–8 октября 2022 г.). Ташкент: НУУЗ, 2022. С. 186–187.
30. Erdélyi A. Magnus W., Oberhettinger F., Tricomi F. G. *Higher transcendental functions*. vol. II / Bateman Manuscript Project. New York, Toronto, London: McGraw-Hill Book Co., 1953. xvii+396 pp.
31. Наймарк М. А. *Линейные дифференциальные операторы*. М.: Наука, 1969. 528 с.
32. Михлин С. Г. *Лекции по линейным интегральным уравнениям*. М.: Физматгиз, 1959. 232 с.
33. Watson G. N. *A treatise on the theory of Bessel functions* / Cambridge Mathematical Library. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1995. vi+804 pp.

MSC: 35G15

On the solvability of an initial boundary problem for a high even order degenerate equation

A. K. Urinov^{1,2}, *D. D. Oripov*¹¹ Fergana State University,

19, Murabbiylar st., Fergana, 150100, Uzbekistan.

² Institute of Mathematics named after V. I. Romanovsky
of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan,
46, Universitetskaya st., Tashkent, 100174, Uzbekistan.

Abstract

A degenerate partial differential equation of high even order is considered in the rectangle. For the considered equation, an initial-boundary problem has been formulated and the uniqueness, existence, and stability of the solution to this problem has been investigated. The uniqueness of the solution to the problem has been proved by the method of integral identities. The existence of a solution to the problem was investigated by methods of separation of variables. Here, we first studied the spectral problem for an ordinary differential equation of high even order, which follows from the considered problem in the separation of variables. The Green's function of the spectral problem was constructed. Using this, the spectral problem was equivalently reduced to an integral Fredholm equation of the second kind with a symmetric kernel. Hence, on the basis of the theory of integral equations, it is concluded that there are a countable number of eigenvalues and eigenfunctions of the spectral problem. The conditions were found under which a given function is expanded into a uniformly convergent Fourier series in terms of eigenfunctions of the spectral problem. Using the properties of the Green's function and the eigenfunctions of the spectral problem, we proved a lemma on the uniform convergence of some bilinear series. Lemmas on the order of the Fourier coefficients of a given function were also proved. The solution to the problem under study has been written as the sum of a Fourier series with respect to the system of eigenfunctions of the spectral problem. The uniform

Differential Equations and Mathematical Physics

Research Article

© Authors, 2023

© Samara State Technical University, 2023 (Compilation, Design, and Layout)

 The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Please cite this article in press as:

Urinov A. K., Oripov D. D. On the solvability of an initial boundary problem for a high even order degenerate equation, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2023, vol. 27, no. 4, pp. 621–644. EDN: AYWFBD. DOI: 10.14498/vsgtu2023 (In Russian).

Authors' Details:

Akhmadjon K. Urinov  <https://orcid.org/0000-0002-9586-1799>Dr. Phys. & Math. Sci.; Professor; Dept. of Mathematical Analysis and Differential Equations¹; Leading Researcher²; e-mail: urinovak@mail.ru*Dostonbek D. Oripov*  <https://orcid.org/0000-0002-0212-6964>Basic Doctoral Student; Dept. of Mathematical Analysis and Differential Equations¹; e-mail: dostonbekoripov94@gmail.com

convergence of this series and the series obtained from it by term-by-term differentiation were proved using the lemmas listed above. At the end of the article, two estimates are obtained for solution of the formulated problem, one of which is in the space of square summable functions with weight, and the other is in the space of continuous functions. These inequalities imply the stability of the solution in the corresponding spaces.

Keywords: degenerate differential equation, initial-boundary problem, spectral problem, existence, uniqueness and stability of a solution, method of separation of variables.

Received: 14th May, 2023 / Revised: 9th October, 2023 /

Accepted: 13th December, 2023 / First online: 23rd December, 2023

Competing interests. We have no competing interests.

Authors' contributions and responsibilities. Each author has participated in the development of the concept of the article and in the writing of the manuscript. The authors are absolutely responsible for submitting the final manuscript in print. Each author has approved the final version of the manuscript.

Funding. The research has not received funding.

References

1. Tikhonov A. N., Samarskii A. A. *Uravneniia matematicheskoi fiziki* [Equations of Mathematical Physics]. Moscow, Nauka, 1966, 724 pp. (In Russian)
2. Timoshenko S. P. *Vibration Problems in Engineering*. Chichester, Wiley, 1974, 538 pp.
3. Korenev B. G. *Voprosy rascheta balok i plit na uprugom osnovanii* [Analysis of Beams and Plates on Elastic Foundation]. Moscow, Stroizdat, 1954, 156 pp. (In Russian)
4. Filippov A. P. *Kolebaniia deformiruemyykh sistem* [Oscillations of Deformable Systems]. Moscow, Mashinostroenie, 1970, 734 pp. (In Russian)
5. Krylov A. N. *Vibratsiia sudov* [Vibration of Ships]. Leningrad, Moscow, 1936 (In Russian).
6. Sabitov K. B. Cauchy problem for the beam vibration equation, *Differ. Equat.*, 2017, vol. 53, no. 5, pp. 658–664. EDN: XNIRNN. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0012266117050093>.
7. Sabitov K. B. Fluctuations of a beam with clamped ends, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2015, vol. 19, no. 2, pp. 311–324 (In Russian). EDN: UGXNZR. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1406>.
8. Sabitov K. B. A remark on the theory of initial-boundary value problems for the equation of rods and beams, *Differ Equat.*, 2017, vol. 53, no. 1, pp. 86–98. EDN: YVJCOJ. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0012266117010086>.
9. Sabitov K. B., Akimov A. A. Initial-boundary value problem for a nonlinear beam vibration equation, *Differ. Equat.*, 2020, vol. 56, no. 5, pp. 621–634. EDN: VFFDXC. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0012266120050079>.
10. Sabitov K. B. Inverse problems of determining the right-hand side and the initial conditions for the beam vibration equation, *Differ. Equat.*, 2020, vol. 56, no. 6, pp. 761–774. EDN: ULGVTX. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0012266120060099>.
11. Sabitov K. B., Fadeeva O. V. Initial-boundary value problem for the equation of forced vibrations of a cantilever beam, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2021, vol. 25, no. 1, pp. 51–66 (In Russian). EDN: SXRWIP. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1845>.
12. Urinov A. K., Azizov M. S. A boundary problem for the loaded partial differential equations of fourth order, *Lobachevskii J. Math.*, 2021, vol. 42, no. 3, pp. 621–631. EDN: GZFFEC. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1995080221030197>.

13. Urinov A. K., Azizov M. S. Boundary value problems for a fourth order partial differential equation with an unknown right-hand part, *Lobachevskii J. Math.*, 2021, vol. 42, no. 3, pp. 632–640. EDN: JDWUYD. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1995080221030203>.
14. Sabitov K. B. Initial-boundary value problems for equation of oscillation of a rectangular plate, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2021, vol. 65, no. 10, pp. 52–62. EDN: FCMYHQ. DOI: <https://doi.org/10.3103/S1066369X21100054>.
15. Sabitov K. B. Vibrations of plate with boundary “hinged attachment” conditions, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2022, vol. 26, no. 4, pp. 650–671 (In Russian). EDN: CXQCUC. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1950>.
16. Kasimov S. G., Madrakhimov U. S. Initial-boundary value problem for the beam vibration equation in the multidimensional case, *Differ. Equat.*, 2019, vol. 55, no. 10, pp. 1336–1348. EDN: ZNTNRD. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0012266119100094>.
17. Amanov D. J., Yuldasheva A. V. Solvability and spectral properties of boundary value problems for equations of even order, *Malays. J. Math. Sci.*, 2009, vol. 3, no. 2, pp. 227–248. EDN: XMCRSH.
18. Amanov D., Ashyralyev A. Well-posedness of boundary value problems for partial differential equations of even order, *AIP Conf. Proc.*, 2012, vol. 1470, no. 1, pp. 3–7. DOI: <https://doi.org/10.1063/1.4747625>.
19. Irgashev B. Yu. On a problem with conjugation conditions for an equation of even order involving a Caputo fractional derivative, *Math. Notes*, 2022, vol. 112, no. 2, pp. 215–222. EDN: YMKTPZ. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0001434622070252>.
20. Urinov A. K., Azizov M. S. An initial boundary value problem for a partial differential equation of higher even order with a Bessel operator, [*J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.*], 2022, vol. 26, no. 2, pp. 273–292 (In Russian). EDN: LKMGUE. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1893>.
21. Urinov A. K., Azizov M. S. On the solvability of nonlocal initial-boundary value problems for a partial differential equation of high even order, *Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, 2022, vol. 32, no. 2, pp. 240–255 (In Russian). EDN: HNVGQS. DOI: <https://doi.org/10.35634/vm220206>.
22. Azizov M. S. About an initial-boundary value problem for a partial differential equation of higher even order with the Bessel operator, *Bull. Inst. Math.*, 2022, vol. 5, no. 1, pp. 14–24 (In Russian).
23. Urinov A. K., Usmonov D. A. An initial-boundary problem for a hyperbolic equation with three lines of degenerating of the second kind, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2022, vol. 26, no. 4, pp. 672–693 (In Russian). EDN: DIOYZF. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1962>.
24. Urinov A. K., Usmonov D. A. Initial boundary value problems for a fourth order equation with three lines of degeneracy, *Uzbek Math. J.*, 2023, vol. 67, no. 1, pp. 129–136. DOI: <https://doi.org/10.29229/uzmj.2023-1-17>.
25. Non-local initial-boundary value problem for a degenerate fourth-order equation with a fractional Gerasimov–Caputo derivative, *Vestnik KRAUNC. Fiz.-Mat. Nauki*, 2023, vol. 42, no. 1, pp. 123–139 (In Russian). EDN: INZPHJ. DOI: <https://doi.org/10.26117/2079-6641-2023-42-1-123-139>.
26. Baikuziev K. B., Kalanov B. S. On the solvability of a mixed problem for a higher-order equation that degenerates on the boundary of a domain, In: *Boundary Value Problems for Differential Equations*, vol. 2. Tashkent, Fan, 1972, pp. 40–54 (In Russian).
27. Irgashev B. Yu. A boundary value problem with conjugation conditions for a degenerate the equations with the Caputo fractional derivative, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2022, vol. 66, no. 4, pp. 24–31 (In Russian). DOI: <https://doi.org/10.3103/S1066369X2204003X>.
28. Urinov A. K., Azizov M. S. About an initial boundary problem for a degenerate higher even order partial differential equation, *Sib. Zh. Ind. Mat.*, 2023, vol. 26, no. 2, pp. 155–170 (In Russian). DOI: <https://doi.org/10.33048/SIBJIM.2023.26.213>.

29. Urinov A. K., Azizov M. S. On an initial boundary value problem for a degenerate partial differential equation of high even order, In: *Nonclassical Equations of Mathematical Physics and their Applications*, International Scientific Conference (Tashkent, 6–8 October 2022). Tashkent, National Univ. of Uzbekistan, 2022, pp. 186–187.
30. Erdélyi A. Magnus W., Oberhettinger F., Tricomi F. G. *Higher transcendental functions*, vol. II, Bateman Manuscript Project. New York, Toronto, London, McGraw-Hill Book Co., 1953, xvii+396 pp.
31. Naimark M. A. *Lineinye differentsial'nye operatory* [Linear Differential Operators]. Moscow, Nauka, 1969, 528 pp. (In Russian)
32. Mikhlin S. G. *Lektsii po lineinym integral'nym uravneniiam* [Lectures on Linear Integral Equations]. Moscow, Fizmatgiz, 1959, 232 pp. (In Russian)
33. Watson G. N. *A treatise on the theory of Bessel functions*, Cambridge Mathematical Library. Cambridge, Cambridge Univ. Press, 1995, vi+804 pp.



УДК 539.3

Численное моделирование взаимодействия деформируемого газопроницаемого фрагмента гранулированного слоя с ударной волной в трехмерной постановке

Е. Г. Глазова, А. В. Кочетков, А. А. Лисицын, И. А. Модин

Научно-исследовательский институт механики

Нижегородского государственного университета им. Н. И. Лобачевского,
Россия, 603022, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23, корпус 6.

Аннотация

Разработанная авторами ранее численная методика решения трехмерных задач динамического взаимодействия деформируемых тел и сред в эйлеровых переменных на базе схемы Годунова повышенной точности применяется для решения задач взаимодействия деформируемого газопроницаемого фрагмента гранулированного слоя с ударными волнами. Моделирование основано на базе единого модифицированного разностного метода Годунова как для расчета движения газа, так и для расчета динамического деформирования упругопластических элементов пронизываемого гранулированного слоя. Повышение точности достигается путем сближения областей влияния разностной и дифференциальной задач. Предполагается, что песчаный гранулированный слой состоит из совокупности одинаковых шаровых деформируемых кварцевых частиц, представляющей собой кубическую упаковку. Пространство между частицами заполнено сжимаемой газовой средой (воздухом). Выделяется симметричный элемент упаковки в виде последовательности шаровых частиц. Для демонстрации численной методики предполагается, что многослойная гранулированная среда в направлении распространения плоской ударной волны состоит из трех слоев частиц в канале квадратного сечения с жесткими стенками. Исследование проводится по методике с явным выделением подвижных лагранжевых контактных поверхностей с использованием многосеточных алгоритмов. Приводятся

Механика деформируемого твердого тела

Научная статья

© Коллектив авторов, 2023

© СамГТУ, 2023 (составление, дизайн, макет)

© Контент публикуется на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

Образец для цитирования

Глазова Е. Г., Кочетков А. В., Лисицын А. А., Модин И. А. Численное моделирование взаимодействия деформируемого газопроницаемого фрагмента гранулированного слоя с ударной волной в трехмерной постановке // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2023. Т. 27, № 4. С. 645–658. EDN: CFAYCE. DOI: 10.14498/vsgtu2007.

Сведения об авторах

Елена Геннадьевна Глазова  <https://orcid.org/0000-0003-4351-889X>

кандидат физико-математических наук; ученый секретарь; лаб. динамики многокомпонентных сред; e-mail: glazova@mech.unn.ru

Анатолий Васильевич Кочетков  <https://orcid.org/0000-0001-7939-8207>

доктор физико-математических наук; заведующий лабораторией; лаб. динамики многокомпонентных сред; e-mail: kochetkov@mech.unn.ru

результаты численных исследований процесса распространения ударной волны в гранулированном слое с учетом движения его деформируемых элементов. Показано, что для заданных параметров задачи влияние деформационных процессов незначительно. Проходящая через слой ударная волна формирует за преградой газодинамическое течение, близкое к одномерному. Соответствие результатов численного решения известным экспериментальным результатам по параметрам проходящей через слой ударной волны свидетельствует об адекватности применяемых математических и численных моделей.

Ключевые слова: численное моделирование, схема Годунова, повышенная точность, многосеточный подход, трехмерная задача, ударные волны, газопроницаемость, упругопластическая преграда, взаимодействие.

Получение: 16 марта 2023 г. / Исправление: 17 ноября 2023 г. /

Принятие: 13 декабря 2023 г. / Публикация онлайн: 25 декабря 2023 г.

Введение. Гранулированные слои являются перспективным элементом для защиты ответственных конструкций от действия ударных волн. Защитные свойства слоев из различных материалов достаточно хорошо изучены для действия акустических и слабых ударных волн [1–5]. Исследования проводились экспериментальными, аналитическими и численными методами. Взаимодействия гранулированных слоев с интенсивными ударными волнами в ударных трубах рассматривались в основном экспериментальными методами в циклах работ [6–12] и численно в [13]. В этих работах исследовались песчаные гранулированные слои, в результате воздействия ударных волн на которые происходило разрушение и разлет частиц. В силу ограниченности возможностей экспериментальных подходов в части измерений и наблюдений многие особенности протекающих процессов остались невыясненными. Современные численные методы имеют значительный исследовательский потенциал и позволяют решать сложные нелинейные задачи, включающие распространение ударных волн в твердых телах, в газах и в гранулированных средах. В данной работе для моделирования трехмерных быстропротекающих процессов и в газе, и в деформируемом теле используется единый численный метод — модифицированный метод Годунова [14–23], основанный на интегрировании законов сохранения с использованием решения задачи «распада разрыва» в газе, деформируемом теле и на границе «газ – деформируемое тело», имеющий второй порядок аппроксимации на гладких решениях и монотонный на разрывных. Повышение точности достигается только за счет модификации решения задачи распада разрыва на шаге «предиктор» схемы путем сближения областей влияния разностной и дифференциальной задач [14].

Артем Александрович Лисицын  <https://orcid.org/0009-0006-9397-6257>
аспирант; младший научный сотрудник; лаб. динамики многокомпонентных сред;
e-mail: artem.lisitsyn@unn.ru

Иван Александрович Модин  <https://orcid.org/0000-0002-3561-4606>
кандидат технических наук; старший научный сотрудник; лаб. физико-механических испытаний материалов; e-mail: mianet@mail.ru

1. Постановка задачи. Постановка задачи соответствует условиям проведения экспериментальных исследований [12]. В квадратной стальной трубе (рис. 1) в левой ударной секции находится воздух под высоким давлением. В правой секции находится воздух низкого давления и песчаный гранулированный слой, расположенный поперек трубы. Его свободные поверхности с двух сторон закрыты бумажными экранами. Формирование ударной волны производится на границе двух камер путем разрыва диафрагмы. В расчетах использовались параметры ударной волны, близкие по давлению, плотности и скорости к экспериментальным. Требуется описать в связанной постановке процессы формирования, распространения ударной волны по длине трубы и ее взаимодействия с гранулированным деформируемым слоем.

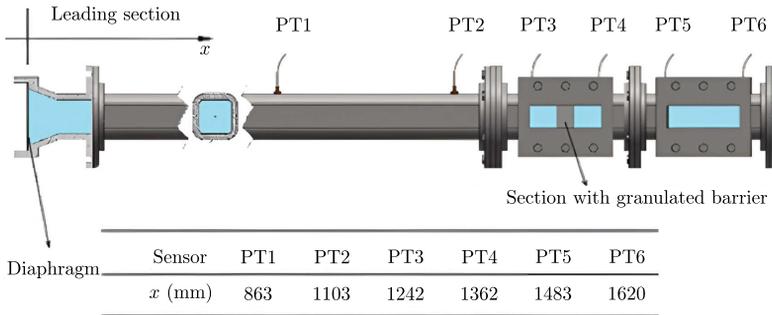


Рис. 1. Экспериментальная установка
[Figure 1. Schematic front view of the shock tube]

Для численного моделирования используются уравнения динамики сплошных сред в векторном виде [14]:

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u} + \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{f} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{g} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{h} = \mathbf{k}, \quad (1)$$

где

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ e \\ s_{xx} \\ s_{yy} \\ s_{zz} \\ s_{xy} \\ s_{xz} \\ s_{yz} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p - s_{xx} \\ \rho uv - s_{xy} \\ \rho uw - s_{xz} \\ (e + p - s_{xx})u - s_{xy}v - s_{xz}w \\ u(s_{xx} - \frac{4}{3}\mu) \\ u(s_{yy} + \frac{2}{3}\mu) \\ u(s_{zz} + \frac{2}{3}\mu) \\ us_{xy} - \mu v \\ us_{xz} - \mu w \\ us_{yz} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{g} = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho uv + p - s_{xy} \\ \rho v^2 + p - s_{yy} \\ \rho vw - s_{yz} \\ (e + p - s_{yy})v - s_{xy}u - s_{yz}w \\ v(s_{xx} + \frac{2}{3}\mu) \\ v(s_{yy} - \frac{4}{3}\mu) \\ v(s_{zz} + \frac{2}{3}\mu) \\ vs_{xy} - \mu u \\ vs_{xz} \\ us_{yz} - \mu w \end{pmatrix}, \quad \mathbf{h} = \begin{pmatrix} \rho w \\ \rho uw - s_{xz} \\ \rho vw - s_{yz} \\ \rho w^2 + p - s_{zz} \\ (e + p - s_{zz})w - s_{yz}v - s_{xz}u \\ w(s_{xx} + \frac{2}{3}\mu) \\ w(s_{yy} + \frac{2}{3}\mu) \\ w(s_{zz} - \frac{4}{3}\mu) \\ ws_{xy} \\ us_{xz} - \mu u \\ us_{yz} - \mu w \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ s_{xx}(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z}) + s_{xy}(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}) + s_{xz}(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}) - \lambda s_{xx} \\ s_{xy}(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}) + s_{yy}(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z}) + s_{xz}(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}) - \lambda s_{yy} \\ s_{xz}(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z}) + s_{yz}(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial z}) + s_{xz}(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z}) - \lambda s_{zz} \\ s_{xy}(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z}) - \frac{1}{2}(s_{xx} - s_{yy})(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}) + \frac{1}{2}s_{xz}(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}) + \frac{1}{2}s_{yz}(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}) - \lambda s_{xy} \\ s_{xy}(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z}) - \frac{1}{2}(s_{xx} - s_{zz})(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial x}) + \frac{1}{2}s_{xy}(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial z}) + \frac{1}{2}s_{yz}(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}) - \lambda s_{xz} \\ s_{xy}(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z}) - \frac{1}{2}(s_{yy} - s_{zz})(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial x}) + \frac{1}{2}s_{xz}(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial y}) + \frac{1}{2}s_{xy}(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z}) - \lambda s_{yz} \end{pmatrix}.$$

Здесь $e = \rho(\varepsilon + \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2))$. Система (1) замыкается уравнением состояния (УРС) для шаровых компонент в форме

$$\varepsilon = \varepsilon(p, \rho). \quad (2)$$

В соотношениях (1), (2) используются следующие обозначения: p — давление; ρ — плотность; u, v, w — компоненты скоростей по x, y и z ; ε — внутренняя энергия единицы массы, e — полная механическая энергия единицы объема сплошной среды; $s_{xx}, s_{yy}, s_{zz}, s_{xy}, s_{xz}, s_{yz}$ — компоненты девиатора тензора истинных напряжений Эйлера; μ — модуль сдвига.

Первые пять уравнений системы (1) представляют собой законы сохранения массы, импульса и энергии. Следующие шесть уравнений — физические соотношения упругости и пластичности с учетом поворота тензора напряжений в эйлеровых переменных (производная Яумана), записанные в дифференциальной форме. К системе (1), (2) добавляются начальные и краевые условия. В случае отсутствия сдвиговых напряжений система (1) переходит в уравнения Эйлера для движения сжимаемого газа [14].

Для описания процессов в плотных сжимаемых средах применяется баротропное УРС вида $p = p(\rho)$, позволяющее избежать интегрирования уравнения сохранения энергии. Для песчаных частиц плотностью ρ_0 это будет УРС

идеального упругопластического тела $p = K\varepsilon_v$, где K — модуль объемного сжатия, $\varepsilon_v = 1 - \rho_0/\rho$ — объемная деформация.

Критерием перехода из упругого напряженно-деформированного состояния в пластическое является условие текучести Мизеса:

$$J_2 = \frac{1}{2} s_{ij} s_{ij} \leq \sigma_T^2,$$

где J_2 — второй инвариант девиатора тензора напряжений s_{ij} , σ_T — предел текучести. В соответствии с [20] в этом случае происходит коррекция компонент девиатора напряжений умножением на $\lambda = \sigma_T/\sqrt{3J_2}$. Для воздуха принимается $s_{xx} = s_{yy} = s_{zz} = s_{xy} = s_{yz} = s_{xz} = 0$, $\varepsilon = p/[\rho(\gamma - 1)]$, где γ — показатель адиабаты.

Интегральная форма (1), на базе которой строится разностная схема, имеет вид

$$\iiint_{\omega} (\mathbf{u} \, dx \, dy \, dz + \mathbf{f} \, dy \, dz \, dt + \mathbf{g} \, dx \, dz \, dt + \mathbf{h} \, dx \, dy \, dt) = \iiint_{\Omega} \mathbf{k} \, dx \, dy \, dz \, dt, \quad (3)$$

где Ω — любой замкнутый объем, поверхность ω которого гомеоморфна сфере в четырехмерном пространстве (x, y, z, t) .

На границах контакта газа с деформируемыми телами ставится условие непроникания без трения [14]. В начальный момент времени все среды покоятся, напряжения и деформации в гранулированном слое отсутствуют.

2. Многосеточный метод численного решения. Решение уравнений (1)–(3) производится методом Годунова повышенной точности [14, 17], единым как для газодинамических, так и для упругопластических течений.

Данная модификация позволяет повысить порядок аппроксимации схемы до второго на гладких решениях, сохранив монотонность на разрывных, без изменения разностного шаблона явной двухшаговой схемы, изменив только шаг «предиктор» [14].

Повышение точности в области гладких решений модифицированной схемы достигается выбором соответствующих точек интерполяции параметров для решения задачи распада разрыва в предположении линейного распределения этих параметров между центрами ячеек. Этот же принцип используется для повышения точности при реализации граничных условий.

Этап «корректор» численного интегрирования уравнений (3) остается неизменным и совпадает с классической схемой.

Эйлерово-лагранжевые подходы, описывающие взаимодействие сред и конструкций, основанные на использовании подвижных криволинейных сеток, отслеживающих движение лагранжевых контактных границ с соответствующими перестройками эйлеровых сеток внутри однородной области, широко используемые в решении двумерных задач, оказались практически непригодными для решения трехмерных задач этого класса. Поэтому в данной работе применяется многосеточный эйлерово-лагранжевый подход, который использует три типа расчетных сеток [14].

Первый тип сеток — лагранжевые сетки в виде STL-файлов, задающие и сопровождающие деформирующиеся поверхности тел. Внутри однородных областей — второй тип с неподвижными регулярными эйлеровыми сетками

с кубическими ячейками. Третий тип сеток — вспомогательные локальные подвижные эйлерово-лагранжевые сетки, связанные с поверхностями тел.

3. Исследование взаимодействия ударной волны с гранулированным слоем. Математическая постановка задачи основывается на следующих предположениях.

1. Гранулированный слой состоит из совокупности одинаковых шаровых деформируемых кварцевых частиц, представляющей собой кубическую упаковку (рис. 2).
2. Пространство между частицами заполнено сжимаемой газовой средой (воздухом).
3. Кубическая упаковка предполагает симметрию расположения частиц вдоль осей координат.
4. Воздействующая ударная волна распространяется вдоль оси X .

Выделяется симметричный элемент упаковки в виде последовательности шаровых частиц диаметром 1 мм.

Для демонстрации работоспособности численной методики предполагается, что многослойная гранулированная среда в направлении оси X состоит из трех слоев частиц, ограниченных в канале квадратного сечения с жесткими стенками. Фрагмент расчетной области представлен на рис. 3. Фактически рассматривается взаимодействие шаровых тел и газа в канале квадратного сечения с жесткими стенками. На рис. 3, *b* сетка внутри окружности — сетка по шаровой песчинке.

Коэффициент газопроницаемости поперечного сечения, то есть отношение минимальной площади, занимаемой газом, к площади бокового сечения составляет 0.215, объемное содержание воздуха — 0.476. На боковых стенках

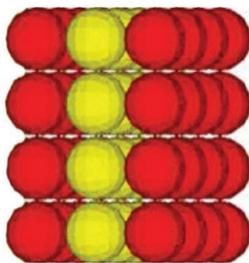


Рис. 2. Вид гранулированного слоя
[Figure 2. View of a granular layer]

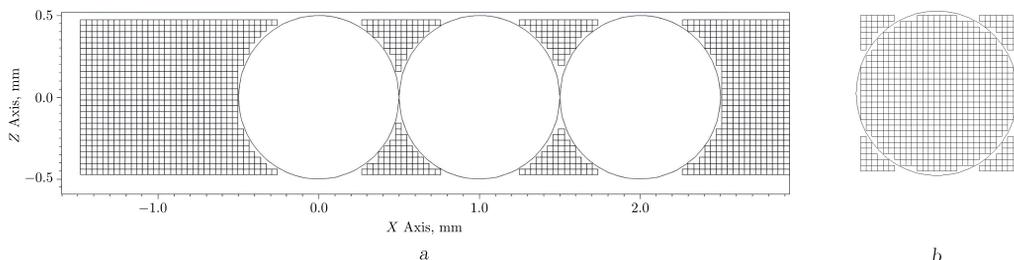


Рис. 3. Расчетная область (а) и сетка в поперечном сечении (b)
[Figure 3. Computational domain (a) and mesh in cross section (b)]

канала общей длиной 21 мм по оси X реализуются условия жесткой стенки, а на граничных плоскостях $X = -1.5$ мм и $X = 19.5$ мм выполняются условия «свободного вытока» [16]. Для кварца, из которого состоят тела, принимаем, что модуль объемного сжатия $K = 109$ ГПа, модуль сдвига $\mu = 43$ ГПа, предел текучести $\sigma_T = 0.17$ ГПа, плотность $\rho = 2650$ кг/м³. Для воздуха принимаем, что показатель адиабаты $\gamma = 1.4$, плотность $\rho_0 = 1.23$ кг/м³.

Тела шаровой формы взаимодействуют между собой, воздухом и плоскостями симметрии. Начало координат расположено в центре крайнего левого шарика.

В начальный момент времени все среды предполагаются невозмущенными, кроме области газа. Перед первым шариком длиной 1.5 мм по оси X в начальный момент задаются параметры, как за фронтом отраженной ударной волны: давление 1.6 МПа, плотность 13.2 кг/м³ и нулевая скорость.

Размер расчетной области по оси X составляет 21 мм, по оси $Y - 1$ мм, по оси $Z - 1$ мм, размер ячеек в основной сетке второго типа 0.03 мм, всего использовалось около 900 тыс. ячеек, в том числе порядка 100 тыс. ячеек по кварцевым телам.

Расчеты проводились на 4-ядерных компьютерах с процессором Intel I7. Время расчета составило порядка 100 ч.

На рис. 4 показаны поля давления в газе в диагональном сечении расчетного канала в моменты времени 0.2, 2.5, 10 мкс. В поровом газе наблюдаются сложные многомерные сверхзвуковые течения, возникающие в процессе распространения ударной волны. На выходе в свободное пространство формируется течение, близкое к одномерному, на расстоянии порядка трех диаметров шарика.

На рис. 5 показано распределение давлений в диагональном сечении вдоль двух линий, параллельных оси X , в момент времени 10.4 мкс: кривая 1 проходит через центры шариков, кривая 2 проходит через всю расчетную область газа в диагональном сечении. Разрывы в кривых связаны с тем, что линии проходят и через газ, и через твердые частицы. Амплитуда на фронте

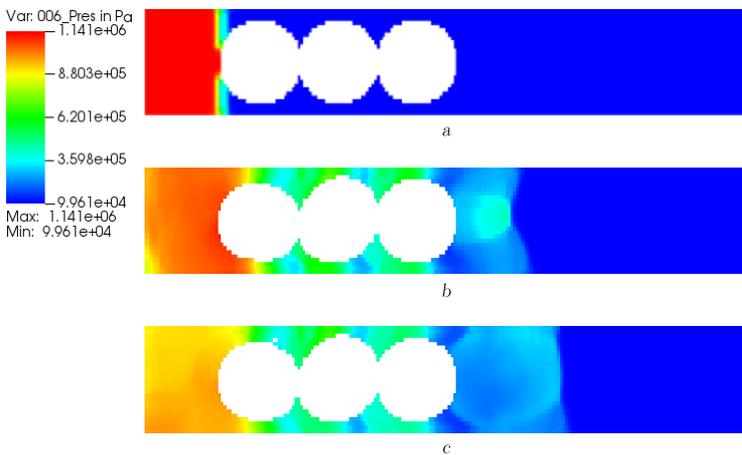


Рис. 4. Поля давлений (Па) в газе в диагональном сечении в различные моменты времени: $a - 0.2$ мкс, $b - 2.5$ мкс, $c - 10$ мкс

[Figure 4. Pressure fields (Pa) in gas in a diagonal section at different times: $a - 0.2$ μ s, $b - 2.5$ μ s, $c - 10$ μ s]

выходящей квазиодномерной ударной волны составляет около 0.4 МПа, что примерно на 10 % превышает аналогичные экспериментальные значения [12]. Несмотря на используемый в расчетах на порядок более тонкий гранулированный слой (3 мм), чем в экспериментах (20 мм), наблюдается соответствие численных и экспериментальных данных.

На рис. 6 показано распределение давления в кварцевых шариках в моменты времени 0.2, 2.5, 10 мкс. Наблюдается сложная картина взаимодействия деформационных волн при контактном взаимодействии шариков между собой, окружающим газом и жесткими границами. Уже на ранних этапах взаимодействия возникают кратковременные отрывы шариков друг от друга.

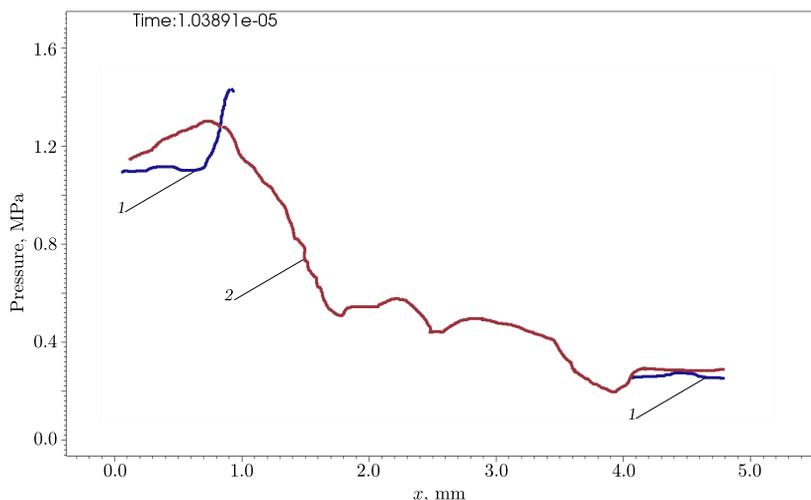


Рис. 5. Давление в поровом газе в диагональном сечении в момент времени 10.4 мкс
 [Figure 5. Pressure in the pore gas in the diagonal section at a time of 10.4 μ s along lines parallel to the X axis: curve 1 passes through the centers of the balls, curve 2 passes through the entire computational domain of the gas]

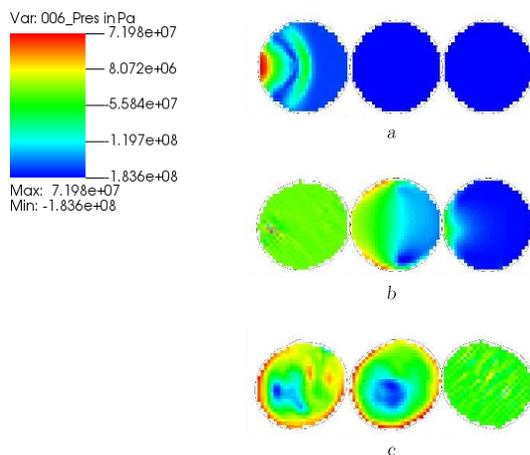


Рис. 6. Поля давлений (Па) в кварцевых шариках в различные моменты времени:
 a — 0.2 мкс, b — 2.5 мкс, c — 10 мкс

[Figure 6. Pressure fields (Pa) in quartz balls at different times:
 a — 0.2 μ s, b — 2.5 μ s, c — 10 μ s]

Первый отрыв формируется к моменту времени 10 мкс. В результате схождения упругих волн с оси симметрии шариков образуются локальные области высокого давления до 2 ГПа, но время их существования незначительно, порядка сотых долей микросекунды, не оказывающих заметного влияния на контактное взаимодействие шариков, их формоизменение и газодинамические процессы.

Заключение. Полученные численные результаты свидетельствуют об адекватности применяемых математических и численных моделей для решения задач взаимодействия ударных волн с деформируемыми газопроницаемыми гранулированными слоями.

Конкурирующие интересы. Заявляем, что в отношении авторства и публикации этой статьи конфликта интересов не имеем.

Авторский вклад и ответственность. И. А. Модин — проведение численных расчетов, обработка и анализ результатов, работа с черновиком и переработанным вариантом рукописи. А. В. Кочетков — идея исследования, формулировка целей и задач исследования, визуализация и верификация результатов. Е. Г. Глазова — проведение численных расчетов, работа с черновиком и переработанным вариантом рукописи. А. А. Лисицын — проведение численных расчетов, визуализация и верификация результатов, работа с черновиком и переработанным вариантом рукописи. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

Финансирование. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-29-00672, <https://rscf.ru/project/22-29-00672/>.

Библиографический список

1. Britan A., Ben-Dor G., Elperin T., et al. Mechanism of compressive stress formation during weak shock waves impact with granular materials // *Experiments in Fluids*, 1997. vol. 22, no. 6. pp. 507–518. DOI: <https://doi.org/10.1007/s003480050078>.
2. Ben-Dor G., Britan A., Elperin T., et al. Experimental investigation of the interaction between weak shock waves and granular layers // *Exper. Fluids*, 1997. vol. 22, no. 5. pp. 432–443. DOI: <https://doi.org/10.1007/s003480050069>.
3. Glam B., Igra O., Britan A., Ben-Dor G. Dynamics of stress wave propagation in a chain of photoelastic discs impacted by a planar shock wave; Part I, experimental investigation // *Shock Waves*, 2007. vol. 17, no. 1. pp. 1–14. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00193-007-0094-x>.
4. Губайдуллин А. А., Болдырева О. Ю., Дудко Д. Н. Взаимодействие акустических волн с пористым слоем // *Теплофиз. аэромех.*, 2009. Т. 16, № 3. С. 455–470. EDN: KTOLRN.
5. Глазова А. А., Турыгина И. А., Модин И. А. Моделирование взаимодействия ударной волны с деформируемым гранулированным слоем // *Пробл. прочн. пласт.*, 2020. Т. 82, № 3. С. 353–363. EDN: DZEECW. DOI: <https://doi.org/10.32326/1814-9146-2020-82-3-353-363>.
6. Мирова О. А., Котельников А. Л., Голуб В. В., Баженова Т. В. Воздействие ударной волны на защитные песчаные экраны различной толщины // *Теплофиз. выс. темп.*, 2015. Т. 53, № 1. С. 145–147. EDN: TFVUOF. DOI: <https://doi.org/10.7868/S0040364415010172>.
7. Котельников А. Л., Мирова О. А., Голуб В. В. [и др.] Исследование взаимодействия взрывной волны с разрушаемым экраном из гранулированного материала // *Теплофиз. выс. темп.*, 2014. Т. 52, № 5. С. 739–745. EDN: SKIBAN. DOI: <https://doi.org/10.7868/S0040364414040140>.

8. Мирова О. А., Котельников А. Л., Голуб В. В. [и др.] Влияние скорости разлета материала защитного песчаного экрана на ослабление импульса отраженной от него взрывной волны // *Теплофиз. выс. темп.*, 2016. Т. 54, № 5. С. 761–766. EDN: WLNIMN. DOI: <https://doi.org/10.7868/S0040364416050197>.
9. Мирова О. А., Котельников А. Л., Голуб В. В., Баженова Т. В. Влияние защитного экрана на уменьшение давления при взаимодействии ударной волны со стенкой // *Теплофиз. выс. темп.*, 2016. Т. 54, № 6. С. 963–964. EDN: WWCAGH. DOI: <https://doi.org/10.7868/S0040364416060119>.
10. Мирова О. А., Котельников А. Л., Голуб В. В., Баженова Т. В. Многократные отражения ударных волн при взрыве в замкнутом объеме с защищенными экранами стенками // *Теплофиз. выс. темп.*, 2017. Т. 55, № 2. С. 324–326. EDN: YIAARZ. DOI: <https://doi.org/10.7868/S0040364417020119>.
11. Xue K., Yu Q., Bai C. Dual fragmentation modes of the explosively dispersed granular materials // *Eur. Phys. J. E*, 2014. vol. 37, no. 9, 88. DOI: <https://doi.org/10.1140/epje/i2014-14088-y>.
12. Lv H., Wang Z., Li J. Experimental study of planar shock wave interactions with dense packed sand wall // *Int. J. Multiphase Flow*, 2017. vol. 89. pp. 255–265. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijmultiphaseflow.2016.07.019>.
13. Stewart C., Balachandrar S., McGrath T. P. Soft-sphere simulations of a planar shock interaction with a granular bed // *Phys. Rev. Fluids*, 2018. vol. 3, no. 3, 034308. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevFluids.3.034308>.
14. Абузязров М. Х., Глазова Е. Г., Кочетков А. В., Крылов С. В. Численная методика решения трехмерных задач взаимодействия высоко-скоростных газовых струй с упругопластическими преградами // *Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов*, 2021. № 4. С. 24–40. EDN: RWCSYJ.
15. Абузязров М. Х., Глазова Е. Г., Кочетков А. В. [и др.] Численное моделирование трехмерных процессов разгона упругопластических тел взрывом // *Пробл. прочн. пласт.*, 2018. Т. 80, № 2. С. 255–266. EDN: RSXR XV.
16. Годунов С. К., Забродин А. В., Иванов М. Я. [и др.] *Численное решение многомерных задач газовой динамики*. М.: Наука, 1976. 400 с. EDN: UESERL.
17. Абузязров К. М. Метод распада разрывов в трехмерной динамике упругопластических сред // *Пробл. прочн. пласт.*, 2020. Т. 82, № 3. С. 377–389. EDN: VUANHS. DOI: <https://doi.org/10.32326/1814-9146-2020-82-3-377-389>.
18. Abouziarov M., Aiso H. An application of retroactive characteristic method to conservative scheme for structure problems (elastic-plastic flows) / *Hyperbolic Problems, Theories, Numerics, Applications: Proc. of the 18th Comput. Conf. on Hyperbolic Problems*. Japan: Yokohama Publ., 2006. pp. 223–230.
19. Abouziarov M., Aiso H., Takahashi T. An application of conservative scheme to structure problems (elastic-plastic flows) // *Sūri-Kaiseki-Kenkyūsho-kōkyūroku* [Mathematical Analysis in Fluid and Gas Dynamics], 2003. vol. 1353. pp. 192–201.
20. Кукуджанов В. Н. Метод расщепления упругопластических уравнений // *Изв. РАН. МТТ*, 2004. № 1. С. 98–108. EDN: OVYHCB.
21. Брагов А. М., Константинов А. Ю., Кочетков А. В. [и др.] Экспериментальное исследование деформационных свойств насыпного слоя из свинцовых шариков при динамическом и квазистатическом нагружении // *Вестн. ПНИПУ. Механика*, 2017. № 4. С. 16–27. EDN: YLDACI. DOI: <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2017.4.02>.
22. Модин И. А., Кочетков А. В., Глазова Е. Г. Численное исследование взаимодействия ударной волны с проникаемым деформируемым гранулированным слоем // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2022. Т. 26, № 1. С. 79–92. EDN: FUXBZE. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1879>.
23. Kochetkov A. V., Modin I. A. Numerical simulation of the interaction of a shock wave with a permeable granulated layer / *Behavior of Materials under Impact, Explosion, High Pressures and Dynamic Strain Rates* / *Advanced Structured Materials*, 176. Cham: Springer, 2023. pp. 129–143. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-031-17073-7_9.

MSC: 74E20, 74J40, 74-10

Numerical simulation of the interaction of a deformable gas permeable fragment of a granular layer with a shock wave in a three-dimensional formation

E. G. Glazova, A. V. Kochetkov, A. A. Lisitsyn, I. A. Modin

Research Institute of Mechanics,
National Research Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod,
23, korp. 6, pr. Gagarina, Nizhny Novgorod, 603022, Russian Federation.

Abstract

The numerical method developed by the authors earlier for solving three-dimensional problems of dynamic interaction of deformable bodies and media in Eulerian variables based on the high-precision Godunov scheme is applied to solve problems of interaction of a deformable gas-permeable fragment of a granular layer with shock waves. The modeling is based on a unified modified Godunov's numerical method both for calculating gas motion and for calculating the dynamic deformation of elastic-plastic elements of a permeable granular layer. The increase in accuracy is achieved by merging the domains of influence of the numerical and differential problems. It is assumed that the sandy granular layer consists of a set of identical spherical deformable quartz particles representing a cubic packing. The space between the particles is filled with compressible gas medium (air). A symmetrical packaging element is highlighted in the form of a sequence of spherical particles. To demonstrate the numerical methodology, it is assumed that a multilayer granular medium in the direction of propagation of a planar shock wave consists of three layers of particles in a square-section channel with rigid walls. The study is conducted following the methodology with explicit identification of moving Lagrangian contact surfaces using multigrid algorithms. The results of numerical studies of the shock wave propagation process in a granular layer taking into account the movement of its deformable elements

Mechanics of Solids

Research Article

© Authors, 2023

© Samara State Technical University, 2023 (Compilation, Design, and Layout)

 The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Please cite this article in press as:

Glazova E. G., Kochetkov A. V., Lisitsyn A. A., Modin I. A. Numerical simulation of the interaction of a deformable gas permeable fragment of a granular layer with a shock wave in a three-dimensional formation, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2023, vol. 27, no. 4, pp. 645–658. EDN: CFAYCE. DOI: 10.14498/vsgtu2007 (In Russian).

Authors' Details:

Elena E. Glazova  <https://orcid.org/0000-0003-4351-889X>

Cand. Phys. & Math. Sci., Associate Professor; Scientific Secretary; Lab. of Dynamics of Multicomponent Media; e-mail: glazova@mech.unn.ru

Anatoliy A. Kochetkov  <https://orcid.org/0000-0001-7939-8207>

Dr. Phys. & Math. Sci.; Head of Laboratory; Lab. of Dynamics of Multicomponent Media; e-mail: kochetkov@mech.unn.ru

are presented. It is shown that for the given task parameters, the influence of deformation processes is insignificant. The shock wave passing through the layer forms a gas dynamic flow close to one-dimensional behind the barrier. The agreement of the results of the numerical solution with known experimental results regarding the parameters of the shock wave passing through the layer indicates the adequacy of the applied mathematical and numerical models.

Keywords: numerical simulation, Godunov scheme, increased accuracy, multigrid approach, three-dimensional problem, shock waves, gas permeability, elastoplastic barrier, interaction.

Received: 16th March, 2023 / Revised: 17th November, 2023 /

Accepted: 13th December, 2023 / First online: 25th December, 2023

Competing interests. We declare that we have no conflicts of interest in the authorship and publication of this article.

Authors' contributions and responsibilities. I.A. Modin: Numerical calculations; Processing and verification of results; Writing — original draft and review & editing. A.V. Kochetkov: Idea of study; Formulation of research goals and aims; Visualization and verification of results. E.G. Glazova: Numerical calculations; Writing — original draft and review & editing. A.A. Lisitsyn: Numerical calculations; Visualization and verification of results; Writing — original draft and review & editing. The authors are absolutely responsible for submit the final manuscript to print. Each author has approved the final version of manuscript.

Funding. The research was funded by the Russian Science Foundation grant no. 22–29–00672, <https://rscf.ru/en/project/22-29-00672/>.

References

1. Britan A., Ben–Dor G., Elperin T., et al. Mechanism of compressive stress formation during weak shock waves impact with granular materials, *Experiments in Fluids*, 1997, vol. 22, no. 6, pp. 507–518. DOI: <https://doi.org/10.1007/s003480050078>.
2. Ben–Dor G., Britan A., Elperin T., et al. Experimental investigation of the interaction between weak shock waves and granular layers, *Exper. Fluids*, 1997, vol. 22, no. 5, pp. 432–443. DOI: <https://doi.org/10.1007/s003480050069>.
3. Glam B., Igra O., Britan A., Ben–Dor G. Dynamics of stress wave propagation in a chain of photoelastic discs impacted by a planar shock wave; Part I, experimental investigation, *Shock Waves*, 2007, vol. 17, no. 1, pp. 1–14. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00193-007-0094-x>.
4. Gubaidullin A. A., Boldyreva O. Yu., Dudko D. N. Interaction of acoustic waves with porous layer, *Thermophys. Aeromech.*, 2009, vol. 16, no. 3, pp. 429–443. EDN: MWUHRV. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0869864309030123>.
5. Glazova E. G., Turygina I. A., Modin I. A. Modeling the interaction of a shock wave with a deformable permeable granular layer, *Problems of Strength and Plasticity*, 2022, vol. 82, no. 3, pp. 353–363. EDN: DZEECW. DOI: <https://doi.org/10.32326/1814-9146-2020-82-3-353-363>.

Artem A. Lisitsyn  <https://orcid.org/0009-0006-9397-6257>

Postgraduate Student; Junior Researcher; Lab. of Dynamics of Multicomponent Media;
e-mail: artem.lisitsyn@unn.ru

Ivan I. Modin  <https://orcid.org/0000-0002-3561-4606>

Cand. Tech. Sci.; Senior Researcher; Lab. of Physical and Mechanical Testing for Materials;
e-mail: mianet@mail.ru

6. Mirova O. A., Kotel'nikov A. L., Golub V. V., Bazhenova T. V. Shock wave effect on protective sand screens of different thicknesses, *High Temp.*, 2015, vol. 53, no. 1, pp. 155–157. EDN: UFKZTF. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0018151X15010174>.
7. Kotel'nikov A. L., Mirova O. A., Golub V. V., et al. Study of an interaction of a blast wave with a destructible screen made of a granular material, *High Temp.*, 2014, vol. 52, no. 5, pp. 708–714. EDN: UFJBEP. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0018151X14040130>.
8. Mirova O. A., Kotel'nikov A. L., Golub V. V., et al. Effect of the expansion velocity of material of a sand protective screen on the at-tenuation of a shock wave reflected from this screen, *High Temp.*, 2016, vol. 54, no. 5, pp. 716–721. EDN: XFNUET. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0018151X16050199>.
9. Mirova O. A., Kotel'nikov A. L., Golub V. V., Bazhenova T. V. Protecting shield influence on pressure decrease at shock wave interaction with the wall, *High Temp.*, 2016, vol. 53, no. 6, pp. 905–906. EDN: YUXQVF. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0018151X16060110>.
10. Mirova O. A., Kotel'nikov A. L., Golub V. V., Bazhenova T. V. Multiple shock wave reflections at an explosion in a closed volume with shielded walls, *High Temp.*, 2017, vol. 55, no. 2, pp. 315–317. EDN: XMVICH. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0018151X17020110>.
11. Xue K., Yu Q., Bai C. Dual fragmentation modes of the explosively dispersed granular materials, *Eur. Phys. J. E*, 2014, vol. 37, no. 9, 88. DOI: <https://doi.org/10.1140/epje/i2014-14088-y>.
12. Lv H., Wang Z., Li J. Experimental study of planar shock wave interactions with dense packed sand wall, *Int. J. Multiphase Flow*, 2017, vol. 89, pp. 255–265. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijmultiphaseflow.2016.07.019>.
13. Stewart C., Balachandar S., McGrath T. P. Soft-sphere simulations of a planar shock interaction with a granular bed, *Phys. Rev. Fluids*, 2018, vol. 3, no. 3, 034308. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevFluids.3.034308>.
14. Abuzyarov M. H., Glazova E. G., Kochetkov A. V., Krylov S. V. Numerical method for solving three-dimensional problems of interaction of high-velocity gas jets with elastic-plastic barriers, *Voprosy Atomnoy Nauki i Tekhniki, Ser. Mathematical Modeling of Physical Processes*, 2021, vol. 4, pp. 24–40. EDN: RWCYSJ.
15. Abuzyarov M. Kh., Glazova E. G., Kochetkov A. V., et al. Numerically modeling 3D processes of explosive acceleration of elastoplastic bodies, *Problems of strength and plasticity*, 2018, vol. 80, no. 2, pp. 255–266 (In Russian). EDN: RSXR XV.
16. Godunov S. K., Zabrodin A. V., Ivanov M. Ya., et al. *Chislennoe reshenie mnogomernykh zadach gazovoi dinamiki* [Numerical Solution of Multidimensional Problems of Gas Dynamics]. Moscow, Nauka, 1976, 400 pp. (In Russian). EDN: UESERL.
17. Abuzyarov K. M. The method of decomposition of gapes in the three-dimensional dynamics of elastoplastic media, *Problems of Strength and Plasticity*, 2020, vol. 82, no. 3, pp. 377–389 (In Russian). EDN: VUAHHS. DOI: <https://doi.org/10.32326/1814-9146-2020-82-3-377-389>.
18. Abouziarov M., Aiso H. An application of retroactive characteristic method to conservative scheme for structure problems (elastic-plastic flows), In: *Hyperbolic Problems, Theories, Numerics, Applications*, Proc. of the 18th Comput. Conf. on Hyperbolic Problems. Japan, Yokohama Publ., 2006, pp. 223–230.
19. Abouziarov M., Aiso H., Takahashi T. An application of conservative scheme to structure problems (elastic-plastic flows), *Sūri-Kaiseki-Kenkyūsho-kōkyūroku* [Mathematical Analysis in Fluid and Gas Dynamics], 2003, vol. 1353, pp. 192–201.
20. Kukudzhyanov V. N. Decomposition method for elastoplastic equations, *Mech. Solids*, 2004, vol. 39, no. 1, pp. 73–80.
21. Bragov A. M., Konstantinov A. Yu., Kochetkov A. V., et al. Experimental study of deformation properties of a bulk layer from plumbum balls under dynamic and quasistatic loading, *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2017, no. 4, pp. 16–27 (In Russian). EDN: YLDACI. DOI: <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2017.4.02>.

22. Modin I. A., Kochetkov A. V., Glazova E. G. Numerical simulation of the interaction of a shock wave with a permeable deformable granulated layer, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2022, vol.26, no.1, pp. 79–92 (In Russian). EDN: FUXBZE. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1879>.
23. Kochetkov A. V., Modin I. A. Numerical simulation of the interaction of a shock wave with a permeable granulated layer, In: *Behavior of Materials under Impact, Explosion, High Pressures and Dynamic Strain Rates*, Advanced Structured Materials, 176. Cham, Springer, 2023, pp. 129–143. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-031-17073-7_9.



УДК 539.3

Термомеханические состояния гиротропных микрополярных тел

Е. В. Мурашкин, Ю. Н. Радаев

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН,
Россия, 119526, Москва, просп. Вернадского, 101, корп. 1.

Аннотация

Статья посвящена вопросам моделирования процессов теплопроводности в микрополярных телах, термомеханические состояния которых реагируют на зеркальные отражения трехмерного пространства. Построен новый вариант теории теплопроводности, в рамках которого тепловой поток оказывается псевдовектором алгебраического веса $+1$, подобным псевдовектору спинорных перемещений. С этим вариантом теории связаны определяющие псевдоинварианты нечетного отрицательного веса (например, коэффициент теплопроводности и теплоемкость). Этой цели удалось достичь, выбрав естественные элементы объема и площади в виде псевдоинвариантов веса -1 . Для представления трансляционных перемещений использовался абсолютный контравариантный вектор, а для спинорных перемещений фиксировался контравариантный псевдовектор веса $+1$. В результате тепловой поток, тензор силовых напряжений, плотность массы и теплоемкость оказываются псевдотензорными величинами нечетного веса. В качестве термодинамического потенциала используется свободная энергия Гельмгольца, отнесенная к единице естественного элемента объема, а функциональными аргументами выступают: температура, симметричные части и сопутствующие векторы линейного асимметричного тензора деформаций и псевдотензора изгиба-кручения. Обсуждается принцип абсолютной инвариантности абсолютной термодинамической температуры. Получено нелинейное уравнение теплопроводности и выполнена его линеаризация.

Ключевые слова: теплопроводность, микрополярность, тензорный элемент объема, псевдовектор потока тепла, псевдотензор, зеркальное от-

Механика деформируемого твердого тела

Научная статья

© Коллектив авторов, 2023

© СамГТУ, 2023 (составление, дизайн, макет)

© Контент публикуется на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

Образец для цитирования

Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Термомеханические состояния гиротропных микрополярных тел // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2023. Т. 27, № 4. С. 659–678. EDN: CRRHLO. DOI: 10.14498/vsgtu2062.

Сведения об авторах

Евгений Валерьевич Мурашкин ✉ <https://orcid.org/0000-0002-3267-4742>

кандидат физико-математических наук; старший научный сотрудник; лаб. моделирования в механике деформируемого твердого тела; e-mail: evmurashkin@gmail.com

Юрий Николаевич Радаев <https://orcid.org/0000-0002-0866-2151>

доктор физико-математических наук, профессор; ведущий научный сотрудник; лаб. моделирования в механике деформируемого твердого тела; e-mail: radayev@ipmnet.ru, y.radayev@gmail.com

ражение, полуизотропное тело, гиротропное тело, абсолютная термодинамическая температура, правило баланса весов.

Получение: 9 сентября 2023 г. / Исправление: 10 ноября 2023 г. /

Принятие: 13 декабря 2023 г. / Публикация онлайн: 26 декабря 2023 г.

1. Введение и предварительные сведения. Конструкционные метаматериалы и биоккомпозиты обладают сложной микроструктурой [1–3]. Зачастую микро- и наноструктурные состояния таких материалов оказываются чувствительными к преобразованиям трехмерного пространства, меняющим его ориентацию на противоположную (с левой на правую и, наоборот, с правой на левую). Моделирование термомеханического отклика указанных материалов следует выполнять средствами теорий микрополярной термомеханики. Фундаментальным определяющим параметром, характеризующим микроструктурные особенности материала, в таких теориях является характерная микродлина L^1 [4–6], связанная с характерным размером микроструктуры (гранулы, волокна, соты, диполи жидких кристаллов, полимерные молекулы и т.д.). При этом в стандартных длинах: для макромеханики следует положить $L \sim 1$, для микромеханики — $L \sim 10^{-6}$, а для наномеханики — $L \sim 10^{-9}$. Важно отметить, что характерная микродлина микрополярной теории L — важнейший из модулей, которому может быть естественным образом приписан алгебраический вес, т.е. ее можно трактовать как определяющий псевдоскаляр, реагирующий на изменение ориентации координатного базиса.

В работах [7–11] было показано, что характерная микродлина L является ковариантно постоянным псевдоскаляром веса -1 , чувствительным к преобразованиям зеркального отражения, что в свою очередь можно вывести из условия ковариантного постоянства:

$$\nabla_s^{[-1]} L = 0,$$

откуда немедленно следует

$$L = 1^{[-1]} L.$$

Определение псевдоскалярной единицы $1^{[-1]}$ будет дано в следующем разделе настоящей статьи.

Несмотря на то, что аппарат алгебры и анализа псевдотензоров достаточно хорошо развит [12–19], подавляющее большинство математических теорий разрабатывается в терминах абсолютных тензоров [20–24] и лишь сравнительно малое число публикаций посвящено описанию в рамках псевдотензорного формализма [7–11].

Построение теорий микрополярной термоупругости следует начинать с выбора тензорных измерений элементарных объемов и площадей. Такой выбор существенным образом влияет на алгебраический вес, приписываемый основным характеристикам микро-, нано- термомеханических состояний микрополярного континуума. Например, при выборе дублетного элемента объема

¹В работах Нейбера [5, 6] характерная микродлина обозначалась l .

и соответствующего элемента площади тензор силовых напряжений оказывается псевдотензором отрицательного веса -1 , тензор моментных напряжений — псевдотензором отрицательного веса -2 , тепловой поток — псевдовектором алгебраического веса -1 , массовая плотность — псевдоскаляром алгебраического веса -1 , что было продемонстрировано в работе [25]. В настоящей работе для измерения элементарных объемов и площадей использованы естественные элементы объема и площади. Как было показано ранее [13, 26, 27], в этом случае тензор силовых напряжений оказывается псевдотензором положительного алгебраического веса $+1$. Отметим, что использование естественных элементов объема характерно для вариационных функционалов физических теорий поля [28, 29]. Несмотря на то, что тензорные элементы объема и площади в N -мерном пространстве наиболее просто задаются в терминах псевдотензоров [30, 31], описание обычно проводится с использованием формализма кососимметричных дифференциальных форм [32–34], существенно искажающих очевидные свойства указанных объектов и их псевдотензорную природу.

Другим фундаментальным аспектом разрабатываемой теории, на который следует обратить внимание, является задание кинематики микрополярного тела, базирующейся на одной из трех знаменитых теорем Шаля [35]. Из трех теорем Шаля, по существу, только вторая применялась в формулировках основных положений линейной микрополярной теории упругости [20–24]. Литературный поиск показывает скудность информации об использовании при математическом моделировании микрополярного континуума винтовой (третьей) теоремы Шаля, в которой кинематика микрополярного тела представляется как скользящий поворот. В конвенциональных микрополярных теориях упругости и термоупругости [20–24] обычно оперируют двумя независимыми полями трансляционных и спинорных перемещений (микроповоротов), последнее из которых наиболее просто задается псевдовектором. Возможны различные способы задания псевдовектора спинорных перемещений. В частности, представлению с помощью контравариантного псевдовектора

$\phi^{k[+1]}$ положительного веса $+1$ посвящены работы [7–10], а моделям микрополярных тел, в которых использовался ковариантный псевдовектор $\phi_k^{[-1]}$ отрицательного веса -1 , посвящены работы [11, 36]. Указанные псевдовекторы легко преобразуются к абсолютным векторам спинорных перемещений ϕ^k (или ϕ_k).

В настоящей статье обсуждаются вопросы моделирования процессов теплопроводности в микро- и наноструктурных телах, термомеханические состояния которых могут быть сенсibilизированы к зеркальным отражениям трехмерного пространства. Построен новый вариант теории теплопроводности, в рамках которого тепловой поток оказывается псевдовектором алгебраического веса $+1$, подобным псевдовектору спинорных перемещений. Сформулирован принцип абсолютной инвариантности абсолютной температуры, следующий из определения и строгой положительности, что демонстрирует свойство неизменности поля температуры при зеркальных отражениях трехмерного пространства и невозможность приписать этому фундаментальному физическому полю ненулевой алгебраический вес.

Во втором разделе статьи приводятся минимально необходимые для по-

нимания статьи сведения и понятия из алгебры псевдотензоров и многомерной геометрии. Вводятся псевдоскалярные единицы. Обсуждается правило баланса весов (the weights balance rule).

В третьем разделе обсуждаются понятия элементарных псевдотензорных объемов в N -пространстве. Приводятся определения естественного и дублетного элементов объема. Устанавливаются соотношения, связывающие контра- и ковариантные тензорные элементы объема.

В четвертом разделе результаты, полученные в предыдущем разделе статьи, проецируются на трехмерный случай. Подробно обсуждаются двумерные элементы площади и их пространственные ориентации. Приводятся соотношения, связывающие псевдовекторные и псевдоскалярные элементы площади.

В пятом разделе статьи обсуждаются вопросы распространения тепла в микро- и наноструктурных телах, чувствительных к преобразованиям, меняющим ориентацию пространства. Обсуждается процедура, позволяющая приписать вектору теплового потока нечетный алгебраический вес. После этого вычисляются алгебраические веса массовой плотности, тензоров силовых и моментных напряжений, а также сопутствующих им векторов.

В шестом разделе сформулирован фундаментальный принцип абсолютной инвариантности абсолютной температуры.

Седьмой, заключительный раздел статьи, посвящен выводу уравнения теплопроводности и определяющих уравнений для микро- и наноструктурных тел, чувствительных к преобразованиям, меняющим ориентацию трехмерного пространства. Продемонстрировано, что для гиротропных упругих микрополярных тел тензор теплопроводности и теплоемкость сводятся к псевдоскалярам нечетного веса, реагирующим на изменение ориентации пространства на противоположную.

2. Псевдотензоры в N -мерном пространстве. Здесь и далее будем использовать терминологию и понятия современной геометрии и тензорного анализа [15, 38]. В дальнейшем изложении, где это не очевидно, сверху корневого символа псевдотензора в квадратных скобках будем отмечать его вес, а снизу в круглых скобках его ранг. Нулевой вес абсолютных тензоров и веса некоторых фундаментальных псевдотензоров в обозначениях отражаться не будут. Рассмотрим N -мерное евклидово пространство.

Фундаментальными объектами многомерной геометрии ориентируемых пространств, связанными с ориентацией локальных базисов, являются символы перестановок:

$$\epsilon_{h_1 h_2 \dots h_N}^{[-1]} = \epsilon^{[+1] k_1 k_2 \dots k_N}. \quad (1)$$

Отметим, что равенство (1) нарушает принятые в псевдотензорной алгебре соглашения о балансе индексов и весов псевдотензоров. Кроме того, для символов перестановок требуются специальные правила жонглирования индексами:

$$\epsilon_{h_1 h_2 \dots h_N} = e^{-2} g_{h_1 k_1} g_{h_2 k_2} \dots g_{h_N k_N} \epsilon^{k_1 k_2 \dots k_N}. \quad (2)$$

Введем в N -мерном пространстве ковариантный базис $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \dots, \mathbf{z}_N$. Косое произведение векторов базиса [38]

$$[\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \dots, \mathbf{z}_N] = e \quad (3)$$

позволяет ввести понятие фундаментального ориентирующего псевдоскаляра e и тем самым разделить локальные базисные системы на право- и левоориентированные.

В трехмерном пространстве фундаментальный ориентирующий псевдоскаляр веса $+1$ (3) и две псевдоскалярные единицы определим согласно [36]:

$$e = \mathbf{e}_1 \cdot (\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3), \quad \begin{matrix} [+1] \\ 1 \end{matrix} = e, \quad \begin{matrix} [-1] \\ 1 \end{matrix} = e^{-1}. \quad (4)$$

Отметим, что знак псевдоскалярной единицы в (4) определяет ориентацию координатных систем, т.е. для правоориентированных $\begin{matrix} [+1] \\ 1 \end{matrix} > 0$, для левоориентированных $\begin{matrix} [+1] \\ 1 \end{matrix} < 0$.

Кроме того, целые степени псевдоскалярных единиц ковариантно постоянны, т.е.

$$\nabla_k \begin{matrix} [\pm g] \\ 1 \end{matrix} = 0,$$

где ∇_k — оператор ковариантного дифференцирования в метрике g_{js} .

В дальнейшем изложении припишем функции w.g.t значение веса псевдотензора, на который действует эта функция. Например,

$$\text{w.g.t} \left(\begin{matrix} [g] \\ 1 \end{matrix} \right) = g. \quad (5)$$

Псевдотензор $\begin{matrix} [g] \\ (n) \end{matrix} h_1 h_2 \dots h_s \dots k_1 k_2 \dots k_r$ алгебраического веса g ранга $n = s + r$ с помощью степеней псевдоскалярной единицы можно преобразовать к абсолютному тензору того же ранга согласно

$$\begin{matrix} [g] \\ (n) \end{matrix} h_1 h_2 \dots h_s \dots k_1 k_2 \dots k_r = \begin{matrix} [-g] \\ 1 \end{matrix} \begin{matrix} [g] \\ (n) \end{matrix} h_1 h_2 \dots h_s \dots k_1 k_2 \dots k_r.$$

В последнем равенстве выполняется правило баланса весов (the weights balance rule) [37, 39, 40]. Действительно, учитывая (5), имеем

$$\text{w.g.t} \left(\begin{matrix} [g] \\ (n) \end{matrix} h_1 h_2 \dots h_s \dots k_1 k_2 \dots k_r \right) = \text{w.g.t} \left(\begin{matrix} [-g] \\ 1 \end{matrix} \begin{matrix} [g] \\ (n) \end{matrix} h_1 h_2 \dots h_s \dots k_1 k_2 \dots k_r \right) = -g + g = 0.$$

3. Псевдоинвариантные элементы площади и объема в N -мерном пространстве. В N -мерном евклидовом пространстве выберем криволинейную систему координат x^k ($k = 1, 2, \dots, N$). Рассмотрим погруженное в него многообразие (поверхность) Σ размерности M ($M \leq N$). Пусть многообразие Σ задано его гауссовой параметризацией u^α ($\alpha = 1, 2, \dots, M$):

$$x^k = x^k(u^1, u^2, \dots, u^M). \quad (6)$$

В формуле (6) x^k являются внешними координатами для Σ , а u^α — внутренними.

Тензорный элемент объема, следуя концепциям А. Пуанкаре [41, 42], задается согласно правилу

$$d\tau^{i_1 i_2 \dots i_M} = M! dx_1^{i_1} dx_2^{i_2} \dots dx_M^{i_M}. \quad (7)$$

Здесь в квадратные скобки заключены индексы, по которым выполняется альтернирование.

Нетрудно заметить, что формулу (7) можно представить в следующем виде [15, см. с. 256–257]:

$$d\tau^{i_1 i_2 \dots i_M} = \epsilon^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_M} \partial_{\alpha_1} x^{i_1} \partial_{\alpha_2} x^{i_2} \dots \partial_{\alpha_M} x^{i_M} \det(du^\gamma). \quad (8)$$

Для случая $M = N$ с учетом формулы (8) получим псевдотензорный элемент объема:

$$d\tau^{i_1 i_2 \dots i_N} = d\tau_{12 \dots N}^{[-1] i_1 i_2 \dots i_N, [+1]}, \quad (9)$$

где $d\tau_{12 \dots N}^{[-1]}$ — естественный элемент объема, представляющий собой псевдоскаляр веса -1 , который определяется согласно

$$d\tau_{12 \dots N}^{[-1]} = \det(\partial_\alpha x^k) du^1 du^2 \dots du^N = dx^1 dx^2 \dots dx^N.$$

Опустив в формуле (9) индексы, т.е. применив правило жонглирования индексами для символов перестановок (2), определим ковариантный тензорный элемент объема в виде

$$d\tau_{i_1 i_2 \dots i_N} = e^2 d\tau_{12 \dots N}^{[-1]} \epsilon_{i_1 i_2 \dots i_N}^{[-1]} = d\tau_{12 \dots N}^{[+1]} \epsilon_{i_1 i_2 \dots i_N}^{[-1]}, \quad (10)$$

где $d\tau_{12 \dots N}^{[+1]}$ — дублетный элемент объема, представляющий собой псевдоскаляр веса $+1$.

С помощью псевдоскаляров $d\tau_{12 \dots N}^{[-1]}$, $d\tau_{12 \dots N}^{[+1]}$ и псевдоскалярных единиц $[\mp 1]$

1 можно образовать абсолютный скаляр $d\tau$, являющийся инвариантным элементом объема:

$$d\tau = \frac{[+1]^{[-1]}}{1} d\tau_{12 \dots N}^{[-1]} = \frac{[-1]^{[+1]}}{1} d\tau_{12 \dots N}^{[+1]}.$$

4. Проекция на трехмерный случай ($N = 3$). Рассмотрим случай трехмерного пространства. В качестве многообразия выберем двумерную поверхность, заданную естественной (гауссовой) параметризацией u^1, u^2 . Для этого случая в формуле (8) примем $N = 3$, $M = 2$, откуда получим контравариантный тензорный элемент площади поверхности [30, 31]:

$$d\tau^{ij} = \epsilon^{\alpha_1 \alpha_2} \partial_{\alpha_1} x^i \partial_{\alpha_2} x^j du^1 du^2 = 2\partial_1 x^{[i} \partial_2 x^{j]} du^1 du^2. \quad (11)$$

Ковариантный тензорный элемент площади $d\tau_{ij}$ можно получить, опустив индексы у $d\tau^{ij}$ в (11) в соответствии с правилом жонглирования индексами (10).

Антисимметричным абсолютным тензорам $d\tau^{ij}$ и $d\tau_{ij}$ сопутствуют ковариантный и контравариантный псевдовекторы

$${}^{[-1]}dA_k = \frac{1}{2}\epsilon_{kij}d\tau^{ij}, \quad {}^{[+1]}dA^k = \frac{1}{2}\epsilon^{kij}d\tau_{ij}. \quad (12)$$

Абсолютные векторные элементы площади поверхности можно определить, домножив псевдовекторные элементы площади (12) на соответствующую степень псевдоскалярной единицы:

$$dA_k = {}^{[+1][-1]}_1 dA_k, \quad dA^k = {}^{[-1][+1]}_1 dA^k. \quad (13)$$

Псевдоскалярные элементы площади поверхности задаются следующими формулами:

$${}^{[-1]}dA = (\text{sgn } e)\sqrt{g^{sk}{}^{[-1]}dA_s{}^{[-1]}dA_k}, \quad {}^{[+1]}dA = (\text{sgn } e)\sqrt{g_{sk}{}^{[+1]}dA^s{}^{[+1]}dA^k}. \quad (14)$$

И тот и другой элемент площади (14) чувствительны к изменению ориентации координатной системы, что обусловлено знаком фундаментального ориентирующего псевдоскаляра.

Инвариантный элемент площади поверхности определяется через абсолютные векторные элементы площади (13) согласно

$$dA = \sqrt{dA^k dA_k} > 0. \quad (15)$$

Использував введенные выше определения для элементов площади (14) и (15), можно показать, что

$$({}^{[\pm 1]}dA)^2 = \frac{1}{2} {}^{[\pm 2]}_1 d\tau^{is} d\tau_{is}, \quad (dA)^2 = \frac{1}{2} d\tau^{is} d\tau_{is}.$$

5. Распространение тепла в микрополярных средах. Рассмотрим распространение тепла в средах, термомеханические характеристики которых проявляют чувствительность к зеркальным отражениям и инверсиям трехмерного евклидова пространства. Как отмечалось ранее, выбор тензорных элементов объема и площади существенным образом влияет на алгебраический вес, приписываемый основным характеристикам микро- и наноструктурных термомеханических состояний микрополярного континуума. Основываясь на результатах предыдущих разделов настоящей статьи, следует отметить, что существует три варианта развития микрополярной термоупругости, различающихся элементарными объемами: $d\tau$, ${}^{[+1]}d\tau$, ${}^{[-1]}d\tau$. Их можно определить следующей диаграммой весов элементарных объемов, элементарных площадей, тепловых потоков, коэффициентов теплопроводности и теплоемкостей:

$$\begin{array}{l} (1) \quad d\tau \quad dA \quad h^k \quad \lambda \quad c \\ (2) \quad {}^{[+1]}d\tau \quad {}^{[+1]}dA \quad {}^{[-1]}h^k \quad {}^{[-1]}\lambda \quad {}^{[-1]}c \\ (3) \quad {}^{[-1]}d\tau \quad {}^{[-1]}dA \quad {}^{[+1]}h^k \quad {}^{[+1]}\lambda \quad {}^{[+1]}c \end{array}$$

Эта диаграмма отражает возможную чувствительность теплоемкости к преобразованиям, меняющим ориентацию пространства, в теориях, развиваемых в терминах псевдоинвариантных элементов объема и площади.

Здесь и далее примем для измерения элементарных площадей и объемов псевдоинвариантные (естественные) элементы:

$$\begin{matrix} [-1] \\ dA, \end{matrix} \quad \begin{matrix} [-1] \\ dA_k, \end{matrix} \quad \begin{matrix} [-1] \\ d\tau. \end{matrix} \quad (16)$$

Количество тепла Q , поступающее через фиксированную замкнутую поверхность ∂ в единицу времени, с учетом (16) будет определяться соотношением

$$Q = \oint_{\partial} \begin{matrix} [+1] \\ h \end{matrix}^k \begin{matrix} [-1] \\ n_k \end{matrix} dA = \oint_{\partial} \begin{matrix} [+1] \\ h \end{matrix}^k \begin{matrix} [-1] \\ dA_k \end{matrix}, \quad (17)$$

где $\begin{matrix} [+1] \\ h \end{matrix}^k$ — псевдовектор потока тепла, n_k — единичный вектор внешней нормали к поверхности ∂ (абсолютный вектор [26, 43]).

Баланс весов в (17) базируется на фундаментальном утверждении

$$\text{w.g.t}(Q) = 0,$$

означающем невозможность приписать какой бы то ни было целый алгебраический вес количеству тепла Q . Отсюда немедленно следует, что

$$\text{w.g.t} \left(\begin{matrix} [+1] \\ h \end{matrix}^k \begin{matrix} [-1] \\ dA_k \end{matrix} \right) = 0.$$

Важно отметить, что в этом случае вектор потока тепла оказывается псевдовектором положительного веса $+1$.

Правило баланса весов позволяет заключить, что для алгебраических весов плотности ρ , псевдотензора силовых t^{ik} и тензора моментных $\mu_{,k}^i$ напряжений справедливы равенства

$$\text{w.g.t}(\rho) = +1, \quad \text{w.g.t}(t^{ik}) = +1, \quad \text{w.g.t}(\mu_{,k}^i) = 1 - 1 = 0. \quad (18)$$

Для ассоциированных (сопутствующих) векторов силовых напряжений τ_i и псевдовектора моментных напряжений $\begin{matrix} [+1] \\ \mu \end{matrix}_i$, учитывая (18), имеем

$$2\tau_i = -\epsilon_{ijk} t^{[jk]}, \quad 2 \begin{matrix} [+1] \\ \mu \end{matrix}_i = \epsilon^{iks} \mu_{[ks]},$$

что подтверждается выполнением равенств

$$\begin{aligned} \text{w.g.t}(\tau_i) &= \text{w.g.t}(\epsilon_{ijk} t^{[jk]}) = -1 + 1 = 0, \\ \text{w.g.t}(\begin{matrix} [+1] \\ \mu \end{matrix}_i) &= \text{w.g.t}(\epsilon^{iks} \mu_{[ks]}) = 1 + 0 = +1. \end{aligned}$$

6. Принцип абсолютной инвариантности абсолютной температуры в термомеханике. В этом разделе работы рассматривается абсолютная термодинамическая температура с целью решения вопроса о возможности приписать ей целый алгебраический вес, т.е. рассматривать ее как псевдоинвариант.² В качестве термодинамического потенциала сначала выберем внутреннюю энергию u как функцию термодинамических переменных состояния:

$$u = \bar{u}(\epsilon_{(kl)}, \kappa_{(kl)}^{[+1]}, \varphi^{[+1]_i}, \kappa_i, s).$$

Чертой сверху будем в дальнейшем обозначать потенциалы состояния. Здесь в качестве термодинамических переменных, кроме энтропии, выбраны симметричные части асимметричного тензора деформаций и тензора изгиба-кручения:

$$\epsilon_{(kl)} = \nabla_{(k} u_{l)} = \frac{1}{2}(\nabla_k u_l + \nabla_l u_k), \quad \kappa_{(kl)}^{[+1]} = \nabla_{(k} \phi_{l)}^{[+1]} = \frac{1}{2}(\nabla_k \phi_l^{[+1]} + \nabla_l \phi_k^{[+1]}), \quad (19)$$

а также сопутствующие псевдовектор и вектор:

$$\varphi^{[+1]_i} = -\frac{1}{2}\epsilon^{ikl}\epsilon_{[kl]}, \quad \kappa_i = \frac{1}{2}\epsilon_{ikl}\kappa^{[+1][kl]}. \quad (20)$$

Абсолютная температура θ в термомеханике сплошных сред определяется как функция параметров термодинамического состояния и вычисляется как частная производная потенциальной функции (внутренней энергии u) по энтропии s :

$$\theta = \frac{\partial \bar{u}(\epsilon_{(kl)}, \kappa_{(kl)}^{[+1]}, \varphi^{[+1]_i}, \kappa_i, s)}{\partial s}. \quad (21)$$

Для наших целей удобно использовать плотности в расчете на единицу объема:

$$S = \rho s, \quad \bar{U} = \rho u.$$

Тогда формула (21) преобразуется к виду

$$\theta = \frac{\partial \bar{U}(\epsilon_{(kl)}, \kappa_{(kl)}^{[+1]}, \varphi^{[+1]_i}, \kappa_i, S)}{\partial S}.$$

Кроме того, следует принимать во внимание фундаментальное термодинамическое неравенство

$$\inf \theta > 0,$$

постулирующее как положительность абсолютной температуры,³ так и невозможность достичь абсолютного нуля ни при каком допустимом термодинамическом процессе.

²В классической термомеханике континуума абсолютная термодинамическая температура θ — всегда абсолютный инвариант, не зависящий ни от поворотов ни от зеркальных отражений пространства.

³Положительность абсолютной температуры может быть доказана исходя из канонического распределения Гиббса для ансамбля элементарных термодинамических систем.

Из определения (21) видно, что независимо от выбора веса элементарного объема, веса плотности внутренней энергии и веса плотности энтропии⁴

$$\text{w.g.t}(\theta) = \text{w.g.t}(\bar{U}) - \text{w.g.t}(S) = 0.$$

Отсюда немедленно следует фундаментальное утверждение, что абсолютная температура является абсолютным инвариантом, сохраняющим неизменным свое значение при поворотах и отражениях пространства, что показывает принципиальную нереализуемость приписывания какого бы то ни было алгебраического веса абсолютной термодинамической температуре. Последнее обстоятельство обусловлено различной природой внутренней энергии (аддитивность) и температуры (неаддитивность).

7. Уравнение теплопроводности и определяющие уравнения для гиротропных микрополярных тел. Учитывая (18) и правило баланса весов, псевдоскалярное уравнение баланса энтропии в рамках развиваемой схемы исследования можно записать в виде

$${}^{[+1]}\rho \dot{s} = -\nabla_j {}^{[+1]}J^j + {}^{[+1]}\rho \sigma + {}^{[+1]}\rho \xi, \quad (22)$$

где ${}^{[+1]}J^j$ — псевдовектор потока энтропии, ξ — неконтролируемое производство энтропии (в единицу времени в расчете на единицу массы), σ — контролируемое производство энтропии (в единицу времени в расчете на единицу массы). Отметим, что s , ξ и σ являются абсолютными скалярами, т.е. не меняются при любых преобразованиях пространства. В дальнейшем изложении будем полагать отсутствие лучистого тепла, т.е. $\sigma = 0$.

При этом для энтропии справедливо следующее соотношение:

$$s = -\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \theta}.$$

Здесь в качестве термодинамического потенциала выбрана свободная энергия Гельмгольца ψ в расчете на единицу массы как функция термодинамических переменных состояния:

$$\psi = \bar{\psi}(\epsilon_{(kl)}, {}^{[+1]}\kappa_{(kl)}, {}^{[+1]}\varphi_i, \kappa_i, \theta). \quad (23)$$

В дальнейшем удобно ввести следующие обозначения:

$${}^{[+1]}S = {}^{[+1]}\bar{s}, \quad {}^{[+1]}\Psi = {}^{[+1]}\bar{\psi}, \quad {}^{[+1]}\Xi = {}^{[+1]}\bar{\xi}. \quad (24)$$

Тогда приведенное уравнение баланса энергии с учетом (19), (20), (23) в обозначениях (24) примет вид

$$\begin{aligned} & -(\partial_i {}^{[+1]}\Psi + {}^{[+1]}S \partial_i \theta) + {}^{[+1]}t^{(ij)} \partial_i \epsilon_{(ij)} + \mu^{(ik)} \partial_i {}^{[+1]}\kappa_{(ik)} \\ & + \tau_i \partial_i {}^{[+1]}\varphi_i + \mu^{[+1]i} \partial_i \kappa_i - \theta^{-1} h^{[+1]i} \nabla_i \theta = {}^{[+1]}\Xi \theta. \end{aligned}$$

⁴В данном контексте подразумевается, что плотности берутся в расчете на единицу объема.

Здесь ∂ — производная по времени при фиксированных координатах x^k . В приближении малых деформаций мы считаем $\dot{a} = \partial a$.

Следствием второго закона термодинамики для гиротропных микрополярных тел, чувствительных к зеркальным отражениям трехмерного пространства, являются определяющие псевдотензорные уравнения:

$$\begin{aligned} {}^{[+1]}_t(ij) &= \frac{\partial \Psi^{[+]}}{\partial \epsilon_{(ij)}}, & \mu^{(ik)} &= \frac{\partial \Psi^{[+]}}{\partial \kappa_{(ik)}^{[+]}} \\ \tau_i &= \frac{\partial \Psi^{[+]}}{\partial \varphi_{[+]_i}}, & {}^{[+1]}_i \mu &= \frac{\partial \Psi^{[+]}}{\partial \kappa_i} \\ S^{[+]} &= -\frac{\partial \Psi^{[+]}}{\partial \theta}, & J^{[+]} j &= \bar{J}^{[+]} j (\nabla_k \ln \theta). \end{aligned} \quad (25)$$

Для неконтролируемого производства энтропии справедлива следующая цепочка равенств:

$$\Xi^{[+]} = -\theta^{-2} h^j \nabla_j \theta = -\theta^{-1} \bar{J}^j \nabla_j \theta = -\bar{J}^j (\nabla_k \ln \theta) \nabla_j \ln \theta.$$

Нелинейное уравнение теплопроводности получим подстановкой определяющих уравнений (25) в уравнение баланса энтропии (22), учитывая

$$\theta \bar{J}^j = h^j.$$

В силу абсолютной инвариантности температуры веса потока тепла и энтропии совпадают.

В итоге получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial S^{[+]}}{\partial \epsilon_{(ij)}} \partial \epsilon_{(ij)} + \frac{\partial S^{[+]}}{\partial \kappa_{(ik)}^{[+]}} \partial \kappa_{(ik)}^{[+]} + \frac{\partial S^{[+]}}{\partial \varphi_{[+]_i}} \partial \varphi_{[+]_i} + \\ + \frac{\partial S^{[+]}}{\partial \kappa_i} \partial \kappa_i + \frac{\partial S^{[+]}}{\partial \theta} \partial \theta = -\theta^{-1} \nabla_j h^j. \end{aligned} \quad (26)$$

Примем линеаризованную по функциональным аргументам свободную энергию Гельмгольца для анизотропного микрополярного термоупругого континуума в виде

$$\begin{aligned} \Psi^{[+]} &= E_I^{[+]} \epsilon_{(ik)(lm)} \epsilon_{(ik)} \epsilon_{(lm)} + E_{II}^{[-]} \kappa_{(ik)(lm)}^{[+]} \kappa_{(lm)}^{[+]} + \\ &+ E_{III}^{[+]} \epsilon_{(ik)(lm)} \kappa_{(lm)}^{[+]} + E_{IV}^{[+]} \epsilon_{(ik) \cdot l} \varphi_{[+]_l} + E_V^{[-]} \kappa_{(ik) \cdot l}^{[+]} \varphi_{[+]_l} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{[+1]}{\text{VI}} E^{(ik)l} \epsilon_{(ik)\kappa l} + \frac{E^{(ik)l[+1]}}{\text{VII}} \kappa_{(ik)\kappa l} + \frac{[-1]}{\text{VIII}} E^{(il)} \varphi^{[+1]i} \varphi^{[+1]l} + \frac{[+1]}{\text{IX}} E^{(il)} \kappa_i \kappa_l + \\
 & + \frac{E^{.l[+1]i}}{\text{X}} \varphi^{[+1]i} \kappa_l + \frac{[+1]}{\text{XI}} E^{(ik)} \epsilon_{(ik)} \theta + \frac{E^{(ik)[+1]}}{\text{XII}} \kappa_{(ik)} \theta + \\
 & + \frac{E}{\text{XIII}} \varphi^{[+1]i} \theta + \frac{[+1]}{\text{XIV}} E^i \kappa_i \theta + \frac{[+1]}{\text{XV}} E \theta^2, \quad (27)
 \end{aligned}$$

где $\frac{[+1]}{\text{I}} E^{(ik)(lm)}$, $\frac{[-1]}{\text{II}} E^{(ik)(lm)}$, $\frac{E^{(ik)(lm)}}{\text{III}}$, $\frac{E^{(ik).}}{\text{IV}} \cdot$, $\frac{[-1]}{\text{V}} E^{(ik).}$, $\frac{[+1]}{\text{VI}} E^{(ik)l}$, $\frac{E^{(ik)l}}{\text{VII}}$, $\frac{[-1]}{\text{VIII}} E^{(il)}$, $\frac{[+1]}{\text{IX}} E^{(il)}$, $\frac{E^{.l}}{\text{X}} \cdot$, $\frac{[+1]}{\text{XI}} E^{(ik)}$, $\frac{E^{(ik)}}{\text{XII}}$, $\frac{E}{\text{XIII}} \cdot$, $\frac{[+1]}{\text{XIV}} E^i$, $\frac{[+1]}{\text{XV}} E$ — определяющие тензоры и псевдотензоры анизотропного микрополярного термоупругого континуума, $\theta \rightarrow \theta - \theta_0$ — малый температурный инкремент (считается малой первого порядка), θ_0 — референциальная температура.

Определяющие уравнения (25), соответствующие квадратичной форме свободной энергии Гельмгольца (27), принимают вид

$$\left\{ \begin{aligned}
 t^{[+1](ik)} &= 2 \frac{[+1]}{\text{I}} E^{(ik)(lm)} \epsilon_{(lm)} + \frac{E^{(ik)(lm)[+1]}}{\text{III}} \kappa_{(lm)} + \frac{E^{(ik).}[+1]i}}{\text{IV}} \varphi^i + \frac{[+1]}{\text{VI}} E^{(ik)l} \kappa_l + \frac{[+1]}{\text{XI}} E^{(ik)} \theta, \\
 \mu^{[+1](ik)} &= 2 \frac{[-1]}{\text{II}} E^{(ik)(lm)} \kappa_{(lm)} + \frac{E^{(lm)(ik)}}{\text{III}} \epsilon_{(lm)} + \frac{[-1]}{\text{V}} E^{(ik)l[+1]l} \varphi^l + \frac{E^{(ik)l}}{\text{VII}} \kappa_l + \frac{E^{(ik)}}{\text{XII}} \theta, \\
 \tau_i &= 2 \frac{[-1]}{\text{VIII}} E^{(il)} \varphi^{[+1]l} + \frac{E^{.l}}{\text{X}} \kappa_l + \frac{E^{(lm).}}{\text{IV}} \cdot \epsilon_{(lm)} + \frac{E^{(lm).}}{\text{V}} \cdot \kappa_{(lm)} + \frac{E}{\text{XIII}} \theta, \\
 \mu^{[+1]i} &= 2 \frac{[+1]}{\text{IX}} E^{(il)} \kappa_l + \frac{E^{.i[+1]l}}{\text{X}} \varphi^l + \frac{E^{(lm)i}}{\text{VI}} \epsilon_{(lm)} + \frac{E^{(lm)i[+1]}}{\text{VII}} \kappa_{(lm)} + \frac{[+1]}{\text{XIII}} E^i \theta, \\
 S^{[+1]} &= - \frac{[+1]}{\text{XI}} E^{(ik)} \epsilon_{(ik)} - \frac{E^{(ik)[+1]}}{\text{XII}} \kappa_{(ik)} - \frac{E}{\text{XIII}} \varphi^{[+1]i} - \frac{[+1]}{\text{XIV}} E^i \kappa_i - \frac{[+1]}{\text{XV}} E \theta.
 \end{aligned} \right. \quad (28)$$

В качестве закона теплопроводности примем линейный закон Фурье

$$h^{[+1]k} = - \frac{[+1]}{\text{XVI}} E^{ki} \nabla_i \theta, \quad (29)$$

где $\frac{[+1]}{\text{XVI}} E^{ki}$ — псевдотензор коэффициентов теплопроводности. Отметим, что

в (29) компоненты псевдотензора коэффициентов теплопроводности $\frac{[+1]}{\text{XVI}} E^{ki}$, вообще говоря, проявляют чувствительность к зеркальным отражениям и инверсиям трехмерного пространства.

После линеаризации уравнения теплопроводности (26) с учетом (28) и (29) окончательно получим

$$\begin{aligned}
 & \frac{[+1]}{\text{XI}} E^{(ij)} \partial_i \epsilon_{(ij)} + \frac{E^{(ij)}}{\text{XII}} \partial_i \kappa_{(ij)} + \frac{E}{\text{XIII}} \partial_i \varphi^{[+1]i} + \\
 & + \frac{[+1]}{\text{XIV}} E^i \partial_i \kappa_i + \theta_0^{-1} C \partial \theta = \theta_0^{-1} \frac{[+1]}{\text{XVI}} E^{js} \nabla_j \nabla_s \theta,
 \end{aligned}$$

где $C = \frac{[+1]}{\rho} c$, c — теплоемкость в расчете на единицу массы (specific heat).

Для гиротропного микрополярного термоупругого тела определяющие тензоры и псевдотензоры четвертого ранга примут вид [44]:

$$\begin{aligned} E_{\text{I}}^{(+1)(ik)(lm)} &= A_{\text{I}}^{(+1)} g^{ik} g^{lm} + C_{\text{I}}^{(+1)} g^{il} g^{km}, \\ E_{\text{II}}^{(-1)(ik)(lm)} &= A_{\text{II}}^{(-1)} g^{ik} g^{lm} + C_{\text{II}}^{(-1)} g^{il} g^{km}, \\ E_{\text{III}}^{(ik)(lm)} &= A_{\text{III}} g^{ik} g^{lm} + C_{\text{III}} g^{il} g^{km}; \end{aligned} \quad (30)$$

определяющие тензоры и псевдотензоры третьего и первого ранга равны нулю:

$$E_{\text{IV}}^{(ik)\cdot} = E_{\text{V}}^{(-1)(ik)\cdot} = E_{\text{VI}}^{(+1)(ik)l} = E_{\text{VII}}^{(ik)l} = E_{\text{XIII}}^i = E_{\text{XIV}}^{[+1]i} = 0;$$

определяющие тензоры и псевдотензоры второго ранга оказываются шаровыми:

$$\begin{aligned} E_{\text{VIII}}^{(-1)(il)} &= B_{\text{VIII}}^{(-1)} g_{il}, & E_{\text{IX}}^{(+1)(il)} &= B_{\text{IX}}^{(+1)} g^{il}, & E_{\text{X}}^{i\cdot} &= B_{\text{X}} g_{i\cdot}^{\cdot}, \\ E_{\text{XI}}^{(+1)(ik)} &= B_{\text{XI}}^{(+1)} g^{ik}, & E_{\text{XII}}^{(ik)} &= B_{\text{XII}} g^{ik}. \end{aligned} \quad (31)$$

Кроме того, для полуизотропного тела шаровым оказывается псевдотензор коэффициентов теплопроводности:

$$E_{\text{XVI}}^{[+1]js} = \lambda g^{js}.$$

Псевдоскаляры нечетного алгебраического веса в (30) и (31), как и коэффициент теплопроводности λ , реагируют на преобразования трехмерного пространства, меняющие его ориентацию на противоположную. То же самое касается и теплоемкости C .

Заключение. В настоящей статье рассмотрены вопросы моделирования процессов теплопроводности в микро- и наноструктурных телах, термомеханические состояния которых реагируют на преобразования трехмерного пространства, меняющие его ориентацию на противоположную. Построен новый вариант теории теплопроводности, в рамках которого тепловой поток оказывается псевдовектором алгебраического веса $+1$, подобным псевдовектору спинорных перемещений.

1. Предложены элементарные тензорные площади и объемы, позволяющие представить вектор теплового потока в форме псевдовектора положительного веса $+1$, что делает его алгебраически подобным псевдовектору спинорных перемещений в точности того же алгебраического веса. Точно такие же тензорные элементы площади и объема используются в стандартных физических теориях поля.

2. Сформулирован фундаментальный принцип абсолютной инвариантности абсолютной термодинамической температуры, обусловленный балансом алгебраических весов плотности внутренней энергии и плотности энтропии.
3. Предложена квадратичная форма для свободной энергии Гельмгольца, включающая XV определяющих псевдотензоров.
4. Получено нелинейное уравнение теплопроводности. Выполнена его линеаризация с учетом линейного закона теплопроводности Фурье. Показано, что коэффициент теплопроводности и теплоемкость являются псевдоскалярами веса +1, реагирующими на преобразования, изменяющие ориентацию трехмерного пространства на противоположную.
5. Разработанный подход в перспективе может быть обобщен на дробные алгебраические веса.
6. Установлена принципиальная нереализуемость приписывания какого бы то ни было алгебраического веса абсолютной термодинамической температуре, обусловленная различной природой внутренней энергии (аддитивность) и температуры (неаддитивность).
7. Показано, что псевдовектор потока энтропии имеет тот же вес, что и псевдовектор потока тепла в силу абсолютной инвариантности абсолютной термодинамической температуры.

Конкурирующие интересы. Заявляем, что в отношении авторства и публикации этой статьи конфликта интересов не имеем.

Авторский вклад и ответственность. Все авторы принимали участие в разработке концепции статьи и в написании рукописи. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

Финансирование. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 23-21-00262).

Библиографический список

1. Lakes R. Elastic and viscoelastic behavior of chiral materials // *Int. J. Mech. Sci.*, 2001. vol. 43, no. 7. pp. 1579–1589. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0020-7403\(00\)00100-4](https://doi.org/10.1016/S0020-7403(00)00100-4).
2. Mackay T. G., Lakhtakia A. Negatively refracting chiral metamaterials: a review // *SPIE Reviews*, 2010. vol. 1, no. 1, 018003. DOI: <https://doi.org/10.1117/6.0000003>.
3. Tomar S. K., Khurana A. Wave propagation in thermo-chiral elastic medium // *Appl. Math. Model.*, 2013. vol. 37, no. 22. pp. 9409–9418. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.apm.2013.04.029>.
4. Радаев Ю. Н. Правило множителей в ковариантных формулировках микрополярных теорий механики континуума // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2018. Т. 22, № 3. С. 504–517. EDN: YOYJQD. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1635>.
5. Neuber H. Über Probleme der Spannungskonzentration im Cosserat-Körper // *Acta Mechanica*, 1966. vol. 2. pp. 48–69. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01176729>.
6. Neuber H. On the general solution of linear-elastic problems in isotropic and anisotropic Cosserat continua / *Applied Mechanics*; eds. H. Görtler. Berlin, Heidelberg: Springer, 1966. pp. 153–158. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-662-29364-5_16.
7. Радаев Ю. Н., Мурашкин Е. В. Псевдотензорная формулировка механики гемитропных микрополярных сред // *Пробл. прочн. пластичн.*, 2020. Т. 82, № 4. С. 399–412. EDN: TODIFV. DOI: <https://doi.org/10.32326/1814-9146-2020-82-4-399-412>.
8. Murashkin E. V., Radaev Yu. N. On a micropolar theory of growing solids // *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser.

- Phys. Math. Sci.], 2020. vol. 24, no. 3. pp. 424–444. EDN: TYGBER. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1792>.
9. Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. К теории линейных гемитропных микрополярных сред // *Вестн. ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Сер. Механика предельного состояния*, 2020. № 4(46). С. 16–24. EDN: IZKTBQ. DOI: <https://doi.org/10.37972/chgpu.2020.89.81.031>.
 10. Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Связанная термоупругость гемитропных сред. Псевдо-тензорная формулировка // *Изв. РАН. МТТ*, 2023. № 3. С. 163–176. EDN: JMQVBJ.
 11. Murashkin E. V., Radayev Yu. N. A negative weight pseudotensor formulation of coupled hemitropic thermoelasticity // *Lobachevskii J. Math.*, 2023. vol. 44, no. 6. pp. 2440–2449. EDN: PINYDI. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1995080223060392>.
 12. Truesdell C., Toupin R. The classical field theories / *Encyclopedia of Physics*. vol. III/1 / Principles of Classical Mechanics and Field Theory; eds. S. Flügge. Berlin, Göttingen, Heidelberg: Springer, 1960. pp. 226–902. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-642-45943-6_2.
 13. Schouten J. A. *Tensor Analysis for Physicist*. Oxford: Clarendon Press, 1951. 434 pp.
 14. Sokolnikoff I. S. *Tensor Analysis: Theory and Applications to Geometry and Mechanics of Continua*: John Wiley & Sons, 1964. 361 pp.
 15. Synge J. L., Schild A. *Tensor Calculus*. New York: Dover Publ., 1978. xi+324 pp.
 16. Das A. J. *Tensors: The Mathematics of Relativity Theory and Continuum Mechanics*. Berlin: Springer Science & Business Media, 2007. xii+290 pp. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-0-387-69469-6>.
 17. Gurevich G. B. *Foundations of the Theory of Algebraic Invariants*. Groningen: Noordhoff, 1964. 429 pp.
 18. Veblen O., Thomas T. Y. Extensions of relative tensors // *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1924. vol. 26, no. 3. pp. 373–377. DOI: <https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1924-1501284-6>.
 19. Veblen O. *Invariants of Quadratic Differential Forms*. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1927. viii+102 pp.
 20. Cosserat E., Cosserat F. *Théorie des Corps déformables*. Paris: A. Herman et Fils, 1909. vi+226 pp.
 21. Nowacki W. *Theory of Micropolar Elasticity*. Wien: Springer, 1972. 285 pp. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-7091-2720-9>.
 22. Nowacki W. *Theory of Asymmetric Elasticity*. Oxford: Pergamon Press, 1986. viii+383 pp.
 23. Dyszlewicz J. *Micropolar Theory of Elasticity / Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics*. Berlin, Heidelberg: Springer, 2004. xv+345 pp. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-540-45286-7>.
 24. Besdo D. Ein Beitrag zur nichtlinearen Theorie des Cosserat-Kontinuums // *Acta Mechanica*, 1974. vol. 20, no. 1. pp. 105–131. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01374965>.
 25. Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Теплопроводность микрополярных тел, чувствительных к зеркальным отражениям трехмерного пространства // *Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки*, 2023. Т. 165, № 4 (в печати).
 26. Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Тензор силовых напряжений Схоутена и аффинорные плотности положительного веса // *Пробл. прочн. пластичн.*, 2022. Т. 84, № 4. С. 545–558. EDN: KPMGGN. DOI: <https://doi.org/10.32326/1814-9146-2022-84-4-545-558>.
 27. Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. К теории ковариантного дифференцирования двухточечных псевдотензорных полей // *Изв. РАН. МТТ*, 2022. № 6. С. 104–113. EDN: MZLHKD. DOI: <https://doi.org/10.31857/S0572329922060149>.
 28. Ковалев В. А., Радаев Ю. Н. *Элементы теории поля: вариационные симметрии и геометрические инварианты*. М.: Физматлит, 2009. 160 с. EDN: MWDGDN.
 29. Ковалев В. А., Радаев Ю. Н. *Волновые задачи теории поля и термомеханика*. Саратов: Саратов. ун-т, 2010. 328 с. EDN: QJXSPX.
 30. Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. О согласовании ориентаций тензорных элементов площади в микрополярном континууме, погружаемом во внешнее плоское пространство //

- Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2021. Т. 25, № 4. С. 776–786. EDN: ZKIAAJ. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1883>.
31. Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. К теории ориентированных тензорных элементов площади микрополярного континуума, погруженного во внешнее плоское пространство // *Изв. РАН. МТТ*, 2022. № 2. С. 3–13. EDN: KRUCOL. DOI: <https://doi.org/10.31857/S0572329922020155>.
 32. Фиников С. П. *Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии*. Л., М.: ГИТТЛ, 1948. 432 с.
 33. Картан А. *Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы*. М.: Мир, 1971. 392 с.
 34. Ефимов Н. В. *Введение в теорию внешних форм*. М.: Наука, 1977. 88 с.
 35. Парс Л. А. *Аналитическая динамика*. М.: Наука, 1971. 636 с.
 36. Радаев Ю. Н. Тензоры с постоянными компонентами в определяющих уравнениях гемитропного микрополярного тела // *Изв. РАН. МТТ*, 2023. № 5. С. 98–110. EDN: PHNOCG. DOI: <https://doi.org/10.31857/S057232992370006X>.
 37. Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Алгебраический алгоритм систематического приведения однотоочечных псевдотензоров к абсолютным тензорам // *Вестн. ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Сер. Механика предельного состояния*, 2022. № 1(51). С. 17–26. EDN: ZJWFGT. DOI: <https://doi.org/10.37972/chgpu.2022.51.1.002>.
 38. Розенфельд Б. А. *Многомерные пространства*. М.: Наука, 1966. 648 с.
 39. Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Ковариантно постоянные тензоры в пространствах Евклида. Элементы теории // *Вестн. ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Сер. Механика предельного состояния*, 2022. № 2(52). С. 106–115. EDN: FQVGRK. DOI: <https://doi.org/10.37972/chgpu.2022.52.2.012>.
 40. Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Ковариантно постоянные тензоры в пространствах Евклида. Приложения к механике континуума // *Вестн. ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Сер. Механика предельного состояния*, 2022. № 2(52). С. 118–127. EDN: ESTJSA. DOI: <https://doi.org/10.37972/chgpu.2022.52.2.013>.
 41. Poincaré H. Sur les résidus des intégrales doubles // *Acta math*, 1887. vol. 6. pp. 321–380.
 42. Poincaré H. Analysis situs // *J. Ёс. Politech.*, 1895. vol. 2, no. 1. pp. 1–123 (In French).
 43. Мурашкин Е. В. О формулировках краевых условий в задачах синтеза тканых 3D материалов // *Вестн. ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Сер. Механика предельного состояния*, 2021. № 1(47). С. 114–121. EDN: CSFKRW. DOI: <https://doi.org/10.37972/chgpu.2021.1.47.010>.
 44. Jeffreys H. *Cartesian Tensors*. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1931. 105 pp.

MSC: 15A72, 53A45, 74D05

Thermomechanical states of gyrotropic micropolar solids

*E. V. Murashkin, Yu. N. Radayev*Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, Russian Academy of Sciences,
101–1, pr. Vernadskogo, Moscow, 119526, Russian Federation.

Abstract

The paper is devoted to problems of modeling heat conduction processes in micropolar elastic solids, all thermomechanical states of which may be sensible to mirror reflections of three-dimensional space. A new variant of the heat conduction theory is developed in terms of the heat fluxes treated as pseudovectors of algebraic weight +1 making their similar to the pseudovector of spinor displacements known from previous discussions. Constitutive pseudoinvariants (at least some of them) have odd negative weights (for example, thermal conductivity coefficient and specific heat). Having choosing elements of volume and area as natural known from the classical field theory formulations and considered as pseudoinvariants of weight -1 , the variant of theory is proposed. An absolute contravariant vector represents translational displacements and a contravariant pseudovector of weight +1 does spinor displacements. As a result, heat flux, force stress tensor, mass density and specific heat can be treated as pseudotensor quantities of odd weights. The Helmholtz free energy per unit natural volume element is used as the thermodynamic potential with the functional arguments: temperature, symmetrical parts and accompanying vectors of the linear asymmetric strain tensor and wryness pseudotensor. The principle of absolute invariance of absolute thermodynamic temperature is proposed and discussed. A non-linear heat conduction equation is obtained and linearized.

Keywords: heat conductivity, micropolarity, tensor volume element, pseudovector of heat flux, pseudotensor, mirror reflection, semiisotropic solid, gyrotropic solid, absolute thermodynamic temperature, weights balance rule.

Received: 9th September, 2023 / Revised: 10th November, 2023 /Accepted: 13th December, 2023 / First online: 26th December, 2023

Mechanics of Solids

Research Article

© Authors, 2023

© Samara State Technical University, 2023 (Compilation, Design, and Layout)

 The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Please cite this article in press as:

Murashkin E. V., Radayev Yu. N. Thermomechanical states of gyrotropic micropolar solids, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2023, vol. 27, no. 4, pp. 659–678. EDN: CRRHLO. DOI: 10.14498/vsgtu2062 (In Russian).

Authors' Details:

Evgenii V. Murashkin  <https://orcid.org/0000-0002-3267-4742>Cand. Phys. & Math. Sci., PhD, MD; Senior Researcher; Lab. of Modeling in Solid Mechanics; e-mail: evmurashkin@gmail.com*Yuri N. Radayev*  <https://orcid.org/0000-0002-0866-2151>D.Sc. (Phys. & Math. Sci.), Ph.D., M.Sc., Professor; Leading Researcher; Lab. of Modeling in Solid Mechanics; e-mail: radayev@ipmnet.ru, y.radayev@gmail.com

Competing interests. We declare that we have no competing interests.

Author's Responsibilities. Each author has participated in the article concept development and in the manuscript writing. We take full responsibility for submit the final manuscript to print. We approved the final version of the manuscript.

Funding. The study was financially supported by the Russian Science foundation (project no. 23-21-00262).

References

1. Lakes R. Elastic and viscoelastic behavior of chiral materials, *Int. J. Mech. Sci.*, 2001, vol. 43, no. 7, pp. 1579–1589. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0020-7403\(00\)00100-4](https://doi.org/10.1016/S0020-7403(00)00100-4).
2. Mackay T. G., Lakhtakia A. Negatively refracting chiral metamaterials: a review, *SPIE Reviews*, 2010, vol. 1, no. 1, 018003. DOI: <https://doi.org/10.1117/6.0000003>.
3. Tomar S. K., Khurana A. Wave propagation in thermo-chiral elastic medium, *Appl. Math. Model.*, 2013, vol. 37, no. 22, pp. 9409–9418. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.apm.2013.04.029>.
4. Radayev Yu. N. The Lagrange multipliers method in covariant formulations of micropolar continuum mechanics theories, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2018, vol. 22, no. 3, pp. 504–517 (In Russian). EDN: YOYJQD. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1635>.
5. Neuber H. Über Probleme der Spannungskonzentration im Cosserat-Körper, *Acta Mechanica*, 1966, vol. 2, pp. 48–69. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01176729>.
6. Neuber H. On the general solution of linear-elastic problems in isotropic and anisotropic Cosserat continua, In: *Applied Mechanics*; eds. H. Görtler. Berlin, Heidelberg, Springer, 1966, pp. 153–158. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-662-29364-5_16.
7. Radayev Yu. N., Murashkin E. V. Pseudotensor formulation of the mechanics of hemitropic micropolar media, *Problems of Strength and Plasticity*, 2020, vol. 82, no. 4, pp. 399–412 (In Russian). EDN: TODIFV. DOI: <https://doi.org/10.32326/1814-9146-2020-82-4-399-412>.
8. Murashkin E. V., Radayev Yu. N. On a micropolar theory of growing solids, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2020, vol. 24, no. 3, pp. 424–444. EDN: TYGBER. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1792>.
9. Murashkin E. V., Radayev Yu. N. On the theory of linear hemitropic micropolar media, *Vestn. I. Yakovlev Chuvach State Pedagogical Univ. Ser. Mechanics of a Limit State*, 2020, no. 4(46), pp. 16–24 (In Russian). EDN: IZKTBQ. DOI: <https://doi.org/10.37972/chggu.2020.89.81.031>.
10. Murashkin E. V., Radayev Yu. N. Coupled thermoelasticity of hemitropic media. Pseudotensor formulation, *Mech. Solids*, 2023, vol. 58, no. 3, pp. 802–813. DOI: <https://doi.org/10.3103/s0025654423700127>.
11. Murashkin E. V., Radayev Yu. N. A negative weight pseudotensor formulation of coupled hemitropic thermoelasticity, *Lobachevskii J. Math.*, 2023, vol. 44, no. 6, pp. 2440–2449. EDN: PINYDI. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1995080223060392>.
12. Truesdell C., Toupin R. The classical field theories, In: *Encyclopedia of Physics*, vol. III/1, Principles of Classical Mechanics and Field Theory; eds. S. Flügge. Berlin, Göttingen, Heidelberg, Springer, 1960, pp. 226–902. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-642-45943-6_2.
13. Schouten J. A. *Tensor Analysis for Physicist*. Oxford, Clarendon Press, 1951, 434 pp.
14. Sokolnikoff I. S. *Tensor Analysis: Theory and Applications to Geometry and Mechanics of Continua*, John Wiley & Sons, 1964, 361 pp.
15. Synge J. L., Schild A. *Tensor Calculus*. New York, Dover Publ., 1978, xi+324 pp.
16. Das A. J. *Tensors: The Mathematics of Relativity Theory and Continuum Mechanics*. Berlin, Springer Science & Business Media, 2007, xii+290 pp. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-0-387-69469-6>.

17. Gurevich G. B. *Foundations of the Theory of Algebraic Invariants*. Groningen, Noordhoff, 1964, 429 pp.
18. Veblen O., Thomas T. Y. Extensions of relative tensors, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1924, vol. 26, no. 3, pp. 373–377. DOI: <https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1924-1501284-6>.
19. Veblen O. *Invariants of Quadratic Differential Forms*. Cambridge, Cambridge Univ. Press, 1927, viii+102 pp.
20. Cosserat E., Cosserat F. *Théorie des Corps déformables*. Paris, A. Herman et Fils, 1909, vi+226 pp.
21. Nowacki W. *Theory of Micropolar Elasticity*. Wien, Springer, 1972, 285 pp. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-7091-2720-9>.
22. Nowacki W. *Theory of Asymmetric Elasticity*. Oxford, Pergamon Press, 1986, viii+383 pp.
23. Dyszlewicz J. *Micropolar Theory of Elasticity*, Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics. Berlin, Heidelberg, Springer, 2004, xv+345 pp. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-540-45286-7>.
24. Besdo D. Ein Beitrag zur nichtlinearen Theorie des Cosserat–Kontinuums, *Acta Mechanica*, 1974, vol. 20, no. 1, pp. 105–131. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01374965>.
25. Murashkin E. V., Radayev Yu. N. Heat conduction of micropolar solids sensitive to mirror reflections of three-dimensional space, *Uchen. Zap. Kazan. Univ. Ser. Fiz.-Matem. Nauki*, 2023, vol. 165, no. 4 (to appear) (In Russian).
26. Murashkin E. V., Radayev Yu. N. Schouten’s force stress tensor and affinor densities of positive weight, *Problems of Strength and Plasticity*, 2022, vol. 84, no. 4, pp. 545–558 (In Russian). EDN: KPMGGN. DOI: <https://doi.org/10.32326/1814-9146-2022-84-4-545-558>.
27. Murashkin E. V., Radayev Yu. N. The Schouten force stresses in continuum mechanics formulations, *Mech. Solids*, 2023, vol. 58, no. 1, pp. 153–160. DOI: <https://doi.org/10.3103/s0025654422700029>.
28. Kovalev V. A., Radayev Yu. N. *Elementy teorii polia: variatsionnye simmetrii i geometricheskie invarianty* [Elements of Field Theory: Variational Symmetries and Geometric Invariants]. Moscow, Fizmatlit, 2009, 160 pp (In Russian). EDN: MWDGDN.
29. Kovalev V. A., Radayev Yu. N. *Volnovye zadachi teorii polia i termomekhanika* [Wave Problems of Field Theory and Thermomechanics]. Saratov, Saratov Univ., 2010, 328 pp (In Russian). EDN: QJXSPX.
30. Murashkin E. V., Radayev Yu. N. On a ordering of area tensor elements orientations in a micropolar continuum immersed in an external plane space, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2021, vol. 25, no. 4, pp. 776–786 (In Russian). EDN: ZKIAAJ. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1883>.
31. Murashkin E. V., Radayev Yu. N. On theory of oriented tensor elements of area for a micropolar continuum immersed in an external plane space, *Mech. Solids*, 2022, vol. 57, no. 2, pp. 205–213. EDN: SNKUNC. DOI: <https://doi.org/10.3103/s0025654422020108>.
32. Finikov S. P. *Metod vneshnikh form Kartana v differentsial’noi geometrii* [Cartan’s Method of External Forms in Differential Geometry]. Leningrad, Moscow, GITTL, 1948, 432 pp. (In Russian)
33. Cartan H. *Differentsial’noe ischislenie. Differentsial’nye formy* [Differential Calculus. Differential Forms]. Moscow, Mir, 1971, 392 pp. (In Russian)
34. Efimov N. V. *Vvedenie v teoriyu vneshnikh form* [Introduction to the Theory of External Forms]. Moscow, Nauka, 1977, 88 pp. (In Russian)
35. Pars L. A. *Analiticheskaya dinamika* [Analytical Dynamics]. Moscow, Nauka, 1971, 636 pp. (In Russian)
36. Radayev Yu. N. Tensors with constant components in the constitutive equations of hemitropic micropolar solids, *Mech. Solids*, 2023, vol. 58, no. 5, pp. 1517–1527. DOI: <https://doi.org/10.3103/S0025654423700206>.
37. Murashkin E. V., Radayev Yu. N. Algebraic algorithm for systematically reducing one-point pseudotensors to absolute tensors, *Vestn. I. Yakovlev Chuvach State Pedagogical Univ.*

- Ser. Mechanics of a Limit State*, 2022, no.1(51), pp. 17–26 (In Russian). EDN: ZJWFGT. DOI: <https://doi.org/10.37972/chgpu.2022.51.1.002>.
38. Rozenfel'd B. A. *Mnogomernye prostranstva* [Multidimensional Spaces]. Moscow, Nauka, 1966, 648 pp. (In Russian)
39. Murashkin E. V., Radayev Yu. N. Covariantly constant tensors in Euclidean spaces. Elements of the theory, *Vestn. I. Yakovlev Chuvach State Pedagogical Univ. Ser. Mechanics of a Limit State*, 2022, no.2(52), pp. 106–115 (In Russian). EDN: FQVGRK. DOI: <https://doi.org/10.37972/chgpu.2022.52.2.012>.
40. Murashkin E. V., Radayev Yu. N. Covariantly constant tensors in Euclidean spaces. Applications to continuum mechanics, *Vestn. I. Yakovlev Chuvach State Pedagogical Univ. Ser. Mechanics of a Limit State*, 2022, no.2(52), pp. 118–127 (In Russian). EDN: ESTJSA. DOI: <https://doi.org/10.37972/chgpu.2022.52.2.013>.
41. Poincaré H. Sur les residus des integrales doubles, *Acta math*, 1887, vol.6, pp. 321–380.
42. Poincaré H. Analysis situs, *J. Éc. Politech.*, 1895, vol.2, no.1, pp. 1–123 (In French).
43. Murashkin E. V. On the formulation of boundary conditions in problems of synthesis of woven 3D materials, *Vestn. I. Yakovlev Chuvach State Pedagogical Univ. Ser. Mechanics of a Limit State*, 2021, no.1(47), pp. 114–121 (In Russian). EDN: CSFKRW. DOI: <https://doi.org/10.37972/chgpu.2021.1.47.010>.
44. Jeffreys H. *Cartesian Tensors*. Cambridge, Cambridge Univ. Press, 1931, 105 pp.



УДК 539.3

Способ определения параметров электрического сигнала для управления вынужденными установившимися колебаниями электровязкоупругих тел.

Математические соотношения

Н. В. Севодина, Н. А. Юрлова, Д. А. Ошмарин

Институт механики сплошных сред УрО РАН,
Россия, 614013, Пермь, ул. Академика Королева, 1.

Аннотация

Представлен способ определения величины электрического потенциала, генерирующегося на электродированной поверхности пьезоэлемента, который является частью кусочно-однородной электровязкоупругой конструкции, необходимого для формирования управляющего воздействия при активном управлении ее динамическим поведением в режиме вынужденных установившихся колебаний с целью минимизации амплитуды колебаний на выбранной резонансной частоте. Путем математических преобразований уравнений, описывающих собственные и вынужденные колебания таких электровязкоупругих тел, выведены соотношения, выражающие связь между величинами смещения узлов и электрического потенциала на электродированной поверхности пьезоэлемента. Данные формулы позволяют определить величину потенциала, который необходимо подать на пьезоэлемент для того, чтобы наилучшим образом демпфировать заданную моду колебаний конструкции. В результате численных экспериментов с использованием пакета прикладных программ конечно-элементного анализа ANSYS подтверждена возможность использования результатов решения задачи о собственных колебаниях для поиска оптимальной величины потенциала, характеризующего

Механика деформируемого твердого тела

Научная статья

© Коллектив авторов, 2023

© СамГТУ, 2023 (составление, дизайн, макет)

Контент публикуется на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

Образец для цитирования

Севодина Н. В., Юрлова Н. А., Ошмарин Д. А. Способ определения параметров электрического сигнала для управления вынужденными установившимися колебаниями электровязкоупругих тел. Математические соотношения // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2023. Т. 27, № 4. С. 679–703. EDN: GNEHRB. DOI: 10.14498/vsgtu2025.

Сведения об авторах

Наталья Витальевна Севодина <https://orcid.org/0000-0001-9374-7135>

кандидат технических наук; научный сотрудник; отд. комплексных проблем механики деформируемых твердых тел; e-mail: natsev@icmm.ru

Наталья Алексеевна Юрлова <https://orcid.org/0000-0003-3497-0358>

кандидат физико-математических наук, доцент; старший научный сотрудник; e-mail: yurlova@icmm.ru

Дмитрий Александрович Ошмарин <https://orcid.org/0000-0002-9898-4823>

кандидат технических наук; научный сотрудник; отд. комплексных проблем механики деформируемых твердых тел; e-mail: oshmarin@icmm.ru

управляющее электрическое воздействие, направленное на демпфирование заданных мод в режиме вынужденных установившихся колебаний. Эффективность применения полученных аналитических зависимостей продемонстрирована на примере консольно защемленной вязкоупругой пластинки с расположенным на ее поверхности пьезоэлементом. Предложенный подход позволяет существенно сократить временные и ресурсные затраты при математическом моделировании активного управления вынужденными установившимися колебаниями электровязкоупругих тел, определить требования к аппаратной реализации актуаторов и контроллеров блока управления такого рода smart-систем.

Ключевые слова: электровязкоупругость, пьезоэлемент, вынужденные установившиеся колебания, собственные колебания, управление колебаниями, смещения, электрический потенциал.

Получение: 25 мая 2023 г. / Исправление: 17 ноября 2023 г. /

Принятие: 13 декабря 2023 г. / Публикация онлайн: 27 декабря 2023 г.

1. Введение. В связи с развитием материальной базы и программного обеспечения в последнее время технология интеллектуальных (smart) конструкций становится все более привлекательной в приложениях, связанных с управлением механическим поведением различных объектов в режиме реального времени и без участия операторов. Как правило, доступ к таким объектам в процессе эксплуатации либо невозможен (элементы космических конструкций [1–4]), либо затруднен (подводные установки, высокогорные, находящиеся в агрессивной для человека среде и т.д.). Для обеспечения необходимых эксплуатационных требований (например, неизменность формы параболической антенны, отсутствие колебаний в отдельных элементах конструкций и т.п.) smart-конструкции могут автоматически адаптировать свою реакцию в форме перемещений, напряжений, амплитуды колебаний, резонансных частот и т.п. в зависимости от внешнего воздействия. Кроме этого, в последнее время наблюдается тенденция уменьшения размеров беспроводной электроники и увеличения жизнеспособности беспроводных электронных устройств. В условиях возрастания потребляемой мощности такого рода устройств привлекательным становится использование в качестве источника питания энергии колебаний, вызываемых внешним воздействием, что также делает проблему управления динамическим поведением конструкции актуальной [5].

На основе применения smart-технологий выделяются следующие стратегии управления механическим поведением объектов: пассивная, активная, адаптивная, полуактивная, активно-пассивная и т.д. Для изготовления активных управляемых или реагирующих smart-конструкций необходимы актуаторы, или исполнительные механизмы. При соединении с конструкцией (путем встраивания внутрь или закрепления на поверхности) актуаторы создают локальные деформации и напрямую воздействуют на механический отклик всей конструкции.

В настоящее время в качестве актуаторов применяют: сплавы с памятью формы, пьезоэлектрические материалы, электрострикционные и магнестрикционные материалы, электрореологические жидкости. Обзор функциональных материалов, используемых в интеллектуальных структурах, приведен в работах [6, 7]. Широкое использование пьезоматериалов, особенно для

управления механическим поведением конструкций, обусловлено двумя главными причинами. Наличие у пьезоматериалов прямого и обратного пьезоэлектрического эффекта позволяет использовать пьезоэлементы как в качестве датчиков, так и в качестве актуаторов [8, 9]. Вторая причина состоит в том, что технологически реализуемая для пьезоматериалов возможность создания электропроводящей поверхности позволяет подключить к smart-конструкции различные варианты электрических цепей [10, 11].

Существуют два принципиально различных подхода к активному гашению отклонений: с обратной связью и с упреждающей адаптивной фильтрацией [12].

В работе [13] приводится основательный обзор существующих активных методов управления колебаниями и проблем, связанных с их применением. Обзор различных активных и полуактивных систем управления, используемых в основном в гражданских сооружениях, представлен в [14]. Теории активного управления колебаниями посвящены монографии [15, 16].

При решении проблем, связанных с активным управлением механическим поведением конструкций, имеющих в своем составе элементы, способные выполнять роль актуаторов, основной проблемой является определение величины управляющего воздействия, передаваемого от актуатора на конструкцию, который вызывает ее требуемый отклик. Поэтому одной из основных задач является определение характеристик управляющего сигнала, подаваемого на актуатор.

Реализация активной стратегии управления колебаниями помимо использования сенсоров и актуаторов подразумевает применение блоков управления, которые обеспечивают прием сигнала с сенсора, его преобразование, усиление и подачу на актуатор. В основном внимание исследователей сосредоточено на разработке как алгоритмов управления, так и аппаратуры контроллера, позволяющего реализовать закон управления [17, 18]. Наиболее часто используемыми методами управления являются классические алгоритмы управления, такие как положительная позиционная обратная связь (PPF), LQR и PID-регулирование [19–21].

Обзор различных стратегий активного управления, включая линейный квадратичный, линейный квадратичный гауссовский, нейронные сети и т.д. в применении к гражданскому строительству представлены в [22]. Авторы работы [23] успешно использовали и сравнили с экспериментом адаптивные стратегии управления линейными квадратичными гауссовыми и нейронными сетями для управления колебаниями балки.

Однако определению величины управляющего сигнала, который должен быть сформирован в блоке управления, что могло бы способствовать реализации аппаратной части блока управления требуемой величины, исследователями практически не уделяется внимания.

При многообразии вариантов управления динамическими характеристиками smart-конструкций с пьезоэлементами (электровязкоупругих конструкций) поиск необходимых по величине управляющих параметров практически невозможен без математического моделирования. Из динамических характеристик наиболее важными являются резонансные частоты и параметры, определяющие демпфирующие свойства моделируемой системы, которые оцениваются по величине амплитуды при резонансном режиме или по скоро-

сти переходных процессов. В первом случае решается задача о вынужденных установившихся колебаниях, во втором — динамическая задача с начальными условиями. Эти задачи малоэффективны при поиске значений параметров, обеспечивающих требуемый отклик электровязкоупругой конструкции в силу следующих причин. Для получения амплитуд при резонансных режимах на основе решения задачи о вынужденных установившихся колебаниях требуется многократное решение задачи при различных частотах внешних воздействий, при этом найденные решения зависят от моделируемого варианта нагружения исследуемой системы.

Задача о собственных колебаниях в такой ситуации становится привлекательной для исследователей, позволяя существенно сократить требуемые затраты времени и вычислительных ресурсов. Это побудило использовать ее и при определении величины управляющего сигнала, подаваемого на актуатор, для получения требуемого механического отклика конструкции.

В настоящей работе предложен способ, позволяющий на основе решения задачи о собственных колебаниях исследуемой электровязкоупругой конструкции получить аналитические выражения для определения величины электрического потенциала, генерируемого на электродированной поверхности пьезоэлемента при его деформировании на рассматриваемой моде при вынужденных установившихся колебаниях в момент резонанса. При реализации активной стратегии управления динамическим поведением конструкции он является основой для формирования управляющего сигнала, подаваемого на актуатор для получения требуемого отклика конструкции, совершающей вынужденные установившиеся колебания.

2. Математическая постановка задач о собственных и вынужденных колебаниях электровязкоупругих тел. В настоящем разделе приводится краткая математическая формулировка задач о собственных и вынужденных колебаниях. Более подробное описание содержится в работах [24, 25].

Вариационное уравнение равновесия в случае квазистатического деформирования кусочно-однородного электровязкоупругого тела имеет вид

$$\int_{V_1} (\sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} - D_i \delta E_i + \rho_1 \ddot{u}_i \delta u_i) dV + \int_{V_2} (\sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} + \rho_2 \ddot{u}_i \delta u_i) dV = \int_{S_q} q_e \delta \varphi dS + \int_{S_\sigma} p_i \delta u_i dS. \quad (1)$$

При отсутствии внешних усилий уравнение (1) будет описывать собственные колебания электровязкоупругого тела:

$$\int_{V_1} (\sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} - D_i \delta E_i + \rho_1 \ddot{u}_i \delta u_i) dV + \int_{V_2} (\sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} + \rho_2 \ddot{u}_i \delta u_i) dV = 0. \quad (2)$$

Здесь приняты следующие обозначения: σ_{ij} , ε_{ij} и u_i — компоненты симметричного тензора напряжений Коши, тензора линейных деформаций и вектора перемещений соответственно; ρ_1 и ρ_2 — удельные плотности электрорупругого материала тела объема V_1 и вязкоупругого материала тела объема V_2 ; D_i , E_i — компоненты векторов электрической индукции и напряженности электрического поля; φ — электрический потенциал; $V = V_1 + V_2$, при

этом V_1 относится к его электроупругой, а V_2 — к вязкоупругой частям; $S = S_u + S_\sigma + S_q + S_\varphi + S_{p0}$ — полная поверхность кусочно-однородного тела, ограничивающая объем V . При этом на частях поверхности, ограничивающей объем V_2 , заданы перемещения u_i^0 (на S_u) и поверхностные усилия p_i (на S_σ); на частях поверхности, ограничивающей объем V_1 , заданы поверхностная плотность зарядов q_s (на S_q) и электрический потенциал φ_0 (на S_φ).

Электрический потенциал может быть подведен только к электродированной поверхности, для чего S_φ покрывается тонким электропроводящим слоем, толщиной и массой которого пренебрегаем; S_{p0} — часть поверхности тела, ограничивающая объем V_1 , не покрытая электродами или неэлектродированная поверхность. Считаем, что все составляющие кусочно-однородного тела идеально скреплены между собой.

Покрытие токопроводящим слоем части поверхности пьезоэлектрического тела делает ее эквипотенциальной, т.е. на всей электродированной поверхности выполняется условие потенциальности и значение электрического потенциала одинаково:

$$\varphi_{,j} = -E_j.$$

Связь между компонентами вектора перемещений и компонентами тензора деформаций описывается дифференциальными соотношениями Коши:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}).$$

Для изотермических процессов в линейных электровязкоупругих средах справедливы следующие физические соотношения [26]:

– для вязкоупругой части объема V_2 :

$$\begin{aligned} s_{ij} &= 2\tilde{G}\varepsilon_{ij}, \quad \sigma = \tilde{B}\vartheta, \\ \tilde{G} &= G_{\text{Re}} + iG_{\text{Im}} = G_{\text{Re}}\left(1 + i\frac{G_{\text{Im}}}{G_{\text{Re}}}\right) = G_{\text{Re}}(1 + i\eta_g), \\ \tilde{B} &= B_{\text{Re}} + iB_{\text{Im}} = B_{\text{Re}}\left(1 + i\frac{B_{\text{Im}}}{B_{\text{Re}}}\right) = B_{\text{Re}}(1 + i\eta_b), \end{aligned}$$

где $\sigma = \sigma_{jj}/3$ — среднее напряжение; ϑ — объемная деформация; \tilde{G} , \tilde{B} — комплексные динамические модули сдвига и объемного сжатия, в общем случае являющиеся функциями частоты колебаний Ω ; η_g , η_b — соответствующие тангенсы углов механических потерь; значения действительных G_{Re} , B_{Re} и мнимых частей G_{Im} , B_{Im} комплексных модулей определяются следующим образом:

$$G_{\text{Re}} = G_0 \left(1 - \int_{-\infty}^t H(\tau) \cos(\Omega\tau) dt\right), \quad G_{\text{Im}} = G_0 \int_{-\infty}^t H(\tau) \sin(\Omega\tau) dt, \quad (3)$$

$$B_{\text{Re}} = B_0 \left(1 - \int_{-\infty}^t R(\tau) \cos(\Omega\tau) dt\right), \quad B_{\text{Im}} = B_0 \int_{-\infty}^t R(\tau) \sin(\Omega\tau) dt; \quad (4)$$

G_0 , B_0 — мгновенные сдвиговые и объемные модули; H , R — ядра релаксации;

– для электроупругой части объемом V_1 :

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}^p \varepsilon_{kl} - \beta_{ijk} E_k, \quad D_k = \beta_{ijk} \varepsilon_{ij} + e_{kl} E_l,$$

где C_{ijkl}^p – тензор упругих констант электроупругого элемента; β_{ijk} и e_{kl} – тензоры пьезоэлектрических и диэлектрических коэффициентов. Механические граничные условия имеют вид

$$u_i = u_i^0 \text{ на } S_u, \quad \sigma_{ij} n_j = p_i \text{ на } S_\sigma,$$

а электрические –

$$n_i D_i = -q_s \text{ на } S_q, \quad \varphi = \varphi_0 \text{ на } S_\varphi.$$

Потенциал φ определяется с точностью до аддитивной постоянной, поэтому принимается, что на участке поверхности S_φ задан нулевой потенциал, тогда φ_0 будет иметь смысл разности потенциалов.

Решение задачи о вынужденных установившихся колебаниях электровязкоупругого тела ищется в виде

$$\bar{u}(x, t) = \bar{u}_0(x) e^{-i\Omega t}, \quad x = (x_1, x_2, x_3),$$

а решение задачи о собственных колебаниях –

$$\bar{u}(x, t) = \bar{u}_0(x) e^{-i\omega t}, \quad x = (x_1, x_2, x_3).$$

Здесь $\bar{u}_0(x) = \{u_1(x), u_2(x), u_3(x), \varphi(x)\}$ – обобщенный вектор состояния, содержащий как компоненты механических перемещений u_1, u_2, u_3 , так и компоненту электрического потенциала φ ; ω – круговая комплексная собственная частота колебаний, $\omega = \omega_{\text{Re}} + i \omega_{\text{Im}}$, при этом ω_{Re} имеет смысл собственной частоты колебаний, а ω_{Im} характеризует скорость их затухания; Ω – круговая частота внешнего возбуждения.

Принимая, что собственные колебания вязкоупругого тела происходят с медленно меняющимися амплитудами и начальные возмущения не влияют на поведение системы в дальнейшем, можно определить компоненты комплексных динамических модулей $G_{\text{Re}}, G_{\text{Im}}, B_{\text{Re}}, B_{\text{Im}}$ из соотношений (3), (4) заменой частоты Ω на ω_{Re} .

В рамках данной работы принято, что составляющие комплексных динамических модулей вязкоупругого материала тела не зависят от частоты колебаний в пределах некоторого диапазона частот, ограниченного окрестностью рассматриваемой собственной или резонансной частоты.

2.1. Собственные колебания электровязкоупругого тела. Рассмотрим собственные колебания вязкоупругого тела, к поверхности которого присоединен пьезоэлемент, электрические граничные условия на котором соответствуют режиму холостого хода, т.е. одна электродированная поверхность пьезоэлемента заземлена (потенциал равен 0), а вторая электродированная поверхность свободна от электрических нагрузок. Такой объект представляет собой электровязкоупругое тело. При численной реализации задачи о собственных колебаниях электровязкоупругих тел методом конечных элементов

уравнение (2), описывающее собственные колебания, в матричной форме принимает вид

$$(-\omega^2[M] + [K_{\text{Re}}] + i[K_{\text{Im}}] + [K_p])\{\delta\} = \{0\}.$$

Здесь $[M]$ — матрица масс электровязкоупругого тела; $[K_p]$ — матрица жесткости упругого пьезоэлемента;

$$[K_{\text{Re}}] + i[K_{\text{Im}}] = (G_{\text{Re}}(1 + i\eta_g)[K_G] + B_{\text{Re}}(1 + i\eta_b)[K_B])$$

— матрица жесткости вязкоупругой части тела [27]; $[K_G]$, $[K_B]$ — объемная и сдвиговая компоненты матрицы жесткости; $\{\delta\} = \{u_1, u_2, u_3, \varphi\}^T$ — вектор узловых переменных.

Пусть тангенсы углов механических потерь сдвиговой и объемной частей комплексных динамических модулей равны между собой: $\eta_g = \eta_b = \eta$. Тогда выражение для матрицы жесткости вязкоупругой части тела можно записать в виде

$$[K_{\text{Re}}] + i[K_{\text{Im}}] = (1 + i\eta)(G_{\text{Re}}[K_G] + B_{\text{Re}}[K_B]) = (1 + i\eta)[K_\nu],$$

где $[K_\nu]$ — матрица жесткости вязкоупругого тела без учета вязкоупругих свойств (и только при вычислении элементов матрицы $[K_\nu]$ для того, чтобы получить уравнение собственных колебаний в виде, соответствующем принятому в пакете прикладных программ ANSYS, считаем, что $\eta_g = \eta_b = 0$).

Тогда окончательно уравнение собственных колебаний (2) в матричной форме может быть записано следующим образом:

$$(-\omega^2[M] + [K_p] + (1 + i\eta)[K_\nu])\{\delta\} = \{0\}. \quad (5)$$

В программном комплексе ANSYS уравнение собственных колебаний электровязкоупругого тела имеет вид

$$(-\omega^2[M] + [K] + i\omega[C])\{\delta\} = \{0\}.$$

Здесь $[K] = [K_p] + [K_\nu]$ — матрица жесткости составной конструкции, состоящей из основной конструкции, выполненной из вязкоупругого материала и упругого пьезоэлемента; $[K_p]$ — матрица жесткости упругого пьезоэлемента; $[K_\nu]$ — матрица жесткости вязкоупругого материала основной конструкции без учета вязкоупругих свойств. Вязкоупругие свойства материала конструкции в ANSYS [28] учитываются в матрице демпфирования $[C]$.

Принимая во внимание допущения о независимости компонент комплексных модулей от частоты, а также о равенстве тангенсов углов механических потерь для объемного и сдвигового модулей, выберем реализованный в ANSYS вариант, при котором $[C] = 2i\beta[K_\nu]$, $\beta = \eta_g/2 = \eta_b/2$, как наиболее близкий к рассматриваемому в работе варианту учета вязкоупругих свойств в задаче о собственных колебаниях.

Окончательно уравнение собственных колебаний рассматриваемого объекта в матричной форме в ANSYS имеет вид, аналогичный (5):

$$(-\omega^2[M] + [K_p] + (1 + 2i\beta)[K_\nu])\{\delta\} = \{0\}. \quad (6)$$

Решением уравнения (6) будут комплексные собственные частоты колебаний $\omega_i^{o/c}$ (собственные частоты колебаний в режиме холостого хода) и соответствующие им комплексные собственные векторы (собственные формы) колебаний $\{\delta\}_i = \{\delta^{o/c}\}_i$, где i — их количество, определяемое степенью дискретизации рассматриваемой системы.

Вектор собственной формы $\{\delta^{o/c}\}$ определяется с точностью до некоторой постоянной, следовательно, все компоненты вектора (включая потенциал на электродированной поверхности пьезоэлемента $V_{o/c}$) являются относительными величинами.

Домножим уравнение (6) слева на вектор, комплексно сопряженный с собственным вектором, соответствующим j -той форме колебаний ($i \neq j$):

$$-(\omega_i^{o/c})^2 \{\bar{\delta}^{o/c}\}_j^T [M] \{\delta^{o/c}\}_i + \{\bar{\delta}^{o/c}\}_j^T \{[K_p] + (1 + 2i\beta)[K_\nu]\} \{\delta^{o/c}\}_i = \{0\}.$$

С учетом ортогональности собственных форм колебаний и нормировки относительно матрицы масс $[M]$ имеем

$$\begin{aligned} \{\bar{\delta}^{o/c}\}_j^T [M] \{\delta^{o/c}\}_i &= \delta_{ij} \implies \\ \{\bar{\delta}^{o/c}\}_i^T [M] \{\delta^{o/c}\}_i &= 1. \end{aligned} \quad (7)$$

Отсюда следует, что

$$\{\bar{\delta}^{o/c}\}_j^T \{[K_p] + (1 + 2i\beta)[K_\nu]\} \{\delta^{o/c}\}_i = \delta_{ij} (\omega_i^{o/c})^2,$$

или

$$\{\bar{\delta}^{o/c}\}_i^T \{[K_p] + (1 + 2i\beta)[K_\nu]\} \{\delta^{o/c}\}_i = (\omega_i^{o/c})^2. \quad (8)$$

Представим получаемый в результате решения задачи о собственных колебаниях вектор искомых неизвестных $\{\delta^{o/c}\}$, содержащий компоненты вектора перемещений и электрический потенциал, следующим образом:

$$\{\delta^{o/c}\}_i = \{\delta_0\}_i + V_{o/c} \{\delta_1\}_i, \quad (9)$$

где $\{\delta_1\}_i$ — вектор, содержащий 1 на позиции, соответствующей значению потенциала на верхнем электроде пьезоэлемента, при этом все остальные компоненты вектора равны нулю; $\{\delta_0\}_i$ — вектор собственной формы колебаний конструкции с нулевым значением на позиции, соответствующей потенциалу на верхнем электроде пьезоэлемента. В дальнейшем индекс i при написании опустим, но будем иметь в виду, что рассматривается исследуемая i -тая форма колебаний.

Запишем уравнение (7) с учетом (9):

$$\begin{aligned} (\{\bar{\delta}_0\} + V_{o/c} \{\bar{\delta}_1\}^T) [M] (\{\delta_0\}_i + V_{o/c} \{\delta_1\}) &= \\ = \{\bar{\delta}_0\}^T [M] \{\delta_0\} + \{\bar{\delta}_0\}^T V_{o/c} [M] \{\delta_1\} + \\ + V_{o/c} \{\bar{\delta}_1\}^T [M] \{\delta_0\} + (V_{o/c})^2 \{\bar{\delta}_1\}^T [M] \{\delta_1\} &= 1. \end{aligned} \quad (10)$$

Заметим, что $[M]\{\delta_1\} = \{0\}$, $\{\bar{\delta}_1\}^T[M]\{\delta_0\} = 0$. Следовательно, уравнение (10) сводится к уравнению

$$\{\bar{\delta}_0\}_i^T [M]\{\delta_0\}_i = 1.$$

Перепишем левую часть уравнения (8) в следующем виде:

$$\begin{aligned} \{\bar{\delta}^{o/c}\}^T \{[K_p] + (1 + 2i\beta)[K_\nu]\} \{\delta^{o/c}\}_i &= \\ &= (\{\bar{\delta}_0\} + V_{o/c}\{\bar{\delta}_1\})^T [K_p](\{\delta_0\} + V_{o/c}\{\delta_1\}) + \\ &+ (\{\bar{\delta}_0\} + V_{o/c}\{\bar{\delta}_1\})^T (1 + 2i\beta)K_\nu(\{\delta_0\} + V_{o/c}\{\delta_1\}) = \\ &= \{\bar{\delta}_0\}^T [K_p]\{\delta_0\} + V_{o/c}\{\bar{\delta}_0\}^T [K_p]\{\delta_1\} + V_{o/c}\{\bar{\delta}_1\}^T [K_p]\{\delta_0\} + \\ &+ (V_{o/c})^2 \{\bar{\delta}_1\}^T [K_p]\{\delta_1\} + (1 + 2i\beta)\{\bar{\delta}_0\}^T \{[K_\nu]\{\delta_0\} + V_{o/c}\{\bar{\delta}_0\}^T [K_\nu]\{\delta_1\} + \\ &+ V_{o/c}\{\bar{\delta}_1\}^T [K_\nu]\{\delta_0\} + (V_{o/c})^2 \{\bar{\delta}_1\}^T [K_\nu]\{\delta_1\}\} \end{aligned}$$

и введем обозначения:

$$\begin{aligned} A_\nu &= \{\bar{\delta}_1\}^T [K_\nu]\{\delta_1\}, & A_p &= \{\bar{\delta}_1\}^T [K_p]\{\delta_1\}, \\ C_\nu &= \{\bar{\delta}_0\}^T [K_\nu]\{\delta_0\}, & C_p &= \{\bar{\delta}_0\}^T [K_p]\{\delta_0\}, \\ B_\nu &= \{\bar{\delta}_0\}^T [K_\nu]\{\delta_1\} + \{\bar{\delta}_1\}^T [K_\nu]\{\delta_0\}, & B_p &= \{\bar{\delta}_0\}^T [K_p]\{\delta_1\} + \{\bar{\delta}_1\}^T [K_p]\{\delta_0\}. \end{aligned} \quad (11)$$

Проанализировав полученные выражения, имеем $A_\nu = B_\nu = 0$, так как в матрице $[K_\nu]$, содержащей только компоненты, соответствующие узловым неизвестным, относящимся к конструкции без пьезоэлемента, строки, относящиеся к ненулевым значениям вектора $\{\delta_1\}$ — нулевые, а также в силу симметрии матриц имеем

$$\{\bar{\delta}_0\}^T [K_p]\{\delta_1\} = \{\bar{\delta}_1\}^T [K_p]\{\delta_0\} \implies 2\{\bar{\delta}_1\}^T [K_p]\{\delta_0\} = B_p.$$

С учетом введенных обозначений окончательно получим

$$A_p(V_{o/c})^2 + B_p V_{o/c} + C_p + (1 + 2i\beta)C_\nu - (\omega_i^{o/c})^2 = 0. \quad (12)$$

2.2. Вынужденные установившиеся колебания электровязкоупругих тел. В матричной форме разрешающая система уравнений для задачи о вынужденных установившихся колебаниях имеет вид

$$(-\Omega^2[M] + [K_p] + (1 + 2i\beta)[K_\nu])\{\delta\}_{df} = \{F\}, \quad (13)$$

где $\{\delta\}_{df}$ — вектор искомого решения, форма колебаний; $\{F\}$ — вектор внешней силовой нагрузки. Все матрицы, входящие в уравнение (13), такие же, как и в уравнении (6), но величины Ω и $\omega_{o/c}$ — разные, поскольку Ω — действительное число, а $\omega_{o/c}$ — комплексное.

Поскольку на каждой частоте вынужденных колебаний реализуется своя форма колебаний $\{\delta\}_{df}$, а резонанс появляется в том случае, когда частоты вынужденных и собственных колебаний совпадают (или близки), уместно предположение о том, что в режиме вынужденных колебаний в момент

резонанса форма колебаний конструкции совпадает с формой собственных колебаний конструкции или близка к ней. При этом решая задачу о свободных колебаниях, можно определить все возможные формы деформирования конструкции, которые будут наблюдаться при резонансах на различных частотах.

Таким образом, предположим, что искомый вектор неизвестных $\{\delta\}_{df}$ имеет вид $\{\delta\}_{df} = \alpha_{df}(\{\delta_0\} + V_{o/c}\{\delta_1\})$, т.е. пропорционален вектору собственных колебаний (9) с коэффициентом пропорциональности α_{df} .

Домножая уравнение (13) слева на собственный комплексно сопряженный вектор $(\{\bar{\delta}\}_0 + V_{o/c}\{\bar{\delta}\}_1)^\top$ и вводя обозначения (11), получим

$$A_p(V_{o/c})^2 + B_p V_{o/c} + [C_p + (1 + 2i\beta)C_\nu - (\Omega)^2] - \frac{Q}{\alpha_{df}} = 0, \quad (14)$$

где $Q = \{\bar{\delta}_0\}^\top \{F\}$. Отметим, что $\{\bar{\delta}_0\}^\top \{F\} = 0$. Параметр Q обозначает произведение величины узловых сил на величину смещения точек приложения этих усилий в направлении их действия, выбранных из собственного вектора. Например, если заданы три силы в узлах B_1, B_2, B_3 в направлениях $x, y, z - F_x, F_y, F_z$, то параметр Q определяется как $Q = F_x \cdot (U_{0x})_{B_1} + F_y \cdot (U_{0y})_{B_2} + F_z \cdot (U_{0z})_{B_3}$, где U_{0x}, U_{0y}, U_{0z} — смещения узлов B_1, B_2, B_3 в направлении осей x, y, z , выбранные из собственного вектора, соответствующего рассматриваемой моде колебаний.

Согласно (14), коэффициент пропорциональности α_{df} определяется по формуле

$$\alpha_{df} = \frac{Q}{A_p(V_{o/c})^2 + B_p V_{o/c} + [C_p + (1 + 2i\beta)C_\nu - \Omega^2]}.$$

С учетом (12) получим

$$\alpha_{df} = \frac{Q}{(\omega^{o/c})^2 - \Omega^2}.$$

Поскольку параметр α_{df} является в рассматриваемой задаче коэффициентом пропорциональности между вектором собственной формы колебаний и искомым вектором неизвестных, при i -том резонансе потенциал на электродированной поверхности пьезоэлемента V^* и смещение $(U)_A$ некоторой точки слежения A определяются по следующим формулам:

$$V^* = \alpha_{df} V_{o/c} = V_{o/c} \frac{Q}{(\omega^{o/c})^2 - \Omega^2}, \quad (15)$$

$$(U)_A = \alpha_{df} (U_0)_A = (U_0)_A \frac{Q}{(\omega^{o/c})^2 - \Omega^2}, \quad (16)$$

где $V_{o/c}, (U_0)_A$ — потенциал на электродированной поверхности пьезоэлемента и смещение некоторой точки A , за которой идет наблюдение, определенные из вектора собственной формы колебаний для рассматриваемой собственной частоты колебаний, близкой к исследуемому резонансу.

Частоту внешнего возбуждения, при которой отыскивается параметр α_{df} , определяем с учетом того, что при резонансе смещения точек тела максимальны, т.е. выполняется условие равенства нулю производной от смещения

по резонансной частоте вынужденных установившихся колебаний:

$$\frac{\partial(U)_A}{\partial\Omega} = (U_0)_A \frac{\partial\alpha_{df}}{\partial\Omega} \implies \Omega \approx \sqrt{(\omega_{\text{Re}}^{o/c})^2 - (\omega_{\text{Im}}^{o/c})^2}. \quad (17)$$

Анализируя полученные результаты, можно сделать вывод о том, что, используя полученные выражения (15) и (17), можно определить значение электрического потенциала, при котором достигается такая же величина смещения точек конструкции, как при приложении соответствующего механического усилия.

При этом не требуется решать задачу о вынужденных установившихся колебаниях для диапазона частот в окрестности некоторого резонанса. Достаточно решить задачу о собственных колебаниях исследуемой системы (конструкция с пьезоэлементом), определить спектр собственных частот колебаний и соответствующие им собственные векторы. Затем для рассматриваемой моды колебаний выбрать из соответствующего собственного вектора узловые неизвестные, соответствующие потенциалу на электродированной поверхности пьезоэлемента, смещению узла приложения вынуждающего усилия (далее этот узел будет обозначаться «точка B ») и узла, за которым ведется наблюдение (далее — «точка A »).

Следует отметить, что предложенный способ справедлив для резонансных частот колебаний, для которых формы в режиме вынужденных установившихся колебаний близки к собственным формам колебаний конструкции, реализующихся на собственных частотах, ближайших к резонансным.

3. Тестирование предложенного способа. Проверкой правильности предложенного подхода и полученных выражений (15) и (17) для определения величин смещения точки слежения и потенциала на электродированной поверхности пьезоэлемента, требуемого для достижения этого смещения, основанного на решении задачи о собственных колебаниях, может являться сравнение с аналогичными величинами в момент резонанса, снятыми с амплитудно-частотных характеристик (АЧХ) смещения и потенциала, полученными при решении задачи о вынужденных установившихся колебаниях системы.

В качестве объекта исследования рассмотрим консольно заземленную прямоугольную пластину со следующими размерами: длина $l_1 = 500$ мм, ширина $b_1 = 60$ мм, толщина $h_1 = 2$ мм (рис. 1). К поверхности пластины присоединен прямоугольный пьезоэлемент длиной $l_p = 50$ мм, шириной $b_p = 20$ мм и толщиной $h_p = 0.3$ мм. Верхняя и нижняя поверхности пьезоэлемента электродированы. Центр масс пьезоэлемента смещен на 55 мм от заделки и расположен на продольной оси симметрии пластины.

Материал пластины обладает вязкоупругими свойствами, которые описываются частотно-независимыми комплексными динамическими модулями сдвига и объемного сжатия, действительные и мнимые компоненты которых следующие: $G_{\text{Re}} = 6.71 \cdot 10^8$ Па, $B_{\text{Re}} = 3.33 \cdot 10^{10}$ Па, $G_{\text{Im}} = 6.71 \cdot 10^7$ Па, $B_{\text{Im}} = 3.33 \cdot 10^9$ Па. Удельная плотность материала $\rho_{el} = 1190$ кг/м³. Пьезоэлемент выполнен из пьезокерамики ЦТС-19, поляризованной в направлении оси z , с физико-механическими характеристиками в соответствии с приведенными в работе [25].

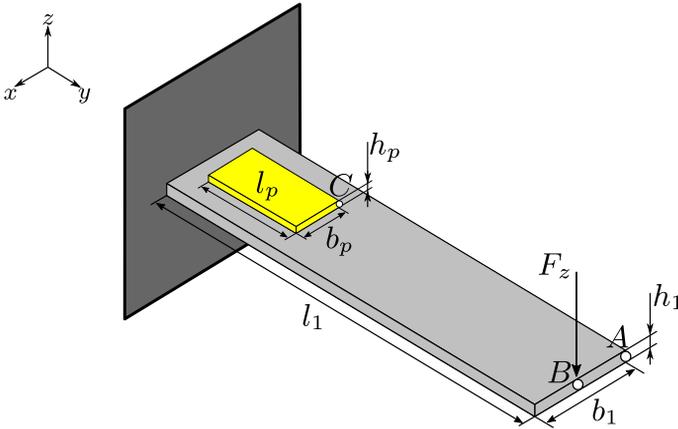


Рис. 1. Схема консольно защемленной пластинки с прикрепленным к ее поверхности пьезоэлементом

[Figure 1. A schematic diagram of a cantilever-clamped plate with a piezoelement attached to its surface]

Решим задачу о собственных колебаниях рассматриваемой системы и ограничимся первыми двумя собственными частотами колебаний:

$$\begin{aligned}\omega_1^{o/c} &= \omega_{\text{Re}1} + i\omega_{\text{Im}1} = 1.96 + i 0.19, \\ \omega_2^{o/c} &= \omega_{\text{Re}2} + i\omega_{\text{Im}2} = 12.01 + i 1.15,\end{aligned}$$

входящими в диапазон частот от 0 до 20 Гц, в котором реализуются две изгибные моды колебаний, определяемые двумя собственными векторами. Будем считать этот частотный диапазон заданным.

Далее для пластинки с пьезоэлементом рассмотрим задачу о вынужденных установившихся колебаниях, возбуждаемых с частотой Ω действием осевой гармонической силы $\vec{F} = \{0, 0, F_z\}$, приложенной к точке B (рис. 1). При значениях Ω в диапазоне от 1.9 до 2 Гц (окрестность первой собственной частоты) и от 12.0 до 12.2 Гц (окрестность второй собственной частоты) на АЧХ модуля смещения точки слежения A и АЧХ модуля потенциала V на электродированной поверхности пьезоэлемента реализуются два резонанса. При этом при колебаниях системы с частотой Ω , соответствующей окрестности первой собственной частоты колебаний, возбуждающая сила принималась $F_z = -0.02$ Н, а второй $F_z = -0.735$ Н. Различные значения возбуждающего усилия приняты для обеспечения сопоставимого уровня смещений точки слежения A на разных резонансных частотах.

На рис. 2 приведены АЧХ смещения $(U_z)_A$ точки A, а на рис. 3 — потенциала V в диапазоне частот первого и второго резонансов.

Далее определим все параметры, входящие в формулы (15) и (16). Отметим, что при задании нагрузки только в осевом направлении F_z параметр Q определяется по формуле $Q = \{\bar{\delta}_0\}^T \{F\} = F_z \{\bar{\delta}_0\}^T \{\delta_F\}$. Отметим, что $\{\delta_F\}$ — вектор, в котором отличны от нуля только те компоненты, которые соответствуют приложенной силе F_z . Произведение $\{\bar{\delta}_0\}^T \{\delta_F\}$ представляет собой величину смещения $(U_0)_B$ в направлении действия приложенной силы F_z , выбранного из вектора собственной формы колебаний. Таким образом,

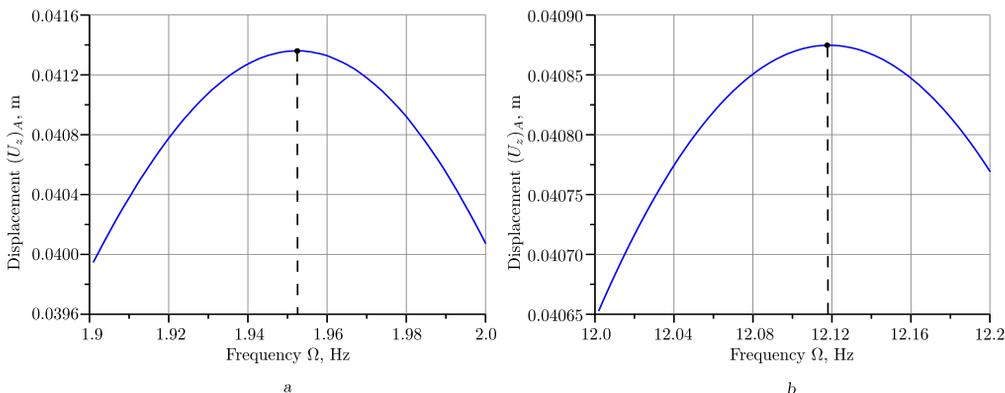


Рис. 2. Амплитудно-частотные характеристики смещения $(U_z)_A$ точки A в диапазоне частот первого (а) и второго (б) резонансов

[Figure 2. Frequency response of the displacement $(U_z)_A$ of the point A in the frequency range of the first (a) and second (b) resonances]

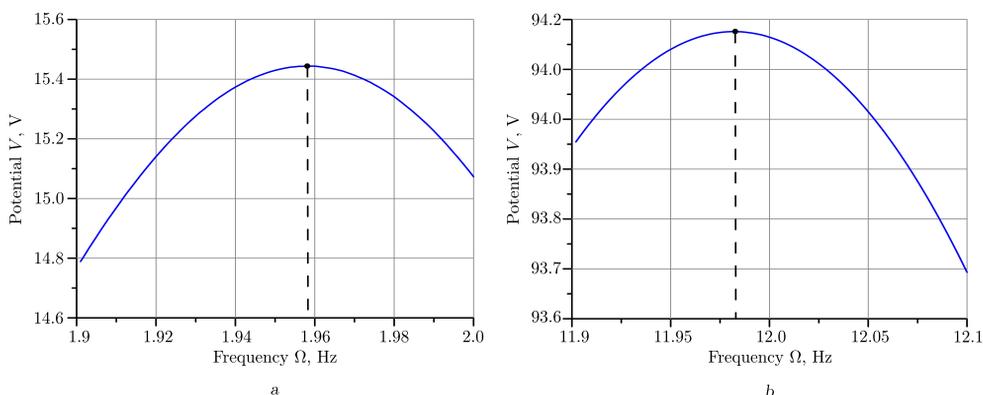


Рис. 3. Амплитудно-частотные характеристики потенциала V в диапазоне частот первого (а) и второго (б) резонансов

[Figure 3. Frequency response of the potential V in the frequency range of the first (a) and second (b) resonances]

$Q = \{\bar{\delta}_0\}^T F_z \{\delta_F\} = F_z (U_0)_B$. В соответствии с этим выражения (15), (16) примут следующий вид:

$$V^* = \alpha_{df} V_{o/c} = \frac{Q}{(\omega_{o/c})^2 - \Omega^2} V_{o/c} = F_z \frac{(U_0)_B}{(\omega_{o/c})^2 - \Omega^2} V_{o/c} = F_z \frac{(U_0)_B}{2\omega_{\text{Re}}\omega_{\text{Im}}} V_{o/c}, \quad (18)$$

$$\begin{aligned} (U_z)_A &= \alpha_{df} (U_{z0})_A = \frac{Q}{(\omega_{o/c})^2 - \Omega^2} (U_{z0})_A = \\ &= F_z \frac{(U_0)_B}{(\omega_{o/c})^2 - \Omega^2} (U_{z0})_A = F_z \frac{(U_0)_B}{2\omega_{\text{Re}}\omega_{\text{Im}}} (U_{z0})_A. \end{aligned} \quad (19)$$

В табл. 1 для рассматриваемых мод колебаний системы приведены все исходные данные (параметры, полученные на основе собственных векторов), результаты решения задачи о вынужденных установившихся колебаниях и соответствующие значения величин, полученных с использованием формул (18),

(19). Отметим, что данные, полученные из собственных векторов колебания, не имеют размерности, так как являются относительными величинами, имеющими смысл коэффициента пропорциональности между приложенным воздействием и откликом системы. Различие в значениях оцениваемых параметров при сравнении величин определялось по их модулям и не превышало 3.5 %.

Таблица 1

Сравнение результатов, полученных численным решением задач о собственных колебаниях и о вынужденных установившихся колебаниях, с полученными по формулам (15), (16) [Comparison of the results obtained by numerical solution of natural and forced steady-state vibration problems with those obtained by Eqs. (15), (16)]

Data for calculations	1st mode	2nd mode
Natural vibration		
Displacement $(U_0)_A$ (dimensionless quantity)	7.756	-7.6598
Displacement $(U_0)_B$ (dimensionless quantity)	7.756	-7.6617
Potential $V_{o/c}$ (dimensionless quantity)	2855.42	18144.32
Forced steady-state vibration		
Exciting force F_z , N	-0.02	-0.74
Displacement $(U_z)_A$ by Eq. (16), m	0.0413	-0.0395
Displacement $(U_z)_A$ by ANSYS, m	0.0413	-0.0409
Difference, %	0.0	3.42
Potential V^* by Eq. (15), V	15.21	93.615
Potential V^* by ANSYS, V	15.44	93.517
Difference, %	1.29	0.10

Полученные результаты демонстрируют, что на основе соотношений (15), (16) можно подобрать величины механической и электрической нагрузок, при которых изгибная деформация конструкции при вынужденных установившихся колебаниях будет иметь заданную величину. Другими словами, задавая величину коэффициента пропорциональности α_{df} как $\alpha_{df} = U_A/U_0$ (U_A — требуемая величина смещения точки слежения A ; U_0 — величина смещения этой точки, определяемого собственным вектором, получаемым при решении задачи о собственных колебаниях), можно найти значение силы или электрического потенциала, которые нужно приложить, чтобы получить требуемое смещение U_A .

4. Алгоритм определения величины потенциала, обеспечивающего демпфирование заданной моды колебаний. Применение пьезоэлемента в составе системы позволяет реализовать управление ее механическим поведением, основанное на использовании обратного пьезоэффекта, суть которого состоит в том, что если на электродированную поверхность пьезоэлемента подать электрический потенциал (электрическое нагружение), то пьезоэлемент деформируется, изменяя при этом полную деформацию всей системы.

Определим оптимальные величины потенциалов, которые необходимо подать на свободную электродированную поверхность пьезоэлемента для того, чтобы демпфировать первые две изгибные моды колебаний пластинки с пьезоэлементом, V^{opt} , на основе решения задачи о вынужденных установившихся колебаниях.

Для этого понадобятся резонансные величины смещения точки A при действии силы $\vec{F} = \{0, 0, F_z\}$, изменяющейся по гармоническому закону с частотой Ω при отсутствии потенциала на пьезоэлементе, которые приведены в табл. 1.

Решить поставленную задачу можно двумя способами.

Первый способ состоит в следующем. Необходимо получить решения серии задач о вынужденных установившихся колебаниях системы, находящейся под действием заданного силового возбуждения, дополнительно прикладывая к электродированной поверхности пьезоэлемента различный по величине потенциал из заранее неизвестного диапазона его изменения, фиксируя на АЧХ величину смещения точки слежения A в моменты резонанса $(U_z)_A$.

Минимальное по величине смещение этой серии расчетов будет определять искомую величину оптимального потенциала V^{opt} . В данных расчетах необходимо учитывать в математическом представлении потенциала его знак «+» или «-».

На рис. 4 приведено изменение величины смещения точки A в момент резонанса в зависимости от величины потенциала V^* , подаваемого на пьезоэлемент, с учетом его знака. Так, для демпфирования первой моды колебаний знак оптимального потенциала должен быть «-», а для демпфирования второй моды — «+».

Второй способ определения величины оптимального потенциала основан на результатах, представленных в работе [29], которые показали, что минимальная величина механического отклика системы при одновременном действии двух нагружающих факторов (механического — усилие и электрического — потенциал) наблюдается в случае, когда величина механического отклика системы при действии только механической нагрузки совпадает с величиной механического отклика при действии только электрической нагрузки, и эти нагрузки действуют в противофазе. Это условие можно записать в виде

$$(U_z)_A|_{F=F_z} = -(U_z)_A|_{V=V^{opt}}. \quad (20)$$

Чтобы удовлетворить данному условию, при поиске величины оптимального потенциала необходимо помимо решения задачи о вынужденных колебаниях системы под действием только заданного усилия (первая задача) также решить серию задач о вынужденных установившихся колебаниях системы под действием только приложенного к электродированной поверхности потенциала, изменяющегося в некотором заранее неизвестном диапазоне с учетом изменения знака (вторая задача), а затем определить то значение потенциала, при котором отклик в первой задаче равен отклику во второй задаче, но имеет противоположный знак.

Для поиска величины оптимального потенциала воспользуемся условием (20). Запишем смещение, которое в задаче о вынужденных установившихся колебаниях определяется по формуле (19) в виде

$$(U_z)_A = \alpha_{df}(U_0)_A = \frac{Q}{2\omega_{\text{Re}}\omega_{\text{Im}}}(U_0)_A. \quad (21)$$

Задача о колебаниях системы под действием потенциала, подаваемого на электродированную поверхность пьезоэлемента и изменяющегося по гармо-

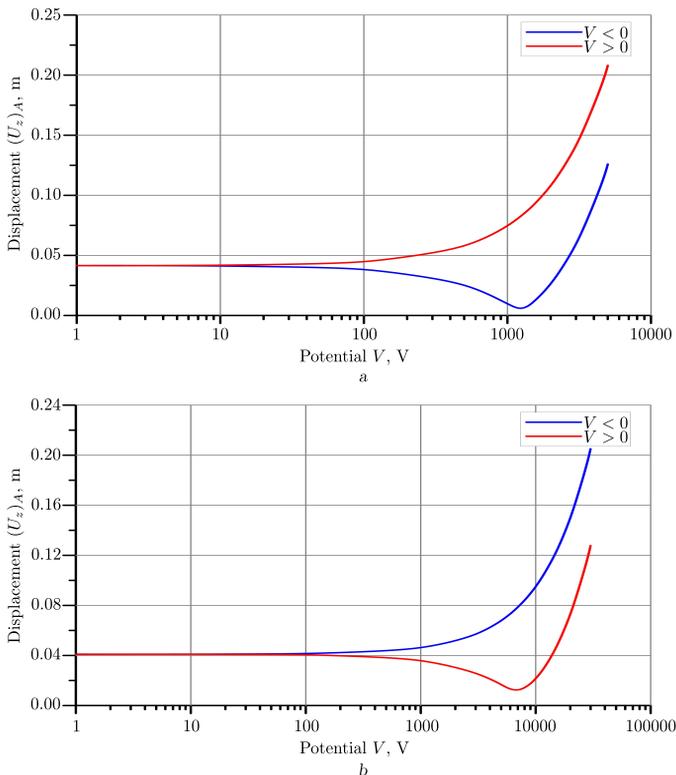


Рис. 4. Влияние потенциала V^* , подаваемого на электродированную поверхность пьезоэлемента, на смещение $|(U_z)_A|$ при первом (а) и втором (б) резонансах при вынужденных установившихся колебаниях системы

[Figure 4. The influence of the potential V^* supplied to the electroded surface of a piezoelectric element on the displacement $|(U_z)_A|$ at the first (a) and second (b) resonances during forced steady-state vibrations of the system]

ническому закону, относится к параметрическим колебаниям, поскольку изменение потенциала — это изменение внутреннего параметра системы. Обозначим его ξ .

Так как рассматривается линейная постановка задачи, выражение для смещения точки слежения A системы, совершающей параметрические колебания под действием заданного потенциала V_z , можно записать в виде

$$(U_z(\xi))_A|_{V^*=V_z} = V_z \gamma_u(\xi). \quad (22)$$

Здесь $\gamma_u(\xi) = (U_z(\xi))_A|_{V^*=1}$ — коэффициент пропорциональности, который имеет смысл резонансного смещения точки слежения при подаче на пьезоэлемент единичного потенциала в задаче параметрических колебаний системы.

В отличие от задачи о вынужденных установившихся колебаниях, в которой значения смещений точек системы определяются не только величиной возбуждающих усилий, но и местом их приложения и направлением действия, при параметрических колебаниях, вызванных действием потенциала, подаваемого на пьезоэлемент, параметр, определяющий смещения точек системы, только один — величина потенциала с учетом его знака.

Запишем уравнение (20) с учетом (21) и (22). Здесь величина потенциала на электродированной поверхности пьезоэлемента будет иметь смысл оптимальной величины V^{opt} для демпфирования рассматриваемой моды колебаний:

$$V^{opt} = -\frac{Q}{2\omega_{\text{Re}}\omega_{\text{Im}}} \frac{(U_0)_A}{\gamma_u(\xi)}. \quad (23)$$

Таким образом, алгоритм для получения величины потенциала, который необходимо подать на пьезоэлемент для демпфирования заданной моды колебаний, следующий.

1. Получить решение задачи модального анализа — собственную частоту и соответствующий ей вектор собственной формы колебаний, реализующиеся в заданном частотном диапазоне. Частотный диапазон задается из условия близости собственной частоты колебаний к резонансной частоте Ω исследуемой моды колебаний. Из этого вектора определяются $(U_0)_A$, V_{qc} , а также параметр Q .
2. Решить задачу параметрических колебаний, вызываемых приложением единичного потенциала к пьезоэлементу $V^* = 1$, затем на АЧХ точки слежения найти величину ее смещения $\gamma_u(\xi) = (U_z(\xi))_A|_{V^*=1}$ в момент исследуемого резонанса. Величины $\gamma_u(\xi)$ можно определять сразу для нескольких резонансных пиков (аналогично тому, что при решении модальной задачи можно сразу определить несколько собственных частот колебаний).
3. По формуле (23) рассчитать оптимальное значение подаваемого на пьезоэлемент потенциала V^{opt} , позволяющего демпфировать колебания рассматриваемой моды от действия возбуждающих усилий, реализующейся на резонансной частоте, близкой к собственной частоте колебаний.

Отметим, что если рассматриваются вынужденные установившиеся колебания конструкции в некотором диапазоне частот внешнего воздействия и при этом положение возбуждающей силы не меняется, то для определения оптимальных величин потенциала, который должен быть подан на пьезоэлемент для демпфирования различных возникающих в данном случае мод колебаний, никаких других задач, кроме задачи модального анализа для определения всех собственных частот и собственных векторов колебаний, входящих в заданный диапазон частот внешнего воздействия, а также задачи параметрических колебаний от действия единичного потенциала в заданном диапазоне частот внешнего воздействия, решать не требуется.

Для подтверждения предлагаемого алгоритма проведем сравнение полученных на его основе величин оптимального потенциала с результатами решения серии задач о вынужденных установившихся колебаниях рассматриваемой пластинки с пьезоэлементом, полученными по первому способу.

Поскольку в данном случае возбуждение колебаний осуществляется единственной силой $\vec{F} = \{0, 0, F_z\}$, выражение (23) запишется в виде

$$V_z = -F_z \frac{(U_0)_B}{2\omega_{\text{Re}}\omega_{\text{Im}}} \frac{(U_0)_A}{\gamma_u(\xi)}. \quad (24)$$

Результаты решения задачи параметрических колебаний и полученные при решении серии задач о вынужденных установившихся колебаниях и при

Исходные данные и результаты определения оптимального потенциала для демпфирования первых двух мод колебаний системы [Initial data and results of determining the optimal potential for damping the first two modes of system vibrations]

Таблица 2

Data for calculations	1st mode	2nd mode
Parametric vibration		
$\gamma_{\xi_{0i}} = U _{V^*=1}$	$3.317 \cdot 10^{-5} + i 3.741 \cdot 10^{-6}$	$5.486 \cdot 10^{-6} - i 6.719 \cdot 10^{-7}$
Forced steady-state vibration		
Exciting force F_z , N	-0.02	-0.74
Displacement $ (U_z)A _{V^{opt}}$ by Eq. (21), m	$5.964 \cdot 10^{-3}$	$1.261 \cdot 10^{-2}$
Displacement $ (U_z)A _{V^{opt}}$ by ANSYS, m	$5.962 \cdot 10^{-3}$	$1.245 \cdot 10^{-2}$
Difference, %	0.03	1.27
Potential $ V^{opt} $ by Eq. (23), kV	-1.237	7.150
Potential $ V^{opt} $ by ANSYS, kV	-1.230	6.900
Difference, %	0.08	3.62

помощи формулы (23) данные для первых двух изгибных мод колебаний пластинки с пьезоэлементом приведены в табл. 2. Также в табл. 2 приведены результаты сравнения смещений точки A , полученные решением задачи о вынужденных установившихся колебаниях системы под действием указанных сил при подаче на пьезоэлемент потенциала, найденного при решении серии задач по первому способу, и потенциала, найденного по предлагаемому алгоритму по формуле (24).

При погрешности определения величины оптимального потенциала, необходимого для демпфирования второго резонанса, не более 4 %, погрешность определения величины смещения составляет не более 1.5 %.

Заключение. При решении задач, связанных с поиском резонансных значений физических величин при вынужденных установившихся колебаниях, приходится многократно повторять вычислительные процедуры, затраты на которые существенно возрастают при решении связанных задач электровязкоупругости, с целью реализации активного управления динамическим поведением такого рода конструкций.

В рамках данной работы предложен способ, основанный на математическом преобразовании конечно-элементных матричных уравнений собственных и вынужденных колебаний электровязкоупругих тел и позволивший получить аналитические выражения, которые связывают величины, являющиеся решением задачи о вынужденных колебаниях, с аналогичными величинами в собственных векторах, являющихся решением задачи о собственных колебаниях. К таким величинам относятся смещения узлов и потенциал на электродированной поверхности пьезоэлемента.

Использование найденных зависимостей позволило определить величину электрического потенциала на электродированной поверхности пьезоэлемента, генерируемого при деформировании его на рассматриваемой моде при вынужденных установившихся колебаниях. При этом не требуется решать задачу о вынужденных установившихся колебаниях для диапазона частот в окрестности исследуемой резонансной частоты. Достаточно решить задачу о собственных колебаниях исследуемой системы (конструкция с пьезоэлементом), определить спектр собственных частот колебаний и соответствующие им собственные векторы.

Данные соотношения подтверждены численно с использованием пакета прикладных программ конечно-элементного анализа ANSYS на примере колебаний консольно заземленной вязкоупругой пластинки с прикрепленным к ее поверхности пьезоэлементом. Продемонстрирована эффективность применения полученных аналитических выражений, которые могут являться основой для разработки алгоритмов решения задач активного управления динамическим поведением электровязкоупругих конструкций.

Конкурирующие интересы. Конфликты интересов отсутствуют.

Авторский вклад и ответственность. Все авторы принимали участие в разработке концепции статьи и в написании рукописи. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

Финансирование. Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (тема № АААА–А19–119012290100–8 «Механика интеллектуальных конструкций»).

Библиографический список

1. Park G., Sausse M., Inman D. J., Main J. A. Vibration testing and finite element analysis of inflatable structures // *AIAA J.*, 2003. vol. 41, no. 8. pp. 1556–1566. DOI: <https://doi.org/10.2514/2.2107>.
2. Nye T. W., Manning R. A., Qassim K. Performance of active vibration control technology: the ACTEX flight experiments // *Smart Mater. Struct.*, 1999. vol. 8, no. 6. pp. 767–780. DOI: <https://doi.org/10.1088/0964-1726/8/6/306>.
3. Denoyer K. K., Erwin R. S., Ninneman R. R. Advanced smart structures flight experiments for precision spacecraft // *Acta Astronautica*, 2000. vol. 47, no. 2–9. pp. 389–397. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0094-5765\(00\)00080-1](https://doi.org/10.1016/S0094-5765(00)00080-1).
4. Makhtoumi M. Active vibration control of launch vehicle on satellite using piezoelectric stack actuator // *J. Space Technol.*, 2018. vol. 8, no. 1. pp. 1–11, arXiv:1903.07396 [physics.space-ph].
5. Kajiwara I., Uchiyama T., Arisaka T. Vibration control of hard disk drive with smart structure technology for improving servo performance / *Motion and Vibration Control*. Dordrecht: Springer, 2009. pp. 165–176. DOI: https://doi.org/10.1007/978-1-4020-9438-5_17.
6. Tani J., Takagi T., Qiu J. Intelligent material systems: Application of functional materials // *Appl. Mech. Rev.*, 1998. vol. 51, no. 8. pp. 505–521. DOI: <https://doi.org/10.1115/1.3099019>.
7. Sobczyk M., Wiesenhütter S., Noennig J. R., Wallmersperger T. Smart materials in architecture for actuator and sensor applications: A review // *J. Intelligent Mater. Syst. Struct.*, 2022. vol. 33, no. 3. pp. 379–399. DOI: <https://doi.org/10.1177/1045389X211027954>.
8. Chen C., Sharafi A., Sun J. A high density piezoelectric energy harvesting device from highway traffic – Design analysis and laboratory validation // *Applied Energy*, 2020. vol. 269, 115073. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.apenergy.2020.115073>.
9. Yang K., Zhu J., Wu M., Zhang W. Integrated optimization of actuators and structural topology of piezoelectric composite structures for static shape control // *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 2018. vol. 334. pp. 440–469. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cma.2018.01.021>.
10. Ayres J. W., Rogers C. A., Chaudhry Z. A. Qualitative health monitoring of a steel bridge joint via piezoelectric actuator/sensor patches // *Proc SPIE*, 2019. vol. 2719, Smart Structures and Materials 1996: Smart Systems for Bridges, Structures, and Highways (22 April 1996). pp. 123–131. DOI: <https://doi.org/10.1117/12.238831>.
11. Marakakis K., Tairidis G. K., Koutsianitis P., Stavroulakis G. E. Shunt piezoelectric systems for noise and vibration control: A Review // *Front. Built Environ.*, 2019. vol. 5, 64. DOI: <https://doi.org/10.3389/fbuil.2019.00064>.
12. Moheimani S. O. R., Vautier B. J. G. Resonant control of structural vibration using charge-driven piezoelectric actuators // *IEEE Trans. Contr. Sys. Technol.*, 2005. T. 13, № 6. C. 1021–1035. DOI: <https://doi.org/10.1109/TCST.2005.857407>.
13. Alkhatib R., Golnaraghi M. F. Active structural vibration control: A Review // *The Shock and Vibration Digest*, 2003. vol. 35, no. 5. pp. 367–383. DOI: <https://doi.org/10.1177/05831024030355002>.
14. Fisco N. R., Adeli H. Smart structures: Part I — Active and semi-active control // *Scientia Iranica*, 2011. vol. 18, no. 3. pp. 275–284. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.scient.2011.05.034>.
15. Fuller C. R., Elliot S. J., Nelson P. A. *Active Control of Vibration*. London: Academic Press, 1997. xii+332 pp. DOI: <https://doi.org/10.1016/B978-0-12-269440-0.X5000-6>.
16. Preumont A. *Vibration Control of Active Structures: An Introduction*. Dordrecht: Springer, 2011. xx+436 pp. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-94-007-2033-6>.

17. Aktas K. G., Esen I. State-space modeling and active vibration control of smart flexible cantilever beam with the use of finite element method // *Eng. Technol. Appl. Sci. Res.*, 2020. vol. 10, no. 6. pp. 6549–6556. DOI: <https://doi.org/10.48084/etasr.3949>.
18. Preumont A. Active damping, vibration isolation, and shape control of space structures: A tutorial // *Actuators*, 2016. vol. 12, no. 3. pp. 122–147. DOI: <https://doi.org/10.3390/act12030122>.
19. Ding B., Li Y., Xiao X., Tang Y. Optimized PID tracking control for piezoelectric actuators based on the Bouc–Wen model / *2016 IEEE International Conference on Robotics and Biomimetics (ROBIO)*. Qingdao, China. pp. 1576–1581. DOI: <https://doi.org/10.1109/ROBIO.2016.7866552>.
20. Sareban M. Evaluation of Three Common Algorithms for Structure Active Control // *Eng. Technol. Appl. Sci. Res.*, 2017. vol. 7, no. 3. pp. 1638–1646. DOI: <https://doi.org/10.48084/etasr.1150>.
21. Płaczek M. The study of a control signal's phase shift influence on the efficiency of a system for active vibration damping based on MFC piezoelectric transducers // *MATEC Web Conf.*, 2020. vol. 318, 01005. DOI: <https://doi.org/10.1051/mateconf/202031801005>.
22. Fisco N. R., Adeli H. Smart structures: Part II — Hybrid control systems and control strategies // *Scientia Iranica*, 2011. vol. 18, no. 3. pp. 285–295. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.scient.2011.05.035>.
23. Kumar R., Singh S. P., Chandrawat H. N. MIMO adaptive vibration control of smart structures with quickly varying parameters: Neural networks vs classical control approach // *J. Sound Vibration*, 2023. vol. 307, no. 3-5. pp. 639–661. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2007.06.028>.
24. Matveenko V. P., Iurlova N. A., Oshmarin D. A., Sevodina N. V. Analysis of dissipative properties of electro-viscoelastic bodies with shunting circuits on the basis of numerical modelling of natural vibrations // *Acta Mech.*, 2023. vol. 234, no. 1. pp. 261–276. EDN: GMVYZG. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00707-022-03193-8>.
25. Матвеевко В. П., Ошмарин Д. А., Севодина Н. В., Юрлова Н. А. Задача о собственных колебаниях электровязкоупругих тел с внешними электрическими цепями и конечно-элементные соотношения для ее численной реализации // *Вычислительная механика сплошных сред*, 2016. Т. 9, № 4. С. 476–485. EDN: XDDTUB. DOI: <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2016.9.4.40>.
26. Kligman E. P., Matveenko V. P. Vibration problem of viscoelastic solids as applied to optimization of dissipative properties of constructions // *J. Vibration Control*, 1997. vol. 3, no. 1. pp. 87–102. EDN: LEKWMP. DOI: <https://doi.org/10.1177/107754639700300107>.
27. Клигман Е. П., Матвеевко В. П., Севодина Н. В. Определение собственных колебаний кусочно-однородных вязкоупругих тел с использованием пакета ANSYS // *Вычислительная механика сплошных сред*, 2010. Т. 3, № 2. С. 46–54. EDN: NTJWSX. DOI: <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2010.3.2.16>.
28. ANSYS, *Release 2022 R1 Documentation*. Canonsburg, 2022.
29. Юрлова Н. А., Ошмарин Д. А., Севодина Н. В. Численный анализ вынужденных установившихся колебаний электровязкоупругой системы при совместном воздействии механических и электрических нагрузок // *Вестн. Пермского нац. иссл. политехн. ун-та. Механика*, 2022. № 4. С. 67–79. EDN: VSTMA. DOI: <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2022.4.07>.

MSC: 74S05

Method for determining the parameters of an electrical signal for controlling forced steady-state vibrations of electroviscoelastic bodies. Mathematical relations

*N. V. Sevodina, N. A. Iurlova, D. A. Oshmarin*Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS,
1, Academician Korolev str., Perm, 614013, Russian Federation.

Abstract

This paper presents a method for determining the magnitude of the electric potential generated on the electroded surface of a piezoelectric element, which is part of a piece-wise homogeneous electroviscoelastic structure, necessary for the formation of a control action when actively controlling its dynamic behavior in the mode of forced steady-state vibrations in order to minimize the amplitude of vibrations at the selected resonant frequency. By mathematical transformations of the equations describing the intrinsic and forced vibrations of such electroviscoelastic bodies, the relations expressing the relationship between the values of the displacement of the nodes and the electric potential on the electroded surface of the piezoelectric element are derived. These formulas allow us to determine the magnitude of the potential that must be applied to the piezoelectric element in order to best dampen a given vibration mode of the structure. As a result of numerical experiments obtained by using the ANSYS finite element analysis software package, and the usability of the results of solving the problem of natural vibrations to find the optimal value of the potential characterizing the control electrical action aimed at damping the specified modes in the mode of forced steady-state vibrations is confirmed. The effectiveness of the obtained analytical dependencies is demonstrated by the example of a cantilevered viscoelastic plate with a piezoelectric element located on its surface. The proposed

Mechanics of Solids

Research Article

© Authors, 2023

© Samara State Technical University, 2023 (Compilation, Design, and Layout)

The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Please cite this article in press as:

Sevodina N. V., Iurlova N. A., Oshmarin D. A. Method for determining the parameters of an electrical signal for controlling forced steady-state vibrations of electroviscoelastic bodies. Mathematical relations, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2023, vol. 27, no. 4, pp. 679–703. EDN: GHEHRB. DOI: 10.14498/vsgtu2025 (In Russian).

Authors' Details:

Natalya V. Sevodina  <https://orcid.org/0000-0001-9374-7135>Cand. Techn. Sci.; Researcher; Dept. of Complex Problems of Deformable Solids Mechanics;
e-mail: natsev@icmm.ru*Nataliya A. Iurlova*  <https://orcid.org/0000-0003-3497-0358>Cand. Phys. & Math. Sci., Associate Professor; Senior Researcher; e-mail: yurlova@icmm.ru*Dmitrii A. Oshmarin*  <https://orcid.org/0000-0002-9898-4823>Cand. Techn. Sci.; Researcher; Dept. of Complex Problems of Deformable Solids Mechanics;
e-mail: oshmarin@icmm.ru

approach makes it possible to significantly reduce time and resource costs of the mathematical modeling of active control of forced steady-state oscillations of electroviscoelastic bodies, to determine the requirements for the hardware implementation of actuators and controllers of the control unit of such smart-systems.

Keywords: electroviscoelasticity, piezoelectric element, forced steady-state vibrations, natural vibrations, vibration control, displacements, electric potential.

Received: 25th May, 2023 / Revised: 17th November, 2023 /

Accepted: 13th December, 2023 / First online: 27th December, 2023

Competing interests. Authors have no competing interests.

Authors' contributions and responsibilities. All authors participated in developing the concept of the article and in writing the manuscript. The authors take full responsibility for submitting the final manuscript for publication. The final version of the manuscript was approved by all authors.

Funding. The work was carried out within the framework of the state assignment of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (topic no. AAAA19-119012290100-8 “Mechanics of intelligent structures”).

References

1. Park G., Sausse M., Inman D. J., Main J. A. Vibration testing and finite element analysis of inflatable structures, *AIAA J.*, 2003, vol. 41, no. 8, pp. 1556–1566. DOI: <https://doi.org/10.2514/2.2107>.
2. Nye T. W., Manning R. A., Qassim K. Performance of active vibration control technology: the ACTEX flight experiments, *Smart Mater. Struct.*, 1999, vol. 8, no. 6, pp. 767–780. DOI: <https://doi.org/10.1088/0964-1726/8/6/306>.
3. Denoyer K. K., Erwin R. S., Ninneman R. R. Advanced smart structures flight experiments for precision spacecraft, *Acta Astronautica*, 2000, vol. 47, no. 2–9, pp. 389–397. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0094-5765\(00\)00080-1](https://doi.org/10.1016/S0094-5765(00)00080-1).
4. Makhtoumi M. Active vibration control of launch vehicle on satellite using piezoelectric stack actuator, *J. Space Technol.*, 2018, vol. 8, no. 1, pp. 1–11, arXiv: 1903.07396 [physics.space-ph].
5. Kajiwara I., Uchiyama T., Arisaka T. Vibration control of hard disk drive with smart structure technology for improving servo performance, In: *Motion and Vibration Control*. Dordrecht, Springer, 2009, pp. 165–176. DOI: https://doi.org/10.1007/978-1-4020-9438-5_17.
6. Tani J., Takagi T., Qiu J. Intelligent material systems: Application of functional materials, *Appl. Mech. Rev.*, 1998, vol. 51, no. 8, pp. 505–521. DOI: <https://doi.org/10.1115/1.3099019>.
7. Sobczyk M., Wiesenhütter S., Noennig J. R., Wallmersperger T. Smart materials in architecture for actuator and sensor applications: A review, *J. Intelligent Mater. Syst. Struct.*, 2022, vol. 33, no. 3, pp. 379–399. DOI: <https://doi.org/10.1177/1045389X211027954>.
8. Chen C., Sharafi A., Sun J. A high density piezoelectric energy harvesting device from highway traffic – Design analysis and laboratory validation, *Applied Energy*, 2020, vol. 269, 115073. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.apenergy.2020.115073>.
9. Yang K., Zhu J., Wu M., Zhang W. Integrated optimization of actuators and structural topology of piezoelectric composite structures for static shape control, *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 2018, vol. 334, pp. 440–469. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cma.2018.01.021>.

10. Ayres J. W., Rogers C. A., Chaudhry Z. A. Qualitative health monitoring of a steel bridge joint via piezoelectric actuator/sensor patches, *Proc SPIE*, 2019, vol. 2719, Smart Structures and Materials 1996: Smart Systems for Bridges, Structures, and Highways (22 April 1996), pp. 123–131. DOI: <https://doi.org/10.1117/12.238831>.
11. Marakakis K., Tairidis G. K., Koutsianitis P., Stavroulakis G. E. Shunt piezoelectric systems for noise and vibration control: A Review, *Front. Built Environ.*, 2019, vol. 5, 64. DOI: <https://doi.org/10.3389/fbuil.2019.00064>.
12. Moheimani S. O. R., Vautier B. J. G. Resonant control of structural vibration using charge-driven piezoelectric actuators, *IEEE Trans. Contr. Sys. Technol.*, 2005, T. 13, № 6, C. 1021–1035. DOI: <https://doi.org/10.1109/TCST.2005.857407>.
13. Alkhatib R., Golnaraghi M. F. Active structural vibration control: A Review, *The Shock and Vibration Digest*, 2003, vol. 35, no. 5, pp. 367–383. DOI: <https://doi.org/10.1177/05831024030355002>.
14. Fisco N. R., Adeli H. Smart structures: Part I — Active and semi-active control, *Scientia Iranica*, 2011, vol. 18, no. 3, pp. 275–284. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.scient.2011.05.034>.
15. Fuller C. R., Elliot S. J., Nelson P. A. *Active Control of Vibration*. London, Academic Press, 1997, xii+332 pp. DOI: <https://doi.org/10.1016/B978-0-12-269440-0.X5000-6>.
16. Preumont A. *Vibration Control of Active Structures: An Introduction*. Dordrecht, Springer, 2011, xx+436 pp. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-94-007-2033-6>.
17. Aktas K. G., Esen I. State-space modeling and active vibration control of smart flexible cantilever beam with the use of finite element method, *Eng. Technol. Appl. Sci. Res.*, 2020, vol. 10, no. 6, pp. 6549–6556. DOI: <https://doi.org/10.48084/etasr.3949>.
18. Preumont A. Active damping, vibration isolation, and shape control of space structures: A tutorial, *Actuators*, 2016, vol. 12, no. 3, pp. 122–147. DOI: <https://doi.org/10.3390/act12030122>.
19. Ding B., Li Y., Xiao X., Tang Y. Optimized PID tracking control for piezoelectric actuators based on the Bouc–Wen model, In: *2016 IEEE International Conference on Robotics and Biomimetics (ROBIO)*. Qingdao, China, pp. 1576–1581. DOI: <https://doi.org/10.1109/ROBIO.2016.7866552>.
20. Sareban M. Evaluation of Three Common Algorithms for Structure Active Control, *Eng. Technol. Appl. Sci. Res.*, 2017, vol. 7, no. 3, pp. 1638–1646. DOI: <https://doi.org/10.48084/etasr.1150>.
21. Płaczek M. The study of a control signal’s phase shift influence on the efficiency of a system for active vibration damping based on MFC piezoelectric transducers, *MATEC Web Conf.*, 2020, vol. 318, 01005. DOI: <https://doi.org/10.1051/mateconf/202031801005>.
22. Fisco N. R., Adeli H. Smart structures: Part II — Hybrid control systems and control strategies, *Scientia Iranica*, 2011, vol. 18, no. 3, pp. 285–295. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.scient.2011.05.035>.
23. Kumar R., Singh S. P., Chandrawat H. N. MIMO adaptive vibration control of smart structures with quickly varying parameters: Neural networks vs classical control approach, *J. Sound Vibration*, 2023, vol. 307, no. 3-5, pp. 639–661. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2007.06.028>.
24. Matveenko V. P., Iurlova N. A., Oshmarin D. A., Sevodina N. V. Analysis of dissipative properties of electro-viscoelastic bodies with shunting circuits on the basis of numerical modelling of natural vibrations, *Acta Mech.*, 2023, vol. 234, no. 1, pp. 261–276. EDN: GMVYZG. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00707-022-03193-8>.
25. Matveenko V. P., Oshmarin D. A., Sevodina N. V., Iurlova N. A. Problem on natural vibrations of electroviscoelastic bodies with external electric circuits and finite element relations for its implementation, *Computational Continuum Mechanics*, 2016, vol. 9, no. 4, pp. 476–485 (In Russian). EDN: XDDTUB. DOI: <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2016.9.4.40>.

26. Kligman E. P., Matveenko V. P. Vibration problem of viscoelastic solids as applied to optimization of dissipative properties of constructions, *J. Vibration Control*, 1997, vol. 3, no. 1, pp. 87–102. EDN: LEKWMP. DOI: <https://doi.org/10.1177/107754639700300107>.
27. Kligman E. P., Matveenko V. P., Sevodina N. V. Determination of natural oscillations of piece-wise homogeneous viscoelastic bodies using the ANSYS package, *Computational Continuum Mechanics*, 2010, vol. 3, no. 2, pp. 46–54 (In Russian). EDN: NTJWSX. DOI: <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2010.3.2.16>.
28. ANSYS, *Release 2022 R1 Documentation*. Canonsburg, 2022.
29. Iurlova N. A., Oshmarin D. A., Sevodina N. V. A numerical analysis of forced steady-state vibrations of an electro-viscoelastic system in case of a joint impact of electrical and mechanical loads, *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2022, no. 4, pp. 67–79 (In Russian). EDN: VSTMA. DOI: <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2022.4.07>.



УДК 539.3

Моделирование нелинейных крутильных колебаний усеченного конического стержня

Х. Х. Худойназаров

Самаркандский государственный университет имени Шарофа Рашидова,
Узбекистан, 140104, Самарканд, Университетский бульвар, 15.

Аннотация

Разработана нелинейная математическая модель нестационарных крутильных колебаний усеченного конического стержня из упругого материала с учетом нелинейной связи между напряжениями и деформациями. Выведено нелинейное уравнение для крутильных колебаний усеченного конического стержня относительно главной части крутильного перемещения оси симметрии стержня. Показано, что полученное уравнение нелинейных крутильных колебаний усеченного конического упругого стержня в частных случаях совпадает с известными уравнениями, полученными другими авторами. С помощью полученного уравнения можно однозначно определить напряженно-деформированное состояние произвольного сечения конического стержня по пространственной координате и времени. На основе построенной модели численно решена задача о нестационарных крутильных колебаниях усеченного конического стержня при действии торцевой и поверхностной динамических нагрузок в условиях, когда широкий конец стержня жестко заделан, а узкий является свободным.

Ключевые слова: конический стержень, математическая модель, колебания, нелинейные уравнения, физическая нелинейность.

Получение: 2 марта 2023 г. / Исправление: 18 августа 2023 г. /

Принятие: 18 сентября 2023 г. / Публикация онлайн: 13 декабря 2023 г.

Механика деформируемого твердого тела

Научная статья

© Коллектив авторов, 2023

© СамГТУ, 2023 (составление, дизайн, макет)

📄 ©📄 Контент публикуется на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

Образец для цитирования

Худойназаров Х. Х. Моделирование нелинейных крутильных колебаний усеченного конического стержня // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2023. Т. 27, № 4. С. 704–722. EDN: ICMOQO. DOI: 10.14498/vsgtu2002.

Сведения об авторе

Хайрулла Худойназарович Худойназаров ✉️ <https://orcid.org/0000-0001-8994-9738>
доктор технических наук, профессор; заведующий кафедрой; каф. теоретической и прикладной механики; e-mail: kh.khudoyn@gmail.com

Введение. Конические элементы, совершающие нестационарные колебания, встречаются в рамках крепления двигателей, в колоннах строительных сооружений, поддерживающих перекрытиях, на которых установлены неуравновешенные агрегаты, при устройстве подвесов и т.д. [1]. Они также являются важными конструктивными элементами аэрокосмических аппаратов и находят широкое применение в различных приложениях, начиная от лучевых куполов и заканчивая космическими ракетами-носителями с большими топливными баками [2]. Можно указать еще целый ряд областей техники и строительства, где широко применяются конические оболочечные конструкции, которые обуславливают исследование их вибрационных характеристик из соображения обеспечения безопасности и устойчивости этих систем [4]. В частности конические участки встречаются на деталях гребных валов и валах мощных приводов, подверженных крутильным колебаниям. Обычно расчет крутильных колебаний вала с переменным сечением осуществляют приближенно, при этом вал заменяется системой элементов с конечным числом степеней свободы [3], что приводит к сложным и громоздким вычислениям.

В связи с этим разработка математических моделей, позволяющих более точно осуществлять расчеты крутильных колебаний усеченных конических оболочек и стержней, в частности валов конической формы, является актуальной задачей.

Отметим, что в случае малости деформаций оболочек и стержней расчет и анализ их напряженно-деформированного состояния проводится на основе линейной теории оболочек и стержней [5,6]. В некоторых случаях практического приложения колеблющихся систем для достижения большей точности возникает необходимость использования нелинейной теории колебания.

В научной литературе геометрически и физически нелинейным колебаниям конических элементов уделено намного меньше внимания, нежели цилиндрическим оболочкам, пластинкам и стержням [7,8]. В этом плане в статье [9] исследовано распределение напряжений в тонкой пластинке при ее нелинейных колебаниях. Учитывались два типа нелинейности — геометрическая и физическая. Физическая нелинейность предполагалась малой, соответствующее уравнение для деформаций решалось методом малого параметра. Перемещения при нелинейных колебаниях раскладывались по собственным формам линейных колебаний. Следует подчеркнуть, что вращающиеся оболочки или стержни в форме усеченного конуса — важные конструкции, которые широко применяются во многих областях техники [10].

При решении нелинейных задач важную роль играют разрешающие уравнения состояния [11]. В работе [12] С. В. Бакушевым рассматривается построение разрешающих уравнений в перемещениях в цилиндрической системе координат для плоской деформации сплошных сред, механическое поведение которых описывается математическими моделями, в которых физические соотношения имеют форму произвольных перекрестных зависимостей между первыми инвариантами тензоров и вторыми инвариантами девиаторов напряжений и деформаций. В качестве примеров рассмотрены две модели: деформационная теория пластичности сыпучей среды и деформационная теория пластичности бетона. Полученные уравнения могут быть использованы при

определении напряженно-деформированного состояния физически нелинейных массивных тел со сложной геометрией.

В статьях [13, 14] разработаны математические модели нестационарных крутильных колебаний круговых цилиндрических [13] и усеченных конических [14] упругих оболочек с учетом нелинейных соотношений между напряжениями и деформациями. Выведены уточненные физически нелинейные уравнения крутильных колебаний таких оболочек из однородного и изотропного материала, из которых в частном случае, можно получить некоторые известные уравнения колебания классического типа. Предложены алгоритмы, позволяющие по полю искомых функций однозначно определить напряженно-деформированное состояние произвольного сечения рассматриваемых систем по пространственной координате и времени. Проанализированы некоторые предельные и частные случаи, следующие из полученных результатов.

Отметим также, что выбор уравнений колебаний на основе конкретных физико-механических свойств материала является одной из основных проблем в исследовании динамического поведения оболочек и стержней. Поэтому во многих случаях исследователям приходится разработать надлежащие уравнения колебания. Естественно, при этом используются различные методы вывода уравнений колебания [5]. К одному из таких методов относится метод использования общих решений в преобразованиях трехмерных задач теории упругости [6]. В частности, этот метод в линейной постановке был успешно применен к задачам динамики пластин [15] и круговых цилиндрических оболочек и стержней в работах [16, 17]. Сущность метода сводится к изучению построенных решений при различных типах внешних воздействий и выявлению условий, при выполнении которых смещения или их «главные части» удовлетворяют несложным уравнениям колебания, и нахождению алгоритма, позволяющего по полю этих «главных частей» вычислять приближенные значения полей смещений и напряжений в любом сечении для произвольного момента времени [18].

В настоящей работе на базе методов статей [13, 14] получены физически нелинейные уравнения для крутильных колебаний оболочек и стержней, разработан алгоритм определения их напряженно-деформированных состояний, а также проведен анализ предельных и частных случаев полученных результатов.

1. Математическая постановка задачи и линеаризация уравнения движения. Рассмотрим задачу о физически нелинейных крутильных колебаниях усеченного конического стержня с углом наклона φ образующей конуса к оси симметрии (угол атаки) конуса (рис. 1). Материал стержня полагается упругим, однородным и изотропным, а его длина — неограниченной. Стержень отнесен к цилиндрической системе координат (r, θ, z) , начало которой помещено на левом конце стержня, а ось Oz направлена по оси симметрии стержня. Радиус граничной поверхности стержня меняется по заданному закону в зависимости от продольной координаты z , т.е. $r = r_0 + kz$, где $k = \operatorname{tg} \varphi$, $r_0 = \operatorname{const}$ — радиус левого торца стержня при $z = 0$.

При выводе уравнений колебания считается, что стержень как коническое трехмерное тело строго подчиняется математической теории упругости и описывается уравнениями ее движения. Известно, что при решении осесимметричных задач о нестационарных колебаниях круговых цилиндрических

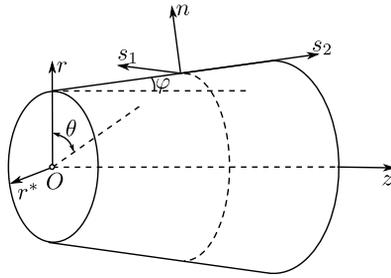


Рис. 1. Схема усеченного конического стержня

[Figure 1. Diagram of a truncated conical rod]

и конических тел их крутильные колебания можно рассматривать отдельно от задачи об их продольно-радиальных колебаний. В случае крутильных колебаний усеченного конического стержня из-за симметричности задачи относительно оси симметрии отличными от нуля будут компоненты напряжения $\tau_{r\theta}$, $\tau_{z\theta}$ и соответствующие компоненты деформации $\gamma_{r\theta}$, $\gamma_{z\theta}$. Отсюда следует, что крутильные колебания усеченного конического стержня описываются уравнением

$$\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{z\theta}}{\partial z} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} = \rho \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}, \quad 0 \leq r < \infty, \quad (1)$$

где V — перемещения точек стержня.

Для задания граничных условий на конической поверхности стержня в произвольной точке его поверхности введем ортогональную систему координат (n, s_1, s_2) (см. рис. 1). Здесь n — нормаль к поверхности оболочки; s_1, s_2 — ортогональные к нормали координаты в плоскости образующей стержня, проведенной к его поверхности в выбранной точке. При этом s_1 направлена в окружном направлении, а s_2 — в продольном. Касательные напряжения τ_{ns_1} и τ_{ns_2} в точках конической поверхности в ортогональной системе координат (n, s_1, s_2) выражаются через компоненты напряжений в цилиндрической системе координат (r, θ, z) . Считается [6, 7], что крутильные колебания стержня возбуждаются внешним динамическим усилием $f_{ns_1}(z, t)$, действующим на поверхности стержня, т.е. граничное условие задачи в системе координат (n, s_1, s_2) при $r = r_0 + kz$ имеет вид

$$[\tau_{r\theta}(r, z, t) - k\tau_{z\theta}(r, z, t)]_{r=r_0+kz} = \Delta_0 f_{r\theta}(z, t), \quad \text{где } \Delta_0 = \sqrt{1+k^2}. \quad (2)$$

При этом считается, что другая составляющая внешней нагрузки равна нулю, т.е. $f_{z\theta}(z, t) = 0$. Начальные условия принимаются нулевыми.

Будем считать, что зависимости Коши между компонентами тензора деформации и вектора перемещения линейны, т.е. перемещения малы, а связь между напряжениями и деформациями является нелинейной. Принимая нелинейную связь в виде нелинейного закона упругости, для случая крутильных колебаний стержня можно записать [19]:

$$\tau_{r\theta} = \mu\chi(\psi_0^2)\gamma_{r\theta}, \quad \tau_{z\theta} = \mu\chi(\psi_0^2)\gamma_{z\theta}, \quad (3)$$

где μ и $\chi(\psi_0^2)$ — коэффициент и функция сдвига соответственно; ψ_0 — интенсивность деформации сдвига, которая в данном случае будет иметь вид

$$\psi_0^2 = \frac{2}{3}(\gamma_{r\theta}^2 + \gamma_{z\theta}^2). \quad (4)$$

Раскладывая функцию сдвига $\chi(\psi_0^2)$ в степенной ряд по степеням ψ_0^2 и ограничиваясь первыми двумя членами разложения, получим, что

$$\chi(\psi_0^2) \cong 1 + \gamma_2 \psi_0^2. \quad (5)$$

Коэффициент γ_2 при этом является величиной порядка $[\psi_0^2]^{-1}$, поэтому $\gamma_2[\psi_0^2]^{-1}$ — величина порядка единицы [14]. Выражения (3) с учетом (4), (5) принимают вид

$$\tau_{r\theta} = \mu \left[\gamma_{r\theta} + \frac{2}{3} \gamma_2 (\gamma_{r\theta}^3 + \gamma_{z\theta}^2 \gamma_{r\theta}) \right], \quad \tau_{z\theta} = \mu \left[\gamma_{z\theta} + \frac{2}{3} \gamma_2 (\gamma_{r\theta}^2 \gamma_{z\theta} + \gamma_{z\theta}^3) \right]. \quad (6)$$

При этом соотношения Коши связи между компонентами деформаций и перемещения линейны:

$$\gamma_{r\theta} = \frac{\partial V}{\partial r} - \frac{V}{r}, \quad \gamma_{\theta z} = \frac{\partial V}{\partial z}. \quad (7)$$

Таким образом, задача о нестационарных, физически нелинейных крутильных колебаниях усеченного конического стержня приводится к интегрированию уравнений движения (1) при нелинейном законе упругости (6) с динамическими граничными (2) и нулевыми начальными условиями.

Подстановка выражений (6) и (7) в уравнение движения (1) дает следующее дифференциальное уравнение:

$$\Delta V + \gamma_2 \left[\psi_0^2 \Delta V + \gamma_{r\theta} \frac{\partial \psi_0^2}{\partial r} + \gamma_{z\theta} \frac{\partial \psi_0^2}{\partial z} \right] = \frac{1}{b^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2},$$

где

$$\Delta = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} + \frac{d^2}{dz^2}, \quad b^2 = \frac{\mu}{\rho}.$$

Преобразовывая выражение, заключенное в квадратные скобки в последнем уравнении, с помощью формул (4) и (7) и пренебрегая при этом членами порядка $O(V^4)$ и выше, получим нелинейное уравнение

$$\Delta V + \frac{2}{3} \gamma_2 F(V) = \frac{1}{b^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}, \quad (8)$$

где

$$F(V) = \frac{3V}{r^2} \left(\frac{\partial V}{\partial r} \right)^2 - \frac{3V^2}{r^3} \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{V^3}{r^4} + \frac{V}{r^2} \left(\frac{\partial V}{\partial z} \right)^2 - \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} \left(\frac{\partial V}{\partial z} \right)^2 + \frac{V^2}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \left(\frac{\partial V}{\partial z} \right)^2.$$

Для решения полученного уравнения применим метод малого параметра. Разложение перемещения в степенные ряды по степеням малого параметра α ($0 < \alpha \ll 1$) и пренебрежение членами, содержащими квадрат малого параметра и выше (с учетом малости перемещения и деформаций), дает возможность представить его в виде

$$V(r, z, t) = V^{(0)}(r, z, t) + \alpha V^{(1)}(r, z, t). \quad (9)$$

Подстановка (9) в (8) с последующим пренебрежением членами, содержащими малый параметр α во второй и более степенях, приводит к линейным уравнениям

$$\Delta V^{(0)} = \frac{1}{b^2} \frac{\partial^2 V^{(0)}}{\partial t^2}, \quad (10)$$

$$\Delta V^{(1)} + \frac{2}{3} \gamma_2 F(V^{(0)}) = \frac{1}{b^2} \frac{\partial^2 V^{(1)}}{\partial t^2}. \quad (11)$$

При этом неоднородная часть уравнения (11) зависит только от функции $V^{(0)}$, которая определяется как решение однородного уравнения (10).

2. Вывод уравнения крутильных колебаний. Для решения уравнений (10), (11) функцию внешнего воздействия $f_{ns_1}(z, t)$ в граничных условиях (2) будем считать принадлежащими к классу функций, представимых в виде [20]

$$f_{ns_1}(z, t) = \int_0^\infty \left. \begin{matrix} \sin qz \\ -\cos qz \end{matrix} \right\} dq \int_{(l)} \bar{f}_{ns_1}(k, p) e^{pt} dp, \quad (12)$$

где (l) — разомкнутый контур в плоскости p , прилегающий справа к участку $(-i\omega_0, i\omega_0)$ мнимой оси. Кроме того, функции $\bar{f}_{ns_1}(k, p)$ пренебрежимо малы вне области $q \leq q_0$, $|\operatorname{Im} p| \leq \omega_0$, где q_0, ω_0 — некоторые числа.

Представляя перемещение $V^{(0)}$ в виде, аналогичном (12) (обозначим при этом его изображение через $\bar{V}^{(0)}$), и подставляя полученное в уравнение (10), получим обыкновенное дифференциальное уравнение Бесселя

$$\Delta_\beta \bar{V}^{(0)} = 0, \quad \Delta_\beta = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \left(\beta^2 + \frac{1}{r^2} \right), \quad \beta^2 = \frac{p^2}{b^2} + q^2, \quad b^2 = \frac{\mu}{\rho}, \quad (13)$$

общее решение которого с учетом ограниченности решений при $r = 0$ имеет вид

$$\bar{V}^{(0)} = C I_1(\beta r), \quad (14)$$

где C — постоянная интегрирования; $I_1(\cdot)$ — модифицированная функция Бесселя.

Воспользуемся стандартным разложением в степенной ряд функции Бесселя в общем решении (14). Ограничимся нулевым приближением в разложении и введем новую искомую функцию по формуле [17]

$$\bar{V}_0^{(0)}(q, p) = C\beta/2.$$

При этом преобразованное перемещение $\bar{V}^{(0)}$ легко выражается через введенную новую функцию $\bar{V}_0^{(0)}(q, p)$:

$$\bar{V}^{(0)}(r, q, p) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \beta^{2n} \bar{V}_0^{(0)}(q, p) \frac{(r/2)^{2n+1}}{n!(n+1)!}. \quad (15)$$

Вводя оператор [17]

$$\lambda^n(\zeta) = \int_0^{\infty} \left. \begin{array}{l} \sin qz \\ -\cos qz \end{array} \right\} dq \int_{(l)} \beta^{2n} \bar{\zeta}(q, p) e^{pt} dp, \quad (16)$$

из выражения (15) для оригинала $V^{(0)}$ получаем решение уравнения (10):

$$V^{(0)}(r, z, t) = \left(r + \frac{r^3}{8} \lambda \right) V_0^{(0)}(z, t) + \frac{r^5}{96} \lambda^2 V_0^{(0)}(z, t) + \dots, \quad (17)$$

где $V_0^{(0)}(z, t)$ — оригинал функции $\bar{V}_0^{(0)}(q, p)$.

Для решения неоднородного уравнения (11) выразим функцию $F(V^{(0)})$, где $V^{(0)}$ определяется по (17). Для этого ограничимся первыми двумя членами в разложении (17) и подставим их в выражение (8) для $F(V^{(0)})$. Далее, пренебрегая членами выше третьего порядка малости и подставляя полученное выражение в (11), будем иметь

$$\Delta V^{(1)} + \frac{2}{3} \gamma_2 [r f_1(V_0^{(0)}) + r^3 f_2(V_0^{(0)})] = 0, \quad (18)$$

где f_1, f_2 — функции главной части перемещения $V_0^{(0)}(z, t)$.

Представляя функции $V^{(1)}(r, z, t)$, $f_1(z, t)$ и $f_2(z, t)$ в виде, аналогичном (12), и подставляя их в уравнение (18), будем иметь следующее преобразованное уравнение:

$$\Delta_{\beta} \bar{V}^{(1)} + \frac{2}{3} \gamma_2 [r \bar{f}_1(q, p) + r^3 \bar{f}_2(q, p)] = 0, \quad (19)$$

где $\bar{V}^{(1)}(r, q, p)$, $\bar{f}_1(q, p)$, $\bar{f}_2(q, p)$ — изображения функций $V^{(1)}(r, z, t)$, $f_1(z, t)$ и $f_2(z, t)$ соответственно.

Для нахождения решения неоднородного уравнения (19) применим метод Лагранжа (метод вариации произвольных постоянных). Общее решение соответствующего однородного уравнения $\Delta_{\beta} \bar{V}^{(1)} = 0$ имеет вид

$$\bar{V}^{(1)} = D_1 I_1(\beta r) + D_2 K_1(\beta r).$$

Определяя методом Лагранжа выражения для D_1 и D_2 и ограничиваясь в них первыми членами степенных рядов Бесселя, получим приближенное частное решение неоднородного уравнения (19) в виде

$$\bar{V}^{(1)}(r, q, p) = -\frac{r^3}{12} \gamma_2 \left[\bar{f}_1(q, p) + \frac{r^2}{3} \bar{f}_2(q, p) \right]. \quad (20)$$

Применяя к обеим частям решения (20) преобразования вида (12) для функций $\bar{V}^{(1)}(r, q, p)$, $\bar{f}_1(q, p)$ и $\bar{f}_2(q, p)$, получим решение уравнения (18) в виде

$$V^{(1)} = -\frac{r^3}{12}\gamma_2\left\{\frac{9}{4}V^{(0)}\lambda V_0^{(0)} + \frac{r^2}{3}\left[\frac{\partial^2 V_0^{(0)}}{\partial t^2} - \frac{3}{4}\lambda V_0^{(0)}\right]\left(\frac{\partial V_0^{(0)}}{\partial z}\right)^2\right\}. \quad (21)$$

Подставляя (21) и (17) в (9), получим

$$V = \left(r + \frac{r^3}{8}\lambda\right)V_0^{(0)} + \frac{r^5}{96}\lambda^2 V_0^{(0)} - \alpha\gamma_2\left\{\frac{3r^3}{16}V_0\lambda V_0^{(0)} + \frac{r^5}{36}\left[\frac{\partial^2 V_0^{(0)}}{\partial z^2} - \frac{3}{4}\lambda V_0^{(0)}\right]\left(\frac{\partial V_0^{(0)}}{\partial z}\right)^2\right\}. \quad (22)$$

Удовлетворяя (22) граничному условию (2) и пренебрегая членами с производными выше четвертого порядка, получим следующее уравнение:

$$\begin{aligned} & -\frac{4k}{r}\frac{\partial V_0^{(0)}}{\partial z} + \lambda V_0^{(0)} - \frac{kr}{2}\lambda\frac{\partial V_0^{(0)}}{\partial z} + \frac{r^2}{6}\lambda^2 V_0^{(0)} - \\ & -\alpha\gamma_2\left[3V_0^{(0)}\lambda V_0^{(0)} - \frac{3r}{4}k\left(\frac{\partial V_0^{(0)}}{\partial z}\lambda V_0^{(0)} + V_0^{(0)}\lambda\frac{\partial V_0^{(0)}}{\partial z}\right) + \right. \\ & + \frac{8r^2}{9}\left(\frac{\partial^2 V_0^{(0)}}{\partial z^2} - \frac{3}{4}\lambda V_0^{(0)}\right)\left(\frac{\partial V_0^{(0)}}{\partial z}\right)^2\left. + \frac{8kr}{3}\gamma_2\left(\frac{\partial V_0^{(0)}}{\partial z}\right)^3 + \right. \\ & \left. + \frac{2r^2}{3}\gamma_2\left(\frac{\partial V_0^{(0)}}{\partial z}\right)^2\lambda V_0^{(0)} = \frac{4(1+k^2)}{\mu r^2}f_{r\theta}(z, t), \quad (23) \end{aligned}$$

где $r = r_0 + kz$.

Из представления (13) для β^2 следует, что введенные выше операторы λ^n (см. формулу (16)) в переменных (z, t) принимают вид [21]

$$\lambda^n = \left[\frac{1}{b^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]^n, \quad b = \sqrt{\mu/\rho}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (24)$$

Отсюда следует, что $\lambda, \lambda^2, \dots$ — дифференциальные операторы, а $\lambda^0 \equiv 1$.

Уравнение (23) в соответствии с выражением (24) для операторов λ^n является дифференциальным уравнением относительно главной части $V_0^{(0)}$ крутильного перемещения усеченного конического стержня $V^{(0)}$. Оно представляет собой общее уравнение физически нелинейных крутильных колебаний усеченного конического упругого стержня, которое зависит от операторов λ^n и главной части крутильного перемещения точек оси симметрии стержня. Это уравнение в своей правой части правильно учитывает силы, действующие на поверхность стержня.

Наряду с уравнением колебания аналогично выводятся формулы для ненулевых напряжений, выражающие их через искомую функцию $V_0^{(0)}$:

$$\begin{aligned} \sigma_{ns_1}(r, z, t) &= \frac{1}{\Delta_0}[\tau_{r\theta}(r, z, t) - k\tau_{z\theta}(r, z, t)], \\ \sigma_{s_1s_2}(r, z, t) &= \frac{1}{\Delta_0}[\tau_{z\theta}(r, z, t) - k\tau_{r\theta}(r, z, t)], \end{aligned} \quad (25)$$

где

$$\begin{aligned} \tau_{r\theta} &= \mu L \left\{ \frac{r^2}{4} \lambda V_0^{(0)} + \frac{r^4}{24} \lambda^2 V_0^{(0)} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{r^2}{4} \alpha \gamma_2 \left[\frac{3}{2} V_0 \lambda V_0^{(0)} + \frac{4r^4}{9} \left(\frac{\partial^2 V_0^{(0)}}{\partial z^2} - \frac{3}{4} \lambda V_0^{(0)} \right) \left(\frac{\partial V_0^{(0)}}{\partial z} \right)^2 \right] \right\}, \\ \tau_{z\theta} &= \mu L \left[\left(r + \frac{r^3}{8} \lambda \right) \frac{\partial V_0^{(0)}}{\partial z} - \frac{3r^3}{16} \alpha \gamma_2 \left(\frac{\partial V_0^{(0)}}{\partial z} \lambda V_0^{(0)} + V_0 \lambda \frac{\partial V_0^{(0)}}{\partial z} \right) \right], \\ L &= 1 + \frac{2}{3} \gamma_2 r^2 \left(\frac{\partial V_0}{\partial z} \right)^2 + \frac{1}{6} \gamma_2 r^4 \lambda \left(\frac{\partial V_0}{\partial z} \right)^2. \end{aligned} \quad (26)$$

При этом крутильное перемещение вычисляется по формуле (22).

Формулы для перемещения (22) и напряжений (25) дают возможность определить напряженно-деформированное состояние усеченного конического стержня в ее произвольном сечении по пространственным координатам и времени.

3. Частные случаи уравнения колебаний. Полученные результаты допускают некоторые предельные и частные случаи, следующие из выведенных уравнений физически нелинейных колебаний усеченного конического стержня и соответствующих формул для определения напряженно-деформированного состояния его произвольной точки.

Пренебрегая в уравнении (23) слагаемыми, заключенными в квадратные скобки, как малыми величинами¹ более высокого порядка по сравнению с остальными членами уравнения, и учитывая, что $r = r_0 + kz$, получим

$$\begin{aligned} \lambda V_0^{(0)} + \frac{(r_0 + kz)^2}{6} \lambda^2 V_0^{(0)} - k \left(\frac{4}{r_0 + kz} \frac{\partial V_0^{(0)}}{\partial z} + \frac{1}{2} \lambda \frac{\partial V_0^{(0)}}{\partial z} \right) + \\ + \frac{8k(r_0 + kz)^2}{3} \gamma_2 \left(\frac{\partial V_0^{(0)}}{\partial z} \right)^3 + \frac{2(r_0 + kz)^2}{3} \gamma_2 \left(\frac{\partial V_0^{(0)}}{\partial z} \right)^2 \lambda V_0^{(0)} = \\ = \frac{4\Delta_0}{\mu(r_0 + kz)^2} f_{r\theta}(z, t). \end{aligned} \quad (27)$$

В этом случае формулы для напряжений $\tau_{r\theta}(r, z, t)$, $\tau_{z\theta}(r, z, t)$ принимают вид

$$\begin{aligned} \tau_{r\theta} &= \mu L \left[\frac{(r_0 + kz)^2}{4} \lambda V_0^{(0)} + \frac{(r_0 + kz)^4}{24} \lambda^2 V_0^{(0)} \right], \\ \tau_{z\theta} &= \mu L \left(r_0 + kz + \frac{(r_0 + kz)^3}{8} \lambda \right) \frac{\partial V_0^{(0)}}{\partial z}, \end{aligned}$$

а выражение дифференциального оператора L будет по-прежнему определяться формулой (26).

Рассмотрим некоторые частные случаи, следующие из уравнения физически нелинейных крутильных колебаний усеченного конического стержня (27).

¹За счет произведений малого параметра и главной части крутильного перемещения и его производных.

3.1. Допустим, что угол атаки конуса φ равен нулю, следовательно, и $k = 0$. Тогда уравнение (27) принимает вид

$$\lambda V_0^{(0)} + \frac{r_0^2}{6} \lambda^2 V_0^{(0)} + \frac{2r_0^2}{3} \gamma_2 \left(\frac{\partial V_0^{(0)}}{\partial z} \right)^2 \lambda V_0^{(0)} = \frac{4\Delta_0}{\mu r_0^2} f_{r\theta}(z, t). \quad (28)$$

В этом случае формулы для напряжений принимают вид

$$\begin{aligned} \sigma_{ns_1}(r, z, t) = \tau_{r\theta}(r, z, t) &= \mu L \left[\frac{r_0^2}{4} \lambda V_0^{(0)}(z, t) + \frac{r_0^4}{24} \lambda^2 V_0^{(0)}(z, t) \right], \\ \sigma_{s_1 s_2}(r, z, t) = \tau_{z\theta}(r, z, t) &= \mu L \left(r_0 + \frac{r_0^3}{8} \lambda \right) \frac{\partial V_0^{(0)}(z, t)}{\partial z}. \end{aligned}$$

Уравнение (28) является уравнением физически нелинейных крутильных колебаний кругового цилиндрического стержня с радиусом поперечного сечения, равным r_0 . В соответствии с видом (24) операторов λ^n оно является дифференциальным уравнением четвертого порядка в частных производных. При этом легко показывается, что слагаемые с производными четвертого порядка учитывают эффекты инерции вращения и деформации поперечного сдвига [21]. Если в нем пренебречь членами с производными четвертого порядка, то это уравнение в точности совпадет с уравнением, рассмотренным в работе [13].

Для сравнения с другими известными уравнениями крутильных колебаний стержней перепишем уравнение (28) в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{1}{b^2} \frac{\partial^2 V_0^{(0)}}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 V_0^{(0)}}{\partial z^2} + \frac{2r_0^2}{3b^2} \gamma_2 \frac{\partial^2 V_0^{(0)}}{\partial t^2} \left(\frac{\partial V_0^{(0)}}{\partial z} \right)^2 - \\ - \frac{2r_0^2}{3} \gamma_2 \frac{\partial^2 V_0^{(0)}}{\partial z^2} \left(\frac{\partial V_0^{(0)}}{\partial z} \right)^2 = \frac{4}{\mu r_0^2} f_{r\theta}(z, t). \end{aligned} \quad (29)$$

Уравнение (29) переходит в уравнение крутильных колебаний кругового цилиндрического стержня, предложенное профессором И. Г. Филипповым [20], если в нем пренебречь третьим членом, и переходит в классическое уравнение Г. Каудерера [19], если в нем еще занулить правую часть.

3.2. Рассмотрим линейный случай, т.е. $\gamma_2 = 0$. Тогда уравнение (27) принимает вид

$$\begin{aligned} \lambda V_0^{(0)} + \frac{(r_0 + kz)^2}{6} \lambda^2 V_0^{(0)} - k \left(\frac{4}{r_0 + kz} \frac{\partial V_0^{(0)}}{\partial z} + \frac{1}{2} \lambda \frac{\partial V_0^{(0)}}{\partial z} \right) = \\ = \frac{4\Delta_0}{\mu (r_0 + kz)^2} f_{r\theta}(z, t). \end{aligned} \quad (30)$$

Уравнение (30) является уточненным уравнением нестационарных крутильных колебаний усеченного конического стержня с учетом инерции вращения и деформации поперечного сдвига. Из выражения крутильного перемещения (17) нетрудно заключить, что $V_0^{(0)}$ есть величина безразмерная и она может

быть принята за угол поворота. С учетом этого обстоятельства и в частном случае равенства нулю правой части и отсутствия второго и четвертого слагаемых в левой части после некоторых несложных преобразований это уравнение в точности переходит в уравнение С. П. Беридзе [3].

3.3. Пусть $k = 0$ и $\gamma_2 = 0$ одновременно. Тогда из (27) следует уравнение крутильных колебаний стержня кругового поперечного сечения:

$$\frac{1}{b^2} \frac{\partial^2 V_0^{(0)}}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 V_0^{(0)}}{\partial z^2} + \frac{r_0^2}{6} \left[\frac{1}{b^4} \frac{\partial^4 V_0^{(0)}}{\partial t^4} - 2 \frac{1}{b^4} \frac{\partial^4 V_0^{(0)}}{\partial t^2 \partial z^2} + \frac{\partial^4 V_0^{(0)}}{\partial z^4} \right] = \frac{4}{\mu r_0^2} f_{r\theta}(z, t).$$

Это уравнение учитывает инерцию вращения и деформацию поперечного сдвига [21].

4. Физически нелинейные крутильные колебания конического стержня. В качестве примера рассмотрим задачу о нестационарных физически нелинейных крутильных колебаниях усеченного конического стержня с одним свободным и другим жестко заделанным концами. Колебания стержня возбуждаются поверхностной нагрузкой постоянной интенсивности $f_{r\theta}(z, t) = \text{const}$ и заданным перемещением $g(t)$ на свободном конце. В начальный момент времени стержень находится в покое и начальная скорость колебаний равна нулю. Требуется определить напряженно-деформированное состояние поверхностных точек стержня в зависимости от продольной координаты и времени.

Для решения поставленной прикладной задачи применим уравнение (27) без учета инерции вращения и поперечного сдвига, т.е. ограничиваясь производными не выше третьего порядка и пренебрегая пятым слагаемым как малой величиной по сравнению с другими слагаемыми уравнения:

$$\frac{1}{b^2} \frac{\partial^2 V_0}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 V_0}{\partial z^2} + \frac{2\gamma_2(r_0 + kz)^2}{3} \left(\frac{\partial V_0}{\partial z} \right)^2 \left(\frac{1}{b^2} \frac{\partial^2 V_0}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 V_0}{\partial z^2} \right) - \frac{4k}{(r_0 + kz)} \frac{\partial V_0}{\partial z} = \frac{4\Delta_0}{\mu(r_0 + kz)^2} f_{r\theta}(z, t), \quad (31)$$

где через V_0 обозначена искомая в (27) функция $V_0^{(0)}$. На основании (22) V_0 является главной частью (углом поворота), поэтому крутильное перемещение V в первом приближении выражается так:

$$V(r, z, t) = (r_0 + kz)V_0(z, t).$$

Переходя в (31) к безразмерным переменным по формулам

$$r_0^* = r_0/l, \quad t^* = bt/l, \quad z^* = z/l,$$

где l — длина стержня, и опуская звездочки для удобства записи, получим

$$\left(\frac{\partial^2 V_0}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 V_0}{\partial z^2} \right) \left\{ 1 + \frac{2\gamma_2(r_0 + kz)^2}{3} \left(\frac{\partial V_0}{\partial z} \right)^2 \right\} - \frac{4k}{(r_0 + kz)} \frac{\partial V_0}{\partial z} = \frac{4\Delta_0}{\mu(r_0 + kz)^2} f_{r\theta}(z, t). \quad (32)$$

Функцию внешней поверхностной нагрузки согласно условию задачи примем в виде $f_{r\theta}(z, t) = P/S_b$, где P — постоянная внешняя сила; $S_b = \pi l(2r_0 + kl) \times \sqrt{1 + k^2}$ — площадь боковой поверхности конуса. Граничные и начальные условия запишутся в виде

$$V_0(0, t) = r_0^{-1}g(t), \quad V_0(1, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq 1; \quad (33)$$

$$V_0(z, 0) = \left. \frac{\partial V_0(z, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = 0, \quad 0 \leq z \leq 1. \quad (34)$$

Задача (32)–(34) решена численно методом конечных разностей с соблюдением условий устойчивости и сходимости. Для расчетов функция торцевой нагрузки принималась в виде $g(t) = A \sin(\pi t)$, где A — заданная амплитуда перемещения, при этом $T = l/b$ — время прохождения крутильной волной длины стержня. Расчеты проводились для следующих значений параметров: $\varphi = 1^\circ$, $k = \operatorname{tg} 3^\circ = 0.052$, $l = 1$, $r_0 = 0.02$, $T = 1$, $P = 5$ кН, $A \approx 0.2 \cdot 10^{-3}$. Физико-механические параметры модели соответствовали алюминиевому сплаву Д16Т [22, 23]: $\mu = 27.7$ ГПа, $\rho = 2780$ кг/м³, $\gamma_2 = -0.3878 \cdot 10^6$.

На рис. 2 приведены расчетные зависимости крутильного перемещения V от безразмерного времени в различных поперечных сечениях стержня. Из представленных графиков видно, что колебания начинаются в тот момент, когда волна достигает того или иного сечения. Самые большие изменения претерпевают перемещения точек левого торца стержня, имея максимальное отклонение, равное 0.00036 при $t = 0.5$. При этом чем дальше сечение от левого, подвергнутого кинематическому воздействию торца, тем меньше максимальное значение перемещения. Например, максимальные значения перемещений точек сечений $z = 0$ и $z = 0.3$ отличаются друг от друга на 33.3%. Зависимости перемещения носят синусоидальный характер и являются затухающими при возрастании продольной координаты.

На рис. 3 приведены расчетные зависимости касательного напряжения σ_{ns_1} от безразмерного времени для поверхностных точек различных сечений

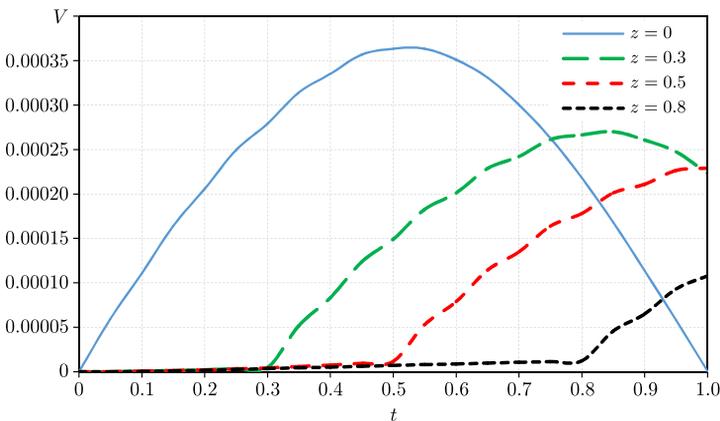


Рис. 2. Зависимость крутильного перемещения V от безразмерного времени t в различных поперечных сечениях усеченного конического стержня

[Figure 2. The torsional displacement V vs. dimensionless time t graph in various cross-sections a truncated conical rod]

усеченного конического стержня в системе координат (n, s_1, s_2) . Из представленных графиков следует, что касательное напряжение в любом сечении отрицательное и почти сразу достигает своего максимального значения, а потом медленно затухает по времени. Кроме того, видно, что по мере удаления от левого торца максимальные значения напряжения σ_{ns_1} убывают, сохраняя при этом в каждом отдельном случае закономерности затухания по времени.

На рис. 4 приведены графики зависимости крутильного перемещения V от продольной координаты z усеченного конического стержня в различные моменты безразмерного времени t . В сечении $z = 0$ при значениях времени $t \leq 0.6$ перемещения поверхностных точек достигают своего максимального значения и тут же начинают затухать, а к концу конического стержня во всех зафиксированных значениях времени ($t = 0.2; 0.4; 0.6; 0.8$) уже полностью затухают.

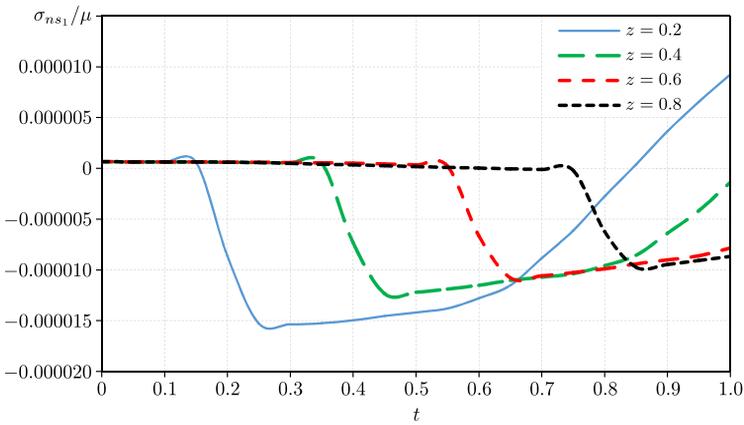


Рис. 3. Зависимость касательного напряжения σ_{ns_1} от безразмерного времени t в различных поперечных сечениях конического стержня

[Figure 3. The tangential stress σ_{ns_1} vs. dimensionless time t graph in various cross-sections of a truncated conical rod]

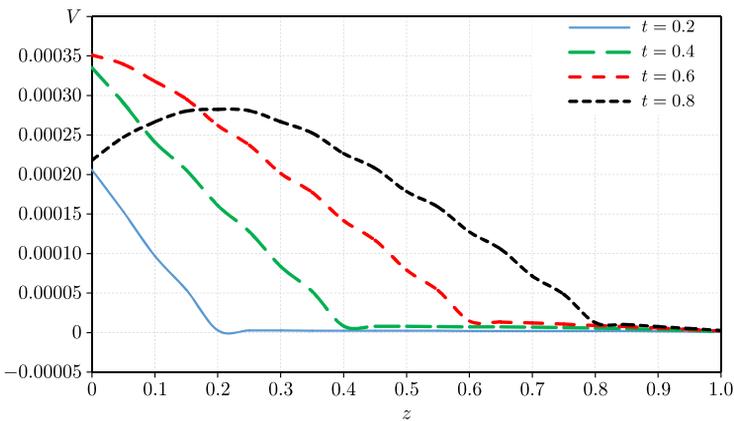


Рис. 4. Зависимость крутильного перемещения V от продольной координаты z в различные моменты безразмерного времени t для усеченного конического стержня

[Figure 4. The torsional displacement V vs. longitudinal coordinate z graph at various moments of dimensionless time t for a truncated conical rod]

На рис. 5 приведены графики зависимости касательного напряжения σ_{ns_1} от продольной координаты z усеченного конического стержня в различные моменты безразмерного времени t . Из представленных графиков видно, что в точках левого торца стержня напряжение достигает максимального значения (по модулю) и сразу начинает убывать. С течением времени максимальное значение переходит с отрицательных значений при $t \leq 0.6$ на положительные при $t \geq 0.7$. С прохождением волны возмущения некоторого сечения за фиксированное время (например, сечения $z = 0.23$ при $t = 0.6$) касательное напряжение σ_{ns_1} можно считать равным нулю.

На рис. 6 приведены графики изменения крутильного перемещения точек срединного сечения стержня по безразмерному времени t при различных значениях угла атаки φ . Из графиков видно, что при значениях угла атаки $0 \leq \varphi < 2^\circ$ перемещение V точек срединного сечения стержня начинает расти

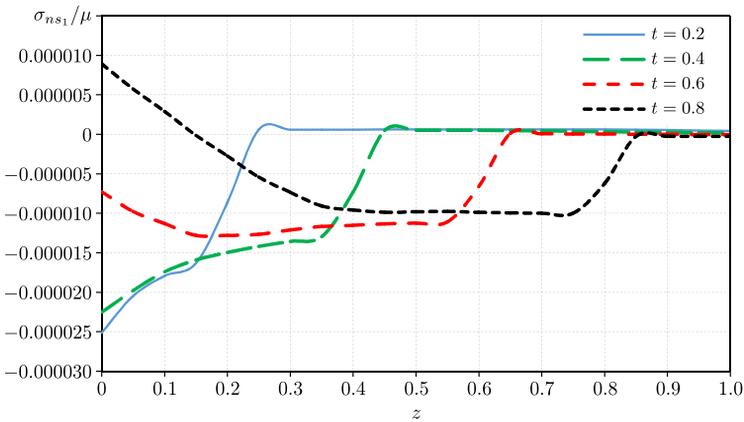


Рис. 5. Зависимость касательного напряжения σ_{ns_1} от продольной координаты z в различные моменты безразмерного времени t для усеченного конического стержня

[Figure 5. The tangential stress σ_{ns_1} vs. longitudinal coordinate z graph at various moments of dimensionless time t for a truncated conical rod]

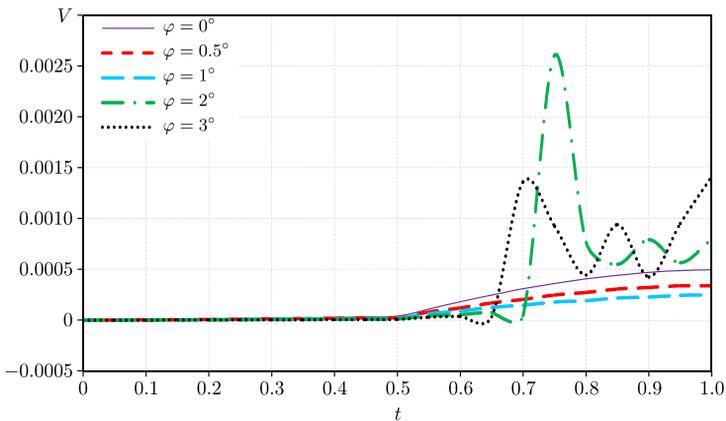


Рис. 6. Зависимость крутильного перемещения V точек срединного сечения стержня от безразмерного времени t при различных углах атаки φ

[Figure 6. The torsional displacement V of the rod middle section of the rod vs. dimensionless time t graph at different angles of attack φ]

с момента достижения возбуждением сечения $z = 0.5$; полученные графики можно считать относительно плавными. При этом малым значениям угла атаки соответствуют большие значения перемещения, т.е. с ростом значения угла атаки перемещения уменьшаются.

При значениях угла атаки $\varphi \geq 2^\circ$ наблюдается скачкообразное изменение перемещений точек срединного сечения стержня с момента достижения возмущением сечения $z = 0.5$. При этом графики имеют синусоидальный характер с относительными максимумами и минимумами. Расчеты показали, что данный эффект имеет место при любых значениях угла атаки $\varphi \geq 2^\circ$, что указывает на неправильность полученных результатов при $\varphi \geq 2^\circ$. Это объясняется тем, что в этих случаях усеченный конический стержень с ростом продольной координаты быстро превращается в «трехмерное тело».

Заключение. В настоящей работе поставлена и решена задача о крутильных колебаниях усеченного конического стержня с учетом физической нелинейной связи между компонентами тензоров напряжений и деформаций. Выведено нелинейное уравнение для крутильных колебаний усеченного конического стержня относительно главной части крутильного перемещения оси симметрии стержня. Показано, что полученное уравнение нелинейных крутильных колебаний усеченного конического упругого стержня в частных случаях совпадает с известными уравнениями, полученными другими авторами.

Выполнен численный расчет для определения напряженно-деформированного состояния усеченного конического стержня при действии торцевой и поверхностной динамических нагрузок в условиях, когда правый (широкий) конец стержня жестко заделан, а левый (узкий) является свободным.

Расчеты крутильного перемещения и касательных напряжений показали, что предложенная теория, учитывающая физическую нелинейность материала, хорошо описывает колебательный процесс в усеченном коническом стержне при углах атаки $0 \leq \varphi < 2^\circ$.

Конкурирующие интересы. Конкурирующих интересов не имею.

Авторская ответственность. Я несу полную ответственность за предоставление окончательной версии рукописи в печать. Окончательная версия рукописи мною одобрена.

Финансирование. Исследование выполнялось без финансирования.

Библиографический список

1. Кушнаренко В. М., Беридзе С. П. Свободные продольные колебания конического стержня // *Вестн. Оренбург. гос. ун-ва.*, 2000. № 3. С. 83–86. EDN: HVZBFP.
2. Bakhtiari M., Lakis A. A., Kerboua Y. *Nonlinear vibration of truncated conical shells: Donnell, Sanders and Nemeth theories*: Rapport technique no. EPMRT-2018-01, 2018 (In French). <https://publications.polymtl.ca/3011/>.
3. Беридзе С. П. Свободные крутильные колебания конического стержня // *Вестн. Оренбург. гос. ун-ва.*, 1999. № 3. С. 104–107. EDN: HVHSMТ.
4. Sofiyev A. H. The non-linear vibration of FGM truncated conical shells // *Compos. Struct.*, 2012. vol. 94, no. 7. pp. 2237–2245. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2012.02.005>.
5. Худойназаров Х. Х., Халмурадов Р. И., Ялгашев Б. Ф. Продольно-радиальные колебания упругой цилиндрической оболочки с вязкой сжимаемой жидкостью // *Вестн.*

- Томск. гос. ун-та. Матем. и мех., 2021. № 69. С. 139–154. EDN: FTGEQR. DOI: <https://doi.org/10.17223/19988621/69/11>.
6. Khudoynazarov Kh. Kh. Transversal vibrations of thick and thin cylindrical shells, interacting with deformable medium / *Shell Structures Theory and Applications*. London: Taylor & Francis Group. pp. 343–347.
 7. Alijani F., Amabili M. Non-linear vibrations of shells: A literature review from 2003 to 2013 // *Int. J. Non-Linear Mech.*, 2014. vol. 58. pp. 233–257. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2013.09.012>.
 8. Pellicano F. Vibrations of circular cylindrical shells: Theory and experiments // *J. Sound Vibration*, 2007. vol. 303, no. 1–2. pp. 154–170. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2007.01.022>.
 9. Бреславский И. Д. Распределение напряжений по пластине при нелинейных колебаниях // *Вісн. Харків. націон. унів. ім. В. Н. Каразіна. Сер. Мат. мод. Інформ. техн. Автомат. сист. управл.*, 2010. № 926. С. 75–84.
 10. Chen C. Nonlinear dynamic of a rotating truncated conical shell / *L. Dai, R. Jazar (Eds.) Nonlinear Approaches in Engineering Applications*. New York, NY: Springer, 2012. pp. 349–391. DOI: https://doi.org/10.1007/978-1-4614-1469-8_12.
 11. Ахмедов А. Б., Шешенин С. В. К построению нелинейных уравнений движения ортотропных пластин // *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 2012. № 3. С. 36–39. EDN: PEEYGL.
 12. Бакушев С. В. Разрешающие уравнения плоской деформации в цилиндрических координатах для физически-нелинейной сплошной среды // *Строительная механика инженерных конструкций и сооружений*, 2018. Т. 14, № 1. С. 38–45. EDN: YOJIUV. DOI: <https://doi.org/10.22363/1815-5235-2018-14-1-38-45>.
 13. Khudoynazarov Kh., Abdurazakov J., Kholikov D. Nonlinear torsional vibrations of a circular cylindrical elastic shell // *AIP Conf. Proc.*, 2022. vol. 2637, 020003. DOI: <https://doi.org/10.1063/5.0118844>.
 14. Khudoynazarov Kh., Kholikov D., Abdurazakov J. Torsional vibrations of a conical elastic shell // *AIP Conf. Proc.*, 2022. vol. 2637, 030024. DOI: <https://doi.org/10.1063/5.0118846>.
 15. Khudoynazarov Kh., Khudoyberdiyev Z. B. Unsteady vibrations of a three-layer plate with an asymmetric structure // *IOP Conf. Ser.: Earth Environ. Sci.*, 2020. vol. 614, 012061. DOI: <https://doi.org/10.1088/1755-1315/614/1/012061>.
 16. Khudoynazarov Kh., Yaxshiboyev Sh. R. The mathematical model of transverse vibrations of the three-layer plate // *IOP Conf. Ser.: Earth Environ. Sci.*, 2020. vol. 614, 012062. DOI: <https://doi.org/10.1088/1755-1315/614/1/012062>.
 17. Khudoynazarov K., Yalgashev B. Longitudinal vibrations of a cylindrical shell filled with a viscous compressible liquid // *E3S Web Conf.*, 2021. vol. 264, 02017. DOI: <https://doi.org/10.1051/e3sconf/202126402017>.
 18. Filippov I. G., Kudajnarov K. Boundary value problems of longitudinal oscillations of the circular cylindrical shells // *Industrial Construction*, 1998. vol. 28, no. 12. pp. 34–40. EDN: RQIBJX.
 19. von Kauderer H. *Nichtlineare Mechanik*. Berlin: Springer-Verlag. 684 pp. (In German)
 20. Филиппов И. Г., Филиппов С. И. *Колебательные и волновые процессы в сплошных сжимаемых средах*. М., 2007. 429 с. EDN: QJRVVZ.
 21. Худойназаров Х. Х. *Нестационарное взаимодействие цилиндрических оболочек и стержней с деформируемой средой*. Ташкент, 2003. 326 с.
 22. Цурпал И. А. *Расчет элементов конструкций из нелинейно-упругих материалов*. Киев: Техніка, 1976. 176 с.
 23. Кудин А. В., Тамуров Ю. Н. Применение метода малого параметра при моделировании изгиба симметричных трехслойных пластин с нелинейноупругим наполнителем // *Вісн. Східноукр. націон. унів. ім. В. Даля*, 2011. № 11. С. 32–40.

MSC: 74H45

Modeling of nonlinear torsional vibrations of a truncated conical rod

Kh. Kh. Khudoynazarov

Sharof Rashidov Samarkand State University,
15, University blv., Samarkand, 140104, Uzbekistan.

Abstract

In the present study, a nonlinear mathematical model of non-stationary torsional vibrations of a truncated conical rod made of elastic material taking into account the nonlinear relationship between stresses and strains has been developed. A nonlinear equation for torsional vibrations of the truncated conical rod has been derived with respect to the main part of the torsional displacement of the axis of symmetry of the rod. It has been demonstrated that the obtained equation for nonlinear torsional vibrations of the truncated conical elastic rod coincides with known equations obtained by other authors in particular cases. Using the derived equation, the stress-strain state of an arbitrary cross-section of the conical rod can be uniquely determined based on spatial coordinates and time. The problem of non-stationary torsional vibrations of the truncated conical rod under the action of axial and surface dynamic loads has been numerically due to the constructed model, when the wide end of the rod is rigidly fixed and the narrow end is free.

Keywords: conical rod, mathematical model, vibrations, nonlinear equations, physical nonlinearity.

Received: 2nd March, 2023 / Revised: 18th August, 2023 /

Accepted: 18th September, 2023 / First online: 13th December, 2023

Competing interests. I have no competing interests.

Author's Responsibilities. I take full responsibility for submitting the final version of the manuscript for printing. The final version of the manuscript has been approved by me.

Funding. The study was carried out without funding.

Mechanics of Solids

Research Article

© Authors, 2023

© Samara State Technical University, 2023 (Compilation, Design, and Layout)

© The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Please cite this article in press as:

Khudoynazarov Kh. Kh. Modeling of nonlinear torsional vibrations of a truncated conical rod, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2023, vol. 27, no. 4, pp. 704–722. EDN: ICM0Q0. DOI: 10.14498/vsgtu2002 (In Russian).

Author's Details:

Khayrulla Kh. Khudoynazarov  <https://orcid.org/0000-0001-8994-9738>

Dr. Techn. Sci., Professor; Head of Department; Dept. Theoretical and Applied Mechanics;

e-mail: kh.khudoyn@gmail.com

References

1. Kushnarenko V. M., Beridze S. P. Free longitudinal vibrations of a conical rod, *Vestn. Orenburg. Gos. Univ.*, 2000, no. 3, pp. 83–86 (In Russian). EDN: HVZBFP.
2. Bakhtiari M., Lakis A. A., Kerboua Y. *Nonlinear vibration of truncated conical shells: Donnell, Sanders and Nemeth theories*, Rapport technique no. EPMRT-2018-01, 2018 (In French). <https://publications.polymtl.ca/3011/>.
3. Beridze S. P. Free torsional vibrations of a conical rod, *Vestn. Orenburg. Gos. Univ.*, 1999, no. 3, pp. 104–107 (In Russian). EDN: HVHSMT.
4. Sofiyev A. H. The non-linear vibration of FGM truncated conical shells, *Compos. Struct.*, 2012, vol. 94, no. 7, pp. 2237–2245. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2012.02.005>.
5. Khudoynazarov Kh. Kh., Khalmuradov R. I., Yalgashev B. F. Longitudinal-radial vibrations of a elastic cylindrical shell filled with a viscous compressible liquid, *Vestn. Tomsk. Gos. Univ. Mat. Mekh.*, 2021, no. 69, pp. 139–154 (In Russian). EDN: FTGEQR. DOI: <https://doi.org/10.17223/19988621/69/11>.
6. Khudoynazarov Kh. Kh. Transversal vibrations of thick and thin cylindrical shells, interacting with deformable medium, In: *Shell Structures Theory and Applications*. London, Taylor & Francis Group, pp. 343–347.
7. Alijani F., Amabili M. Non-linear vibrations of shells: A literature review from 2003 to 2013, *Int. J. Non-Linear Mech.*, 2014, vol. 58, pp. 233–257. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2013.09.012>.
8. Pellicano F. Vibrations of circular cylindrical shells: Theory and experiments, *J. Sound Vibration*, 2007, vol. 303, no. 1–2, pp. 154–170. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2007.01.022>.
9. Breslavskii I. D. Stress distribution over a plate during nonlinear vibrations, *Visn. Kharkiv. Natsion. Univ. im. V. N. Karazina. Ser. Mat. Mod., Inform. Tekhn., Avtomat. Sist. Upravl.*, 2010, no. 926, pp. 75–84 (In Russian). http://nbuv.gov.ua/UJRN/VKhIMAM_2010_926_15_11.
10. Chen C. Nonlinear dynamic of a rotating truncated conical shell, In: *L. Dai, R. Jazar (Eds.) Nonlinear Approaches in Engineering Applications*. New York, NY, Springer, 2012, pp. 349–391. DOI: https://doi.org/10.1007/978-1-4614-1469-8_12.
11. Akhmedov A. B., Sheshenin S. V. Nonlinear equations of motion for orthotropic plates, *Moscow University Mechanics Bulletin*, 2012, vol. 67, no. 3, pp. 66–68. EDN: RGCBPX. DOI: <https://doi.org/10.3103/S002713301203003X>.
12. Bakushev S. V. Resolving equations of planar deformation in cylindrical coordinates for physically nonlinear continuum, *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*, 2018, vol. 14, no. 1, pp. 38–45 (In Russian). EDN: YOJIUV. DOI: <https://doi.org/10.22363/1815-5235-2018-14-1-38-45>.
13. Khudoynazarov Kh., Abdurazakov J., Kholikov D. Nonlinear torsional vibrations of a circular cylindrical elastic shell, *AIP Conf. Proc.*, 2022, vol. 2637, 020003. DOI: <https://doi.org/10.1063/5.0118844>.
14. Khudoynazarov Kh., Kholikov D., Abdurazakov J. Torsional vibrations of a conical elastic shell, *AIP Conf. Proc.*, 2022, vol. 2637, 030024. DOI: <https://doi.org/10.1063/5.0118846>.
15. Khudoynazarov Kh., Khudoyberdiyev Z. B. Unsteady vibrations of a three-layer plate with an asymmetric structure, *IOP Conf. Ser.: Earth Environ. Sci.*, 2020, vol. 614, 012061. DOI: <https://doi.org/10.1088/1755-1315/614/1/012061>.
16. Khudoynazarov Kh., Yaxshiboyev Sh. R. The mathematical model of transverse vibrations of the three-layer plate, *IOP Conf. Ser.: Earth Environ. Sci.*, 2020, vol. 614, 012062. DOI: <https://doi.org/10.1088/1755-1315/614/1/012062>.
17. Khudoynazarov K., Yalgashev B. Longitudinal vibrations of a cylindrical shell filled with a viscous compressible liquid, *E3S Web Conf.*, 2021, vol. 264, 02017. DOI: <https://doi.org/10.1051/e3sconf/202126402017>.

18. Filippov I. G., Kudajnazarov K. Boundary value problems of longitudinal oscillations of the circular cylindrical shells, *Industrial Construction*, 1998, vol. 28, no. 12, pp. 34–40. EDN: RQIBJX.
19. von Kauderer H. *Nichtlineare Mechanik*. Berlin, Springer-Verlag, 684 pp. (In German)
20. Filippov I. G., Filippov S. I. *Kolebatel'nye i volnovye protsessy v sploshnykh szhimaemykh sredakh* [Oscillatory and Wave Processes in Continuous Compressible Media]. Moscow, 2007, 429 pp. (In Russian). EDN: QJRVVZ.
21. Khudoynazarov Kh. Kh. *Nestatsionarnoe vzaimodeistvie tsilindricheskikh obolochek i sterzheni s deformiruemoi sredoi* [Nonstationary Interaction of Cylindrical Shells and Rods with a Deformable Medium]. Tashkent, 2003, 326 pp. (In Russian)
22. Tsurpal I. A. *Raschet elementov konstruktsii iz nelineino-uprugikh materialov* [Calculation of Structural Elements Made from Nonlinearly Elastic Materials]. Kiev, Tekhnika, 1976, 176 pp. (In Russian)
23. Kudin A. V., Tamurov Yu. N. Application of the small parameter method in modeling the bending of symmetrical three-layer plates with nonlinear elastic filler, *Visn. Skhidnoukr. Natsion. Univ. im. V. Dalya*, 2011, no. 11, pp. 32–40 (In Russian).



УДК 520.88:523.982

Математическое моделирование зарождения солнечных пятен на фотосферном уровне Солнца

Д. В. Романов¹, К. В. Романов¹, В. А. Романов²,
Е. А. Степанов², А. А. Лебедев²

¹ Красноярский государственный педагогический университет им. В. П. Астафьева, Россия, 660049, Красноярск, ул. Ады Лебедевой, 89.

² Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, Саратов, ул. Астраханская, 83.

Аннотация

Методом компьютерного моделирования исследуется начальная стадия зарождения группы солнечных пятен на фотосферном уровне Солнца. Численно моделируется процесс развития нелинейной фазы неустойчивости Паркера крупномасштабных колебаний магнитных полей в средних слоях конвективной зоны. Исследуется процесс адиабатического охлаждения тонкой магнитной трубки, всплывающей с глубин порядка 100 000 км к фотосферному уровню. Результаты расчетов позволяют детально проанализировать изменение магнитогазодинамических параметров трубки на различных глубинах конвективной зоны и получить значения физических параметров зарождающихся солнечных пятен, сопоставляемых с данными наблюдений.

Исследуется физический механизм временной задержки формирования головной части активной области по сравнению с формированием распыленной хвостовой части. Также исследуется проблема устойчивости зарождающихся активных областей. Выделены физические параметры, определяющие устойчивость сформированных активных областей на различных фазах цикла солнечной активности. Определен физический механизм генерации мощного волнового потока ударных волн

Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ
Научная статья

© Коллектив авторов, 2023

© СамГТУ, 2023 (составление, дизайн, макет)

📄 ©️📄 Контент публикуется на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

Образец для цитирования

Романов Д. В., Романов К. В., Романов В. А., Степанов Е. А., Лебедев А. А. Математическое моделирование зарождения солнечных пятен на фотосферном уровне Солнца // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2023. Т. 27, № 4. С. 723–736. EDN: JEEWMQ. DOI: 10.14498/vsgtu2015.

Сведения об авторах

Дмитрий Валерьевич Романов ✉️📄 <https://orcid.org/0000-0002-4982-5973>
кандидат физико-математических наук; доцент; каф. информатики и информационных технологий в образовании; e-mail: d-v-romanov@ya.ru

Константин Валерьевич Романов 📄 <https://orcid.org/0000-0001-7320-2517>
кандидат физико-математических наук; доцент; каф. математики и методики обучения математике; e-mail: k-v-romanov@ya.ru

Валерий Александрович Романов 📄 <https://orcid.org/0000-0001-9876-0822>
доктор физико-математических наук; профессор; каф. математической кибернетики и компьютерных наук; e-mail: valeriy.a.romanov@yandex.ru

в начальной стадии зарождения активной области, вносящий существенный вклад в аномальный разогрев солнечной атмосферы, регистрируемый в наблюдательных данных.

Ключевые слова: фотосфера, солнечные пятна, конвективная зона Солнца, магнитная трубка, неустойчивость Паркера.

Получение: 30 апреля 2023 г. / Исправление: 5 октября 2023 г. /

Принятие: 1 ноября 2023 г. / Публикация онлайн: 13 декабря 2023 г.

Введение. Математическое моделирование нестационарных магнитогазодинамических процессов, протекающих в недрах и атмосфере Солнца, играет важную роль в изучении феномена циклической солнечной активности. Одним из наиболее важных и практически значимых направлений анализа феномена солнечной активности является изучение временной эволюции крупномасштабных активных областей в солнечной атмосфере, связанных с зарождением и формированием групп пятен на фотосферном уровне. В солнечных пятнах реализуется выход сильных магнитных полей из конвективной зоны в атмосферу Солнца (рис. 1). Структура расположения солнечных пятен на фотосферном уровне фактически определяет пространственную структуру всей активной области в пределах солнечной атмосферы [1–3].

Визуальная регистрация расположения солнечных пятен на фотосферном уровне производится по эффекту резкого падения температуры газа в области тени пятен (~ 4000 К) по сравнению с температурой окружающего газа на фотосферном уровне (~ 6000 К, рис. 1). Феномен резкого понижения температуры газа в области тени пятен детально не изучен вплоть до настоящего времени.

В монографии Паркера [4] сделано предположение о реализации охлаждения газа в пятнах за счет протекания нелинейных МГД-процессов при всплывании сильных магнитных полей из конвективной зоны в атмосферу Солнца. В настоящей работе исследуется процесс адиабатического охлаждения тонкой магнитной трубки, всплывающей из средних слоев конвективной зоны к фотосферному уровню.

Результаты расчетов позволяют детально проанализировать изменение магнитогазодинамических параметров трубки на различных глубинах конвективной зоны и получить значения физических параметров зарождающихся солнечных пятен на фотосферном уровне, допускающие прямое сопоставление с данными наблюдений (рис. 1) [5, 6]. Помимо установления механизма зарождения солнечных пятен представляется возможным объяснение различных закономерностей формирования активных областей в начальной стадии, зарегистрированных по наблюдательным данным [2, 5, 7].

Евгений Александрович Степанов  <https://orcid.org/0000-0002-2050-2724>
аспирант; каф. математической кибернетики и компьютерных наук;
e-mail: ev_stepanof@yandex.ru

Антон Андреевич Лебедев  <https://orcid.org/0000-0002-8241-1916>
аспирант; каф. математической кибернетики и компьютерных наук;
e-mail: maiorovaleks94@gmail.com

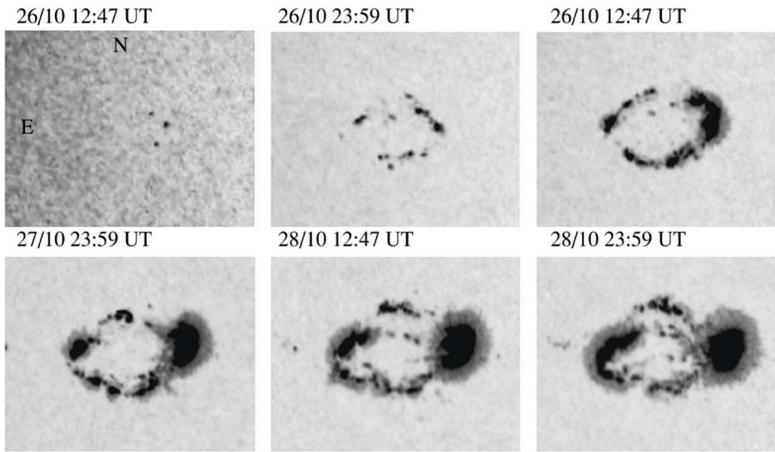


Рис. 1. Формирование группы пятен в активной области NOAA 10488 по изображениям в континууме SOHO MDI [7]

[Figure 1. Formation of a sunspot group in the active region of NOAA 10488 from images in the SOHO MDI continuum [7]]

Физические условия развития неустойчивости Паркера в конвективной зоне Солнца. Современная разрешающая способность наблюдательных инструментов позволяет уверенно установить, что магнитные образования в солнечной атмосфере представляют собой множество мелкомасштабных магнитных трубок с высокими значениями напряженности (порядка $1 \div 3$ кГс на фотосферном уровне), расположенных в практически немагнитной плазме (рис. 1). Динамика движения тонкой магнитной трубки в пределах конвективной зоны описывается системой нелинейных дифференциальных уравнений [8, 9]:

$$\rho_i \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{H}{4\pi} \frac{\partial(\vec{H})}{\partial \ell} + (\rho_i - \rho_e) \vec{g}, \quad (1)$$

$$\frac{\rho_i^\gamma}{\gamma - 1} \frac{d}{dt} \left(\frac{p_i}{\rho_i^\gamma} \right) = \text{div}(k \vec{\nabla} T), \quad (2)$$

$$p_i + \frac{H^2}{8\pi} = p_e, \quad (3)$$

$$H \pi a^2 = \Phi_0 = \text{const}, \quad (4)$$

$$\vec{\nabla} p_e = \rho_e \vec{g}, \quad (5)$$

где (1) — уравнение движения с учетом силы натяжения магнитного поля и силы Архимеда; (2) — уравнение энергии с учетом теплопроводности газа внутри трубки; (3) — уравнение баланса давлений внутри и снаружи трубки; (4) — условие сохранения магнитного потока внутри трубки; (5) — уравнение гидростатики для внешнего газа в конвективной зоне и атмосфере Солнца. Здесь введены следующие обозначения: H — напряженность магнитного поля, ρ — плотность газа, p — газодинамическое давление, \vec{g} — ускорение свободного падения на Солнце, a — радиус магнитной трубки. Индексом i обозначаем МГД-параметры внутри трубки, индексом e — снаружи. Необходимые для

замыкания системы (1)–(5) зависимости $\rho_e(r)$, $p_e(r)$, $\vec{g}(r)$ на различных глубинах конвективной зоны определяются по данным модели внутреннего строения Солнца [10, 11] и обладают сферической симметрией (зависят только от радиуса r). Форма трубки задается однопараметрической кривой (рис. 2, а):

$$\vec{r} = \vec{r}(\ell),$$

где ℓ — длина трубки (натуральный параметр).

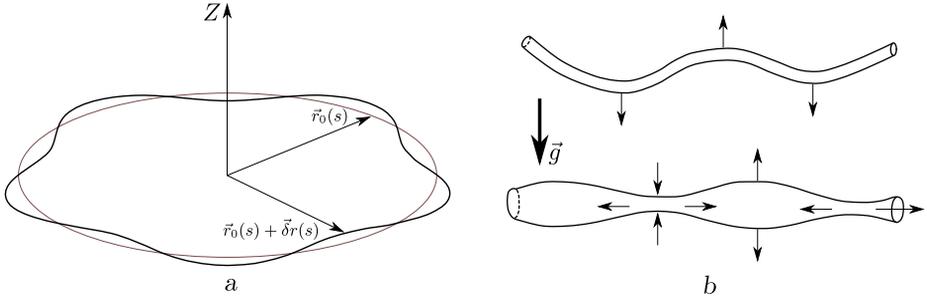


Рис. 2. Начальная форма магнитной трубки для волнового числа $m = 5$ (а); течение плазмы в трубке для изгибающей (быстрой) и продольной (медленной) мод колебаний (б) [Figure 2. The initial shape of the magnetic tube for the wavenumber $m = 5$ (а); plasma flow in a tube for bending (fast) and longitudinal (slow) oscillation modes (б)]

В начальный момент времени трубка замкнута в кольцо и расположена в экваториальной плоскости Солнца (рис. 2, а). Число стоячих волн, укладываемых по периметру трубки, называется волновым числом m . Для численного решения системы уравнений (1)–(5) удобно ввести массовую лагранжеву переменную s , равную массе вещества, заключенного между фиксированными начальным и текущим сегментами трубки. Масса жидкости трубки длиной $d\ell$ определяется выражением

$$ds = \rho_i \sigma d\ell,$$

где $\sigma = \pi a^2$ — поперечное сечение трубки.

Следовательно,

$$\frac{\partial}{\partial \ell} = \rho_i \sigma \frac{\partial}{\partial s}$$

и уравнение (1) приводится к виду

$$\rho_i \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{H\sigma\rho_i}{4\pi} \frac{\partial(H\vec{\ell})}{\partial s} + (\rho_i - \rho_e)\vec{g}.$$

Начальные условия задачи. В положении равновесия выталкивающая сила Архимеда уравновешивается натяжением силовых магнитных линий. Условие равновесия магнитной трубки является начальным условием задачи. Вблизи положения равновесия реализуются два типа линейных колебаний магнитной трубки: «быстрые» (изгибающие) альфвеновские волны и «медленные» (варикозные) колебания с течением газа вдоль трубки (рис. 2, б).

В гравитационном поле Солнца наименее устойчивы «варикозные» (медленные) моды колебаний. При малых значениях напряженности магнитного поля области сгущения газа проваливаются вниз — тонут (рис. 3, а). Легкие участки остаются наверху. Газ из этих участков стекает вниз под действием силы тяжести. Легкие участки, теряя массу, под действием выталкивающей силы Архимеда с ускорением всплывают к фотосферному уровню (рис. 3, б). Так развивается неустойчивость Паркера для медленных мод колебаний магнитного поля в конвективной зоне Солнца [8, 12].

Развитие неустойчивости Паркера в зависимости от глубины расположения трубки в конвективной зоне реализуется в различных режимах. На рис. 4, а представлены данные по распределению газодинамических параметров

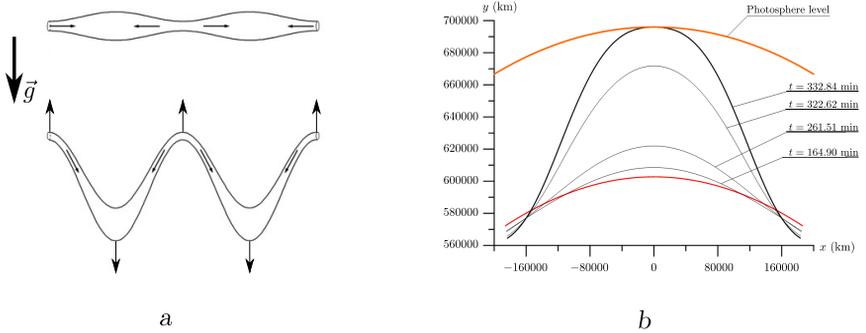


Рис. 3. Потеря устойчивости начального положения магнитной трубки (а); нелинейная фаза развития неустойчивости Паркера ($m = 5$, б)

[Figure 3. Loss of stability of the initial position of the magnetic tube (a); nonlinear phase of development of the Parker instability ($m = 5$, b)]

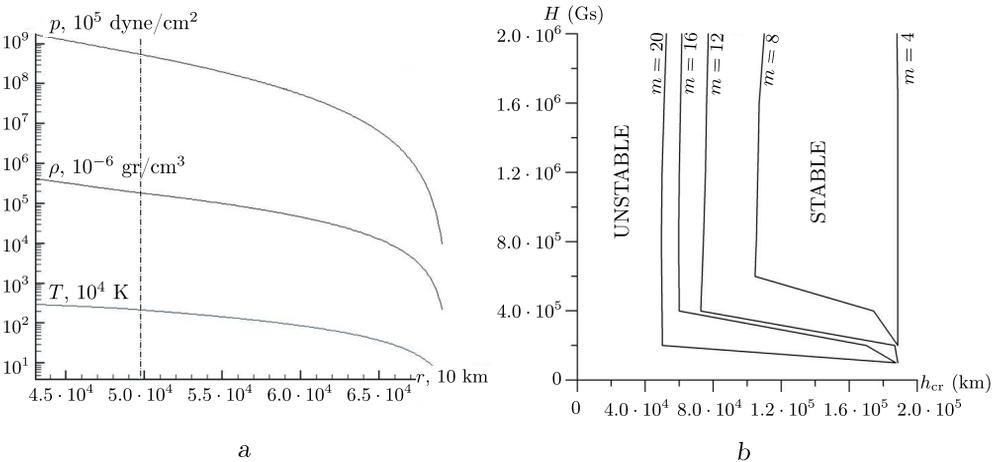


Рис. 4. Распределение газодинамических параметров в зависимости от глубины конвективной зоны [12] (а); распределение критических значений напряженности магнитного поля развития неустойчивости Паркера в зависимости от глубины конвективной зоны и волнового числа m (б)

[Figure 4. Distribution of gas-dynamic parameters depending on the depth of the convective zone [12] (a); distribution of critical values of the magnetic field strength for the development of the Parker instability depending on the depth of the convective zone and the wave number m (b)]

ров в пределах конвективной зоны, полученные в рамках проекта GONG [11]. На глубинах, меньших 10^5 км (средние слои конвективной зоны, радиус Солнца равен 695 000 км на фотосферном уровне), значения газодинамических параметров нелинейно понижаются: образуется зона высоких градиентов изменения газодинамических параметров по глубине. Равновесные положения магнитной трубки с уменьшением глубины погружения в конвективную зону становятся менее устойчивыми. С ростом напряженности магнитного поля устойчивость равновесных положений магнитной трубки возрастает. Но главным параметром для сохранения устойчивости является длина волны (волновое число m) колебаний магнитной трубки: с ростом длины волны области сгущения газа в трубке под действием силы тяжести легче проваливаются вниз, что приводит к развитию неустойчивости Паркера (рис. 3, *b*). На рис. 4, *b* представлены распределения критических значений напряженности магнитного поля в зависимости от глубины расположения трубки в конвективной зоне и волнового числа m . Напряженность магнитного поля эффективно влияет на устойчивость колебаний магнитной трубки только для слабых полей. При высоких значениях напряженности главным физическим параметром, определяющим устойчивость, становится длина волны (волновое число m): с увеличением волнового числа m устойчивые равновесные положения магнитного поля реализуются вплоть до средних слоев конвективной зоны и выше вблизи фотосферного уровня (рис. 4, *b*).

Для численного решения система уравнений (1)–(5) обезразмеривается и выписывается в виде конечных разностей [13]. Итоговая система разностных уравнений разбивается на три группы: группу пересчета координат узлов магнитной трубки, динамическую группу и тепловую группу. Результирующая система разностных уравнений получается неявной и нелинейной. Численное решение реализуется по методу Ньютона с помощью отдельных циклических прогонок [13]. Выбранная форма уравнений и использование массовой переменной позволяет добиться законов сохранения массы и магнитного потока со вторым порядком точности по массовой переменной при численном решении системы уравнений (1)–(5).

Математическое моделирование зарождения солнечных пятен.

Характерные размеры активных областей в солнечной атмосфере превышают величину порядка $5 \cdot 10^5$ км [14]. По длине волны это соответствует развитию неустойчивости Паркера для волновых чисел $m \leq 10$ (рис. 4, *b*). Отметим следующее принципиальное обстоятельство: по начальной постановке задачи развитие неустойчивости Паркера является МГД-процессом с небольшим числом степеней свободы. При работе с конкретной моделью внутреннего строения Солнца [11] для выбранной длины волны (волнового числа m) начальное развитие неустойчивости Паркера определяется единственным свободным МГД-параметром. Наиболее удобным параметром является начальная напряженность магнитного поля в трубке H_0 .

На рис. 3, *b* представлена нелинейная фаза развития неустойчивости Паркера для волнового числа $m = 10$ (длина волны $\lambda \sim 4.2 \cdot 10^5$ км — порядка размеров стандартной активной области [1, 3]). Начальная напряженность магнитного поля $H_0 = 4 \cdot 10^6$ Гс. В этих условиях по данным внутреннего строения Солнца из работы [11] неустойчивость Паркера развивается на глубине $\sim 93\,800$ км от фотосферного уровня. Начальная температура газа

в трубке $T_i = 757\,000$ К. Однозначно рассчитываются остальные термодинамические параметры газа в трубке.

По начальным условиям задачи рассчитываются значения МГД-параметров всплывающей магнитной трубки на фотосферном уровне. Эти же значения являются физическими параметрами зарождающихся солнечных пятен (рис. 1). На рис. 3, *b* представлено всплывание арочной структуры магнитного поля из исходного положения равновесия к фотосферному уровню в выбранном режиме. Эволюция всплывающей и подгружающейся частей трубки происходит несимметричным образом: верхняя часть всплывает неограниченно высоко, при этом все вещество из нее стекает вниз. Скорость опускания нижней части трубки с течением времени постепенно понижается — приток вещества заставляет ее постепенно опускаться вниз, но основная часть массы поступает на ранней стадии, после чего она практически не меняется — трубка «заякоривается».

На рис. 5, *a* представлено изменение температуры газа в верхней точке всплывающей арочной магнитной структуры при подъеме к фотосферному уровню. Температура газа внутри трубки плавно уменьшается от начального значения $757\,000$ К до значения 600 К на фотосферном уровне. Сравнение температуры газа внутри и снаружи трубки при подъеме обнаруживает следующую закономерность. Практически на всех глубинах конвективной зоны температура газа в трубке близка к температуре окружающей среды (отношение температур близко к единице, см. рис. 5, *b*). На глубинах, меньших 10^4 км от фотосферного уровня, возникает аномалия: температура газа внутри трубки резко понижается по отношению к значениям температуры окружающего газа.

Аналогично ведет себя напряженность магнитного поля в трубке на различных глубинах конвективной зоны (рис. 6, *a*). Напряженность поля в трубке плавно понижается от начального значения $H_0 = 4 \cdot 10^6$ Гс до величины 326 Гс на фотосферном уровне. При этом отношение магнитного давления в трубке к давлению окружающего газа стабильно удерживается в диапазоне $0.1 \div 0.2$ на всех глубинах конвективной зоны. При достижении глубин, меньших 10^4 км, давление магнитного поля в трубке резко понижается по отношению к давлению окружающего газа (рис. 6, *b*).

Аномальное поведение МГД-параметров трубки вблизи фотосферного уровня регистрируется также по изменению плотности газа в трубке по сравнению с плотностью окружающего газа на различных глубинах конвективной зоны (рис. 7). Плотности газа внутри и снаружи трубки практически совпадают на всех стадиях подъема (отношение плотностей порядка единицы, см. рис. 7, *a*). На малых глубинах порядка $5\,000$ км плотность газа в трубке резко нарастает по сравнению с плотностью окружающей среды (рис. 7, *b*).

В целом всплывание магнитного потока реализуется в дозвуковом режиме (рис. 8, *b*). Величина скорости подъема стабильно удерживается в диапазоне $0.1 \div 0.2$ от местной скорости звука на всех глубинах конвективной зоны. Вблизи фотосферного уровня из-за понижения температуры окружающего газа (рис. 4, *a*) нелинейно понижаются значения местной скорости звука. Скорости подъема магнитного поля становятся сверхзвуковыми, и реализуется режим сверхзвукового выноса магнитного поля в хромосферу Солнца. Выше фотосферного уровня генерируются ударные волны ($M \sim 2$, рис. 8, *b*), сопро-

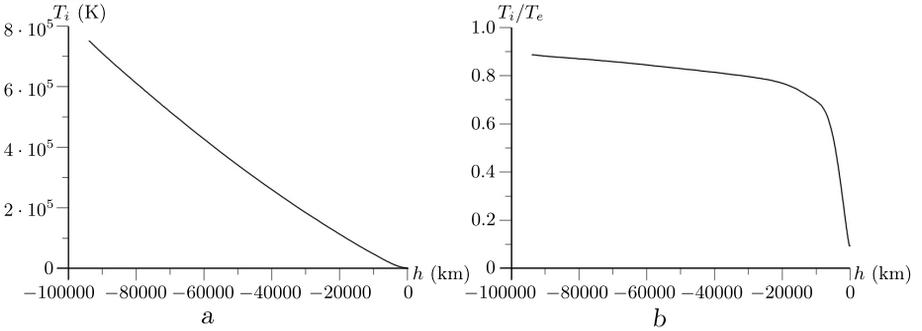


Рис. 5. Температура газа в трубке (а), отношение температур газа внутри и снаружи трубки (b) в зависимости от глубины конвективной зоны

[Figure 5. The temperature of the gas in the tube (a), the ratio of the temperatures of the gas inside and outside the tube (b) depending on the depth of the convective zone]

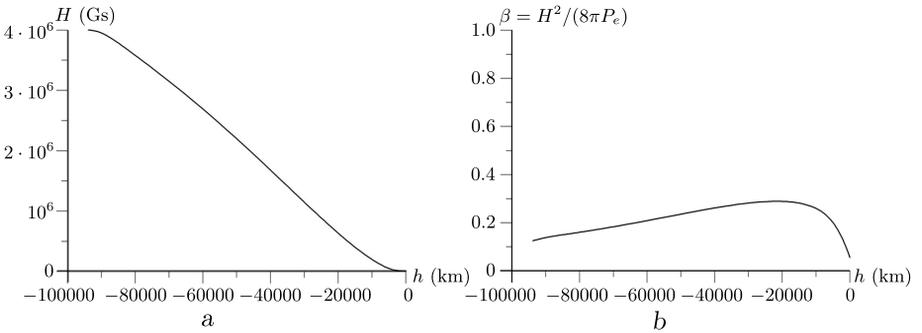


Рис. 6. Напряженность магнитного поля в трубке (а), отношение магнитного давления в трубке к давлению окружающего газа (b) в зависимости от глубины конвективной зоны

[Figure 6. The magnetic field strength in the tube (a), the ratio of the magnetic pressure in the tube to the pressure of the surrounding gas (b) depending on the depth of the convective zone]

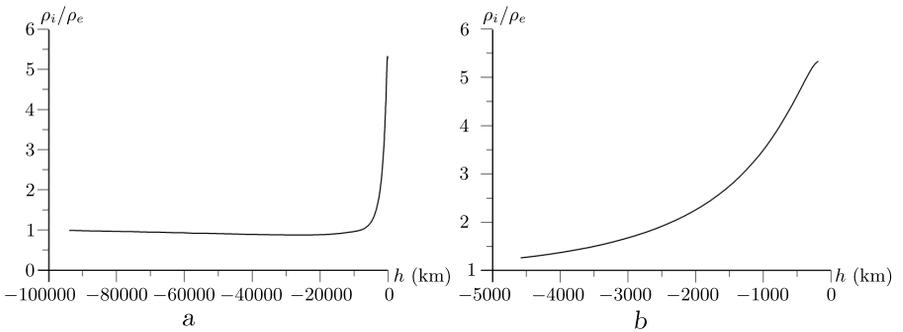


Рис. 7. Отношение плотностей газа внутри и снаружи магнитной трубки в средних слоях конвективной зоны (а), вблизи фотосферного уровня (b)

[Figure 7. The ratio of gas densities inside and outside the magnetic tube in the middle layers of the convective zone (a), near the photospheric level (b)]

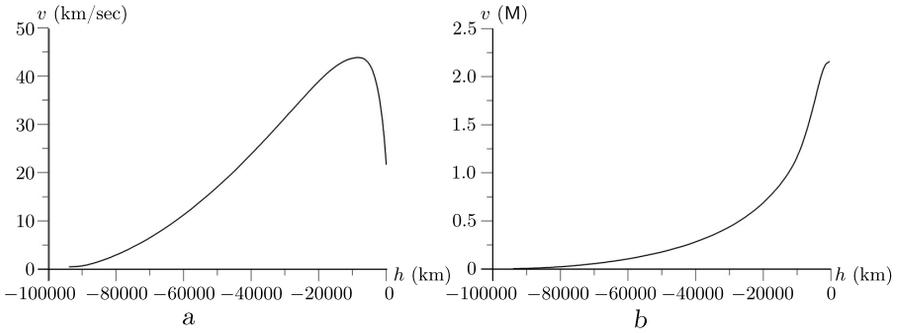


Рис. 8. Уменьшение абсолютной скорости подъема магнитной трубки (в км/сек) вблизи фотосферного уровня (а); нелинейный рост скорости подъема магнитной трубки в числах Маха (b)

[Figure 8. Decrease in the absolute rate of ascent of the magnetic tube (in km/sec) near the photospheric level (a); nonlinear increase in the rate of ascent of the magnetic tube in Mach numbers (b)]

вождающиеся ростом температуры и мощности волнового потока в пределах активной области [6, 15].

Заключение. Анализ устойчивости колебаний магнитных полей на различных глубинах конвективной зоны (рис. 4, b) позволяет сделать вывод, что главным физическим параметром, определяющим устойчивость зарождающейся активной области, является ее горизонтальный размер. С ростом размера активной области (длины волны развития неустойчивости Паркера) ее рождение реализуется при сбросе магнитных полей с большей глубины конвективной зоны. При увеличении глубины начального расположения магнитной трубки в конвективной зоне в ней по барометрическому закону растут давление и плотность газа. Нелинейно возрастает масса стекающего газа при всплывании арочной структуры и масса «заякоривания» магнитного поля в основании.

Напряженность магнитного поля в трубке не играет такой важной роли для устойчивости равновесных положений, как горизонтальный размер. При увеличении напряженности магнитного поля в трубке устойчивость равновесных положений нелинейно возрастает только для слабых полей (рис. 4, b). При достижении определенных значений рост напряженности поля увеличивает устойчивость магнитной трубки незначительно. С этим обстоятельством связано интересное наблюдательное явление при зарождении активной области: хвостовая часть активной области всплывает на фотосферный уровень раньше головной части (рис. 1). В хвостовой части магнитные поля распределены по большей площади, чем в головной. При условии сохранения магнитного потока напряженность поля в хвостовой части ниже, чем в лидирующей группе, и потеря устойчивости происходит раньше по времени. Зависимость от роста напряженности небольшая (рис. 4, b) и задержка составляет несколько минут согласно наблюдательным данным [3, 7].

Результаты математического моделирования подъема магнитных полей из равновесных положений к фотосферному уровню позволяет сформулировать главный результат настоящей работы: развитие неустойчивости Паркера в длинноволновой части спектра глобальных колебаний магнитных полей (волновое число $m \leq 10$) в пределах конвективной зоны обеспечивает

всплывание магнитного потока к фотосферному уровню со значениями МГД-параметров, близкими к физическим параметрам, измеряемым в солнечных пятнах. Из-за нелинейного падения температуры окружающего газа режим всплывания магнитного поля в верхних слоях конвективной зоны становится сверхзвуковым. Зарождающаяся активная область становится мощным источником потока ударных волн, уходящих в солнечную атмосферу, что согласуется с данными наблюдений [6, 15].

Конкурирующие интересы. Авторы не имеют конфликта интересов по материалам представленной работы.

Авторский вклад и ответственность. Все авторы принимали участие в разработке концепции статьи и в написании рукописи. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

Финансирование. Работа выполнена на базе бюджетного финансирования.

Благодарность. Авторы благодарят Л. В. Ермакову (Институт солнечно-земной физики СО РАН) за предоставленные наблюдательные данные по зарождению активных областей, А. Г. Косовичева (Крымская астрофизическая обсерватория РАН) за предоставленные данные по внутреннему строению Солнца из проекта GONG. Авторы благодарят С. В. Алексеенко (институт теплофизики СО РАН) за обсуждение материалов работы.

Библиографический список

1. Bray R. J., Loughhead R. E. *Sunspots*. New York: Dover Publ., 1979. 303 pp.
2. Обридко В. Н. *Солнечные пятна и комплексы активности*. М.: Наука, 1985. 255 с.
3. Tlatov A. G. Lifetime of sunspots and pores // *Sol. Phys.*, 2023. vol. 298, 93. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11207-023-02186-7>.
4. Parker E. N. *Cosmical Magnetic Fields. Their Origin and their Activity* / The International Series of Monographs on Physics. Oxford: Clarendon Press, 1979. xvii+841 pp.
5. Tlatov A. G. Dark dots on the photosphere and their counting in the sunspot index // *Sol. Phys.*, 2022. vol. 297, 67, arXiv: 2205.13142 [astro-ph.SR]. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11207-022-02002-8>.
6. Alissandrakis C. E., Vial J.-C. Explosive events in the quiet Sun near and beyond the solar limb observed with the Interface Region Imaging Spectrograph (IRIS) // *Sol. Phys.*, 2023. vol. 298, 18, arXiv: 2301.07190 [astro-ph.SR]. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11207-023-02111-y>.
7. Григорьев В. М., Ермакова Л. В., Хлыстова А. И. Появление магнитного потока на солнечной поверхности и рождение активных областей // *Астрон. ж.*, 2009. Т. 86, № 9. С. 935–944. EDN: KWICRF.
8. Alekseenko S. V., Dudnikova G. I., Romanov V. A., et al. Magnetic field instabilities in the solar convective zone // *Rus. J. Eng. Thermophys.*, 2000. vol. 10. pp. 243–262.
9. Spruit H. C., Zweibel E. G. Convective instability of thin flux tubes // *Sol. Phys.*, 1979. vol. 62, no. 1. pp. 15–22. EDN: BKMUKO. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00150128>.
10. Ruderman M. S., Petrukhin N. S. Nonlinear generation of fluting perturbations by kink mode in a twisted magnetic tube // *Sol. Phys.*, 2022. vol. 297, no. 9, 116. EDN: ASYPRH. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11207-022-02054-w>.
11. Christensen-Dalsgaard J., Däppen W., Ajukov S. V., et al. The current state of Solar modeling // *Science*, 1996. vol. 272, no. 5266. pp. 1286–1292. DOI: <https://doi.org/10.1126/science.272.5266.1286>.

12. Parker E. N. Theoretical properties of Omega-loops in the convective zone of the Sun. 1: Emerging bipolar magnetic regions // *Astrophys. J.*, 1994. vol. 433. pp. 867–874. DOI: <https://doi.org/10.1086/174695>.
13. Степанов Е. А., Майоров А. О., Романов К. В. [и др.] Математическое моделирование развития неустойчивости Паркера крупномасштабных колебаний магнитных полей в конвективной зоне Солнца // *Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Физика*, 2021. Т. 21, № 2. С. 106–115. EDN: DZYYVB. DOI: <https://doi.org/10.18500/1817-3020-2021-21-2-106-115>.
14. Zurbriggen E., Cécere M., Sieyra M. V., et al. An MHD study of large-amplitude oscillations in Solar filaments // *Sol. Phys.*, 2021. vol. 296, 173, arXiv: 2110.07687 [astro-ph.SR]. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11207-021-01908-z>.
15. Hamada A., Asikainen T., Mursula K. New homogeneous dataset of Solar EUV synoptic maps from SOHO/EIT and SDO/AIA // *Sol. Phys.*, 2019. vol. 295, no. 1, 2. EDN: BVEEJG. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11207-019-1563-y>.

MSC: 85A30, 85A20

Mathematical modeling of sunspot nucleation at the photospheric level of the Sun

*D. V. Romanov*¹, *K. V. Romanov*¹, *V. A. Romanov*²,
*E. A. Stepanov*², *A. A. Lebedev*²

¹ Krasnoyarsk State Pedagogical University,
89, Ada Lebedeva st., Krasnoyarsk, 660049, Russian Federation.

² Saratov State University,
83, Astrakhanskaya st., Saratov, 410012, Russian Federation.

Abstract

In the present study, the initial stage of the generation of a group of sunspots at the photospheric level of the Sun is studied by computer simulation. The development of the nonlinear phase of the Parker instability of large-scale oscillations of magnetic fields in the middle layers of the convective zone is numerically modeled. The process of adiabatic cooling of a thin magnetic tube that floats from depths of the order of 100,000 km to the photospheric level is studied. The results of the calculations make it possible to analyze in detail the change in the magnetogasdynamic parameters of the tube at different depths of the convective zone, and to obtain the values of the physical parameters of emerging sunspots that can be compared with observational data.

Mathematical Modeling, Numerical Methods and Software Complexes Research Article

© Authors, 2023

© Samara State Technical University, 2023 (Compilation, Design, and Layout)

 The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Please cite this article in press as:

Romanov D. V., Romanov K. V., Romanov V. A., Stepanov E. A., Lebedev A. A. Mathematical modeling of sunspot nucleation at the photospheric level of the Sun, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2023, vol. 27, no. 4, pp. 723–736. EDN: JEEWMQ. DOI: 10.14498/vsgtu2015 (In Russian).

Authors' Details:

Dmitry V. Romanov  <https://orcid.org/0000-0002-4982-5973>

Cand. Phys. & Math. Sci.; Associate Professor; Dept. of Computer Science and Information Technology in Education; e-mail: d-v-romanov@ya.ru

Konstantin V. Romanov  <https://orcid.org/0000-0001-7320-2517>

Cand. Phys. & Math. Sci.; Associate Professor; Dept. of Mathematics and Methods of Teaching Mathematics; e-mail: k-v-romanov@ya.ru

Valery A. Romanov  <https://orcid.org/0000-0001-9876-0822>

Dr. Phys. & Math. Sci.; Professor; Dept. of Mathematical Cybernetics and Computer Science; e-mail: valeriy.a.romanov@yandex.ru

Evgeny A. Stepanov  <https://orcid.org/0000-0002-2050-2724>

Postgraduate Student; Dept. of Mathematical Cybernetics and Computer Science; e-mail: ev_stepanov@yandex.ru

Anton A. Lebedev  <https://orcid.org/0000-0002-8241-1916>

Postgraduate Student; Dept. of Mathematical Cybernetics and Computer Science; e-mail: maiorovaleks94@gmail.com

The paper investigates the physical mechanism of the time delay in the formation of the head part of the active region compared with the formation of the sprayed tail part. The problem of stability of nascent active regions is also being investigated. The physical parameters determining the stability of the formed active regions at various phases of the solar activity cycle are highlighted. The physical mechanism of generation of a powerful shock wave flux in the initial stage of the nucleation of the active region, which makes a significant contribution to the abnormal heating of the solar atmosphere recorded in the observational data, has been determined.

Keywords: photosphere, sunspots, convective zone of the Sun, magnetic tube, Parker instability.

Received: 30th April, 2023 / Revised: 5th October, 2023 /

Accepted: 1st November, 2023 / First online: 13th December, 2023

Competing interests. The authors do not have any conflicts of interest regarding the materials presented in this work.

Authors' contributions and responsibility. All authors participated in the development of the article's concept and writing of the manuscript. The authors take full responsibility for submitting the final manuscript for publication. The final version of the manuscript has been approved by all authors.

Funding. This work was carried out with budget funding.

Acknowledgments. The authors would like to thank L.V. Ermakova (Institute of Solar-Terrestrial Physics, Siberian Branch of the RAS) for providing observational data on the formation of active regions, A.G. Kosovichev (Crimean Astrophysical Observatory, RAS) for providing data on the internal structure of the Sun from the GONG project. The authors also thank S.V. Alekseenko (Institute of Thermophysics, Siberian Branch of the RAS) for the discussions regarding the materials in this work.

References

1. Bray R. J., Loughhead R. E. *Sunspots*. New York, Dover Publ., 1979, 303 pp.
2. Obridko V. N. *Solnechnye pjatna i komplekсы aktivnosti* [Sunspots and Activity Complexes]. Moscow, Nauka, 1985, 255 pp. (In Russian)
3. Tlatov A. G. Lifetime of sunspots and pores, *Sol. Phys.*, 2023, vol. 298, 93. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11207-023-02186-7>.
4. Parker E. N. *Cosmical Magnetic Fields. Their Origin and their Activity*, The International Series of Monographs on Physics. Oxford, Clarendon Press, 1979, xvii+841 pp.
5. Tlatov A. G. Dark dots on the photosphere and their counting in the sunspot index, *Sol. Phys.*, 2022, vol. 297, 67, arXiv: 2205.13142 [astro-ph.SR]. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11207-022-02002-8>.
6. Alissandrakis C. E., Vial J-C. Explosive events in the quiet Sun near and beyond the solar limb observed with the Interface Region Imaging Spectrograph (IRIS), *Sol. Phys.*, 2023, vol. 298, 18, arXiv: 2301.07190 [astro-ph.SR]. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11207-023-02111-y>.
7. Grigor'ev V. M., Ermakova L. V., Khlystova A. I. Emergence of magnetic flux at the solar surface and the origin of active regions, *Astron. Rep.*, 2009, vol. 53, no. 9, pp. 869–878. EDN: MWTYGB. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1063772909090108>.
8. Alekseenko S. V., Dudnikova G. I., Romanov V. A., et al. Magnetic field instabilities in the solar convective zone, *Rus. J. Eng. Thermophys.*, 2000, vol. 10, pp. 243–262.
9. Spruit H. C., Zweibel E. G. Convective instability of thin flux tubes, *Sol. Phys.*, 1979, vol. 62, no. 1, pp. 15–22. EDN: BKMUKO. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00150128>.

10. Ruderman M. S., Petrukhin N. S. Nonlinear generation of fluting perturbations by kink mode in a twisted magnetic tube, *Sol. Phys.*, 2022, vol. 297, no. 9, 116. EDN: ASYPRH. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11207-022-02054-w>.
11. Christensen–Dalsgaard J., Däppen W., Ajukov S. V., et al. The current state of Solar modeling, *Science*, 1996, vol. 272, no. 5266, pp. 1286–1292. DOI: <https://doi.org/10.1126/science.272.5266.1286>.
12. Parker E. N. Theoretical properties of Omega-loops in the convective zone of the Sun. 1: Emerging bipolar magnetic regions, *Astrophys. J.*, 1994, vol. 433, pp. 867–874. DOI: <https://doi.org/10.1086/174695>.
13. Stepanov E. A., Maiorov A. O., Romanov K. V., et al. Mathematical modeling of the development of the Parker instability of large-scale oscillations of magnetic fields in the convective zone of the Sun, *Izv. Sarat. Univ. Physics*, 2021, vol. 21, no. 2, pp. 102–115 (In Russian). EDN: DZYYVB. DOI: <https://doi.org/10.18500/1817-3020-2021-21-2-106-115>.
14. Zurbriggen E., Cécere M., Sieyra M. V., et al. An MHD study of large-amplitude oscillations in Solar filaments, *Sol. Phys.*, 2021, vol. 296, 173, arXiv: 2110.07687 [astro-ph.SR]. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11207-021-01908-z>.
15. Hamada A., Asikainen T., Mursula K. New homogeneous dataset of Solar EUV synoptic maps from SOHO/EIT and SDO/AIA, *Sol. Phys.*, 2019, vol. 295, no. 1, 2. EDN: BVEEJG. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11207-019-1563-y>.

MSC: 47H10, 54H25

A new common fixed point theorem on orthogonal metric spaces and an application



Y. Touail, A. Jaid, D. El Moutawakil

Université Sultan Moulay Slimane,
Beni-Mellal, 23000, Morocco.

Abstract

In the present work, a common fixed point result for self-mappings on orthogonal complete metric spaces, which are not necessarily complete, is proved. Furthermore, as an application, we find the existence of solutions to two differential equations.

Keywords: common fixed point, orthogonal metric space.

Received: 28th January, 2023 / Revised: 17th November, 2023 /

Accepted: 13th December, 2023 / First online: 25th December, 2023

1. Introduction and Preliminary. The pioneering mathematician in the area of fixed point theory was Banach, who established and proved the first fixed point theorem is named the Banach contraction theorem [1]. After that, extensions of this theorem have been obtained either by generalizing the distance properties of the underlying metric space or by modifying the contractive condition on the mappings.

In 2017, Eshaghi Gordji et al. [2] defined orthogonal metric spaces as a generalization of metric spaces, as follows:

Differential Equations and Mathematical Physics

Short Communication

© Authors, 2023

© Samara State Technical University, 2023 (Compilation, Design, and Layout)

© The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Please cite this article in press as:

Touail Y., Jaid A., El Moutawakil D. A new common fixed point theorem on orthogonal metric spaces and an application, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2023, vol. 27, no. 4, pp. 737–744. EDN: KPNGNF. DOI: 10.14498/vsgtu1998.

Authors' Details:

Youssef Touail  <https://orcid.org/0000-0003-3593-8253>

MATIC, Faculté Polydisciplinaire de Khouribga;

e-mail: youssef9touail@gmail.com; y.touail@usms.ma

Amine Jaid  <https://orcid.org/0000-0001-7322-2008>

MATIC, Faculté Polydisciplinaire de Khouribga; e-mail: aminejaid1990@gmail.com

Driss El Moutawakil  <https://orcid.org/0000-0001-7322-2008>

MATIC, Faculté Polydisciplinaire de Khouribga; e-mail: d.elmoutawakil@gmail.com

DEFINITION 1 [2]. Let $X \neq \emptyset$ and let $\perp \subset X \times X$ be a binary relation. If \perp satisfies the following hypothesis:

$$\exists x_0 : (\forall y, y \perp x_0) \text{ or } (\forall y, x_0 \perp y).$$

Then (X, \perp) is called an orthogonal set (briefly O -set).

The triplet (X, \perp, d) is called an orthogonal metric space if (X, d) is a metric space and (X, \perp) is an O -set, and x_0 is said to be an orthogonal element.

Then, an important extension of the Banach fixed point principal is given, as follows:

THEOREM 1 [2]. *Let (X, \perp, d) be an O -complete metric space and T a self-mapping on X which is \perp -preserving and \perp -continuous. If there exists $k \in [0, 1)$ such that for all $x, y \in X$:*

$$x \perp y \text{ implies } d(Tx, Ty) \leq kd(x, y). \tag{1}$$

Then, T has a unique fixed point.¹

Later, many remarkable works in this area can be found in [3–5].

Motivated by [2] and other works concerning the theory of common fixed points [6–9], in this paper we restrict our studies only to orthogonal elements, to prove a result of common fixed points in a new setting and under weak conditions. In other words, we extend condition (1) to two self-mappings $f, g : X \mapsto X$, as follows:

$$x \perp y \text{ implies } d(fx, gy) \leq \phi(d(x, y)),$$

where $\phi \in \Phi$, the class of all nondecreasing selfmaps ϕ on $[0, +\infty)$ satisfying $\sum_{n=1}^{+\infty} \phi^n(t) < +\infty$ for all $t > 0$.

Moreover, an extension of the Banach fixed point theorem is delivered for a large class of mappings, we call it weakly- \perp -preserving.

In addition, we give an example to support the proven theorem and to show the usability of this new direction of research.

At the end of the results, an application to the study of the existence of common solutions for a class of differential equations is presented.

Finally, we assert some definitions that will be needed in the topic:

DEFINITION 2 [2]. Let (X, \perp) be an O -set. A mapping $T : X \rightarrow X$ is said to be \perp -preserving if $Tx \perp Ty$ whenever $x \perp y$.

DEFINITION 3 [2]. Let (X, \perp) be an O -set. A sequence $\{x_n\}$ is called an orthogonal sequence (briefly, O -sequence) if

$$(\forall n, x_n \perp x_{n+1}) \text{ or } (\forall n, x_{n+1} \perp x_n).$$

DEFINITION 4 [2]. Let (X, \perp, d) be an orthogonal metric space. Then, a mapping $T : X \rightarrow X$ is said to be orthogonally continuous (briefly \perp -continuous) in $x \in X$, if for each O -sequence $\{x_n\} \subset X$ such that $x_n \rightarrow x$ as $n \rightarrow \infty$, we obtain $Tx_n \rightarrow Tx$ as $n \rightarrow \infty$. In addition, T is said to be \perp -continuous on X if T is \perp -continuous in each $x \in X$.

¹In the sequel, we will recall the related basic notions of orthogonality.

DEFINITION 5 [2]. Let (X, \perp, d) be an orthogonal metric space. Then, X is said to be orthogonally complete (or \perp -complete) if every Cauchy O -sequence is convergent.

REMARK 1 [2]. Every complete metric space (continuous mapping) is O -complete metric space (\perp -continuous mapping) and the converse is not true.

EXAMPLE 1 [2]. Let $X = \mathbb{Z}$. Define the binary relation \perp in X by $m \perp n$ if there exists $k \in \mathbb{Z}$ such that $m = kn$. It is easy to see that $0 \perp n$ for all $n \in \mathbb{Z}$. Hence, (X, \perp) is an O -set.

2. Main results. The main result of this article is the following:

THEOREM 2. Let (X, \perp, d) be an O -complete metric space and $f, g : X \rightarrow X$ be \perp -continuous mappings such that:

- 1) $x \perp y \implies (fx \perp gy \text{ or } gy \perp fx)$ and $(gx \perp fy \text{ or } fy \perp gx)$;
- 2) $x \perp y \implies d(gx, fy) \leq \phi(d(x, y))$, for all $x, y \in X$, where $\phi \in \Phi$.

Then, f, g have a common fixed point.

Proof. Since X is an O -set, there exists at least $x_0 \in X$ such that

$$\forall y \in X, x_0 \perp y \text{ or } \forall y \in X, y \perp x_0.$$

So, in particular we have $x_0 \perp fx_0$ or $fx_0 \perp x_0$. We can choose a sequence $\{x_n\}$ defined by $x_{2n+1} = fx_{2n}$ and $x_{2n+2} = gx_{2n+1}$ for all $n \in \mathbb{N}^*$. The condition 1) implies

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, x_n \perp x_{n+1} \text{ or } \forall n \in \mathbb{N}^*, x_{n+1} \perp x_n.$$

Then, $\{x_n\}$ is an O -sequence.

Hence, we have

$$d(x_{2n+1}, x_{2n+2}) = d(fx_{2n}, gx_{2n+1}) \leq \phi(d(x_{2n}, x_{2n+1})).$$

Similarly, we have

$$d(x_{2n+2}, x_{2n+3}) = d(fx_{2n+2}, gx_{2n+1}) \leq \phi(d(x_{2n+1}, x_{2n+2})).$$

Therefore,

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq \phi(d(x_{n-1}, x_n)) \leq \phi^2(d(x_{n-2}, x_{n-1})) \leq \dots \leq \phi^n(d(x_0, x_1)),$$

for all $n \in \mathbb{N}$. Let $n, m \in \mathbb{N}^*$, we have

$$d(x_n, x_{n+m}) \leq \sum_{k=n}^{k=n+m-1} d(x_k, x_{k+1}) \leq \sum_{k=n}^{k=n+m-1} \phi^k(d(x_k, x_{k+1})). \quad (2)$$

Letting $n, m \rightarrow \infty$ in (2), we deduce that $\{x_n\}$ is a Cauchy O -sequence. Since X is an O -complete space there exists $u \in X$ such that $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = u$. On the other side, the orthogonal continuity of f, g implies $\lim_{n \rightarrow \infty} fx_n = fu$ and $\lim_{n \rightarrow \infty} gx_n = gu$, which leads to $u = fu = gu$. \square

EXAMPLE 2. Let $X = \mathbb{Q}$ and $d(x, y) = |x - y|$ for all $x, y \in X$ is the usual metric on X .

Define a binary relation on X by

$$x \perp y \iff x = 0 \text{ or } y = 0.$$

Note that (X, \perp, d) is not a complete metric space, but is an O -complete metric space.

Consider the mappings $f, g : X \rightarrow X$ defined by

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{if } x = 1, \\ x/3, & \text{if } x \neq 1, \end{cases}$$

and

$$g(x) = \begin{cases} 1, & \text{if } x = 1, \\ x/2, & \text{if } x \neq 1. \end{cases}$$

Without loss of generality, let $x_n \perp x_{n+1}$ for each $n \in \mathbb{N}$. Then we have $x_n = 0$, which leads to $fx_n = x_n/3 = 0 = f0$ and $gu_n = x_n/2 = 0 = g0$. Therefore f, g are \perp -continuous mappings.

Clearly, the mappings f, g satisfy the condition 1) of Theorem 2.

On the other hand, let ϕ be a function defined by $\phi(t) = 3t/4$, for all $t > 0$. Let $x, y \in X$ such that $x \perp y$, we obtain $x = 0$ or $y = 0$.

Case 1: If $x = 0$, we have

$$d(f0, gy) = \frac{|y|}{2} \leq \frac{3}{4}d(0, y) \leq \phi(d(0, y)).$$

Case 2: If $y = 0$, we have

$$d(fx, g0) = \frac{|x|}{3} \leq \frac{3}{4}d(x, 0) \leq \phi(d(x, 0)).$$

Then, all assumptions of Theorem 2 are satisfied and $1 = f1 = g1$ is the common fixed point.

Now, we introduce a new definition named weakly- \perp -preserving self-mapping:

DEFINITION 6. Let (X, \perp) be an O -set. A mapping $T : X \rightarrow X$ is said to be weakly- \perp -preserving if $Tx \perp Ty$ or $Ty \perp Tx$ whenever $x \perp y$.

REMARK 2. It is clear that a \perp -preserving mapping is a weakly- \perp -preserving mapping, but in general the converse is not true.

EXAMPLE 3. Let $X = [0, 1]$, define the function $Tx = 1 - x$, $x \in X$. Define a binary relation $\perp \subset X \times X$ by

$$x \perp y \iff x \leq y.$$

Therefore, (X, \perp) is an O -set with the orthogonal element $x_0 = 0$.

We have $0 \perp 1$, $T0 = 1$ and $T1 = 0$, thus $T1 \perp T0$ but $T0 \perp T1$ does not hold.

Thus, the mapping T is weakly- \perp -preserving, but not \perp -preserving.

By taking $g = f$ in our main theorem, we obtain a new generalization of Theorem 1.

THEOREM 3. *Let (X, \perp, d) be an O -complete metric space and T be a self-mapping on X which is weakly- \perp -preserving and \perp -continuous. If there exists $\phi \in \Phi$ such that for all $x, y \in X$, we have*

$$x \perp y \text{ implies } d(Tx, Ty) \leq \phi(d(x, y)).$$

Then, T has a unique fixed point.

3. Application. In this section, we will prove the existence of a common solution for the two differential equations:

$$\begin{cases} x'(t) = k(t, x(t)), & t \in I = [0, \theta], \theta \in (1, +\infty); \\ x(1) = a, & a \geq 2, \end{cases} \quad (3)$$

and

$$\begin{cases} x'(t) = k\left(t, a + \int_1^t k(u, x(u))du\right), & t \in I = [0, \theta], \theta \in (1, +\infty); \\ x(1) = a, & a \geq 2, \end{cases} \quad (4)$$

where $x \in \mathcal{C}(I)$, the space of all continuous functions from I into \mathbb{R} and $k : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ is a continuous mapping.

Let $X = \{x \in \mathcal{C}(I) / x(t) \geq 1\}$ endowed by the metric

$$d(x, y) = \sup_{t \in I} |x(t) - y(t)|.$$

Define the mappings $f, g : X \rightarrow X$, as follows:

$$fx(t) = a + \int_1^t k(s, x(s))ds, \quad (5)$$

and

$$gx(t) = a + \int_1^t k\left(s, a + \int_1^s k(u, x(u))du\right)ds, \quad (6)$$

for all $t \in I$.

Hence, equations (3) and (4) have a common solution if and only if the mappings f and g have a common fixed point.

THEOREM 4. Let $f, g : X \rightarrow X$ be the mappings defined by (5) and (6). Assuming that the following conditions are satisfied:

- 1) $k(t, x) \geq 0$ for all $x \geq 0$ and $t \in I$;
- 2) there exists $h < 1$ such that for all $x, y \in X$,

we have

$$|k(\cdot, fx) - k(\cdot, y)| \leq \frac{h}{\theta - 1} |x - y|, \quad (7)$$

for any $x, y \in \mathcal{C}(I)$, with $xy \geq y$ or $xy \geq x$.

Then, the differential equations (3) and (4) have a positive common solution.

Proof. Let $x, y \in X$. Define an orthogonal relation \perp on X by

$$x \perp y \iff x(t)y(t) \geq y(t) \text{ or } x(t)y(t) \geq x(t), \text{ for all } t \in I. \quad (8)$$

It is clear that (X, \perp, d) is a O -complete metric space.

Let $x, y \in \mathcal{C}(I)$ be such that $x \perp y$, since $fx(t), gy(t) \geq 2$, then $fx(t)gy(t) \geq gy(t)$ and $gx(t)fy(t) \geq fy(t)$, which means that condition 1) of Theorem 2 holds. Also, from the definitions of f and g , we see that f, g are \perp -continuous.

On the other hand, we will show that the contraction 2) of Theorem 2 is satisfied.

By considering (7) and (8), we obtain

$$\begin{aligned} |gx(t) - fy(t)| &\leq \int_1^t |k(s, fx(s)) - k(s, y(s))| ds \leq \\ &\leq \int_1^\theta \frac{h}{\theta - 1} |x(s) - y(s)| ds \leq hd(x, y). \end{aligned}$$

So

$$d(gx, fy) \leq \phi(d(x, y)).$$

where $\phi(t) = ht$, with $h < 1$.

Finally, we conclude by Theorem 2 that the differential equations (3) and (4) have a positive common solution. \square

REMARK 3. In the above theorem, the function $x_0(t) = 2$ for all $t \in I$ is an orthogonal element.

Competing interests. On behalf of all authors, the corresponding author states that there is no conflict of interest.

Authors' contributions and responsibilities. Each author has participated in the development of the concept of the article and in the writing of the manuscript. The authors are absolutely responsible for submitting the final manuscript in print. Each author has approved the final version of the manuscript.

Data availability. No data were used to support this study.

References

1. Banach S. Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur applications aux équations intégrales, *Fund. Math.*, 1922, vol. 3, no. 1, pp. 133–181. <http://eudml.org/doc/213289>.
2. Gordji M. E., Rameani M., De La Sen M., Cho Y.J. On orthogonal sets and Banach fixed point theorem, *Fixed Point Theory*, 2017, vol. 18, no. 2, pp. 569–578. DOI: <https://doi.org/10.24193/fpt-ro.2017.2.45>.
3. Baghani H., Eshaghi Gordji M., Ramezani M. Orthogonal sets: The axiom of choice and proof of a fixed point theorem, *J. Fixed Point Theory Appl.*, 2016, vol. 18, pp. 465–477. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11784-016-0297-9>.
4. Khalehghli S., Rahimi H., Eshaghi Gordji M. Fixed point theorems in R -metric spaces with applications, *AIMS Mathematics*, 2020, vol. 5, no. 4, pp. 3125–3137. DOI: <https://doi.org/10.3934/math.2020201>.
5. Touail Y., El Moutawakil D. Fixed point theorems on orthogonal complete metric spaces with an application, *Int. J. Nonl. Anal. Appl.*, 2021, vol. 12, no. 2, pp. 1801–1809. DOI: <https://doi.org/10.22075/ijnaa.2021.23033.2464>.
6. Jaid J., Touail Y., El Moutawakil D. On μF -contraction: New types of fixed points and common fixed points in Banach spaces, *Asian-European J. Math.*, 2023, vol. 16, no. 11, 2350198. DOI: <https://doi.org/10.1142/S179355712350198X>.

7. Touail Y., El Moutawakil D. New common fixed point theorems for contractive self mappings and an application to nonlinear differential equations, *Int. J. Nonlinear Anal. Appl.*, 2021, vol. 12, no. 1, pp. 903–911. DOI: <https://doi.org/10.22075/IJNAA.2021.21318.2245>.
8. Touail Y., El Moutawakil D. Some new common fixed point theorems for contractive selfmappings with applications, *Asian-European J. Math.*, 2022, vol. 15, no. 4, 2250080. DOI: <https://doi.org/10.1142/S1793557122500802>.
9. Touail Y., Jaid A., El Moutawakil D. A note on common fixed point theorems in a bounded metric space, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2023, vol. 27, no. 2, pp. 241–249. EDN: ZXSBPZ. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1940>.

УДК 517.988.523

Новая общая теорема о неподвижной точке в ортогональных метрических пространствах и ее приложение

Y. Touail, A. Jaid, D. El Moutawakil

Университет Султана Мулая Слимана,
Бени-Меллаль, 23000, Марокко.

Аннотация

Доказывается общий результат о неподвижной точке для самоотображений на ортогональных полных метрических пространствах, которые не обязательно полны. В качестве приложения полученного результата найдено существование решений двух дифференциальных уравнений.

Ключевые слова: общая неподвижная точка, ортогональное метрическое пространство.

Получение: 28 января 2023 г. / Исправление: 17 ноября 2023 г. /
Принятие: 13 декабря 2023 г. / Публикация онлайн: 25 декабря 2023 г.

Конкурирующие интересы. От имени всех авторов автор-корреспондент заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Авторский вклад и ответственность. Все авторы принимали участие в разработке концепции статьи; все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

Доступность данных. Никакие данные не использовались в этом исследовании.

Дифференциальные уравнения и математическая физика

Краткое сообщение

© Коллектив авторов, 2023

© СамГТУ, 2023 (составление, дизайн, макет)

©   Контент публикуется на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

Образец для цитирования

Touail Y., Jaid A., El Moutawakil D. A new common fixed point theorem on orthogonal metric spaces and an application, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2023, vol. 27, no. 4, pp. 737–744. EDN: KPNGNF. DOI: 10.14498/vsgtu1998.

Сведения об авторах

Youssef Touail   <https://orcid.org/0000-0003-3593-8253>

MATIC, Faculté Polydisciplinaire de Khouribga;

e-mail: youssef9touail@gmail.com; y.touail@usms.ma

Amine Jaid  <https://orcid.org/0000-0001-7322-2008>

MATIC, Faculté Polydisciplinaire de Khouribga; e-mail: aminejaid1990@gmail.com

Driss El Moutawakil  <https://orcid.org/0000-0001-7322-2008>

MATIC, Faculté Polydisciplinaire de Khouribga; e-mail: d.elmoutawakil@gmail.com



УДК 517.521.7

Об одном способе суммирования многомерных рядов

К. Б. Сабитов

Стерлитамакский филиал Уфимского университета науки и технологии,
Россия, 453103, Стерлитамак, пр. Ленина, 49.

Аннотация

Известно, что в курсах анализа кратные ряды рассматриваются лишь на понятийном уровне, приводятся их простейшие свойства. Широко распространены два способа суммирования кратных рядов Фурье — сферический и прямоугольный. В данной работе предлагается новый способ обоснования сходимости многомерных рядов путем их сведения к одномерному ряду, что позволяет применить известные утверждения для одномерных рядов к многомерным. В качестве иллюстрации указанного способа суммирования приведены примеры обоснования сходимости числовых и функциональных рядов.

Ключевые слова: многомерный числовой ряд, многомерный функциональный ряд, сведение к одномерному ряду, сходимость, равномерная сходимость, примеры.

Получение: 15 декабря 2023 г. / Исправление: 20 декабря 2023 г. /
Принятие: 25 декабря 2023 г. / Публикация онлайн: 27 декабря 2023 г.

1. Рассмотрим положительный числовой ряд

$$\sum_{i_1, i_2, \dots, i_n=1}^{\infty} a_{i_1 i_2 \dots i_n}, \quad (1)$$

где $i_1, i_2, \dots, i_n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $a_{i_1 i_2 \dots i_n}$ — неотрицательные действительные числа.

Как известно, теория одномерных числовых и функциональных рядов достаточно полно изложена в курсах по математическому анализу. Однако кратные ряды в них рассматриваются на понятийном уровне (см. например, [1, с. 359–376], [2, с. 59–66], [3, с. 665–671], [4, § 9.15] и др. авторов)

Дифференциальные уравнения и математическая физика Краткое сообщение

© Коллектив авторов, 2023

© СамГТУ, 2023 (составление, дизайн, макет)

Этот контент публикуется на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

Образец для цитирования

Сабитов К. Б. Об одном способе суммирования многомерных рядов // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2023. Т. 27, № 4. С. 745–752. EDN: UMYSET. DOI: 10.14498/vsgtu2069.

Сведения об авторе

Камиль Басирович Сабитов <https://orcid.org/0000-0001-9516-2704>

доктор физико-математических наук, профессор; главный научный сотрудник; сектор фундаментальных научных исследований; e-mail: sabitov_fmfm@mail.ru

и приводятся лишь их простейшие свойства. В монографиях [5, 6] предприняты попытки систематического изложения теории двойных числовых рядов и некоторых важных классов функциональных рядов.

При изучении краевых задач для дифференциальных уравнений смешанного типа и других в многомерных областях, например, прямоугольном параллелепипеде, цилиндре, эллипсоиде, возникают многомерные ряды по системе собственных функций соответствующей задачи на собственные значения. Решение таких краевых задач и определяется с помощью таких рядов с малыми знаменателями [7–11]. В связи с этим возникают вопросы по обоснованию сходимости многомерных числовых и функциональных рядов.

В данной работе предлагается новый способ обоснования сходимости положительного ряда (1) путем его сведения к одномерному ряду.

Для числа $a_{i_1 i_2 \dots i_n}$ через M определим максимум конечного набора натуральных чисел $\{i_1, i_2, \dots, i_n\}$:

$$M = \max\{i_1, i_2, \dots, i_n\} = \max_{1 \leq k \leq n} \{i_k\}.$$

ЛЕММА 1. Число членов $a_{i_1 i_2 \dots i_n}$ ряда (1), у которых хотя бы один из индексов i_k , $k = \overline{1, n}$, равен M , определяется по формуле

$$M^n - (M - 1)^n. \quad (2)$$

Доказательство. При заданном натуральном $M \geq 1$ число всех членов $a_{i_1 i_2 \dots i_n}$ ряда (1), где индексы i_k не превосходят M , т.е. $i_k \leq M$, $k = \overline{1, n}$, равно M^n и их для наглядности можно изобразить изолированными точками (целочисленными индексами) многомерного куба, расположенного в первом поликвадранте $1 \leq x_k$, $k = \overline{1, n}$, системы координат x_1, x_2, \dots, x_n . Тогда все точки $a_{i_1, i_2 \dots i_n}$ такого куба с заданными M , т.е. хотя бы один из индексов i_k , $k = \overline{1, n}$, равен M , лежат только на гранях $x_k = M$, $k = \overline{1, n}$. Внутри куба $1 \leq x_k \leq M - 1$, $k = \overline{1, n}$, не содержится ни одна такая точка. Следовательно, чтобы найти число членов ряда (1) с заданным M , надо из числа M^n вычесть число $(M - 1)^n$. \square

ЛЕММА 2. При любом $N \in \mathbb{N}$ справедливо равенство¹

$$\sum_{i_1, i_2, \dots, i_n=1}^N a_{i_1 i_2 \dots i_n} = \sum_{M=1}^N a_{i_1 i_2 \dots i_n}. \quad (3)$$

Доказательство. В левой части соотношения (3) всего N^n членов. Найдем число членов из правой части (3), используя формулу (2):

$$\begin{aligned} \sum_{M=1}^N (M^n - (M - 1)^n) &= 1 + 2^n - (2 - 1)^n + 3^n - (3 - 1)^n + \dots + \\ &+ (N - 1)^n - (N - 2)^n + N^n - (N - 1)^n = N^n. \end{aligned}$$

Это означает, что соотношение (3) является верным равенством. \square

¹Отметим, что в правой части равенства (3) и далее по тексту работы суммирование ведется по новому индексу M и эту часть следует понимать как сумму членов $a_{i_1 i_2 \dots i_n}$ ряда (1), у которых хотя бы один из индексов равен M .

ТЕОРЕМА 1. Пусть при больших M коэффициенты ряда (1) имеют оценку $a_{i_1 i_2 \dots i_n} = O(M^{-p})$, $p = n + h$, $0 < h < 1$. Тогда ряд (1) сходится.

Доказательство. В силу формулы (2) число членов ряда (1) с заданным M имеет порядок M^{n-1} . Тогда ряд (1) мажорируется сходящимся рядом

$$\sum_{i_1, i_2, \dots, i_n=1}^{\infty} a_{i_1 i_2 \dots i_n} = \sum_{M=1}^{\infty} a_{i_1 i_2 \dots i_n} \leq C_1 \sum_{M=1}^{\infty} \frac{1}{M^{1+h}} < +\infty,$$

где C_i — здесь и далее положительные постоянные, не зависящие от n . \square

В качестве использования теоремы 1 рассмотрим следующие примеры.

Пример 1. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{i_1, i_2, \dots, i_n=1}^{\infty} \frac{1}{(i_1 + i_2 + \dots + i_n)^\alpha}, \quad \alpha > 0. \quad (4)$$

Для этого общий член ряда (4) оценим следующим образом:

$$\frac{1}{n^\alpha M^\alpha} < \frac{1}{(i_1 + i_2 + \dots + i_n)^\alpha} = \frac{1}{M^\alpha} \frac{1}{\left(\frac{i_1}{M} + \frac{i_2}{M} + \dots + \frac{i_n}{M}\right)^\alpha} < \frac{1}{M^\alpha}. \quad (5)$$

Тогда ряд (4) оценивается рядом

$$\begin{aligned} \sum_{i_1, i_2, \dots, i_n=1}^{\infty} \frac{1}{(i_1 + i_2 + \dots + i_n)^\alpha} &= \sum_{M=1}^{\infty} \frac{1}{(i_1 + i_2 + \dots + i_n)^\alpha} < \\ &< C_2 \sum_{M=1}^{\infty} \frac{M^{n-1}}{M^\alpha} = C_2 \sum_{M=1}^{\infty} \frac{1}{M^{\alpha+1-n}}, \end{aligned}$$

который сходится при $\alpha > n$. С другой стороны, в силу (5) ряд (4) снизу оценивается рядом

$$\sum_{i_1, i_2, \dots, i_n=1}^{\infty} \frac{1}{(i_1 + i_2 + \dots + i_n)^\alpha} > C_3 \sum_{M=1}^{\infty} \frac{1}{M^{\alpha-n+1}}.$$

Последний ряд при $\alpha \leq n$ расходится. Следовательно, ряд (4) сходится только при $\alpha > n$.

Пример 2. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{i_1, i_2, \dots, i_n=1}^{\infty} \frac{1}{(i_1^{\beta_1} + i_2^{\beta_2} + \dots + i_n^{\beta_n})^\alpha}, \quad (6)$$

где $\alpha > 0$, $\beta_i > 0$, $i = \overline{1, n}$.

Если все $\beta_i = \beta > 0$, то ряд (6) сходится только при $\alpha\beta > n$.

Если не все β_i равны между собой, то ряд (6) сходится при $\alpha\beta_m > n$ и расходится, когда $\alpha\beta_M \leq n$; здесь $\beta_m = \min_{1 \leq i \leq n} \{\beta_i\}$, $\beta_M = \max_{1 \leq i \leq n} \{\beta_i\}$.

2. В этом пункте рассмотрим многомерный функциональный ряд

$$\sum_{i_1, i_2, \dots, i_n=1}^{\infty} u_{i_1 i_2 \dots i_n}(x), \quad x \in D \subset \mathbb{R}^m, \quad (7)$$

где $n \geq 2$, $m \geq 1$, D — ограниченная область.

В указанной выше литературе по математическому анализу и других публикациях отсутствует теория обоснования поточечной, или равномерной, сходимости ряда (7) в области D .

На основании леммы 2 рассмотрим N -ю частичную сумму ряда (7):

$$S_N(x) = \sum_{M=1}^N u_{i_1 i_2 \dots i_n}(x). \quad (8)$$

Будем называть ряд (7) сходящимся в точке $x \in D$, если в этой точке существует конечный предел последовательности частичных сумм (8):

$$\exists \lim_{N \rightarrow \infty} S_N(x). \quad (9)$$

Будем называть ряд (7) сходящимся поточечно в области D , если он сходится в каждой точке этой области в смысле сформулированного определения (9).

Будем называть ряд (7) сходящимся равномерно в области D , если последовательность частичных сумм $S_N(x)$ сходится равномерно в области D .

Для последовательности $S_N(x)$ справедливы все известные критерии и достаточные признаки равномерной сходимости.

В качестве применения указанного способа рассмотрим разложение непрерывной функции $f(x, y)$ в прямоугольнике $D = \{(x, y) : 0 < x < p, 0 < y < q\}$ в тригонометрический ряд Фурье по синусам:

$$v_{mn}(x, y) = \sqrt{\frac{2}{pq}} \sin \frac{m\pi x}{p} \sin \frac{n\pi y}{q}, \quad (10)$$

где p и q — заданные положительные числа. Этот ряд имеет вид

$$f(x, y) = \sum_{m, n=1}^{\infty} f_{mn} v_{mn}(x, y), \quad (11)$$

где

$$f_{mn} = \iint_D f(x, y) v_{mn}(x, y),$$

при этом справедливо неравенство Бесселя

$$\sum_{m, n=1}^{\infty} f_{mn}^2 \leq \|f\|_{L_2(D)}^2. \quad (12)$$

Если $f(x, y) \in C^2(\bar{D})$ и $f(0, y) = f(p, y) = 0$, $0 \leq y \leq q$, $f(x, 0) = f(x, q) = 0$, $0 \leq x \leq p$, то аналогично [12, с. 370–377], [2, с. 335–336] можно показать справедливость представления

$$|f_{mn}| = [|f_{mn}^{(2,0)}| + 2|f_{mn}^{(1,1)}| + f_{mn}^{(0,2)}] \frac{1}{\pi^2} \left(\frac{m}{p} + \frac{n}{q} \right)^{-2} = \frac{1}{\pi^2} \left(\frac{m}{p} + \frac{n}{q} \right)^{-2} \sum_{\substack{0 \leq i, j \leq 2, \\ i+j=2}} |f_{mn}^{(i,j)}|, \quad (13)$$

где $f_{mn}^{(i,j)}$ — коэффициенты Фурье производных при $\frac{\partial^{i+j} f(x,y)}{\partial x^i \partial y^j}$ по системе производных $\frac{\partial^{i+j} v(x,y)}{\partial x^i \partial y^j}$ функций (10).

При этом аналогично (12) справедливы неравенства

$$\sum_{m,n=1}^{+\infty} |f_{mn}^{(i,j)}|^2 \leq \left(\iint_D \frac{\partial^{i+j} f(x,y)}{\partial x^i \partial y^j} \right)^2 dx dy = \left\| \frac{\partial^{i+j} f}{\partial x^i \partial y^j} \right\|_{L_2(D)}^2. \quad (14)$$

Пусть $d = \max\{p, q\}$. Тогда

$$\frac{1}{\left(\frac{m}{p} + \frac{n}{q}\right)^2} = \frac{d^2}{\left(\frac{d}{p}m + \frac{d}{q}n\right)^2} \leq \frac{d^2}{(m+n)^2}. \quad (15)$$

С учетом оценки (15) из (13) в силу неравенства $ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$ имеем

$$\begin{aligned} |f_{mn}| &\leq \left(\frac{d}{\pi}\right)^2 \frac{1}{(m+n)^2} \sum_{\substack{0 \leq i, j \leq 2, \\ i+j=2}} |f_{mn}^{(i,j)}| \leq \\ &\leq \left(\frac{d}{\pi}\right)^2 \frac{1}{2} \left(\frac{1}{(m+n)^4} + \left(\sum_{\substack{0 \leq i, j \leq 2, \\ i+j=2}} |f_{mn}^{(i,j)}| \right)^2 \right) \leq \\ &\leq \frac{1}{2} \left(\frac{d}{\pi}\right)^2 \left(\frac{1}{(m+n)^4} + 4 \sum_{i+j=2} |f_{mn}^{(i,j)}|^2 \right). \quad (16) \end{aligned}$$

Тогда в силу оценок (16) и (14) ряд (11) мажорируется сходящимся числовым рядом

$$\begin{aligned} C_4 \sum_{m,n=1}^{\infty} |f_{mn}| &\leq C_5 \left(\sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{1}{(m+n)^4} + 4 \sum_{m,n=1}^{+\infty} \sum_{\substack{0 \leq i, j \leq 2, \\ i+j=2}} |f_{mn}^{(i,j)}|^2 \right) \leq \\ &\leq C_7 \left(\sum_{M=1}^{+\infty} \frac{1}{M^3} + 4 \sum_{\substack{0 \leq i, j \leq 2, \\ i+j=2}} \sum_{m,n=1}^{+\infty} |f_{mn}^{(i,j)}|^2 \right), \end{aligned}$$

так как в силу леммы 1 в ряде $\sum_{m,n=1}^{+\infty} \frac{1}{(m+n)^4}$ число членов с заданным $M = \max\{m, n\}$ имеет порядок 1, поэтому

$$\sum_{m,n=1}^{+\infty} \frac{1}{(m+n)^4} = \sum_{M=1}^{\infty} \frac{1}{M^4 \left(\frac{m}{M} + \frac{n}{M}\right)^4} \leq C_6 \sum_{M=1}^{\infty} \frac{1}{M^3}.$$

Следовательно, ряд (11) при указанных выше условиях относительно функции $f(x, y)$ сходится равномерно на \bar{D} .

Конкурирующие интересы. Конкурирующих интересов не имею.

Авторская ответственность. Я несу полную ответственность за предоставление окончательной версии рукописи в печать. Окончательная версия рукописи мною одобрена.

Финансирование. Исследование выполнялось без финансирования.

Библиографический список

1. Фихтенгольц Г. М. *Курс дифференциального и интегрального исчисления*. Т. 1. М.: Физматлит, Лаборатория Знаний, 2003. 863 с.
2. Ильин В. А., Садовничий В. А., Сендов Бл. Х. *Математический анализ*. Т. 2. М.: МГУ, 1987. 358 с.
3. Кудрявцев Л. Д. *Курс математического анализа*. Т. 1. М.: Высш. шк., 1981. 584 с.
4. Бугров Я. С., Никольский С. М. *Высшая математика. Дифференциальное и интегральное исчисление*. М.: Дрофа, 2005. 509 с. EDN: QJPEXF.
5. Челидзе В. Г. *Некоторые методы суммирования двойных рядов и двойных интегралов*. Тбилиси: Тбилисский ун-т, 1977. 399 с.
6. Янушаускас А. И. *Двойные ряды*. Новосибирск: Наука, 1980. 224 с.
7. Сабитов К. Б. Начально-граничная задача для трехмерного уравнения смешанного парабола-гиперболического типа / *Современные проблемы математики и механики*: Материалы международной научной конференции, посвященной 80-летию академика РАН В. А. Садовничего. М.: МАКС Пресс, 2019. С. 369–372.
8. Сабитов К. Б. Задача Дирихле для двумерного волнового уравнения / *Современные проблемы вычислительной математики и математической физики*: Тезисы докладов международной научной конференции, посвященной памяти академика А. А. Самарского, к 100-летию со дня рождения. М.: МГУ, 2019. С. 58–59.
9. Сабитов К. Б., Сидоров С. Н. Начально-граничная задача для трехмерного уравнения парабола-гиперболического типа // *Диффер. уравн.*, 2021. Т. 58, № 8. С. 1071–1080. EDN: LSLNUR. DOI: <https://doi.org/10.31857/S0374064121080082>.
10. Sabitov K. B., Sidorov S. N. Initial-boundary problem for a three-dimensional inhomogeneous equation of parabolic-hyperbolic type // *Lobachevskii J. Math.*, 2020. vol. 41, no. 11. pp. 2257–2268. EDN: GBAUPE. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1995080220110190>.
11. Сабитов К. Б. Начально-граничные задачи для уравнения колебаний прямоугольной пластины // *Изв. вузов. Матем.*, 2021. № 10. С. 60–70. EDN: RZSSHV. DOI: <https://doi.org/10.26907/0021-3446-2021-10-60-70>.
12. Ильин В. А., Позняк Э. Г. *Основы математического анализа*. Часть II. М.: Физматлит, 2001. 453 с. EDN: UGLQPL.

MSC: 65B10

One way of summing multidimensional series

K. B. Sabitov

Sterlitamak Branch of the Ufa University of Science and Technology,
49, Lenin Ave., Sterlitamak, 453103, Russian Federation.

Abstract

It is known that in analysis courses, multiple series are considered only at a conceptual level, and their simplest properties are provided. Two widely used methods for summing multiple Fourier series are the spherical and rectangular methods. The present study is devoted to a new method of proving the convergence of multidimensional series by reducing them to a one-dimensional series, allowing applying known statements for one-dimensional series to multidimensional ones. Examples of justifying the convergence of numerical and functional series are provided as an illustration of this summing method.

Keywords: multidimensional number series, multidimensional functional series, reduction to a one-dimensional series, convergence, uniform convergence, examples.

Received: 15th December, 2023 / Revised: 20th December, 2023 /

Accepted: 25th December, 2023 / First online: 27th December, 2023

Competing interests. I have no competing interests.

Author's Responsibilities. I take full responsibility for submitting the final version of the manuscript for printing. The final version of the manuscript has been approved by me.

Funding. The study was carried out without funding.

Differential Equations and Mathematical Physics

Short Communication

© Authors, 2023

© Samara State Technical University, 2023 (Compilation, Design, and Layout)

© The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Please cite this article in press as:

Sabitov K. B. One way of summing multidimensional series, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2023, vol. 27, no. 4, pp. 745–752. EDN: UMYSET. DOI: 10.14498/vsgtu2069 (In Russian).

Authors' Details:

Kamil B. Sabitov  <https://orcid.org/0000-0001-9516-2704>

Dr. Phys. & Math. Sci., Professor; Senior Researcher; Sector of Basic Scientific Research;

e-mail: sabitov_fmfm@mail.ru

References

1. Fichtenholz G. M. *Kurs differentsial'nogo i integral'nogo ischisleniia* [Course of Differential and Integral Calculus], vol. 1. Moscow, Fizmatlit, Laboratoriia Znaniia, 2003, 863 pp. (In Russian)
2. Il'in V. A., Sadovnichii V. A., Sendov Bl. Kh. *Matematicheskii analiz* [Mathematical Analysis], vol. 2. Moscow, Moscow State Univ., 1987, 358 pp.
3. Kudryavtsev L. D. *Kurs matematicheskogo analiza* [A Course of Mathematical Analysis], vol. 1. Moscow, Vyssh. shk., 1981, 584 pp. (In Russian)
4. Bugrov Ya. S., Nikol'skii S. M. *Vysshaia matematika. Differentsial'noe i integral'noe ischislenie* [Higher Mathematics. Differential and Integral Calculus]. Moscow, Drofa, 2005, 509 pp. (In Russian). EDN: QJPBXF.
5. Chelidze V. G. *Nekotorye metody summirovaniia dvoinykh riadov i dvoinykh integralov* [Some Methods of Summation of Double Series and Double Integrals]. Tbilisi, Tbilisi Univ., 1977, 399 pp. (In Russian)
6. Yanushauskas A. I. *Dvoinye riady* [Double Series]. Novosibirsk, Nauka, 1980, 224 pp. (In Russian)
7. Sabitov K. B. Initial-boundary problem for a three-dimensional equation of mixed parabolic-hyperbolic type, In: *Modern Problems of Mathematics and Mechanics*. Moscow, MAKS Press, 2019, pp. 369–372 (In Russian).
8. Sabitov K. B. Dirichlet problem for a two-dimensional wave equation, In: *Modern Problems of Computational Mathematics and Mathematical Physics*. Moscow, Moscow State Univ., 2019, pp. 58–59 (In Russian).
9. Sabitov K. B., Sidorov S. N. Initial-boundary value problem for a three-dimensional equation of the parabolic-hyperbolic type, *Differ. Equat.*, 2021, vol. 57, no. 8, pp. 1042–1052. EDN: 00AAGT. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0012266121080085>.
10. Sabitov K. B., Sidorov S. N. Initial-boundary problem for a three-dimensional inhomogeneous equation of parabolic-hyperbolic type, *Lobachevskii J. Math.*, 2020, vol. 41, no. 11, pp. 2257–2268. EDN: GBAUPE. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1995080220110190>.
11. Sabitov K. B. Initial-boundary value problems for equation of oscillations of a rectangular plate, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2021, vol. 65, no. 10, pp. 52–62. EDN: FCMYHQ. DOI: <https://doi.org/10.3103/S1066369X21100054>.
12. Il'in V. A., Pozniak E. G. *Osnovy matematicheskogo analiza* [Fundamentals of Mathematical Analysis] Part II. Moscow, Fizmatlit, 2001, 453 pp. (In Russian). EDN: UGLQPL.



УДК 544.454.3

Оценка вероятности столкновения разноразмерных частиц порошков при формировании композиционных покрытий детонационным способом

С. Ю. Ганигин, М. С. Гречухина, А. С. Нечаев

Самарский государственный технический университет,
Россия, 443100, Самара, ул. Молодогвардейская, 244.

Аннотация

Представлены результаты оценки вероятности столкновения разноразмерных частиц материалов при получении композиционных покрытий детонационным способом на кумулятивные облицовки перфорационных систем, использующихся при вскрытии нефтяных и газовых пластов. Вследствие разных свойств исходных металлических порошков, используемых для получения композиционных покрытий, взаимодействие их частиц между собой в газотермическом потоке может привести к преждевременному протеканию химических реакций, что приведет к снижению эффективности получаемого покрытия. Предварительный расчет вероятности столкновения частиц металлических порошков позволяет обосновать применяемые технологические режимы нанесения покрытий.

Ключевые слова: детонационное напыление, поток частиц, вероятность столкновения, композиционные материалы, покрытие.

Получение: 24 июня 2023 г. / Исправление: 6 декабря 2023 г. /

Принятие: 13 декабря 2023 г. / Публикация онлайн: 26 декабря 2023 г.

Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ Краткое сообщение

© Коллектив авторов, 2023

© СамГТУ, 2023 (составление, дизайн, макет)

Контент публикуется на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

Образец для цитирования

Ганигин С. Ю., Гречухина М. С., Нечаев А. С. Оценка вероятности столкновения разноразмерных частиц порошков при формировании композиционных покрытий детонационным способом // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2023. Т. 27, № 4. С. 753–764. EDN: ZOLSXS. DOI: 10.14498/vsgtu2039.

Сведения об авторах

Сергей Юрьевич Ганигин  <https://orcid.org/0000-0001-5778-6516>

доктор технических наук, доцент; декан; инженерно-технологический факультет;
e-mail: ganigin.s.yu@yandex.ru

Мария Сергеевна Гречухина  <https://orcid.org/0000-0001-7797-3802>

кандидат технических наук; старший научный сотрудник; лаб. цифровых двойников материалов и технологических процессов их обработки; e-mail: mariya_grechukhina@mail.ru

Александр Сергеевич Нечаев  <https://orcid.org/0000-0002-0939-8292>

кандидат технических наук; доцент; каф. радиотехнических устройств;
e-mail: nechaev-as@mail.ru

1. Введение. Для повышения глубины пробития нефтяных и газовых пластов перспективно использовать кумулятивные облицовки в многослойном исполнении с покрытием из высокоплотных композиционных материалов [1–3], в том числе реакционных [4]. Для получения таких покрытий оптимизируют комплекс факторов, определяющих поведение частиц различного размера напыляемой смеси металлических порошков с момента появления их в стволе детонационной пушки и до слияния их в материале покрытия [5–8].

Принципиальная схема детонационной установки и процесс движения частиц порошка в ней показан на рис. 1. Разноразмерные частицы после вылета из дозатора подачи порошка попадают в ствол детонационной установки, проходя путь, равный длине ствола пушки, а также расстояние от среза ствола до облицовки [9]. Максимальные значения производительности и коэффициента использования порошка наблюдаются при минимальной дистанции напыления в 60 мм [10], но качество покрытий при этом снижается.

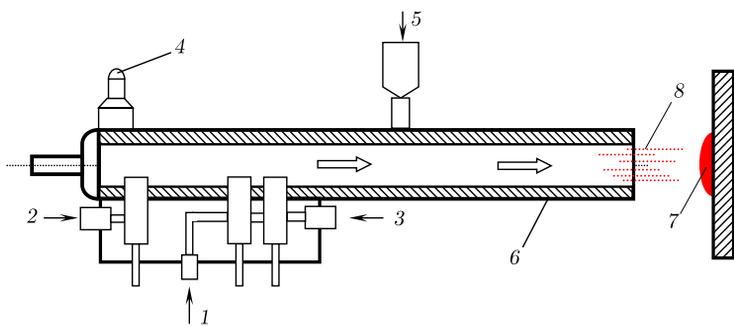


Рис. 1. Принципиальная схема детонационной установки: 1 — горючее; 2 — инертный газ; 3 — кислород; 4 — свеча зажигания; 5 — дозатор подачи порошка; 6 — ствол детонационной пушки; 7 — кумулятивная облицовка, 8 — поток частиц

[Figure 1. Schematic diagram of the detonation unit: 1 — fuel; 2 — inert gas; 3 — oxygen; 4 — spark plug; 5 — powder supply dispenser; 6 — the barrel of the detonation cannon; 7 — cumulative cladding; 8 — particle flow]

В связи с этим, основываясь на ранее проведенных исследованиях [3], дистанцию напыления для реакционных порошков принимаем равной 150 мм.

Одними из основных требований являются отсутствие реакции между компонентами порошковой смеси, находящейся в стволе детонационной установки в момент нанесения покрытия [11], и исключение возможности столкновения их частиц друг с другом на участке от среза ствола до поверхности кумулятивной облицовки.

2. Оценка вероятности столкновения частиц порошков при детонационном напылении. Вероятность, с которой частицы могут сталкиваться в процессе нанесения покрытия детонационным методом, зависит от ряда факторов: количества частиц в навеске, их массы и дисперсности, расстояния между навесками в канале ствола, динамики движения частиц, которая определяется скоростью и траекторией полета и т.д. Без принятия ряда допущений задача оценки вероятности столкновения частиц становится весьма трудной, а зачастую — нерешаемой из-за отсутствия необходимых начальных данных. В связи с этим были введены некоторые условия, позволяющие упростить постановку задачи, что не окажет значительного влияния на

получение функциональной зависимости вероятности столкновения частиц, отражающей физические принципы протекающего процесса [12]:

- 1) будем считать, что поток частиц имеет линейную траекторию движения, а циркуляционные потоки возникают лишь в процессе отражения детонационного потока от подложки, что уже не сказывается на формировании покрытия;
- 2) распределение частиц в процессе их движения носит равномерный характер в рассматриваемом объеме, а вероятности нахождения частиц веществ в рассматриваемом рабочем пространстве не зависят друг от друга;
- 3) поскольку, проходя через порошковые сита при производстве, частицы приобретают многогранную полиэдрическую форму [13], для получения численных значений искомых показателей примем, что частицы имеют сферическую форму, и это позволяет считать линейные размеры частиц постоянными;
- 4) влияние внутренней поверхности ствола на движение и вероятность столкновения частиц в стволе будем считать незначительным, что обосновывается достаточно существенным значением отношения количества частиц, не соприкасающихся с внутренней стенкой ствола и соприкасающихся с ней при ламинарном движении потока;
- 5) столкновение частиц будем считать абсолютно неупругим ударом.

На рис. 2 схематично представлено распределение частиц по длине в канале ствола, где показано распределение малых и больших частиц с учетом указанных выше допущений. На данном рисунке окружность, выделенная пунктирной линией, отражает область около больших частиц, указывающую на то пространство, где нахождение малой частицы соответствует условию их столкновения.

Принимаем, что в определенный момент времени на одном участке поперечного среза ствола находится некоторое количество частиц N большого радиуса и частиц n малого радиуса. В этом случае выражение для оценки вероятности столкновения частиц $P(nN)$ может быть представлено в виде

$$P(nN) = \sum_{i=1}^{[x/\Delta]} \frac{N_i n_i (r_b + r_s)^2}{R^2}, \quad (1)$$

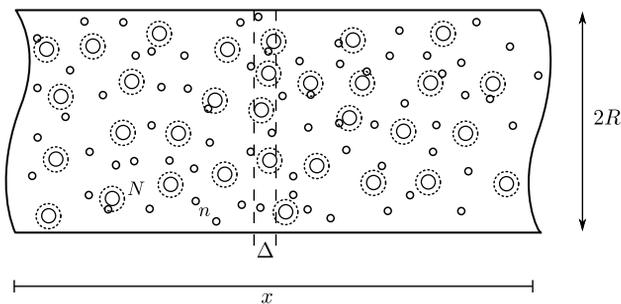


Рис. 2. Схема распределения разноразмерных частиц в стволе детонационной установки [Figure 2. The scheme of distribution of different-sized particles in the barrel of the detonation unit]

где N_i — количество частиц большого радиуса на i -том участке траектории длиной Δ ; n_i — количество частиц малого радиуса на i -том участке траектории длиной Δ ; R — внутренний радиус канала ствола; r_b и r_s — радиусы большой и малой частиц соответственно; $[x/\Delta]$ — целое количество малых дискретных длин Δ на всем расстоянии x .

Выражение (1) определяет вероятность того, что хотя бы одна частица малого размера столкнется с частицей большого размера в ракурсе поперечного среза ствола установки детонационного напыления. Для определения вероятности контакта частиц двух веществ во всей этой области удобнее рассмотреть вероятность контакта частиц в малом объеме [11], из которого путем сложения счетного их количества можно получить вероятность контакта частиц во всем исследуемом объеме. Исходя из этого, можно принять универсальную величину малого объема, получаемую из площади поперечного сечения ствола детонационной установки, длиной Δ .

Вероятность того, что хотя бы одна малая частица одного вещества войдет в область контакта хотя бы одной большой частицы другого вещества в определенном нами малом объеме, будет выражаться так:

$$P(n_{\Delta}N_{\Delta}) = \frac{2N_{\Delta}n_{\Delta}(r_b + r_s)^2}{3R^2},$$

где N_{Δ} и n_{Δ} — количество больших и малых частиц вещества в заданном малом объеме.

Для всей рассматриваемой области вероятность контакта $P_x(nN)$ больших и малых частиц при равномерном распределении частиц во всем времени протекания процесса будет определяться выражением

$$P_x(n_{\Delta}N_{\Delta}) = 1 - \left(1 - \frac{2N_{\Delta}n_{\Delta}(r_b + r_s)^2}{3R^2}\right)^{[x/\Delta]}. \quad (2)$$

При несоблюдении условия линейности траектории движения частиц или при непостоянстве скорости потока возникает ошибка при расчетах по предложенной модели (2). В этом случае для коррекции модели предлагается рассматривать малые объемы, считая скорость потока частиц в них постоянной и равной усредненному значению скоростей частиц на входе и на выходе этой зоны.

Зависимость (2) можно считать выражением, дающим оценку вероятности столкновения частиц порошков двух металлов в процессе детонационного напыления с учетом приведенных допущений. Из этого выражения также следует, что при больших величинах N_{Δ} и n_{Δ} вероятность контакта двух частиц будет велика, однако нужно понимать, что исходя из условия проведения численного эксперимента величины N_{Δ} и n_{Δ} будут ограничены размерами самих частиц и внутренним радиусом ствола.

3. Проверка соответствия зависимости для оценки вероятности столкновения частиц в процессе детонационного напыления экспериментальным данным. Для проверки работоспособности полученной зависимости были произведены математические расчеты. Для расчета были выбраны размеры больших и малых частиц двух металлических порошков с дисперсностью 6 и 3 мкм соответственно. Диаметр ствола детонационной

пушки принимается равным 5 мм. Расстояние от границы среза ствола до получаемой детали (кумулятивной облицовки) варьируется в зависимости от свойств исходных наносимых порошков.

Считаем, что частицы после вылета из ствола продолжают двигаться прямолинейно и конечная площадь нанесения композиционного покрытия соответствует диаметру ствола детонационной установки.

Для оценки данных процесса детонационного напыления будем использовать вероятность столкновения минимум двух частиц (одной большой и одной малой) при определенных условиях с помощью формулы (2).

2.1. Исследование вероятности столкновения частиц порошков с одинаковым количеством одного и второго компонентов. Проведем несколько расчетов, изменяя количество напыляемых частиц и дальность их полета, по формуле (2). В табл. 1 представлены данные расчета вероятности столкновения частиц по формуле (2). Здесь в строках приведена зависимость вероятности столкновения частиц от величины $[x/\Delta]$, которая напрямую зависит от расстояния между дулом ствола экспериментальной установки и подложки при постоянном значении количества частиц. В столбцах приведены значения вероятностей столкновения частиц при постоянном значении $[x/\Delta]$, но изменяющихся значениях $n = N$.

Таблица 1

Вероятностная оценка столкновения частиц, вычисленная по формуле (2)
 [Probabilistic estimate of particle collision calculated by formula (2)]

$x, \text{ mm}$	0.05	0.1	0.28	0.46	0.64
$[x/\Delta]$	3	5	15	25	35
$n = N$					
50	0.0019	0.0018	0.00036	0.00021	0.0001
100	0.0077	0.0043	0.0014	0.00086	0.0006
200	0.0311	0.0172	0.0057	0.0034	0.0024
300	0.0699	0.0388	0.0129	0.0078	0.0055
400	0.1244	0.0691	0.0230	0.0138	0.0098
500	0.1944	0.1080	0.0360	0.0216	0.0154
700	0.3810	0.2116	0.0705	0.0423	0.0302
900	0.6298	0.3499	0.1166	0.0699	0.0499
1200	1.1197	0.6220	0.2073	0.1244	0.0889
1350	1.4171	0.7873	0.2624	0.1574	0.1124

Из приведенных в табл. 1 расчетов видно, что при достижении определенной величины количества частиц вероятность их столкновения превышает единицу,¹ что является невозможным, поэтому необходимо модернизировать ранее полученную формулу (2).

В [14] описывается возможность использования показательного закона распределения при анализе физических закономерностей диффузии частиц в различных воздушных и гидродинамических потоках. Это распределение характеризуется интенсивностью столкновения частиц, которая является удобным параметром, используемым в математических моделях и расчетах. Исходя из этого примем закон распределения вероятности как изменение от числа

¹ Данный результат расчета связан со слишком плотной упаковкой рассматриваемого количества частиц в малом объеме.

больших и малых частиц по показательному закону:

$$f(a) = \begin{cases} 0, & a < 0, \\ 1 - \exp(-\lambda a), & a \geq 0, \end{cases}$$

где λ — феноменологический параметр.

Под экспоненту вместо постоянной безразмерной величины λ поставим выражение, отражающее отношение объема присутствующих частиц к объему области движения частиц:

$$\lambda = [x/\Delta] \frac{2(r_b + r_s)^2}{3R^2}.$$

Тогда окончательно получим

$$f(N_\Delta n_\Delta) = 1 - \exp\left(-[x/\Delta] \frac{2(r_b + r_s)^2}{3R^2} N_\Delta n_\Delta\right). \quad (3)$$

В табл. 2 представлены данные расчета вероятности столкновения частиц по формуле (3).

Таблица 2

Вероятностная оценка столкновения частиц, вычисленная по формуле (3)

[Probabilistic estimate of particle collision calculated by formula (3)]

$x, \text{ mm}$	0.05	0.1	0.28	0.46	0.64
$[x/\Delta]$	3	5	15	25	35
$n = N$					
50	0.0019	0.0010	0.00035	0.00021	0.0001
100	0.0077	0.0043	0.0014	0.00086	0.0006
200	0.0306	0.0171	0.0057	0.0034	0.0024
300	0.0675	0.0381	0.0128	0.0077	0.0055
400	0.1169	0.0667	0.0227	0.0137	0.0098
500	0.1766	0.1023	0.0353	0.0213	0.0153
700	0.3168	0.1907	0.0680	0.0414	0.0297
900	0.4673	0.2952	0.1100	0.0675	0.0487
1200	0.6736	0.4631	0.1872	0.1169	0.0850
1350	0.7576	0.5449	0.2308	0.1456	0.1063

Из приведенных расчетных данных видно, что при малом количестве частиц значения вероятностных характеристик соотношений (2) и (3) практически совпадают, а при большом количестве частиц формула (3) дает лучшее соответствие физическому процессу.

В табл. 3 приведены расчеты по формуле (3) при больших значениях $[x/\Delta]$, которые отражают вероятностную оценку столкновения частиц при большем отдалении облицовки от выхода канала ствола.

Из результатов, приведенных в табл. 3, видно, что при условии равномерности распределения частиц по всему рабочему объему вероятность столкновения частиц уменьшается с ростом расстояния между облицовкой и дулом ствола. Полученные значения могут использоваться в качестве некоторой критериальной оценки при размещении облицовки в процессе отработки технологических режимов детонационного напыления.

Таблица 3

Вероятностная оценка столкновения частиц при больших значениях $[x/\Delta]$, вычисленная по формуле (3) [Probabilistic estimate of particle collisions at high values of $[x/\Delta]$ calculated by formula (3)]

x, m	0.1	0.12	0.14	0.16
$n = N$ $[x/\Delta]$	5560	6670	7780	8890
100	$3.887 \cdot 10^{-6}$	$3.239 \cdot 10^{-6}$	$2.777 \cdot 10^{-6}$	$2.43 \cdot 10^{-6}$
300	$3.499 \cdot 10^{-5}$	$2.915 \cdot 10^{-5}$	$2.499 \cdot 10^{-5}$	$2.187 \cdot 10^{-5}$
500	$9.719 \cdot 10^{-5}$	$8.099 \cdot 10^{-5}$	$6.942 \cdot 10^{-5}$	$6.074 \cdot 10^{-5}$
700	$19.049 \cdot 10^{-5}$	$15.874 \cdot 10^{-5}$	$13.607 \cdot 10^{-5}$	$11.906 \cdot 10^{-5}$
1200	$55.971 \cdot 10^{-5}$	$46.645 \cdot 10^{-5}$	$39.982 \cdot 10^{-5}$	$34.985 \cdot 10^{-5}$
1350	$70.833 \cdot 10^{-5}$	$59.031 \cdot 10^{-5}$	$50.6 \cdot 10^{-5}$	$44.276 \cdot 10^{-5}$

2.2. Исследование вероятности столкновения частиц металлических порошков с одинаковой массой насыпок. Найдем массу одной частицы каждого из напыляемых порошков. Для этого примем отношение плотностей одного металла ко второму равным 6 (соотношение плотностей, используемых для напыления металлических порошков).

Из условия постоянства линейных размеров частиц ранее были выбраны большие и малые частицы дисперсностью 6 и 3 мкм соответственно. Принимая во внимание тот факт, что частицы имеют сферическую форму с известным диаметром и известным отношением плотностей, можно достаточно просто определить количество больших и малых частиц в насыпках металла, имеющих равную массу. Авторами было определено количество частиц большого N и малого n размеров, имеющих одинаковую массу насыпок, значения которых приведены в первых столбцах табл. 4 и 5. По формуле (3) были рассчитаны вероятности столкновения частиц в канале ствола до их соударения с облицовкой в зависимости от числа частиц большого и малого размера (см. табл. 4).

Таблица 4

Вероятностная оценка столкновения частиц для одинаковых по массе насыпок при малых значениях $[x/\Delta]$, вычисленная по формуле (3) [Probabilistic estimate of particle collision for identical bulk masses at small values of $[x/\Delta]$ calculated by formula (3)]

x, mm	0.05	0.1	0.28	0.46	0.64
$N; n$ $[x/\Delta]$	3	5	15	25	35
$N = 12; n = 92$	0.00079	0.00047	0.00015	$9.5 \cdot 10^{-5}$	$6.813 \cdot 10^{-5}$
$N = 20; n = 154$	0.0022	0.0013	0.00044	0.00026	0.00019
$N = 46; n = 370$	0.0121	0.0073	0.0024	0.00146	0.00104
$N = 65; n = 524$	0.0242	0.0146	0.0048	0.0029	0.0020
$N = 85; n = 679$	0.0407	0.0246	0.0082	0.0049	0.0035
$N = 104; n = 833$	0.0604	0.0367	0.0123	0.0074	0.0053
$N = 150; n = 1203$	0.1218	0.0749	0.0256	0.0154	0.0110
$N = 208; n = 1666$	0.2208	0.1390	0.04867	0.0294	0.0211
$N = 266; n = 2129$	0.3348	0.2170	0.0783	0.0477	0.0343
$N = 293; n = 2345$	0.3902	0.2568	0.0942	0.0576	0.0415

В табл. 5 приведены результаты расчета при больших значениях $[x/\Delta]$, полученные по формуле (3), что соответствует большему удалению облицовки от среза канала ствола, при равенстве масс насыпок.

Таблица 5

Вероятностная оценка столкновения частиц для одинаковых по массе насыпок при больших значениях $[x/\Delta]$, вычисленная по формуле (3) [Probabilistic estimate of particle collisions for identical bulk masses at high values of $[x/\Delta]$ calculated by formula (3)]

x, m	0.1	0.12	0.14	0.16
$[x/\Delta]$	5560	6670	7780	8890
$N; n$				
$N = 20; n = 154$	$1.197 \cdot 10^{-7}$	$9.979 \cdot 10^{-7}$	$8.553 \cdot 10^{-7}$	$7.484 \cdot 10^{-7}$
$N = 65; n = 524$	$1.324 \cdot 10^{-5}$	$1.103 \cdot 10^{-5}$	$9.459 \cdot 10^{-6}$	$8.276 \cdot 10^{-6}$
$N = 104; n = 833$	$3.368 \cdot 10^{-5}$	$2.806 \cdot 10^{-5}$	$2.405 \cdot 10^{-5}$	$2.105 \cdot 10^{-5}$
$N = 150; n = 1203$	$7.015 \cdot 10^{-5}$	$5.846 \cdot 10^{-5}$	$5.011 \cdot 10^{-5}$	$4.384 \cdot 10^{-5}$
$N = 266; n = 2129$	$22.015 \cdot 10^{-5}$	$18.346 \cdot 10^{-5}$	$15.726 \cdot 10^{-5}$	$13.760 \cdot 10^{-5}$
$N = 293; n = 2345$	$26.710 \cdot 10^{-5}$	$22.259 \cdot 10^{-5}$	$19.079 \cdot 10^{-5}$	$16.694 \cdot 10^{-5}$

Из результатов расчетов, приведенных в табл. 3–5, можно сделать выводы о том, что при соблюдении условий равенства масс насыпок вероятность столкновения частиц в процессе движения вдоль канала ствола будет значительно меньше, чем при соблюдении условия равенства количества частиц в насыпках. Полученные результаты дают возможность прогнозировать равномерность наложения слоев облицовки в зависимости от количества частиц, их размера и массы насыпок.

Заключение. В результате проведенных теоретических исследований получена зависимость, дающая оценку вероятности столкновения разноразмерных частиц при формировании композиционных покрытий в процессе детонационного напыления.

С помощью предлагаемого предварительного расчета можно непосредственно перед напылением обосновать технологические режимы получения покрытий на кумулятивные облицовки с необходимыми адгезионными и прочностными характеристиками.

Конкурирующие интересы. В публикации статьи отсутствуют конкурирующие финансовые или нефинансовые интересы.

Авторский вклад и ответственность. Все авторы принимали участие в разработке концепции статьи и в написании рукописи. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

Финансирование. Исследование выполнено при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках государственного задания (тема № АААА-А12-2110800012-0).

Библиографический список

1. Ненашев М. В., Калашников В. В., Ибатуллин И. Д. [и др.] Оптимизация технологии нанесения детонационных покрытий на опоры буровых долот с использованием // *Изв. Самар. научн. центра РАН*, 2010. Т. 12, № 1. С. 462–466. EDN: NDXTXD.

2. Калашников В. В., Деморецкий Д. А., Ненашев М. В. [и др.] Детонационный способ и технология изготовления многослойных облицовок зарядов кумулятивных перфораторов // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Техн. науки*, 2011. №3(31). С. 213–218. EDN: OXTRHN.
3. Патент № RU 2744805 С1: Способ нанесения реакционноспособного композиционного покрытия на основе Ni-Al / М. В. Ненашев, Д. А. Деморецкий, С. Ю. Ганигин, И. В. Нечаев, И. А. Кузнецов, А. А. Новиков, В. Л. Симогин, А. Ю. Мурзин, А. Г. Попов, А. Т. Нурмухаметов, Н. С. Альдебенев, М. С. Гречухина, И. Р. Тонеев. Патентообладатель: ФГБОУ ВО «СамГТУ». Номер заявки: 2020113997. Дата регистрации: 03.04.2020. Дата публикации: 15.03.2021, 2021. <http://www.fips.ru/cdfi/fips.dll/ru?ty=29&docid=2744805>. EDN: XVKCSP.
4. Aly Y., Schoenitz M., Dreizin E. L. Aluminum-metal reactive composites // *Combustion Science and Technology*, 2011. vol.183, no.10. pp. 1107–1132. DOI: <https://doi.org/10.1080/00102202.2011.584090>.
5. Штерцер А. А., Ульяницкий В.Ю., Рыбин Д. К Суспензионное детонационное напыление керамических покрытий // *Физика горения и взрыва*, 2019. Т. 55, №4. С. 121–128. EDN: DPXZRY. DOI: <https://doi.org/10.15372/FGV20190416>.
6. Ulianitsky V. Yu., Dudina D. V., Shtertser A. A., Smurov I. Computer-controlled detonation spraying: Flexible control of the coating chemistry and microstructure // *Metals*, 2019. vol.9, no.12, 1244. EDN: IRTUWE. DOI: <https://doi.org/10.3390/met9121244>.
7. Батраев И. С., Рыбин Д. К., Ульяницкий В. Ю. Параметры детонации смесей, создаваемых при инъекции газовых компонентов в ствол импульсного газодетонационного аппарата // *Физика горения и взрыва*, 2021. Т. 57, №1. С. 27–33. EDN: WXKKTG. DOI: <https://doi.org/10.15372/FGV20210103>.
8. Батраев И. С., Прохоров Е. С., Ульяницкий В. Ю. Ускорение дисперсных частиц продуктами газовой детонации в расширяющемся канале // *Физика горения и взрыва*, 2021. Т. 57, №5. С. 86–95. EDN: XLPYRN. DOI: <https://doi.org/10.15372/FGV20210508>.
9. Ulianitsky V. Yu., Shtertser A. A., Batraev I. S., Rybin D. K. Fabrication of layered ceramic-metal composites by detonation spraying // *Ceramics Intern.*, 2020. vol.46, no.17. pp. 27903–27908. EDN: PAVTPA. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ceramint.2020.07.225>.
10. Rybin D. K., Batraev I. S., Dudina D. V., Ukhina A. V., Ulianitsky V. Yu. Deposition of tungsten coatings by detonation spraying // *Surf. Coat. Technol.*, 2021. vol.409, 126943. EDN: EUTKJS. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.surfcoat.2021.126943>.
11. Ганигин С. Ю., Гречухина М. С., Нечаев А. С., Мурзин А. Ю., Воронцова В. А. Математическое прогнозирование вероятности столкновения частиц в процессе детонационного напыления // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2022. Т. 26, №4. С. 789–801. EDN: FPLFZP. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1975>.
12. Nechaeva I., Nechaev A. Method of assessing the sensitivity of the dust-air mixture to thermal effects caused by electric discharge / *2019 XXI International Conference Complex Systems: Control and Modeling Problems (CSCMP)*, 2019. pp. 553–557. EDN: DMELHU. DOI: <https://doi.org/10.1109/CSCMP45713.2019.8976612>.
13. Зенина М. В. Производство металлических порошков (гранул) для сырьевого обеспечения аддитивных технологий в машиностроении // *Технология легких сплавов*, 2015. №3. С. 32–38. EDN: UQEPYP.
14. Levi M. *Classical Mechanics with Calculus of Variations and Optimal Control: An Intuitive Introduction* / Student Mathematical Library. vol.69. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2014. xx+299 pp.

MSC: 80A17, 74A40

Estimation of the probability of collision of heterogeneous particles of composite powders during the formation of coatings by detonation method

S. Yu. Ganigin, M. S. Grechukhina, A. S. Nechaev

Samara State Technical University,
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russian Federation.

Abstract

The study presents the results of an assessment of the probability of collision of heterogeneous particles of composite materials when obtaining coatings by detonation on the cumulative lining of perforation systems used in the opening of oil and gas reservoirs. Due to the different properties of the initial metal powders used to produce coatings, the interaction of their particles with each other in the gas-thermal flow can lead to premature chemical reactions, which will lead to a deterioration in the strength properties of the resulting coating. Therefore, a preliminary calculation of the probability of collision of metal powder particles makes it possible to conclude about their quantitative characteristics before obtaining a coating, as well as the possible transition of interacting particles into intermetallic phases, which subsequently affect the adhesion characteristics of the coating.

Keywords: detonation spraying, particle flow, collision probability, composite materials, coating.

Received: 24th June, 2023 / Revised: 6th December, 2023 /

Accepted: 13th December, 2023 / First online: 26th December, 2023

Mathematical Modeling, Numerical Methods and Software Complexes Short Communication

© Authors, 2023

© Samara State Technical University, 2023 (Compilation, Design, and Layout)

♻️ © ⓘ The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Please cite this article in press as:

Ganigin S. Yu., Grechukhina M. S., Nechaev A. S. Estimation of the probability of collision of heterogeneous particles of composite powders during the formation of coatings by detonation method, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2023, vol. 27, no. 4, pp. 753–764. EDN: ZOLSXS. DOI: 10.14498/vsgtu2039 (In Russian).

Authors' Details:

Sergey Yu. Ganigin  <https://orcid.org/0000-0001-5778-6516>

Dr. Techn. Sci., Associate Professor; Dean; Faculty of Engineering and Technology;
e-mail: ganigin.s.yu@yandex.ru

Maria S. Grechukhina  <https://orcid.org/0000-0001-7797-3802>

Cand. Techn. Sci.; Senior Researcher; Lab. of Digital Doubles of Materials and Technological Processes of their Processing; e-mail: mariya_grechukhina@mail.ru

Alexander S. Nechaev  <https://orcid.org/0000-0002-0939-8292>

Cand. Techn. Sci.; Associate Professor; Dept. of Radio Engineering Devices;
e-mail: nechaev-as@mail.ru

Competing interests. The publication of the article does not involve any competing financial or non-financial interests.

Authorship contribution and responsibility. All authors were involved in the development of the article concept and in writing the manuscript. The authors take full responsibility for submitting the final manuscript for publication. The final version of the manuscript was approved by all authors.

Funding. The research was carried out with the financial support of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation within the framework of the state task (theme no. AAAA12-2110800012-0).

References

1. Nenashev M. V., Kalashnikov V. V., Ibatullin I. D., et al Optimization the coating technology of detonation coverages on bases of drilling bits with use of durability power criteria, *Izv. of Samara Scientific Center of the RAS*, 2010, vol. 12, no. 1, pp. 462–466 (In Russian). EDN: NDXTXD.
2. Kalashnikov V. V., Demoretsky D. A., Nenashev M. V., et al Detonation method and manufacturing shaped charges with multilayer liners, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Tehn. Nauki*, 2011, no. 3(31), pp. 213–218 (In Russian). EDN: OXTREH.
3. *Patent RU 2744805 C1*, A method of applying a reactive composite coating based on Ni-Al / M. V. Nenashev, D. A. Demoretsky, S. Yu. Ganigin, I. V. Nechaev, I. A. Kuznetsov, A. A. Novikov, V. L. Simogin, A. Yu. Murzin, A. G. Popov, A. T. Nurmukhametov, N. S. Aldebenev, M. S. Grechukhina, I. R. Toneev; publ. 15 Mar 2021, 2021 (In Russian). <http://www.fips.ru/cdfi/fips.dll/ru?ty=29&docid=2744805>. EDN: XVKCSF.
4. Aly Y., Schoenitz M., Dreizin E. L. Aluminum-metal reactive composites, *Combustion Science and Technology*, 2011, vol. 183, no. 10, pp. 1107–1132. DOI: <https://doi.org/10.1080/00102202.2011.584090>.
5. Shtertser A. A., Ul'yanitskii V. Yu., Rybin D. K. Suspension detonation spraying of ceramic coatings, *Combust. Explos. Shock Waves*, 2019, vol. 55, no. 4, pp. 483–490. EDN: QNPTKJ. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0010508219040166>.
6. Ulianitsky V. Yu., Dudina D. V., Shtertser A. A., Smurov I. Computer-controlled detonation spraying: Flexible control of the coating chemistry and microstructure, *Metals*, 2019, vol. 9, no. 12, 1244. EDN: IRTUWE. DOI: <https://doi.org/10.3390/met9121244>.
7. Batraev I. S., Rybin D. K., Ul'yanitskii V. Yu. Detonation parameters of mixtures produced by injecting gaseous components into the barrel of a pulse gas detonation installation, *Combust. Explos. Shock Waves*, 2021, vol. 57, no. 1, pp. 23–29. EDN: WRRYCP. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0010508221010032>.
8. Batraev I. S., Prokhorov E. S., Ul'yanitskii V. Yu. Acceleration of dispersed particles by gas detonation productions in an expanding channel, *Combust. Explos. Shock Waves*, 2021, vol. 57, no. 5, pp. 588–596. EDN: HAFHKB. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0010508221050087>.
9. Ulianitsky V. Yu., Shtertser A. A., Batraev I. S., Rybin D. K. Fabrication of layered ceramic-metal composites by detonation spraying, *Ceramics Intern.*, 2020, vol. 46, no. 17, pp. 27903–27908. EDN: PAVTPA. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ceramint.2020.07.225>.
10. Rybin D. K., Batraev I. S., Dudina D. V., Ukhina A. V., Ulianitsky V. Yu. Deposition of tungsten coatings by detonation spraying, *Surf. Coat. Technol.*, 2021, vol. 409, 126943. EDN: EUTKJS. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.surfcoat.2021.126943>.
11. Ganigin S. Yu., Grechukhina M. S., Nechaev A. S., Murzin A. Yu., Vorontsova V. A. Mathematical prediction of the probability of particle collisions during detonation spraying, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2022, vol. 26, no. 4, pp. 789–801 (In Russian). EDN: FPLFZP. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1975>.

12. Nechaeva I., Nechaev A. Method of assessing the sensitivity of the dust-air mixture to thermal effects caused by electric discharge, In: *2019 XXI International Conference Complex Systems: Control and Modeling Problems (CSCMP)*, 2019, pp. 553–557. EDN: DMELHU. DOI: <https://doi.org/10.1109/CSCMP45713.2019.8976612>.
13. Zenina M. V. Development of powder metallic production to supply initial materials for the mechanical engineering to satisfy needs in the field of additive technologies, *Tekhnol. Legkikh Splavov*, 2015, no. 3, pp. 32–38 (In Russian). EDN: UQEPYP.
14. Levi M. *Classical Mechanics with Calculus of Variations and Optimal Control: An Intuitive Introduction*, Student Mathematical Library, vol.69. Providence, RI, Amer. Math. Soc., 2014, xx+299 pp.

**ПОДПИСКА – 2024
НА ЯНВАРЬ – ДЕКАБРЬ**

в «каталоге «Газеты и журналы – 2024»,
и на сайте «ООО Урал-Пресс Округ»
<http://www.ural-press.ru/>

Уважаемые читатели!

Обратите внимание, что с 1 сентября 2023 г. проводится подписная кампания на журналы Самарского государственного технического университета на 2024 год

- 18106 Вестник Самарского государственного технического университета.**
Серия «Технические науки»
Промышленность. Энергетика. Строительство. Транспорт.
- 18108 Вестник Самарского государственного технического университета.**
Серия «Физико-математические науки»
Образование. Наука.
- 70570 Градостроительство и архитектура**
Промышленность. Строительство.
- 18107 Вестник Самарского государственного технического университета.**
Серия «Психолого-педагогические науки»
Образование. Педагогика. Религия. Философия. Социология. Психология.
- 41340 Вестник Самарского государственного технического университета.**
Серия «Философия».
Образование. Педагогика. Религия. Философия. Социология. Психология.

Условия оформления подписки Вы найдете
на сайте <http://www.ural-press.ru/>

Учебная литература, изданная в СамГТУ

ПОДПИСКА
на сайте «ООО Урал-Пресс Округ»
<http://www.ural-press.ru/>

- 014827 **Технология производства смазочных масел и спецпродуктов.** Учебное пособие / В.А. Тыщенко, И.А. Агафонов, А.А. Пимерзин, Н.Н. Томина, С.А. Антонов, Е.О. Жилкина. – Самара: Самар. гос. техн. ун-т, 2014 – 240 с.
- 014828 **Номограммы, графики и табличные данные для технологических расчетов процессов переработки нефти и газа:** справочное пособие / В.Г. Власов, И.Г. Агафонов, А.А. Пимерзин, Н.М. Максимов, Е.Е. Вишневская, Д.И. Ишутенко. – Самара: Самар. гос. техн. ун-т, 2017. – 91 с.
- 014829 **Проектирование установки ЭЛОУ-АВТ:** учебно-методическое пособие / В.Г. Власов, И.А. Агафонов – Изд. 2-е, испр. и доп. – Самара: Самар. гос. техн. ун-т, 2018. – 159 с.
- 014832 **Химия и технология вторичных процессов переработки нефти:** учебное пособие / Л.И. Заботин. – Самара: Самар. гос. техн. ун-т, 2017. – 332 с.
- 014833 **Каталитический реформинг:** учеб.-метод. пособие / Л.И. Заботин. – Самара: Самар. гос. техн. ун-т, 2016. – 166 с.
- 014834 **Проектирование нефтеперерабатывающих заводов:** учеб. пособие / Л.И. Заботин, А.А. Пимерзин, А.В. Можаяев. – Самара: Самар. гос. техн. ун-т, 2018. – 129 с.
- 014835 **Методы очистки нефтяных фракций:** учебное пособие / Н.Н. Томина, Н.М. Максимов, А.А. Пимерзин. – Самара: Самар. гос. техн. ун-т, 2014. – 293 с.
- 014837 **Катализ в химической промышленности:** учебное пособие / Н.Н. Томина, П.А. Никульшин, Н.М. Максимов, А.А. Пимерзин. – Самара: Самар. гос. техн. ун-т, 2017. – 374 с.
- 014839 **Процессы нефтехимического синтеза в нефтепереработке:** учебное пособие / В.А. Пильщиков, Ал.А. Пимерзин, А.А. Пимерзин. – Самара: Самар. гос. техн. ун-т, 2017. – 207 с.
- 014840 **Подготовка и первичная переработка нефти. Проектирование установок ЭЛОУ-АВТ:** учебно-методическое пособие / В.Г. Власов, И.А. Агафонов. – Самара: Самар. гос. техн. ун-т, 2015. – 327 с.
- 014841 **Каталитический крекинг:** учеб.-метод. пособие / Л.И. Заботин. – Самара: Самар. гос. техн. ун-т, 2020. – 97 с.
- 014842 **Синтетические моторные масла и присадки:** учебное пособие / В.А. Тыщенко, С.В. Котов, А.А. Пимерзин. – Самара: Самар. гос. техн. ун-т, 2020. – 260 с.
- 014843 **Алкилирование спиртов олефинами. Получение топливных оксигенатов:** учебное пособие / В.А. Пильщиков, Ал.А. Пимерзин, А.А. Пимерзин. – Самара: Самар. гос. техн. ун-т, 2020. – 115 с.
- 014844 **Методы очистки нефтяных фракций ч. 1.** учебное пособие / Н.Н. Томина, Н.М. Максимов, В.А. Тыщенко, А.А. Пимерзин. – Самара: Самар. гос. техн. ун-т, 2014. – 293 с.