

ISSN 1991-8615 (print)
ISSN 2310-7081 (online)



ВЕСТНИК

САМАРСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО
ТЕХНИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

Серия
«Физико-математические науки»

Т. 28, № 1 – 2024

**Вестник
Самарского
государственного
технического
университета**

ISSN 1991–8615 (print)
ISSN 2310–7081 (online)
НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ
Издаётся с 1996 г.
Выходит 4 раза в год

Август — 2024

Серия

«ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ» (Т. 28, № 1/74 – 2024)

Главный редактор В. П. Радченко — д.ф.-м.н., проф. (Самара, Россия)
Заместитель главного редактора А. И. Жданов — д.ф.-м.н., проф. (Самара, Россия)
Отв. секретарь М. Н. Саушкин — к.ф.-м.н., доц. (Самара, Россия)
Отв. секретарь Е. В. Мурашкин — к.ф.-м.н. (Москва, Россия)
Секретарь Е. А. Козлова — к.ф.-м.н. (Самара, Россия)

Редакционный совет:

- С. А. Авдонин — д.ф.-м.н., проф. (Фэрбенкс, Аляска, США)
- Б. Д. Аннин — акад. РАН, д.ф.-м.н., проф. (Новосибирск, Россия)
- А. А. Буренин — чл. кор. РАН, д.ф.-м.н., проф. (Комсомольск-на-Амуре, Россия)
- Р. Вельмураган — доктор наук (Ченнай, Индия)
- С. П. Верёвкин — д.х.н., проф. (Росток, Германия)
- Ш. Иматани — доктор наук (Киото, Япония)
- О. И. Маричев — д.ф.-м.н., проф. (Ларами, Вайоминг, США)
- В. П. Матвеев — акад. РАН, д.т.н., проф. (Пермь, Россия)
- П. В. Севастьянов — д.т.н., проф. (Ченстохова, Польша)

Редакционная коллегия:

- В. Н. Акопян — д.ф.-м.н., проф. (Ереван, Армения)
- А. П. Амосов — д.ф.-м.н., проф. (Самара, Россия)
- А. В. Боровских — д.ф.-м.н., проф. (Москва, Россия)
- Л. А. Игумнов — д.ф.-м.н., проф. (Нижний Новгород, Россия)
- Ф. дель Изола — д. н., проф. (Рим, Италия)
- В. А. Ковалёв — д.ф.-м.н., проф. (Москва, Россия)
- А. И. Кожанов — д.ф.-м.н., проф. (Новосибирск, Россия)
- Д. С. Лисовенко — д.ф.-м.н. (Москва, Россия)
- А. Н. Миронов — д.ф.-м.н., проф. (Елабуга, Россия)
- Е. Ю. Просвираков — д.ф.-м.н., (Екатеринбург, Россия)
- Л. С. Пулькина — д.ф.-м.н., проф. (Самара, Россия)
- Ю. Н. Радаев — д.ф.-м.н., проф. (Москва, Россия)
- Е. В. Радкевич — д.ф.-м.н., проф. (Москва, Россия)
- А. В. Саакян — д.ф.-м.н., проф. (Ереван, Армения)
- К. Б. Сабитов — д.ф.-м.н., проф. (Стерлитамак, Россия)
- Л. А. Сараев — д.ф.-м.н., проф. (Самара, Россия)
- А. П. Солдатов — д.ф.-м.н., проф. (Москва, Россия)
- В. В. Стружанов — д.ф.-м.н., проф. (Екатеринбург, Россия)

НАУЧНОЕ ИЗДАНИЕ

Вестник Самарского государственного технического университета.
Серия «Физико-математические науки» (Т. 28, № 1/74 – 2024)

Учредитель — ФГБОУ ВО «Самарский государственный технический университет» 443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244

Редактор Е. С. Захарова

Выпускающий редактор Е. В. Абрамова

Компьютерная вёрстка М. Н. Саушкин, О. С. Афанасьева,
Е. Ю. Арланова

Адрес редакции и издателя:

ФГБОУ ВО «СамГТУ»,
443100, г. Самара,
ул. Молодогвардейская, 244

Тел.: +7 (846) 337 04 43

Факс: +7 (846) 278 44 00

E-mail: vsgtu@samgtu.ru

URL: <http://www.mathnet.ru/vsgtu>

Оригинал-макет изготовлен
на кафедре прикладной математики
и информатики СамГТУ

Свидетельство о регистрации

ПИ № ФС 77–66685 от 27.07.2016.

Федеральная служба по надзору
в сфере связи информационных
технологий и массовых коммуникаций

Подписано в печать 19 августа 2024 г.

Дата выхода в свет 2 сентября 2024 г.

Формат 70 × 108 1/16.

Усл. печ. л. 13.00. Уч.-изд. л. 12.97.

Тираж 500 экз. Рег. № 118/24.

Заказ № 337.

Отпечатано в типографии
Самарского государственного
технического университета

443100, г. Самара,
ул. Молодогвардейская, 244.

Журнал индексируется в Web of Science Core Collection (Emerging Sources Citation Index), Scopus, Russian Science Citation Index, Zentralblatt MATH, DOAJ и входит в ядро Российского индекса научного цитирования.

Журнал включен в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук, по научным специальностям и соответствующим им отраслям науки:

- 1.1.2 – Дифференциальные уравнения и математическая физика (физико-математические науки);
- 1.1.8 – Механика деформируемого твердого тела (физико-математические науки);
- 1.2.2 – Математическое моделирование численные методы и комплексы программ (физико-математические науки).

Полнотекстовый доступ к статьям журнала осуществляется на Общероссийском математическом портале (<http://www.mathnet.ru>), портале научных журналов «Эко-Вектор» (<https://journals.eco-vector.com>), сайтах научных электронных библиотек eLibrary.ru (<http://elibrary.ru>) и КиберЛенинка (<http://cyberleninka.ru>).

© Коллектив авторов, 2024

© СамГТУ, 2024 (составление, дизайн, макет)

♾️ Контент публикуется на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

Подписной индекс в каталоге агентства «Урал-Пресс» 18108 Цена свободная

Journal of Samara State Technical University

ISSN 1991–8615 (print)
ISSN 2310–7081 (online)
SCIENTIFIC JOURNAL
Published since 1996
4 issues per year
August — 2024

Ser. Physical & Mathematical Sciences, 2024, vol. 28, no. 1

Founder — Samara State Technical University, Samara, 443100, Russian Federation

Editor-in-Chief V. P. Radchenko (Samara, Russian Federation)
Deputy Editor-in-Chief A. I. Zhdanov (Samara, Russian Federation)
Executive Secretary M. N. Saushkin (Samara, Russian Federation)
Executive Secretary E. V. Murashkin (Moscow, Russian Federation)
Secretary E. A. Kozlova (Samara, Russian Federation)

Editorial Council:

- B. D. Annin (Novosibirsk, Russian Federation)
- S. A. Avdonin (Fairbanks, Alaska, USA)
- A. A. Burenin (Komsomolsk-on-Amur, Russian Federation)
- Shōji Imatani (Kyoto, Japan)
- O. I. Marichev (Laramie, Wyoming, USA)
- V. P. Matveenko (Perm, Russian Federation)
- P. V. Sevastiyarov (Częstochowa, Poland)
- Ramachandran Velmurugan (Chennai, India)
- S. P. Verevkin (Rostock, Germany)

Editorial Board:

- A. P. Amosov (Samara, Russian Federation)
- A. V. Borovskikh (Moscow, Russian Federation)
- F. dell'Isola (Rome, Italy)
- V. N. Hakobyan (Yerevan, Armenia)
- L. A. Igumnov (N. Novgorod, Russian Federation)
- V. A. Kovalev (Moscow, Russian Federation)
- A. I. Kozhanov (Novosibirsk, Russian Federation)
- D. S. Lisovenko (Moscow, Russian Federation)
- A. N. Mironov (Elabuga, Russian Federation)
- E. Yu. Prosviryakov (Ekaterinburg, Russian Federation)
- L. S. Pulkina (Samara, Russian Federation)
- Yu. N. Radayev (Moscow, Russian Federation)
- E. V. Radkevich (Moscow, Russian Federation)
- K. B. Sabitov (Sterlitamak, Russian Federation)
- A. V. Sahakyan (Yerevan, Armenia)
- L. A. Saraev (Samara, Russian Federation)
- A. P. Soldatov (Moscow, Russian Federation)
- V. V. Struzhanov (Ekaterinburg, Russian Federation)

Edited by E. S. Zakharova, E. V. Abramova
Compiled and typeset by M. N. Saushkin, O. S. Afanas'eva,
E. Yu. Arlanova

The Editorial Board Address:

Dept. of Applied Mathematics and Computer Science,
Samara State Technical University,
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russian Federation

Phone: +7 (846) 337 04 43

Phax: +7 (846) 278 44 00

E-mail: vsgtu@samgtu.ru

URL: <http://www.mathnet.ru/eng/vsgtu>

Printed at the Samara State Technical University Press.

The journal covered in Web of Science Core Collection (Emerging Sources Citation Index), Zentralblatt MATH, Scopus, Russian Science Citation Index, and DOAJ.

The full-text electronic version of journal is hosted by the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru (<http://www.mathnet.ru>), the Eco-Vector Journals Portal (<https://journals.eco-vector.com>), and by the web-sites of scientific electronic libraries eLibrary.ru (<http://elibrary.ru>) and CyberLeninka (<http://cyberleninka.ru>).

© Authors, 2024

© Samara State Technical University, 2024 (Compilation, Design, and Layout)

 The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Содержание

Дифференциальные уравнения и математическая физика

- Багров А. Р., Башкиров Е. К.* “Динамика теплового перепутывания в нерезонансной трехкубитной модели Тависа—Каммингса с керровской нелинейностью” 7
- Сафаров Ж. Ш.* “Обратная задача для интегро-дифференциального уравнения гиперболического типа с дополнительной информацией специального вида в ограниченной области” 29
- Уринов А. К., Окбоев А. Б.* “Видоизмененная задача Коши для неоднородного вырождающегося гиперболического уравнения второго рода” 45

Механика деформируемого твёрдого тела

- Иванычев Д. А., Левина Е. Ю.* “Построение упругих полей в задаче от действия объемных сил циклического характера” 59
- Радченко В. П., Зотеев В. Е., Афанасьева Е. А.* “Численный метод структурной и параметрической идентификации математической модели неполной обратимости деформации ползучести” 73
- Яковлева Т. В., Крысько В. А.* “Математические модели нелинейной динамики функционально-градиентных нано/микро/макромасштабных пористых замкнутых цилиндрических оболочек Кирхгофа–Лява” 96

Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

- Жданов А. И., Сидоров Ю. В.* “Неявная итерационная схема на основе алгоритма псевдообращения и ее применения” 117
- Казаковцева Е. В., Коваленко А. В., Письменский А. В., Уртепов М. Х.* “Гибридный численно-аналитический метод решения задач переноса ионов соли в мембранных системах с осевой симметрией” 130
- Немцова О. М., Коньгин Г. Н., Веселков И. С.* “Расширенная математическая модель обратной задачи ядерного гамма-резонанса. Достоверность и информативность применения” 152

Краткие сообщения

- Апаков Ю. П., Умаров Р. А.* “Решение одной краевой задачи для уравнения третьего порядка с переменными коэффициентами” 171
- Ненашев М. В., Рахманин О. С., Киященко В. В.* “Анализ двухкомпонентных композиционных покрытий при производстве элементов электроники с использованием методов компьютерного зрения” 186

Contents

Differential Equations and Mathematical Physics

- Bagrov A. R., Bashkirov E. K.* “Dynamics of a thermal entanglement in the not-resonant three-qubit Tavis–Cummings model with Kerr nonlinearity” 7
- Safarov J. Sh.* “Inverse problem for an integro-differential equation of hyperbolic type with additional information of a special form in a bounded domain” 29
- Urinov A. K., Okboev A. B.* “A modified Cauchy problem for an inhomogeneous equation of degenerate hyperbolic type of the second kind” 45

Mechanics of Solids

- Ivanychev D. A., Levina E. Yu.* “Construction of elastic fields in the problem from the action of body forces of a cyclic nature” 59
- Radchenko V. P., Zoteev V. E., Afanaseva E. A.* “Numerical method for structural and parametric identification of a mathematical model of incomplete inverse deformation of creep strain” 73
- Yakovleva T. V., Krysko V. A.* “Mathematical models of nonlinear dynamics of functionally graded nano/micro/macro-scale porous closed cylindrical Kirchhoff–Love shells” 96

Mathematical Modeling, Numerical Methods and Software Complexes

- Zhdanov A. I., Sidorov Yu. V.* “Implicit iterative scheme based on the pseudo-inversion algorithm and its application” 117
- Kazakovtseva E. V., Kovalenko A. V., Pismenskiy A. V., Urtenov M. Kh.* “Hybrid numerical-analytical method for solving the problems of salt ion transport in membrane systems with axial symmetry” 130
- Nemtsova O. M., Konygin G.N., Veselkov I. S.* “Extended mathematical model of the inverse problem of nuclear gamma-resonance. Reliability and informative of application” 152

Short Communications

- Apakov Yu. P., Umarov R. A.* “The solution to a boundary value problem for a third-order equation with variable coefficients” 171
- Nenashev M. V., Rakhmanin O. S., Kiyashchenko V. V.* “Analysis for two-component composite coatings in the production of electronic components by computer vision methods” 186



УДК 517.958:530.145

Динамика теплового перепутывания в нерезонансной трехкубитной модели Тависа–Каммингса с керровской нелинейностью

А. Р. Багров, Е. К. Башкиров

Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С.П. Королева,
Россия, 443086, Самара, Московское ш., 34.

Аннотация

Рассматривается динамика трех идентичных кубитов, нерезонансно взаимодействующих с тепловым полем идеального резонатора со средой Керра. Найдены решения квантового временного уравнения Лиувилля для полной матрицы плотности системы из трех кубитов и поля резонатора для начальных сепарабельных, бисепарабельных и истинных перепутанных состояний кубитов и теплового начального состояния поля резонатора. Путем усреднения полной матрицы плотности по переменным поля резонатора и по переменным одного из кубитов найдена редуцированная матрица плотности пары оставшихся кубитов. Проведены вычисления для всех возможных пар кубитов. Двухкубитные матрицы плотности использованы для вычисления параметра перепутывания кубитов — отрицательности пар кубитов. Проведено численное моделирование временной зависимости отрицательности для различных начальных состояний кубитов и параметров модели. Результаты численного моделирования отрицательности пар кубитов показали, что наличие расстройки и керровской нелинейности в случае начального сепарабельного состояния пары кубитов может приводить к существенному увеличению степени их перепутывания. В случае начального перепутанного состояния пары кубитов расстройка и керровская среда могут значительно уменьшить амплитуды осцилляций Раби отрицательности и, соответственно, приводить к существенной стабилизации начального перепутывания кубитов. Показано также, что наличие расстройки и керровской нелинейности может приводить к исчезновению эффекта мгновенной смерти перепутывания кубитов.

Дифференциальные уравнения и математическая физика

Научная статья

© Коллектив авторов, 2024

© СамГТУ, 2024 (составление, дизайн, макет)

📄 © ⓘ Контент публикуется на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

Образец для цитирования

Багров А. Р., Башкиров Е. К. Динамика теплового перепутывания в нерезонансной трехкубитной модели Тависа–Каммингса с керровской нелинейностью // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2024. Т. 28, № 1. С. 7–28. EDN: ZPKXMD. DOI: 10.14498/vsgtu2040.

Сведения об авторах

Александр Романович Багров  <https://orcid.org/0000-0002-1098-0300>
магистрант; каф. общей и теоретической физики; e-mail: alexander.bagrov00@mail.ru

Евгений Константинович Башкиров  <https://orcid.org/0000-0001-8682-4956>
доктор физико-математических наук, профессор; профессор; каф. общей и теоретической физики; e-mail: bashkirov.ek@ssau.ru

Ключевые слова: кубиты, квантовое уравнение Лиувилля, тепловое поле, перепутывание, отрицательность, эффект мгновенной смерти перепутывания, среда Керра, расстройка.

Получение: 30 июня 2023 г. / Исправление: 11 августа 2023 г. /

Принятие: 19 сентября 2023 г. / Публикация онлайн: 31 мая 2024 г.

Введение. Перепутанные состояния в настоящее время рассматриваются в квантовой информатике как основной ресурс при решении задач обработки информации. Такие состояния кубитов используются для квантовых вычислений, квантовых коммуникаций, квантового кодирования информации и других операций [1]. Поэтому важно детально рассматривать природу и свойства перепутанных состояний. Изучение наиболее эффективных схем генерации, механизмов управления и контроля перепутанных состояний кубитов является, таким образом, одной из основных задач квантовой информатики. Квантовые вычисления и квантовые коммуникации требуют максимально перепутанных стабильных состояний с большим временем декогеренции. Для генерации таких состояний обычно используют взаимодействие естественных и искусственных атомов (нейтральных ридберговских атомов и ионов в ловушках, примесных спинов, квантовых точек, сверхпроводящих цепей, гибридных и оптомеханических систем, азотозамещенных вакансий в алмазе и др.) с электромагнитными полями резонаторов [2–10]. Для теоретического исследования динамики систем кубитов, взаимодействующих с электромагнитными полями резонаторов, используются модели квантовой электродинамики резонатора, а именно различные обобщения модели Тависа—Каммингса [11–14].

Практическое использование перепутанных состояний для квантовых вычислений и коммуникаций предполагает необходимость выбора соответствующих количественных критериев степени перепутывания кубитов. Хотя общие свойства многокубитных перепутанных состояний изучены достаточно подробно, количественные критерии перепутывания удалось строго ввести только для двухкубитных систем. Этими критериями являются согласованность (критерий Вутгерса) [15] и отрицательность (критерий Переса—Хородецких) [16,17]. Что касается многокубитных систем, для них пока не удалось ввести аналогичные критерии. Ненулевые значения новых критериев перепутывания, введенных для многокубитных систем, указывают лишь на наличие перепутывания в системе, но не позволяют количественно оценить степень перепутывания кубитов. Кроме того, для многокубитной системы существует несколько различных неэквивалентных классов перепутанных состояний. Трудности теоретического описания перепутанных состояний значительно возрастают с увеличением количества кубитов в системе [18–21]. Поэтому в настоящее время особое внимание уделяется изучению динамики перепутывания трехкубитных систем.

Чистые состояния системы трех кубитов могут быть полностью сепарабельными, бисепарабельными или истинно перепутанными [22–27]. Чистое состояние полностью сепарабельно, если его можно записать в виде тензорного произведения трех векторов состояний отдельных кубитов. Что касается трехкубитных смешанных состояний, они называются полностью сепарабель-

ными, если их можно выразить в виде суммы полностью сепарабельных чистых состояний. Если состояние не является полностью сепарабельным, но становится сепарабельным при некотором разделении трех кубитов на две части, то говорят, что такое состояние бисепарабельно.

Бисепарабельные состояния бывают трех разных типов в зависимости от способа разделения системы трех кубитов на две части. В случае, когда состояние не является ни полностью сепарабельным, ни бисепарабельным, оно называется истинно запутанным.

Согласно общепринятой классификации, для трехкубитных систем существует два неэквивалентных по отношению к стохастически локальным операциям и классическим коммуникациям вида истинно перепутанных состояний. Это так называемые перепутанные состояния Гринберга—Хорна—Цайлингера (*GHZ*-состояния) и состояния Вернера (*W*-состояния). *GHZ*-состояния нестабильны по отношению к потере частиц системой. Такие состояния используют для телепортации и плотного кодирования. Напротив, *W*-состояния максимально устойчивы не только к потерям частиц, но и к внешнему шуму. Такие состояния используют в квантовой обработке информации.

Истинно перепутанные трехкубитные состояния обоих типов в настоящее время экспериментально реализованы для различных типов кубитов, в частности для ионов в магнитных ловушках и сверхпроводящих цепей [2–4]. Для описания перепутывания трехкубитных систем иногда используют количественный критерий, называемый сцеплением (tangle) [28]. Однако данный критерий для системы трех идентичных кубитов выражается через некое среднее для одного кубита, а также средние для пар кубитов, которые есть просто согласованности пар кубитов в квадрате. Таким образом, указанный параметр не является независимым и полностью определяется согласованностями пар кубитов. Поэтому в настоящей работе при изучении динамики перепутывания трехкубитной системы мы сосредоточимся на вычислении параметров перепутывания пар кубитов. При этом в качестве критерия перепутывания пары кубитов удобнее использовать не согласованность, а отрицательность.

Кубиты всегда взаимодействуют со своим окружением. Хорошо известно, что это взаимодействие обычно приводит к исчезновению перепутывания. Однако в некоторых случаях взаимодействие с окружающей средой может, наоборот, стать источником перепутывания. В частности, перепутывание кубитов в резонаторе может быть вызвано тепловым шумом резонатора. Перепутывание двух двухуровневых атомов (кубитов), индуцированное тепловым полем одномодового резонатора в рамках двухатомной одномодовой модели Тависа—Каммингса, было предсказано Питером Найтом с соавторами [29]. Впоследствии этот эффект был также предсказан для различных обобщений двухкубитной модели Тависа—Каммингса (см. ссылки в [30–31]), а также для трехкубитной модели Тависа—Каммингса [32]. В частности было показано, что расстройка и керровская нелинейность могут значительно увеличить величину индуцированного кубит-кубитного перепутывания.

Еще одним препятствием для использования перепутанных состояний кубитов в резонаторах является эффект мгновенной смерти перепутывания. Такой эффект впервые был теоретически предсказан Ю и Эберли [33]. Позже этот эффект наблюдался экспериментально для кубитов различной фи-

зической природы [34–36]. Поэтому представляет значительный интерес изучение методов, предотвращающих эффект мгновенной смерти перепутывания кубитов, вызванной взаимодействием с тепловыми полями резонаторов. Изучение указанного эффекта для кубитов, взаимодействующих с тепловыми шумами резонаторов, особенно важно в связи с тем, что в резонаторах всех квантовых устройств обязательно присутствуют тепловые фотоны. В последнее время были предложены различные методы устранения эффекта мгновенной смерти перепутывания, вызванной тепловым шумом. Так, в работе [37] показано, что учет расстройки и керровской нелинейности может значительно увеличить степень теплового перепутывания кубитов, индуцированного полем резонатора, в случае сепарабельных начальных состояний кубитов и существенно стабилизировать осцилляции Раби параметра перепутывания кубитов в случае их перепутанного начального состояния. В работе [38] детально исследована динамика системы трех кубитов, которые резонансно взаимодействуют с модой теплового квантового электромагнитного поля в идеальном резонаторе.

Большой интерес представляет обобщение полученных результатов на случай нерезонансного взаимодействия трех кубитов с электромагнитным полем резонатора, а также учет влияния нелинейной среды Керра резонатора на динамику перепутывания кубитов.

В данной работе мы изучили систему, состоящую из трех идентичных кубитов, которые нерезонансно взаимодействуют с модой теплового квантового электромагнитного поля идеального нелинейного резонатора со средой Керра посредством однофотонных переходов. В качестве начальных состояний кубитов были рассмотрены сепарабельные, бисепарабельные и истинно перепутанные состояния. На основе решения квантового уравнения Лиувилля для матрицы плотности всей системы «три кубита + мода поля» определена временная эволюция редуцированных матриц плотности пар кубитов. Редуцированные матрицы плотности были использованы для получения временных зависимостей отрицательности пар кубитов. Было также проведено численное моделирование временных зависимостей отрицательностей пар кубитов для различных начальных состояний трехкубитной системы и различных значений параметров модели.

1. Описание модели. Рассмотрим систему, состоящую из трёх идентичных кубитов Q_1 , Q_2 и Q_3 с энергетической щелью $\hbar\omega_0$, нерезонансно взаимодействующих посредством однофотонных переходов с полем одномодового резонатора частоты ω . Положим, что константы связи между кубитами и полем резонатора равны. Предположим также, что в резонаторе имеется дополнительная среда Керра. Тогда гамильтониан взаимодействия для рассматриваемой модели в системе отсчета, вращающейся с частотой моды поля ω , и в приближении вращающейся волны можно записать в виде

$$\hat{H}_{int} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 \hbar \delta \hat{\sigma}_k^z + \sum_{k=1}^3 \hbar \gamma (\hat{\sigma}_k^+ \hat{c} + \hat{\sigma}_k^- \hat{c}^\dagger) + \hbar \chi \hat{c}^{\dagger 2} \hat{c}^2,$$

где $\hat{\sigma}_k^z$ — операторы разности населенностей для возбужденного $|u\rangle_k$ и основного $|d\rangle_k$ состояний в k -том кубите, $k = 1, 2, 3$; $\hat{\sigma}_k^+ = |u\rangle_{kk} \langle d|$ и $\hat{\sigma}_k^- = |d\rangle_{kk} \langle u|$ — повышающий и понижающий операторы в k -том кубите; \hat{c}^\dagger и \hat{c} — операторы

рождения и уничтожения фотонов резонаторной моды; γ — параметр кубит-фотонного взаимодействия; $\delta = \omega_0 - \omega$ — параметр расстройки и χ — константа нелинейности Керра. Заметим, что в отличие от естественных атомов, для искусственных атомов, например сверхпроводящих кубитов, параметр керровской нелинейности может быть сравним с параметром кубит-фотонного взаимодействия [39].

Будем полагать, что в начальный момент времени кубиты приготовлены в одном из следующих сепарабельных состояний типа

$$|\phi(0)\rangle_{Q_1 Q_2 Q_3} = |u, u, d\rangle, \quad (1)$$

$$|\phi(0)\rangle_{Q_1 Q_2 Q_3} = |u, d, d\rangle \quad (2)$$

или в бисепарабельном состоянии вида

$$|\phi(0)\rangle_{Q_1 Q_2 Q_3} = \cos \beta |u, u, d\rangle + \sin \beta |u, d, u\rangle, \quad (3)$$

или в истинно перепутанном W -состоянии

$$|\phi(0)\rangle_{Q_1 Q_2 Q_3} = f |u, u, d\rangle + p |u, d, u\rangle + h |d, u, u\rangle, \quad (4)$$

где

$$|f|^2 + |p|^2 + |h|^2 = 1.$$

Здесь β, f, p, h — параметры, определяющие степень начального перепутывания кубитов. Максимальной степени перепутывания кубитов для бисепарабельного состояния (3) соответствует значение $\beta = \pi/4$, а для истинно перепутанного состояния (4) значения $f = p = h = 1/\sqrt{3}$. Начальные состояния кубитов (1)–(4) в резонаторах можно получить с помощью микроволновых импульсов определенной длительности.

В качестве начального состояния поля выберем одномодовое тепловое состояние с матрицей плотности

$$\varrho_F(0) = \sum_m w_m |m\rangle\langle m|. \quad (5)$$

Здесь весовые функции w_m в формуле (5) имеют вид

$$w_m = \frac{\bar{m}^m}{(1 + \bar{m})^{m+1}},$$

где \bar{m} — среднее число тепловых фотонов, определяемое формулой Бозе—Эйнштейна

$$\bar{m} = (\exp[\hbar\omega/k_B T] - 1)^{-1},$$

k_B — постоянная Больцмана и T — температура микроволнового резонатора. В зависимости от физической природы кубитов, взаимодействующих с полями резонаторов, температура резонатора может меняться от комнатных температур для азотозамещенных вакансий в алмазе до нК в случае нейтральных атомов и ионов в магнитных ловушках [2].

2. Решение квантового временного уравнения Шредингера для вакуумного поля резонатора. Поставим перед собой задачу найти динамику рассматриваемой модели. Начнем решение поставленной задачи для

случая фоковского начального состояния электромагнитного поля резонатора, а затем обобщим эти результаты на случай теплового поля.

В случае фоковского начального состояния поля волновая функция есть

$$|\phi(0)\rangle_{F,m} = |m\rangle, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Введем для рассматриваемой модели параметр, который назовем числом возбуждений системы $M = l + m$, где l — число кубитов, приготовленных в возбужденном состоянии. Состояние полной системы, включающей кубиты и моду поля резонатора, мы можем в произвольный момент времени t задать с помощью волновой функции $|\phi(t)\rangle_{total,M,m}$, удовлетворяющей временному уравнению Шредингера вида

$$i\hbar \frac{\partial |\phi(t)\rangle_{total,M,m}}{\partial t} = \hat{H}_{int} |\phi(t)\rangle_{total,M,m} \quad (6)$$

с начальным условием

$$|\phi(0)\rangle_{total,M,m} = |\phi(0)\rangle_{Q_1 Q_2 Q_3} \otimes |\phi(0)\rangle_{F,m} = |\phi(0)\rangle_{Q_1 Q_2 Q_3} \otimes |m\rangle$$

и стандартными для квантовой механики граничными условиями.

Для числа возбуждений системы $M \geq 3$ эволюция системы происходит в 8-мерном гильбертовом пространстве с базисом

$$\begin{aligned} &|u, u, u, m\rangle, \quad |u, u, d, m+1\rangle, \quad |u, d, u, m+1\rangle, \quad |d, u, u, m+1\rangle, \\ &|u, d, d, m+2\rangle, \quad |d, u, d, m+2\rangle, \quad |d, d, u, m+2\rangle, \quad |d, d, d, m+3\rangle. \end{aligned}$$

Тогда для выбранного числа возбуждений и начальных состояний кубитов (1)–(4) волновая функция в последующие моменты времени t может быть записана следующим образом:

$$\begin{aligned} |\phi_{total,M,m}(t)\rangle = & C_1(t)|u, u, u, m\rangle + C_2(t)|u, u, d, m+1\rangle + \\ & + C_3(t)|u, d, u, m+1\rangle + C_4(t)|d, u, u, m+1\rangle + C_5(t)|u, d, d, m+2\rangle + \\ & + C_6(t)|d, u, d, m+2\rangle + C_7(t)|d, d, u, m+2\rangle + C_8(t)|d, d, d, m+3\rangle. \end{aligned}$$

Подставляя в уравнение (6) волновую функцию $|\phi(t)\rangle_{total,M,m}$, получаем для коэффициентов $C_i \equiv C_i(t)$ систему уравнений

$$\begin{cases} i\dot{C}_1 = \gamma\sqrt{m+1}(C_4 + C_3 + C_2) + \chi m(m-1)C_1 + 3\delta C_1/2, \\ i\dot{C}_2 = \gamma[\sqrt{m+2}(C_6 + C_5) + \sqrt{m+1}C_1] + \chi C_2 m(m+1) + \delta C_2/2, \\ i\dot{C}_3 = \gamma[\sqrt{m+2}(C_7 + C_5) + \sqrt{m+1}C_1] + \chi C_3 m(m+1) + \delta C_3/2, \\ i\dot{C}_4 = \gamma[\sqrt{m+1}C_1 + \sqrt{m+2}(C_6 + C_7)] + \chi C_4 m(m+1) + \delta C_4/2, \\ i\dot{C}_5 = \gamma[C_8\sqrt{m+3} + \sqrt{m+2}(C_3 + C_2)] + \chi C_5(m+2)(m+1) - \delta C_5/2, \\ i\dot{C}_6 = \gamma[\sqrt{m+2}(C_2 + C_4) + C_8\sqrt{m+3}] + \chi C_6(m+2)(m+1) - \delta C_6/2, \\ i\dot{C}_7 = \gamma[\sqrt{m+2}(C_4 + C_3) + \sqrt{m+3}C_8] + \chi C_7(m+2)(m+1) - \delta C_7/2, \\ i\dot{C}_8 = \gamma\sqrt{m+3}(C_5 + C_6 + C_7) + \chi C_8(m+3)(m+2) - 3\delta C_8/2. \end{cases} \quad (7)$$

Для числа возбуждений $M = 2$ и начальных состояний кубитов (1)–(4) полная волновая функция эволюционирует в 7-мерном гильбертовом пространстве с базисом

$$|u, u, d, 0\rangle, \quad |u, d, u, 0\rangle, \quad |d, u, u, 0\rangle,$$

$$|u, d, d, 1\rangle, \quad |d, u, d, 1\rangle, \quad |d, d, u, 1\rangle, \quad |d, d, d, 2\rangle.$$

В рассматриваемом случае временная волновая функция может быть записана следующим образом ($l \leq 2$):

$$|\phi_{total,2,2-l}(t)\rangle = \Phi_1(t)|u, u, d, 0\rangle + \Phi_2(t)|u, d, u, 0\rangle + \Phi_3(t)|d, u, u, 0\rangle + \\ + \Phi_4(t)|u, d, d, 1\rangle + \Phi_5(t)|d, u, d, 1\rangle + \Phi_6(t)|d, d, u, 1\rangle + \Phi_7(t)|d, d, d, 2\rangle.$$

Система дифференциальных уравнений для коэффициентов $\Phi_i(t)$ получается аналогично предыдущему случаю:

$$\begin{cases} i\dot{\Phi}_1(t) = \gamma(\Phi_5(t) + \Phi_4(t)) + \delta\Phi_1(t)/2, \\ i\dot{\Phi}_2(t) = \gamma(\Phi_6(t) + \Phi_4(t)) + \delta\Phi_2(t)/2, \\ i\dot{\Phi}_3(t) = \gamma(\Phi_6(t) + \Phi_5(t)) + \delta\Phi_3(t)/2, \\ i\dot{\Phi}_4(t) = \gamma(\sqrt{2}\Phi_7(t) + \Phi_1(t) + \Phi_2(t)) - \delta\Phi_4(t)/2, \\ i\dot{\Phi}_5(t) = \gamma(\sqrt{2}\Phi_7(t) + \Phi_1(t) + \Phi_3(t)) - \delta\Phi_5(t)/2, \\ i\dot{\Phi}_6(t) = \gamma(\sqrt{2}\Phi_7(t) + \Phi_2(t) + \Phi_3(t)) - \delta\Phi_6(t)/2, \\ i\dot{\Phi}_7(t) = \gamma\sqrt{2}(\Phi_4(t) + \Phi_5(t) + \Phi_6(t)) - 3\delta\Phi_7(t)/2 + 2\chi\Phi_7(t). \end{cases} \quad (8)$$

Для числа возбуждений $M = 1$ выбираем базис гильбертова пространства в виде

$$|u, d, d, 0\rangle, \quad |d, u, d, 0\rangle, \quad |d, d, u, 0\rangle, \quad |d, d, d, 1\rangle.$$

Временная волновая функция для числа возбуждений $M = 1$ записывается следующим образом ($l \leq 1$):

$$|\phi_{total,1,1-l}(t)\rangle = Z_1(t)|u, d, d, 0\rangle + Z_2(t)|d, u, d, 0\rangle + \\ + Z_3(t)|d, d, u, 0\rangle + Z_4(t)|d, d, d, 1\rangle.$$

Соответствующая система дифференциальных уравнений для коэффициентов $Z_i(t)$ будет следующей:

$$\begin{cases} i\dot{Z}_1(t) = \gamma Z_4(t) - \delta Z_1(t)/2, \\ i\dot{Z}_2(t) = \gamma Z_4(t) - \delta Z_2(t)/2, \\ i\dot{Z}_3(t) = \gamma Z_4(t) - \delta Z_3(t)/2, \\ i\dot{Z}_4(t) = \gamma(Z_1(t) + Z_2(t) + Z_3(t)) - 3\delta Z_4(t)/2. \end{cases} \quad (9)$$

Наконец, для $M = 0$ базис гильбертова пространства составляет вектор $|d, d, d, 0\rangle$, а соответствующая временная волновая функция следующая:

$$|\phi_{total,0,0}(t)\rangle = |d, d, d, 0\rangle.$$

3. Решение квантового временного уравнения Лиувилля для теплового поля резонатора. Имея выражения для временных волновых функций системы в случае фоковского начального состояния поля резонатора, мы

можем найти временную матрицу плотности, являющуюся решением уравнения Лиувилля в случае теплового поля резонатора

$$i\hbar \frac{\partial \varrho(t)}{\partial t} = [H_{int}, \varrho(t)]$$

с начальными условиями

$$\varrho(0) = |\phi(0)\rangle_{Q_1 Q_2 Q_3} \langle\phi(0)| \otimes \varrho(0)_F.$$

В работе [38] для модели с нулевой расстройкой и в отсутствие среды Керра найдены точные аналитические решения систем уравнений (7), (8) и (9). Для модели, рассматриваемой в настоящей работе, решения указанных уравнений имеют чрезмерно громоздкий вид. Поэтому в настоящей работе мы ограничимся численным решением указанных уравнений.

Имея временные волновые функции системы для различных чисел возбуждения $|\phi(t)\rangle_{total,M,m}$, $|\phi(t)\rangle_{total,2,2-l}$, $|\phi(t)\rangle_{total,1,1-l}$ или $|\phi(t)\rangle_{total,0,0}$ можно вычислить временную матрицу плотности полной системы «три кубита + мода поля». Соответственно, решение квантового уравнения Лиувилля для матрицы плотности полной системы в случае начальных состояний (1), (3) и (4) и теплового состояния поля (5) можно записать в виде ($l = 2$)

$$\begin{aligned} \varrho_{Q_1 Q_2 Q_3 F}(t) = \sum_{m=1}^{\infty} w_m |\phi(t)\rangle_{total,m+l,m} \langle\phi(t)| + \\ + w_0 |\phi(t)\rangle_{total,2,2-l} \langle\phi(t)|. \end{aligned}$$

Для начального состояния (2) и теплового состояния поля (5) матрицу плотности можно записать в виде ($l = 1$)

$$\begin{aligned} \varrho_{Q_1 Q_2 Q_3 F}(t) = \sum_{m=2}^{\infty} w_m |\phi(t)\rangle_{total,m+l,m} \langle\phi(t)| + \\ + w_1 |\phi(t)\rangle_{total,2,2-l} \langle\phi(t)| + w_0 |\phi(t)\rangle_{total,1,1-l} \langle\phi(t)|. \end{aligned}$$

Теперь можно также вычислить редуцированную матрицу плотности трех кубитов, усредняя полную матрицу плотности $\varrho_{Q_1 Q_2 Q_3 F}(t)$ по переменным поля:

$$\varrho_{Q_1 Q_2 Q_3}(t) = \text{Tr}_F \varrho_{Q_1 Q_2 Q_3 F}(t). \quad (10)$$

Как уже отмечалось во введении, точные количественные меры перепутывания кубитов в настоящее время разработаны только для двухкубитных систем. Для вычисления критерия перепутывания пары кубитов необходимо вычислить редуцированную двухкубитную матрицу плотности. Для этого следует усреднить трехкубитную матрицу плотности (10) по переменным третьего кубита, т.е.

$$\varrho_{Q_i Q_j}(t) = \text{Tr}_{Q_k} \varrho_{Q_1 Q_2 Q_3}(t), \quad i, j, k = 1, 2, 3, \quad i \neq j, \quad j \neq k, \quad i \neq k.$$

4. Вычисление отрицательности. Для двухкубитной системы, описываемой редуцированной двухкубитной матрицей плотности $\varrho_{Q_i Q_j}(t)$, в качестве критерия перепутывания кубитов может быть выбран параметр Переса—

Хородецких, или отрицательность [16, 17], который может быть определен через отрицательные собственные значения ν_i^- частичной транспонированной по переменным одного кубита редуцированной двухкубитной матрицы плотности $\varrho_{Q_i Q_j}^{T_1}$:

$$\varepsilon = -2 \sum_i \nu_i^- . \quad (11)$$

Для всех начальных состояний кубитов и теплового состояния поля частично транспонированные по переменным одного кубита редуцированные двухкубитные матрицы плотности имеют вид

$$\varrho_{Q_i Q_j}^{T_1}(t) = \begin{pmatrix} \varrho_{11} & 0 & 0 & (\varrho_{23})^* \\ 0 & \varrho_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varrho_{33} & 0 \\ \varrho_{23} & 0 & 0 & \varrho_{44} \end{pmatrix} . \quad (12)$$

Матричные элементы (12) для кубитов Q_1 и Q_2 в случае начального состояния кубитов (1), (3) и (4) выражаются следующим образом:

$$\begin{aligned} \varrho_{11}(t) &= \sum_{m=1}^{\infty} w_m (|C_1(t)|^2 + |C_2(t)|^2) + w_0 |\Phi_1(t)|^2, \\ \varrho_{22}(t) &= \sum_{m=1}^{\infty} w_m (|C_3(t)|^2 + |C_5(t)|^2) + w_0 (|\Phi_2(t)|^2 + |\Phi_4(t)|^2), \\ \varrho_{33}(t) &= \sum_{m=1}^{\infty} w_m (|C_4(t)|^2 + |C_6(t)|^2) + w_0 (|\Phi_3(t)|^2 + |\Phi_5(t)|^2), \\ \varrho_{44}(t) &= \sum_{m=1}^{\infty} w_m (|C_7(t)|^2 + |C_8(t)|^2) + w_0 (|\Phi_6(t)|^2 + |\Phi_7(t)|^2), \\ \varrho_{23}(t) &= \sum_{m=1}^{\infty} w_m (C_3(t)C_4^*(t) + C_5(t)C_6^*(t)) + w_0 (\Phi_4(t)\Phi_5^*(t) + \Phi_2(t)\Phi_3^*(t)), \\ \varrho_{32}(t) &= (\varrho_{23}(t))^* . \end{aligned}$$

Для кубитов Q_2 и Q_3 соответственно имеем

$$\begin{aligned} \varrho_{11}(t) &= \sum_{m=1}^{\infty} w_m (|C_1(t)|^2 + |C_4(t)|^2) + w_0 |\Phi_3(t)|^2, \\ \varrho_{22}(t) &= \sum_{m=1}^{\infty} w_m (|C_2(t)|^2 + |C_6(t)|^2) + w_0 (|\Phi_1(t)|^2 + |\Phi_5(t)|^2), \\ \varrho_{33}(t) &= \sum_{m=1}^{\infty} w_m (|C_3(t)|^2 + |C_7(t)|^2) + w_0 (|\Phi_2(t)|^2 + |\Phi_6(t)|^2), \\ \varrho_{44}(t) &= \sum_{m=1}^{\infty} w_m (|C_5(t)|^2 + |C_8(t)|^2) + w_0 (|\Phi_4(t)|^2 + |\Phi_7(t)|^2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varrho_{23}(t) &= \sum_{m=1}^{\infty} w_m (C_2(t)C_3^*(t) + C_6(t)C_7^*(t)) + w_0 (\Phi_1(t)\Phi_2^*(t) + \Phi_5(t)\Phi_6^*(t)), \\ \varrho_{32}(t) &= (\varrho_{23}(t))^*.\end{aligned}$$

Для начального состояния (2) матричные элементы для кубитов Q_1 и Q_2 имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}\varrho_{11}(t) &= \sum_{m=2}^{\infty} w_m (|C_1(t)|^2 + |C_2(t)|^2) + w_1 |\Phi_1(t)|^2, \\ \varrho_{22}(t) &= \sum_{m=2}^{\infty} w_m (|C_3(t)|^2 + |C_5(t)|^2) + w_1 (|\Phi_2(t)|^2 + |\Phi_4(t)|^2) + w_0 |Z_1(t)|^2, \\ \varrho_{33}(t) &= \sum_{m=2}^{\infty} w_m (|C_4(t)|^2 + |C_6(t)|^2) + w_1 (|\Phi_3(t)|^2 + |\Phi_5(t)|^2) + w_0 |Z_2(t)|^2, \\ \varrho_{44}(t) &= \sum_{m=2}^{\infty} w_m (|C_7(t)|^2 + |C_8(t)|^2) + w_1 (|\Phi_6(t)|^2 + |\Phi_7(t)|^2) + \\ &\quad + w_0 (|Z_3(t)|^2 + |Z_4(t)|^2), \\ \varrho_{23}(t) &= \sum_{m=2}^{\infty} w_m (C_3(t)C_4^*(t) + C_5(t)C_6^*(t)) + w_1 (\Phi_4(t)\Phi_5^*(t) + \\ &\quad + \Phi_2(t)\Phi_3^*(t)) + w_0 Z_1(t)Z_2^*(t), \\ \varrho_{32}(t) &= (\varrho_{23}(t))^*.\end{aligned}$$

Для того же начального состояния (2) матричные элементы для кубитов Q_2 и Q_3 будут иметь вид

$$\begin{aligned}\varrho_{11}(t) &= \sum_{m=2}^{\infty} w_n (|C_1(t)|^2 + |C_4(t)|^2) + w_1 |\Phi_3(t)|^2, \\ \varrho_{22}(t) &= \sum_{m=2}^{\infty} w_m (|C_2(t)|^2 + |C_6(t)|^2) + w_1 (|\Phi_1(t)|^2 + |\Phi_5(t)|^2) + w_0 |Z_2(t)|^2, \\ \varrho_{33}(t) &= \sum_{m=2}^{\infty} w_m (|C_3(t)|^2 + |C_7(t)|^2) + w_1 (|\Phi_2(t)|^2 + |\Phi_6(t)|^2) + w_0 |Z_3(t)|^2, \\ \varrho_{44}(t) &= \sum_{m=2}^{\infty} w_m (|C_5(t)|^2 + |C_8(t)|^2) + w_1 (|\Phi_4(t)|^2 + |\Phi_7(t)|^2) + \\ &\quad + w_0 (|Z_1(t)|^2 + |Z_4(t)|^2), \\ \varrho_{23}(t) &= \sum_{m=2}^{\infty} w_m (C_3(t)C_4^*(t) + C_5(t)C_6^*(t)) + w_1 (\Phi_1(t)\Phi_2^*(t) + \\ &\quad + \Phi_5(t)\Phi_6^*(t)) + w_0 Z_2(t)Z_3^*(t), \\ \varrho_{32}(t) &= (\varrho_{23}(t))^*.\end{aligned}$$

Матрица (12) имеет всего одно собственное значение, которое может принимать отрицательные значения. Соответственно, отрицательность (11) для начальных состояний кубитов (1)–(4) и начальной полевой матрицы плотности (5) может быть записана в виде

$$\varepsilon(t) = \sqrt{(\varrho_{11} - \varrho_{44})^2 + 4|\varrho_{23}|^2} - \varrho_{11} - \varrho_{44}. \quad (13)$$

5. Результаты и обсуждение. Результаты численного моделирования отрицательности (13) представлены на рис. 1–5.

На рис. 1 показана временная зависимость отрицательности $\varepsilon_{12}(t)$ для пары кубитов 1 и 2 в случае начального сепарабельного состояния системы кубитов (1), фиксированного среднего числа фотонов в резонаторе $\bar{m} = 1.5$ и различных значений параметров расстройки и керровской нелинейности. На рис. 1, а показано влияние расстройки на временное поведение отрицательности кубитов 1 и 2 в случае отсутствия в резонаторе среды Керра. Из рисунка хорошо видно, что включение расстройки приводит не только к увеличению максимальной степени перепутывания кубитов, но и к существенному уменьшению интервалов времени, для которых достигаются максимумы отрицательности и имеет место мгновенная смерть перепутывания. На рис. 1, б показано влияние керровской нелинейности на временное поведение отрицательности кубитов 1 и 2 в случае резонансного взаимодействия кубитов и поля резонатора. Для рассматриваемого начального состояния системы и выделенной пары кубитов 1 и 2 керровская нелинейность слабо влияет на временное поведение перепутывания пары кубитов.

На рис. 2 показана временная зависимость отрицательности $\varepsilon_{23}(t)$ для другой пары кубитов 2 и 3 в случае того же сепарабельного начального состояния кубитов (1), фиксированного среднего числа фотонов в резонаторе $\bar{m} = 3$ и различных значений параметра расстройки и керровской нелинейности. Из рисунков хорошо видно, что в отличие от предыдущего случая, для пары кубитов 2 и 3 включение как расстройки, так и керровской нелинейности приводит не только к значительному увеличению максимальной степени перепутывания кубитов, но и к исчезновению эффекта мгновенной смерти перепутывания.

На рис. 3 показаны временные зависимости отрицательностей $\varepsilon_{12}(t)$ и $\varepsilon_{23}(t)$ для сепарабельного начального состояния кубитов (2), фиксированного среднего числа фотонов в резонаторе $\bar{m} = 3$ и различных значений параметров расстройки и керровской нелинейности. Из рисунка видно, что для пары кубитов 1 и 2 включение расстройки и керровской нелинейности приводит к существенному возрастанию степени перепутывания кубитов и исчезновению эффекта мгновенной смерти перепутывания. Для пары кубитов 2 и 3 к увеличению степени перепутывания кубитов приводит только увеличение расстройки, включение керровской нелинейности незначительно меняет характер поведения отрицательности, при этом максимальная степень перепутывания кубитов уменьшается с увеличением параметра нелинейности. Для пары кубитов 2 и 3 наличие расстройки или керровской нелинейности не ведет к исчезновению эффекта мгновенной смерти перепутывания.

На рис. 4 представлены временные зависимости отрицательностей $\varepsilon_{12}(t)$ и $\varepsilon_{23}(t)$ для бисепарабельного начального состояния кубитов (3), фиксированного среднего числа фотонов в резонаторе ($\bar{m} = 1.5$ для рис. 4, а и 4, б

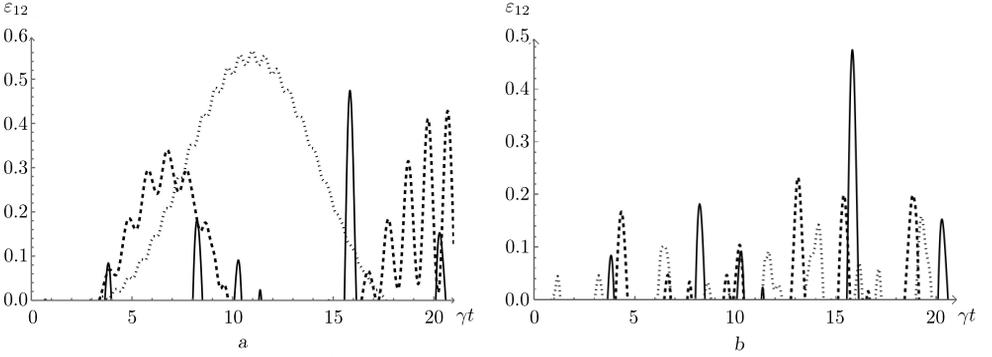


Рис. 1. Отрицательность $\varepsilon_{12}(t)$ как функция безразмерного времени γt для начального сепарабельного состояния кубитов (1). Рисунок а: среднее число фотонов $\bar{m} = 1.5$, параметр керровской нелинейности $\chi = 0$ и расстройка: $\delta = 0$ (сплошная линия), $\delta = 6\gamma$ (пунктирная линия), $\delta = 10\gamma$ (точечная линия). Рисунок б: среднее число фотонов $\bar{m} = 1.5$, параметр расстройки $\delta = 0$ и параметр керровской нелинейности: $\chi = 0$ (сплошная линия), $\chi = 2\gamma$ (пунктирная линия), $\chi = 3\gamma$ (точечная линия)

[Figure 1. Negativity $\varepsilon_{12}(t)$ as a function of a scaled time γt for the initial separable qubits state (1). For figure a the following parameters were used: the average number of photons $\bar{m} = 1.5$, the Kerr nonlinearity parameter $\chi = 0$, and the detuning parameters $\delta = 0$ (solid line), $\delta = 6\gamma$ (dashed line), $\delta = 10\gamma$ (dotted line). For figure b the following parameters were used: the average number of photons $\bar{m} = 1.5$, the detuning parameter $\delta = 0$, and the Kerr nonlinearity parameters $\chi = 0$ (solid line), $\chi = 2\gamma$ (dashed line), $\chi = 3\gamma$ (dotted line)]

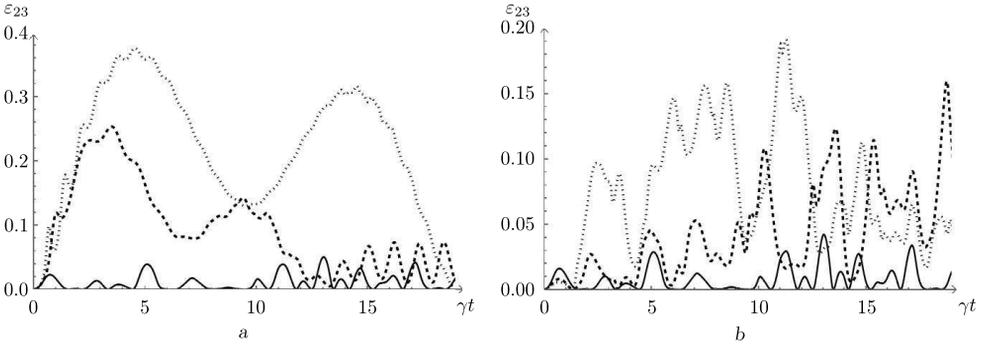


Рис. 2. Отрицательность $\varepsilon_{23}(t)$ как функция безразмерного времени γt для начального сепарабельного состояния кубитов (1). Рисунок а: среднее число фотонов $\bar{m} = 3$, параметр керровской нелинейности $\chi = 0$ и расстройка: $\delta = 0$ (сплошная линия), $\delta = 5\gamma$ (пунктирная линия), $\delta = 8\gamma$ (точечная линия). Рисунок б: среднее число фотонов $\bar{m} = 3$, параметр расстройки $\delta = 0$ и параметр керровской нелинейности: $\chi = 0$ (сплошная линия), $\chi = \gamma$ (пунктирная линия), $\chi = 2\gamma$ (точечная линия)

[Figure 2. Negativity $\varepsilon_{23}(t)$ as a function of a scaled time γt for the initial separable qubits state (1). For figure a the following parameters were used: the average number of photons $\bar{m} = 3$, the Kerr nonlinearity parameter $\chi = 0$, and the detuning parameters $\delta = 0$ (solid line), $\delta = 5\gamma$ (dashed line), $\delta = 8\gamma$ (dotted line). For figure b the following parameters were used: the average number of photons $\bar{m} = 3$, the detuning parameter $\delta = 0$, and the Kerr nonlinearity parameters $\chi = 0$ (solid line), $\chi = \gamma$ (dashed line), $\chi = 2\gamma$ (dotted line)]

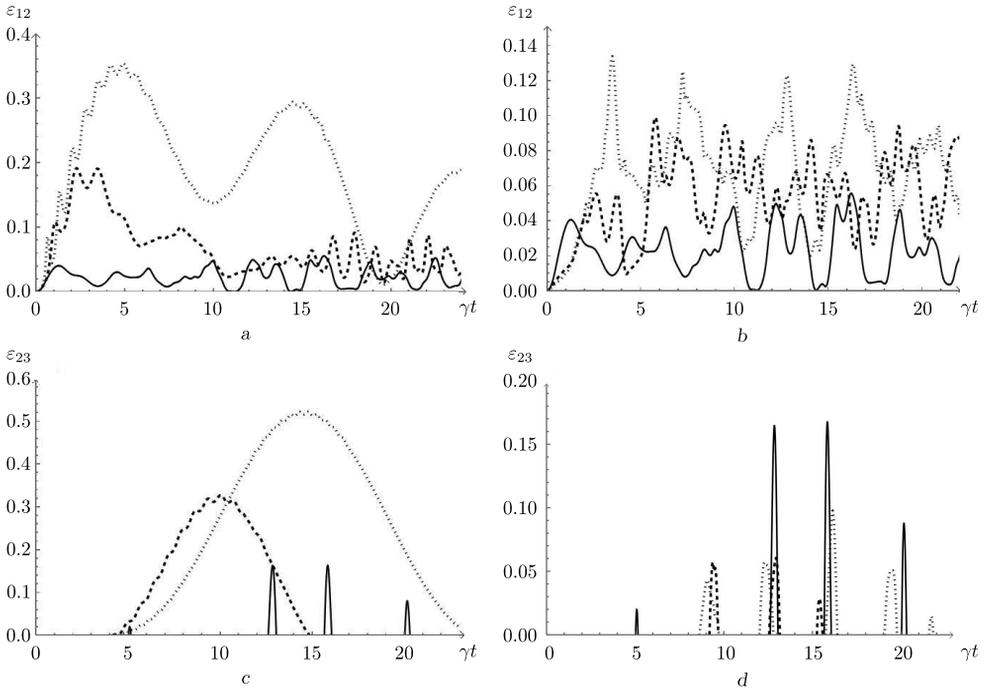


Рис. 3. Отрицательность $\varepsilon_{12}(t)$ (a, b) и $\varepsilon_{23}(t)$ (c, d) как функция безразмерного времени γt для начального сепарабельного состояния кубитов (2). Рисунок a: среднее число фотонов $\bar{m} = 4$, параметр керровской нелинейности $\chi = 0$ и расстройка: $\delta = 0$ (сплошная линия), $\delta = 4\gamma$ (пунктирная линия), $\delta = 8\gamma$ (точечная линия). Рисунок b: среднее число фотонов $\bar{m} = 3$, параметр расстройки $\delta = 0$ и параметр керровской нелинейности: $\chi = 0$ (сплошная линия), $\chi = 1.5\gamma$ (пунктирная линия), $\chi = 3\gamma$ (точечная линия). Рисунок c: среднее число фотонов $\bar{m} = 4$, параметр керровской нелинейности $\chi = 0$ и параметр расстройки: $\delta = 0$ (сплошная линия), $\delta = 8.5\gamma$ (пунктирная линия), $\delta = 13\gamma$ (точечная линия). Рисунок d: среднее число фотонов $\bar{m} = 4$, параметр расстройки $\delta = 0$ и параметр керровской нелинейности: $\chi = 0$ (сплошная линия), $\chi = 2\gamma$ (пунктирная линия), $\chi = 3\gamma$ (точечная линия)

[Figure 3. Negativity $\varepsilon_{12}(t)$ (a, b) and $\varepsilon_{23}(t)$ (c, d) as a function of dimensionless time γt for the initial non-entangled state of qubits (2). For figure a the following parameters were used: the average number of photons $\bar{m} = 4$, the Kerr nonlinearity parameter $\chi = 0$, and the detuning parameters $\delta = 0$ (solid line), $\delta = 4\gamma$ (dashed line), $\delta = 8\gamma$ (dotted line). For figure b the following parameters were used: the average number of photons $\bar{m} = 3$, the detuning parameter $\delta = 0$, and the Kerr nonlinearity parameters $\chi = 0$ (solid line), $\chi = 1.5\gamma$ (dashed line), $\chi = 3\gamma$ (dotted line). For figure c the following parameters were used: the average number of photons $\bar{m} = 4$, the Kerr nonlinearity parameter $\chi = 0$, and the detuning parameters $\delta = 0$ (solid line), $\delta = 8.5\gamma$ (dashed line), $\delta = 13\gamma$ (dotted line). For figure d the following parameters were used: the average number of photons $\bar{m} = 4$, the detuning parameter $\delta = 0$, and the Kerr nonlinearity parameters $\chi = 0$ (solid line), $\chi = 2\gamma$ (dashed line), $\chi = 3\gamma$ (dotted line)]

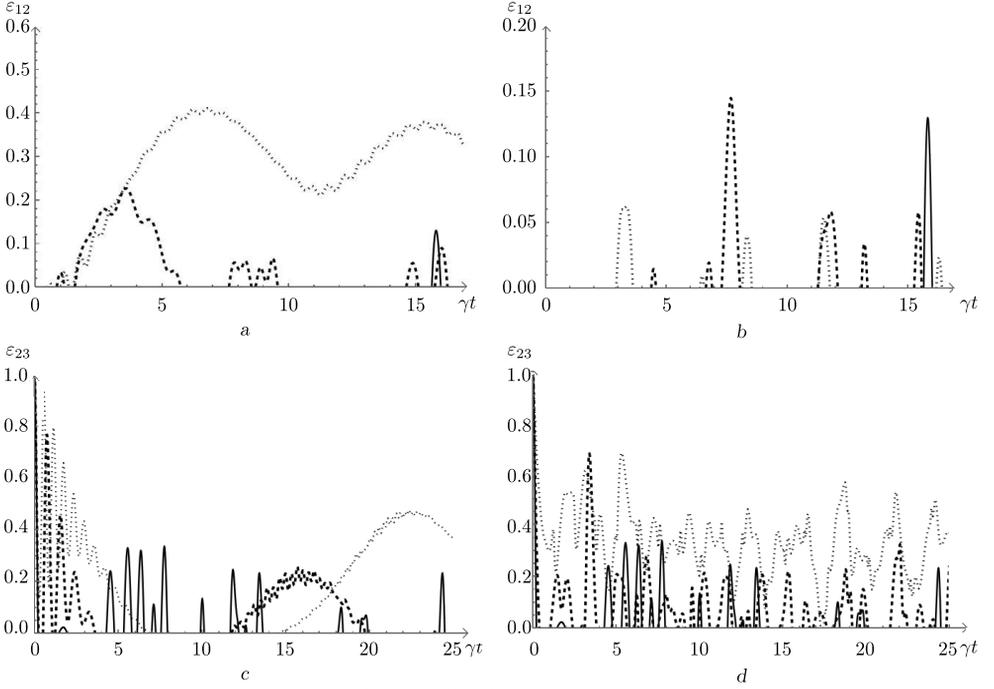


Рис. 4. Отрицательности ε_{12} (a, b) и ε_{23} (c, d) как функции безразмерного времени γt для начального бисепарабельного состояния кубитов (3). Рисунок a: среднее число фотонов $\bar{m} = 1.5$, параметр керровской нелинейности $\chi = 0$ и расстройка: $\delta = 0$ (сплошная линия), $\delta = 5\gamma$ (пунктирная линия), $\delta = 10\gamma$ (точечная линия). Рисунок b: среднее число фотонов $\bar{m} = 1.5$, параметр расстройки $\delta = 0$ и параметр керровской нелинейности: $\chi = 0$ (сплошная линия), $\chi = 2\gamma$ (пунктирная линия), $\chi = 3\gamma$ (точечная линия). Рисунок c: среднее число фотонов $\bar{m} = 4$, параметр керровской нелинейности $\chi = 0$ и параметр расстройки: $\delta = 0$ (сплошная линия), $\delta = 7\gamma$ (пунктирная линия), $\delta = 10\gamma$ (точечная линия). Рисунок d: среднее число фотонов $\bar{m} = 4$, параметр расстройки $\delta = 0$ и параметр керровской нелинейности: $\chi = 0$ (сплошная линия), $\chi = \gamma$ (пунктирная линия), $\chi = 2.5\gamma$ (точечная линия). Во всех случаях $\beta = \pi/4$

[Figure 4. Negativity ε_{12} (a, b) and ε_{23} (c, d) as a function of dimensionless time γt for the initial biseparable state of qubits (3). For figure a the following parameters were used: the average number of photons $\bar{m} = 1.5$, the Kerr nonlinearity parameter $\chi = 0$, and the detuning parameters $\delta = 0$ (solid line), $\delta = 5\gamma$ (dashed line), $\delta = 10\gamma$ (dotted line). For figure b the following parameters were used: the average number of photons $\bar{m} = 1.5$, the detuning parameter $\delta = 0$, and the Kerr nonlinearity parameters $\chi = 0$ (solid line), $\chi = 2\gamma$ (dashed line), $\chi = 3\gamma$ (dotted line). For figure c the following parameters were used: the average number of photons $\bar{m} = 4$, the Kerr nonlinearity parameter $\chi = 0$, and the detuning parameters $\delta = 0$ (solid line), $\delta = 7\gamma$ (dashed line), $\delta = 10\gamma$ (dotted line). For figure d the following parameters were used: the average number of photons $\bar{m} = 4$, the detuning parameter $\delta = 0$, and the Kerr nonlinearity parameters $\chi = 0$ (solid line), $\chi = \gamma$ (dashed line), $\chi = 2.5\gamma$ (dotted line). In all cases $\beta = \pi/4$]

и $\bar{m} = 4$ для рис. 4, *c* и 4, *d*) и различных значений параметра расстройки и керровской нелинейности. При усреднении начального бисепарабельного состояния (3) по переменным третьего кубита кубиты 1 и 2 оказываются в сепарабельном состоянии с нулевым значением отрицательности. Как видно из рис. 4, *a*, включение расстройки существенно увеличивает в процессе эволюции степень перепутывания кубитов 1 и 2, индуцированного тепловым полем резонатора. Для значительных значений параметра расстройки исчезает также эффект мгновенной смерти перепутывания. Напротив, включение керровской нелинейности не изменяет существенным образом характер поведения параметра перепутывания кубитов 1 и 2. При усреднении начального бисепарабельного состояния (3) по переменным первого кубита кубиты 2 и 3 оказываются в максимально перепутанном состоянии белловского типа с отрицательностью $\varepsilon_{23}(0) = 1$. Для рассматриваемого случая наиболее интересным результатом является исчезновение эффекта мгновенной смерти перепутывания при включении керровской нелинейности.

Наконец, на рис. 5 представлена временная зависимость отрицательности $\varepsilon_{12}(t)$ ($\varepsilon_{23}(t)$) для истинно перепутанного начального состояния кубитов (4), фиксированного среднего числа фотонов в резонаторе $\bar{m} = 4$ и различных значений параметра расстройки и керровской нелинейности. Из рисунка видно, что включение расстройки и керровской нелинейности приводит к уменьшению амплитуд осцилляций Раби отрицательности, индуцированных тепловым полем резонатора, т.е. к стабилизации начального перепутывания пар кубитов. Для значений расстройки и керровской нелинейности, больших некоторых предельных значений, зависящих от среднего числа фотонов в моде, исчезает эффект мгновенной смерти перепутывания.

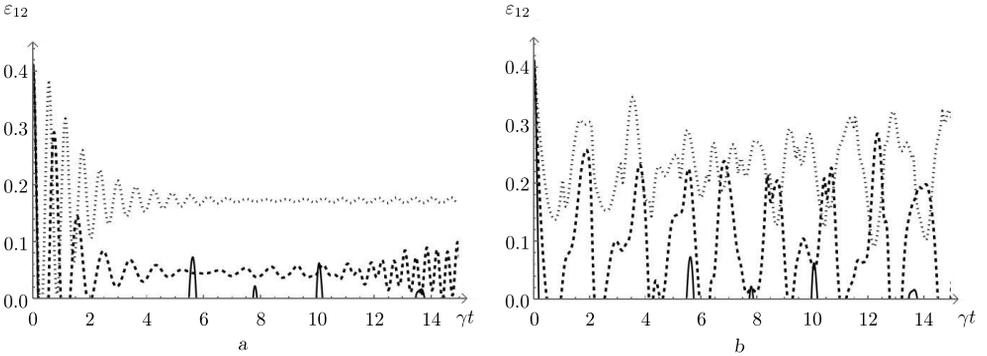


Рис. 5. Отрицательность ε_{12} (ε_{23}) как функция безразмерного времени γt для начального истинно перепутанного состояния кубитов (4). Рисунок *a*: среднее число фотонов $\bar{m} = 4$, параметр керровской нелинейности $\chi = 0$ и расстройка: $\delta = 0$ (сплошная линия), $\delta = 7\gamma$ (пунктирная линия), $\delta = 10\gamma$ (точечная линия). Рисунок *b*: среднее число фотонов $\bar{m} = 4$, параметр расстройки $\delta = 0$ и параметр керровской нелинейности: $\chi = 0$ (сплошная линия), $\chi = 1.5\gamma$ (пунктирная линия), $\chi = 3\gamma$ (точечная линия). Во всех случаях $f = p = h = 1/\sqrt{3}$

[Figure 5. Negativity ε_{12} (ε_{23}) as a function of dimensionless time γt for the initial true-entangled state of qubits (4). For figure *a* the following parameters were used: the average number of photons $\bar{m} = 4$, the Kerr nonlinearity parameter $\chi = 0$, and the detuning parameters $\delta = 0$ (solid line), $\delta = 7\gamma$ (dashed line), $\delta = 10\gamma$ (dotted line). For figure *b* the following parameters were used: the average number of photons $\bar{m} = 4$, the detuning parameter $\delta = 0$, and the Kerr nonlinearity parameters $\chi = 0$ (solid line), $\chi = 1.5\gamma$ (dashed line), $\chi = 3\gamma$ (dotted line). In all cases $f = p = h = 1/\sqrt{3}$]

Заключение. Таким образом, в данной работе нами найдено решение квантового уравнения эволюции системы трех идентичных кубитов, нерезонансно взаимодействующих с модой теплового поля идеального резонатора со средой Керра. В работе рассмотрены три типа начальных состояний кубитов: сепарабельные, бисепарабельные и истинно перепутанные состояния. На основе решения уравнения эволюции вычислен параметр перепутывания пар кубитов — кубит-кубитная отрицательность. Результаты численного моделирования отрицательности пар кубитов показали, что наличие расстройки и керровской нелинейности в случае начального сепарабельного состояния пары кубитов может приводить к существенному увеличению степени их перепутывания, индуцированного полем резонатора. В случае начального перепутанного состояния пары кубитов расстройка и керровская среда могут приводить к стабилизации начального перепутывания кубитов. Нерезонансное взаимодействие и керровская среда могут также подавлять эффект мгновенной смерти перепутывания кубитов. Полученные результаты могут быть использованы в физике квантовых вычислений и квантовых коммуникаций.

Конкурирующие интересы. Конкурирующих интересов не имеем.

Авторская ответственность. Мы несем полную ответственность за предоставление окончательной версии рукописи в печать. Окончательная версия рукописи нами одобрена.

Финансирование. Исследование выполнялось без финансирования.

Благодарность. Авторы благодарны рецензентам за тщательное прочтение статьи, ценные предложения и комментарии.

Библиографический список

1. Buluta I., Ashhab S., Nori F. Natural and artificial atoms for quantum computation // *Rep. Prog. Phys.*, 2011. vol. 74, no. 10, 104401, arXiv: 1002.1871 [quant-ph]. DOI: <https://doi.org/10.1088/0034-4885/74/10/104401>.
2. Xiang Z.-L., Ashhab S., You J. Y., Nori F. Hybrid quantum circuits: Superconducting circuits interacting with other quantum systems // *Rev. Mod. Phys.*, 2013. vol. 85, no. 2. pp. 623–653, arXiv: 1204.2137 [quant-ph]. DOI: <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.85.623>.
3. Georgescu I. M., Ashhab S., Nori F. Quantum simulation // *Rev. Mod. Phys.*, 2014. vol. 88, no. 1. pp. 153–185, arXiv: 1308.6253 [quant-ph]. DOI: <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.86.153>.
4. Gu X., Kockum A.F., Miranowicz A., et al. Microwave photonics with superconducting quantum circuits // *Phys. Reports*, 2017. vol. 718–719. pp. 1–102, arXiv: 1707.02046 [quant-ph]. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.physrep.2017.10.002>.
5. Wendin G. Quantum information processing with superconducting circuits: a review // *Rep. Prog. Phys.*, 2017. vol. 80, no. 10, 106001, arXiv: 1610.02208 [quant-ph]. DOI: <https://doi.org/10.1088/1361-6633/aa7e1a>.
6. Kjaergaard M., Schwartz M. E., Braumüller J., et al. Superconducting qubits: Current state of play // *Annu. Rev. Condens. Matter Phys.*, 2020. vol. 11. pp. 369–395, arXiv: 1905.13641 [quant-ph]. DOI: <https://doi.org/10.1146/annurev-conmatphys-031119-050605>.
7. Huang H.-L., Wu D., Fan D., Zhu X. Superconducting quantum computing: a review // *Sci. China Inf. Sci.*, 2020. vol. 63, 180501, arXiv: 2006.10433 [quant-ph]. DOI: <https://doi.org/10.1007/S11432-020-2881-9>.
8. Chen J. Review on quantum communication and quantum computation // *J. Phys.: Conf. Ser.*, 2021. vol. 1865, 022008. DOI: <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1865/2/022008>.

9. Chernega V. N., Man'ko O. V., Man'ko V. I. Entangled qubit states and linear entropy in the probability representation of quantum mechanics // *Entropy*, 2022. vol. 24, no. 4, 527. DOI: <https://doi.org/10.3390/e24040527>.
10. Li G.-Q., Pan X.-Y. Quantum information processing with nitrogen–vacancy centers in diamond // *Chinese Phys. B*, 2018. vol. 27, no. 2, 020304. DOI: <https://doi.org/10.1088/1674-1056/27/2/020304>.
11. Shore B. W., Knight P. L. The Jaynes–Cummings model // *J. Mod. Opt.*, 1992. vol. 40, no. 7. pp. 1195–1238. DOI: <https://doi.org/10.1080/09500349314551321>.
12. Walther H, Varcoe B. T. H., Englert B.-G., Becker T. Cavity quantum electrodynamics // *Rep. Prog. Phys.*, 2011. vol. 69, no. 5. pp. 1325–1382. DOI: <https://doi.org/10.1088/0034-4885/69/5/R02>.
13. Popov E. N., Reshetov V. A. Controllable source of single photons based on a micromaser with an atomic beam without inversion // *JETP Lett.*, 2020. vol. 111, no. 12. pp. 727–733. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0021364020120127>.
14. Reshetov V. A. Jaynes–Cummings model with degenerate atomic levels and two polarization modes of the quantized field // *Laser Phys. Lett.*, 2019. vol. 16, no. 4. pp. 046001. DOI: <https://doi.org/10.1088/1612-202X/ab0a5c>.
15. Wootters W. K. Entanglement of formation of an arbitrary state of two qubits // *Phys. Rev. Lett.*, 1998. vol. 80, no. 10. pp. 2245–2248, arXiv: quant-ph/9709029. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.80.2245>.
16. Peres A. Separability criterion for density matrices // *Phys. Rev. Lett.*, 1996. vol. 77, no. 8. pp. 1413–1415, arXiv: quant-ph/9604005. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.77.1413>.
17. Horodecki R., Horodecki M., Horodecki P. Separability of mixed states: Necessary and sufficient conditions // *Phys. Lett. A*, 1996. vol. 223, no. 1–2. pp. 1–8, arXiv: quant-ph/9605038. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0375-9601\(96\)00706-2](https://doi.org/10.1016/S0375-9601(96)00706-2).
18. Zha X., Yuan C., Zhang Y. Generalized criterion for a maximally multi-qubit entangled state // *Laser Phys. Lett.*, 2013. vol. 10, no. 4, 045201, arXiv: 1204.6340 [quant-ph]. DOI: <https://doi.org/10.1088/1612-2011/10/4/045201>.
19. Gühne O., Seevinck M. Separability criteria for genuine multipartite entanglement // *New J. Phys.*, 2010. vol. 12, 053002, arXiv: 0905.1349 [quant-ph]. DOI: <https://doi.org/10.1088/1367-2630/12/5/053002>.
20. Pereira L., Zambrano L., Delgado A. Scalable estimation of pure multi-qubit states // *npj Quantum Inf.*, 2022. vol. 8, 57, arXiv: 2107.05691 [quant-ph]. DOI: <https://doi.org/10.1038/s41534-022-00565-9>.
21. Zhahir A. A., Mohd S. M., Shuhud M. I. M., et al. Entanglement quantification and classification: A systematic literature review // *Int. J. Adv. Comp. Sci. Appl.*, 2022. vol. 13, no. 5. pp. 218–225. DOI: <https://doi.org/10.14569/IJACSA.2022.0130527>.
22. Dür W., Cirac J. I. Classification of multiqubit mixed states: Separability and distillability properties // *Phys. Rev. A*, 2000. vol. 61, no. 4, 042314, arXiv: quant-ph/9911044. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.61.042314>.
23. Dür W., Cirac J. I., Vidal G. Three qubits can be entangled in two inequivalent ways // *Phys. Rev. A*, 2000. vol. 62, no. 6, 062314, arXiv: quant-ph/0005115. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.62.062314>.
24. Acín A., Bruß D., Lewenstein M., Sanpera A. Classification of mixed three-qubit states // *Phys. Rev. Lett.*, 2000. vol. 87, no. 4, 040401, arXiv: quant-ph/0103025. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.87.040401>.
25. Sabín C., García-Alcaine G., A classification of entanglement in three-qubit systems // *Eur. Phys. J. D*, 2008. vol. 48. pp. 435–442, arXiv: 0707.1780 [quant-ph]. DOI: <https://doi.org/10.1140/epjd/e2008-00112-5>.
26. Mohd S. Idrus B., Zainuddin H., Mukhtar M. Entanglement classification for a three-qubit system using special unitary groups, SU(2) and SU(4) // *Int. J. Adv. Comp. Sci. Appl.*, 2019. vol. 10, no. 7. pp. 374–379. DOI: <https://doi.org/10.14569/IJACSA.2019.0100751>.

27. Akbari-Kourbolagh Y. Entanglement criteria for the three-qubit states // *Int. J. Quantum Inf.*, 2017. vol. 15, no. 7, 1750049. DOI: <https://doi.org/10.1142/S0219749917500496>.
28. Kendon V., Nemoto K., Munro W. Typical entanglement in multiple-qubit systems // *J. Mod. Opt.*, 2001. vol. 49, no. 10. pp. 1709–1716, arXiv: quant-ph/0106023. DOI: <https://doi.org/10.1080/09500340110120914>.
29. Kim M. S., Lee J., Ahn D., Knight P. L. Entanglement induced by a single-mode heat environment // *Phys. Rev. A*, 2002. vol. 65, no. 4, 040101(R), arXiv: quant-ph/0109052. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.65.040101>.
30. Zhang B. Entanglement between two qubits interacting with a slightly detuned thermal field // *Optics Commun.*, 2010. vol. 283, no. 23. pp. 4676–4679. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.optcom.2010.06.094>.
31. Bashkirov E. K. Thermal entanglement between a Jaynes–Cummings atom and an isolated atom // *Int. J. Theor. Phys.*, 2018. vol. 57, no. 12. pp. 3761–3771. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10773-018-3888-y>.
32. Jin-Fang C., Hui-Ping L. Entanglement in three-atom Tavis–Cummings model induced by a thermal field // *Commun. Theor. Phys.*, 2005. vol. 43, no. 3, 427. DOI: <https://doi.org/10.1088/0253-6102/43/3/010>.
33. Yu T., Eberly J. H. Sudden death of entanglement // *Science*, 2009. vol. 323, no. 5914. pp. 598–601, arXiv: 0910.1396 [quant-ph]. DOI: <https://doi.org/10.1126/science.1167343>.
34. Wang F., Hou P.-Y., Huang Y. Y., et al. Observation of entanglement sudden death and rebirth by controlling a solid-state spin bath // *Phys. Rev. B*, 2018. vol. 98, no. 6, 064306, arXiv: 1801.02729 [quant-ph]. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.98.064306>.
35. Sun G., Zhou Z., Mao B., Wen X., et al. Entanglement dynamics of a superconducting phase qubit coupled to a two-level system // *Phys. Rev. B*, 2012. vol. 86, no. 1, 064502, arXiv: 1111.3016 [cond-mat.mes-hall]. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.86.064502>.
36. Salles A., de Melo F., Almeida M. P., et al. Experimental investigation of the dynamics of entanglement: Sudden death, complementarity, and continuous monitoring of the environment // *Phys. Rev. A*, 2008. vol. 78, no. 2. pp. 022322, arXiv: 0804.4556 [quant-ph]. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.78.022322>.
37. Bashkirov E. K. Entanglement in Tavis-Cummings model with Kerr nonlinearity induced by a thermal noise // *Proc. SPIE*, 2021. vol. 11846 (Saratov Fall Meeting 2020: Laser Physics, Photonic Technologies, and Molecular Modeling, 4 May 2021), 11846OW. DOI: <https://doi.org/10.1117/12.2588673>.
38. Багров А. Р., Башкиров Е. К. Динамика трехкубитной модели Тависа–Каммингса // *Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия*, 2022. Т. 28, № 1–2. С. 95–105. EDN: RJIHGM. DOI: <https://doi.org/10.18287/2541-7525-2022-28-1-2-95-105>.
39. Kirchmair G., Vlastakis B., Leghtas Z., et al. Observation of quantum state collapse and revival due to the single-photon Kerr effect // *Nature*, 2013. vol. 495. pp. 205–209, arXiv: 1211.2228 [quant-ph]. DOI: <https://doi.org/10.1038/nature11902>.

MSC: 81Q05, 82C23, 81V80

Dynamics of a thermal entanglement in the not-resonant three-qubit Tavis–Cummings model with Kerr nonlinearity

*A. R. Bagrov, E. K. Bashkirov*Samara National Research University,
34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russian Federation.

Abstract

In this article, we consider the dynamics of three identical qubits interacting not-resonantly with a thermal field of an ideal resonator with a Kerr medium. We have found the solutions of the Liouville quantum equation for the total density matrix of a system under consideration for the initial separable, biseparable, and genuine entangled states of the qubits and the thermal initial state of the resonator field. By averaging the total density matrix over the variables of the resonator field and the variables of one of the qubits, we found the reduced density matrix of the pair of remaining qubits. Two-qubit density matrices were used to calculate the qubit-qubit negativity. The results showed that detuning and Kerr nonlinearity can greatly enhance the amount of entanglement for initial separable state of a pair of qubits. It is also shown that detuning and a Kerr medium can inhibit the sudden death of entanglement.

Keywords: qubits, quantum Liouville equation, thermal field, entanglement, negativity, sudden death of entanglement, Kerr medium, detuning.

Received: 30th June, 2023 / Revised: 11th August, 2023 /Accepted: 19th September, 2023 / First online: 31st May, 2024

Competing interests. We have no competing interests.

Authors' contributions and responsibilities. We take full responsibility for submitting the final version of the manuscript for publication. The final version of the manuscript has been approved by us.

Differential Equations and Mathematical Physics

Research Article

© Authors, 2024

© Samara State Technical University, 2024 (Compilation, Design, and Layout)

 The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Please cite this article in press as:

Bagrov A. R., Bashkirov E. K. Dynamics of a thermal entanglement in the not-resonant three-qubit Tavis–Cummings model with Kerr nonlinearity, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2024, vol. 28, no. 1, pp. 7–28. EDN: ZPKXMD. DOI: 10.14498/vsgtu2040 (In Russian).

Author's Details:

Alexander R. Bagrov  <https://orcid.org/0000-0002-1098-0300>

Masters' Student; Dept. of General and Theoretical Physics;

e-mail: alexander.bagrov00@mail.ru

Eugene K. Bashkirov  <https://orcid.org/0000-0001-8682-4956>

Dr. Phys. & Math. Sci., Professor; Professor; Dept. of General and Theoretical Physics;

e-mail: bashkirov.ek@ssau.ru

Funding. The research was conducted without funding.

Acknowledgments. The authors are grateful to the reviewers for the careful reading of the paper, valuable suggestions, and comments.

References

1. Buluta I., Ashhab S., Nori F. Natural and artificial atoms for quantum computation, *Rep. Prog. Phys.*, 2011, vol. 74, no. 10, 104401, arXiv: 1002.1871 [quant-ph]. DOI: <https://doi.org/10.1088/0034-4885/74/10/104401>.
2. Xiang Z.-L., Ashhab S., You J. Y., Nori F. Hybrid quantum circuits: Superconducting circuits interacting with other quantum systems, *Rev. Mod. Phys.*, 2013, vol. 85, no. 2, pp. 623–653, arXiv: 1204.2137 [quant-ph]. DOI: <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.85.623>.
3. Georgescu I. M., Ashhab S., Nori F. Quantum simulation, *Rev. Mod. Phys.*, 2014, vol. 88, no. 1, pp. 153–185, arXiv: 1308.6253 [quant-ph]. DOI: <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.86.153>.
4. Gu X., Kockum A.F., Miranowicz A., et al. Microwave photonics with superconducting quantum circuits, *Phys. Reports*, 2017, vol. 718–719, pp. 1–102, arXiv: 1707.02046 [quant-ph]. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.physrep.2017.10.002>.
5. Wendin G. Quantum information processing with superconducting circuits: a review, *Rep. Prog. Phys.*, 2017, vol. 80, no. 10, 106001, arXiv: 1610.02208 [quant-ph]. DOI: <https://doi.org/10.1088/1361-6633/aa7e1a>.
6. Kjaergaard M., Schwartz M. E., Braumüller J., et al. Superconducting qubits: Current state of play, *Annu. Rev. Condens. Matter Phys.*, 2020, vol. 11, pp. 369–395, arXiv: 1905.13641 [quant-ph]. DOI: <https://doi.org/10.1146/annurev-conmatphys-031119-050605>.
7. Huang H.-L., Wu D., Fan D., Zhu X. Superconducting quantum computing: a review, *Sci. China Inf. Sci.*, 2020, vol. 63, 180501, arXiv: 2006.10433 [quant-ph]. DOI: <https://doi.org/10.1007/S11432-020-2881-9>.
8. Chen J. Review on quantum communication and quantum computation, *J. Phys.: Conf. Ser.*, 2021, vol. 1865, 022008. DOI: <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1865/2/022008>.
9. Chernega V. N., Man'ko O. V., Man'ko V. I. Entangled qubit states and linear entropy in the probability representation of quantum mechanics, *Entropy*, 2022, vol. 24, no. 4, 527. DOI: <https://doi.org/10.3390/e24040527>.
10. Li G.-Q., Pan X.-Y. Quantum information processing with nitrogen–vacancy centers in diamond, *Chinese Phys. B*, 2018, vol. 27, no. 2, 020304. DOI: <https://doi.org/10.1088/1674-1056/27/2/020304>.
11. Shore B. W., Knight P. L. The Jaynes–Cummings model, *J. Mod. Opt.*, 1992, vol. 40, no. 7, pp. 1195–1238. DOI: <https://doi.org/10.1080/09500349314551321>.
12. Walther H, Varcoe B. T. H., Englert B.-G., Becker T. Cavity quantum electrodynamics, *Rep. Prog. Phys.*, 2011, vol. 69, no. 5, pp. 1325–1382. DOI: <https://doi.org/10.1088/0034-4885/69/5/R02>.
13. Popov E. N., Reshetov V. A. Controllable source of single photons based on a micromaser with an atomic beam without inversion, *JETP Lett.*, 2020, vol. 111, no. 12, pp. 727–733. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0021364020120127>.
14. Reshetov V. A. Jaynes–Cummings model with degenerate atomic levels and two polarization modes of the quantized field, *Laser Phys. Lett.*, 2019, vol. 16, no. 4, pp. 046001. DOI: <https://doi.org/10.1088/1612-202X/ab0a5c>.
15. Wootters W. K. Entanglement of formation of an arbitrary state of two qubits, *Phys. Rev. Lett.*, 1998, vol. 80, no. 10, pp. 2245–2248, arXiv: quant-ph/9709029. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.80.2245>.
16. Peres A. Separability criterion for density matrices, *Phys. Rev. Lett.*, 1996, vol. 77, no. 8, pp. 1413–1415, arXiv: quant-ph/9604005. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.77.1413>.

17. Horodecki R., Horodecki M., Horodecki P. Separability of mixed states: Necessary and sufficient conditions, *Phys. Lett. A*, 1996, vol. 223, no. 1–2, pp. 1–8, arXiv: quant-ph/9605038. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0375-9601\(96\)00706-2](https://doi.org/10.1016/S0375-9601(96)00706-2).
18. Zha X., Yuan C., Zhang Y. Generalized criterion for a maximally multi-qubit entangled state, *Laser Phys. Lett.*, 2013, vol. 10, no. 4, 045201, arXiv: 1204.6340 [quant-ph]. DOI: <https://doi.org/10.1088/1612-2011/10/4/045201>.
19. Gühne O., Seevinck M. Separability criteria for genuine multiparticle entanglement, *New J. Phys.*, 2010, vol. 12, 053002, arXiv: 0905.1349 [quant-ph]. DOI: <https://doi.org/10.1088/1367-2630/12/5/053002>.
20. Pereira L., Zambrano L., Delgado A. Scalable estimation of pure multi-qubit states, *npj Quantum Inf.*, 2022, vol. 8, 57, arXiv: 2107.05691 [quant-ph]. DOI: <https://doi.org/10.1038/s41534-022-00565-9>.
21. Zhahir A. A., Mohd S. M., Shuhud M. I. M., et al. Entanglement quantification and classification: A systematic literature review, *Int. J. Adv. Comp. Sci. Appl.*, 2022, vol. 13, no. 5, pp. 218–225. DOI: <https://doi.org/10.14569/IJACSA.2022.0130527>.
22. Dür W., Cirac J. I. Classification of multiqubit mixed states: Separability and distillability properties, *Phys. Rev. A*, 2000, vol. 61, no. 4, 042314, arXiv: quant-ph/9911044. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.61.042314>.
23. Dür W., Cirac J. I., Vidal G. Three qubits can be entangled in two inequivalent ways, *Phys. Rev. A*, 2000, vol. 62, no. 6, 062314, arXiv: quant-ph/0005115. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.62.062314>.
24. Acín A., Bruß D., Lewenstein M., Sanpera A. Classification of mixed three-qubit states, *Phys. Rev. Lett.*, 2000, vol. 87, no. 4, 040401, arXiv: quant-ph/0103025. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.87.040401>.
25. Sabín C., García-Alcaine G., A classification of entanglement in three-qubit systems, *Eur. Phys. J. D*, 2008, vol. 48, pp. 435–442, arXiv: 0707.1780 [quant-ph]. DOI: <https://doi.org/10.1140/epjd/e2008-00112-5>.
26. Mohd S. Idrus B., Zainuddin H., Mukhtar M. Entanglement classification for a three-qubit system using special unitary groups, SU(2) and SU(4), *Int. J. Adv. Comp. Sci. Appl.*, 2019, vol. 10, no. 7, pp. 374–379. DOI: <https://doi.org/10.14569/IJACSA.2019.0100751>.
27. Akbari-Kourbolagh Y. Entanglement criteria for the three-qubit states, *Int. J. Quantum Inf.*, 2017, vol. 15, no. 7, 1750049. DOI: <https://doi.org/10.1142/S0219749917500496>.
28. Kendon V., Nemoto K., Munro W. Typical entanglement in multiple-qubit systems, *J. Mod. Opt.*, 2001, vol. 49, no. 10, pp. 1709–1716, arXiv: quant-ph/0106023. DOI: <https://doi.org/10.1080/09500340110120914>.
29. Kim M. S., Lee J., Ahn D., Knight P. L. Entanglement induced by a single-mode heat environment, *Phys. Rev. A*, 2002, vol. 65, no. 4, 040101(R), arXiv: quant-ph/0109052. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.65.040101>.
30. Zhang B. Entanglement between two qubits interacting with a slightly detuned thermal field, *Optics Commun.*, 2010, vol. 283, no. 23, pp. 4676–4679. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.optcom.2010.06.094>.
31. Bashkirov E. K. Thermal entanglement between a Jaynes–Cummings atom and an isolated atom, *Int. J. Theor. Phys.*, 2018, vol. 57, no. 12, pp. 3761–3771. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10773-018-3888-y>.
32. Jin-Fang C., Hui-Ping L. Entanglement in three-atom Tavis–Cummings model induced by a thermal field, *Commun. Ther. Phys.*, 2005, vol. 43, no. 3, 427. DOI: <https://doi.org/10.1088/0253-6102/43/3/010>.
33. Yu T., Eberly J. H. Sudden death of entanglement, *Science*, 2009, vol. 323, no. 5914, pp. 598–601, arXiv: 0910.1396 [quant-ph]. DOI: <https://doi.org/10.1126/science.1167343>.
34. Wang F., Hou P.-Y., Huang Y. Y., et al. Observation of entanglement sudden death and rebirth by controlling a solid-state spin bath, *Phys. Rev. B*, 2018, vol. 98, no. 6, 064306, arXiv: 1801.02729 [quant-ph]. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.98.064306>.

35. Sun G., Zhou Z., Mao B., Wen X., et al. Entanglement dynamics of a superconducting phase qubit coupled to a two-level system, *Phys. Rev. B*, 2012, vol. 86, no. 1, 064502, arXiv: 1111.3016 [cond-mat.mes-hall]. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.86.064502>.
36. Salles A., de Melo F., Almeida M. P., et al. Experimental investigation of the dynamics of entanglement: Sudden death, complementarity, and continuous monitoring of the environment, *Phys. Rev. A*, 2008, vol. 78, no. 2, pp. 022322, arXiv:0804.4556 [quant-ph]. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.78.022322>.
37. Bashkirov E. K. Entanglement in Tavis-Cummings model with Kerr nonlinearity induced by a thermal noise, *Proc. SPIE*, 2021, vol. 11846 (Saratov Fall Meeting 2020: Laser Physics, Photonic Technologies, and Molecular Modeling, 4 May 2021), 11846OW. DOI: <https://doi.org/10.1117/12.2588673>.
38. Bagrov A.R., Bashkirov E.K. Dynamics of the three-qubits Tavis–Cummings model, *Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2022, vol. 28, no. 1–2, pp. 95–105 (In Russian). EDN: RJIHGM. DOI: <https://doi.org/10.18287/2541-7525-2022-28-1-2-95-105>.
39. Kirchmair G., Vlastakis B., Leghtas Z., et al. Observation of quantum state collapse and revival due to the single-photon Kerr effect, *Nature*, 2013, vol. 495, pp. 205–209, arXiv: 1211.2228 [quant-ph]. DOI: <https://doi.org/10.1038/nature11902>.



УДК 517.958

Обратная задача для интегро-дифференциального уравнения гиперболического типа с дополнительной информацией специального вида в ограниченной области

Ж. Ш. Сафаров^{1,2}

- ¹ Институт математики имени В. И. Романовского Академии наук Республики Узбекистан, Узбекистан, 100174, Ташкент, ул. Университетская, 9.
- ² Ташкентский университет информационных технологий, Узбекистан, 100202, Ташкент, ул. Амира Тимура, 108.

Аннотация

Рассматривается одномерная обратная задача определения ядра интегрального члена интегро-дифференциального уравнения гиперболического типа в ограниченной по переменной x области. Сначала исследуется прямая задача, для регулярной части которой методом выделения особенностей получена задача Коши на оси $x = 0$. Далее с помощью формулы Даламбера получено интегральное уравнение относительно искомой функции.

Для прямой задачи изучается обратная задача определения ядра, входящего в интегральный член уравнения. Для его отыскания задается дополнительное условие в специальном виде. В итоге обратная задача сводится к эквивалентной системе интегральных уравнений относительно неизвестных функций. К полученной системе применяется принцип сжимающих отображений в пространстве непрерывных функций с весовыми нормами.

Для поставленной задачи доказана теорема глобальной однозначной разрешимости, которая является основным результатом статьи.

Ключевые слова: интегро-дифференциальное уравнение, обратная задача, ядро интеграла, принцип сжимающих отображений, теорема Банаха.

Получение: 27 января 2023 г. / Исправление: 16 января 2024 г. /
Принятие: 4 марта 2024 г. / Публикация онлайн: 15 июля 2024 г.

Дифференциальные уравнения и математическая физика Научная статья

© Коллектив авторов, 2024

© СамГТУ, 2024 (составление, дизайн, макет)

Этот контент публикуется на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

Образец для цитирования

Сафаров Ж. Ш. Обратная задача для интегро-дифференциального уравнения гиперболического типа с дополнительной информацией специального вида в ограниченной области // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, 2024. Т. 28, № 1. С. 29–44. EDN: WSCTDR. DOI: 10.14498/vsgtu1997.

Сведения об авторе

Журабек Шакарович Сафаров  <https://orcid.org/0000-0001-9249-835X>
доктор физико-математических наук, профессор; старший научный сотрудник; лаб. дифференциальных уравнений и их приложений¹; профессор; каф. высшей математики²;
e-mail: j.safarov65@mail.ru

Введение и постановка задачи. Обратные задачи возникают во многих областях прикладной науки, таких как электродинамика, акустика, квантовая теория рассеяния, геофизика, астрономия и др. К интегро-дифференциальным уравнениям приводят задачи распространения упругих электромагнитных волн в средах, где состояние среды в данный момент времени зависит от ее состояния во все предыдущие моменты времени. При этом такие интегро-дифференциальные уравнения строятся добавлением в правые части соответствующих классических уравнений интегралов типа свертки, которые описывают явление запаздывания.

Первые результаты в теории обратных задач для интегро-дифференциальных уравнений представлены в работах итальянских математиков А. Lorenzi, Е. Sinestrari, Е. Paparoni [1–3]. В настоящее время изучением одномерных и многомерных обратных задач определения ядра интегрального члена интегро-дифференциальных уравнений занимаются многие исследователи.

В работах [4–8] рассматривались одномерные задачи нахождения ядра, входящего в интегро-дифференциальное уравнение с дельта-функцией в правой части либо на граничном условии. Для поставленных в этих работах задач доказаны теоремы существования, единственности и получены оценки устойчивости на основе принципа сжимающих отображений. Подобные задачи с распределенными источниками возмущений изучены в работах [9–11].

В работах [12–15] для многомерных обратных задач нахождения ядра в гиперболических интегро-дифференциальных уравнениях второго порядка доказаны теоремы однозначной локальной разрешимости в классе аналитических функций по пространственным переменным и непрерывных по временной переменной. В работах [16, 17] доказаны теоремы глобальной однозначной разрешимости двумерных обратных задач, когда ядро интегрального члена слабо зависит от горизонтальной переменной. Глобальная однозначная разрешимость многомерной обратной задачи определения ядра доказана в работе [18].

В приложениях важны задачи с сосредоточенными источниками, локализованными в окрестности фиксированной точки или на поверхности рассматриваемой области. Именно к такому типу задач относится рассматриваемая в настоящей работе задача.

Рассмотрим начально-краевую задачу для уравнения колебания струны с памятью в ограниченной по переменной x области $D = \{(x, t) : 0 < x < l, t \in \mathbb{R}\}$:

$$u_{tt} - u_{xx} - \int_0^t k(\tau) u_{xx}(x, t - \tau) d\tau = 0, \quad (x, t) \in D, \quad (1)$$

с начальным

$$u|_{t < 0} \equiv 0 \quad (2)$$

и граничными условиями

$$u|_{x=0} = \delta(t), \quad u_x|_{x=l} = 0, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (3)$$

где $\delta(t)$ — дельта-функция Дирака.

Уравнение (1) возникает в теории вязкоупругих сред с постоянной плотностью и постоянными коэффициентами Ламе в одномерном случае [19].

Нахождение обобщенной функции $u(x, t) \in D'(D)$, удовлетворяющей уравнению (1) и условиям (2), (3) (в обобщенном смысле), назовем прямой задачей, при этом условие (2) является начальным условием в обобщенной постановке задачи (1)–(3) [23, с. 224–225].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Решением прямой задачи (1)–(3) называется функция $u(x, t) \in D'(D)$, которая удовлетворяет всем условиям задачи (1)–(3) в смысле обобщенных функций.*

Обратная задача заключается в определении неизвестной функции $k(t)$, $t > 0$, если задано дополнительное условие

$$u_x(0, t) + \int_0^t k(\tau)u_x(0, t - \tau)d\tau = f(t), \quad (4)$$

где $f(t)$ — заданная при $t > 0$ функция.

Задание дополнительной информации в таком специальном виде использовалось в работах [11, 20] для определения функции памяти среды, входящей в гиперболическое и параболическое уравнения. Прямая задача представлена начально-краевой задачей для уравнений с распределенными источниками в ограниченных областях.

Исследование задачи с сосредоточенным источником, локализованным в окрестности граничной точки, ограниченной по переменной x области, является отличительной чертой настоящей работы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Функция $k(t) \in C^2[0, \infty)$ называется *решением обратной задачи (1)–(4)*, если соответствующее ей решение задачи (1)–(3) $u(x, t) \in D'(D)$ (из класса обобщенных функций) удовлетворяет условию (4).

1. Исследование прямой задачи. Исследуем прямую задачу. Введем в рассмотрение новую функцию $v(x, t)$, определив ее равенством

$$v(x, t) = \left[u(x, t) + \int_0^t k(t - \tau)u(x, \tau)d\tau \right] \exp(-k(0)t/2).$$

Тогда, как нетрудно проверить [21], функция $u(x, t)$ через $v(x, t)$ выражается формулой

$$u(x, t) = \exp(k(0)t/2)v(x, t) + \int_0^t h(t - \tau) \exp(k(0)\tau/2)v(x, \tau)d\tau, \quad (5)$$

где $h(t)$ — решение следующего интегрального уравнения Вольтерра:

$$h(t) = -k(t) - \int_0^t k(t - \tau)h(\tau)d\tau, \quad t > 0. \quad (6)$$

Задача (1)–(3) относительно функции $v(x, t)$ примет вид

$$v_{tt} - v_{xx} + h_0v + \int_0^t H(t - \tau)v(x, \tau)d\tau = 0, \quad (7)$$

$$v|_{x=0} = \delta(t) + k(t) \exp(h(0)t/2)\theta(t), \quad v_x|_{x=l} = 0, \quad (8)$$

$$v|_{t<0} \equiv 0, \quad (9)$$

а дополнительное условие (4) запишется в виде

$$v_x(0, t) = f(t) \exp(h(0)t/2), \quad (10)$$

где

$$H(t) = h''(t) \exp(h(0)t/2), \quad h_0 = h'(0) - h^2(0)/4. \quad (11)$$

ЛЕММА 1. Пусть $k(t) \in C^2[0, \infty)$, $D_1 = \{(x, t) : 0 < x < l, 0 < t < x\}$. Тогда

$$v(x, t) \equiv 0 \quad (12)$$

для всех $(x, t) \in D_1$.

Доказательство. Рассмотрим пучок характеристик оператора $\partial/\partial t + \partial/\partial x$, проходящий через отрезок $[0, l]$ оси x . Он высекает на правой границе области D отрезок $[0, l]$. Представляя волновой оператор в виде $(\partial/\partial t + \partial/\partial x)(\partial/\partial t - \partial/\partial x)$ и интегрируя равенство (7) вдоль отрезка фиксированной характеристики пучка, заключенного в D , используя условие (9), получим

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\right)v|_{x=l} = \int_0^t \left[h_0 v(\tau - t + l, \tau) - \int_0^\tau H(\tau - \alpha) v(\tau - t + l, \alpha) d\alpha \right] d\tau, \quad t \in (0, l).$$

С учетом граничного условия (8) при $x = l$ из этого равенства найдем

$$v(l, t) = \int_0^t \int_0^\tau \left[h_0 v(\tau_1 - \tau + l, \tau_1) - \int_0^{\tau_1} H(\tau_1 - \alpha) v(\tau_1 - \tau + l, \alpha) d\alpha \right] d\tau_1 d\tau, \quad t \in (0, l).$$

Производя замену переменных во внутреннем интеграле τ на ξ по формуле $\tau_1 - \tau + l = \xi$, последнее уравнение перепишем в виде

$$v(l, t) = \int_0^t \int_{l-\tau}^l \left[h_0 v(\xi, \tau - l + \xi) - \int_0^{\tau-l+\xi} H(\tau - l + \xi - \alpha) v(\xi, \alpha) d\alpha \right] d\xi d\tau, \quad t \in (0, l). \quad (13)$$

Интегрируя уравнение (7) вдоль характеристики $dx/dt = 1$, получим

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\right)v(x, t) = \int_{(l+x-t)/2}^x \left[h_0 v(\xi, \xi + t - x) - \int_0^{\xi+t-x} H(\xi + t - x - \alpha) v(\xi, \alpha) d\alpha \right] d\xi,$$

где $(x, t) \in D_1$.

Далее, применяя (13), находим уравнение для $v(x, t)$ в области D_1 :

$$v(x, t) = \int_0^{t+x-l} \int_{l-\tau}^l \left[h_0 v(\xi, \tau - l + \xi) - \int_0^{\tau-l+\xi} H(\tau - l + \xi - \alpha) v(\xi, \alpha) d\alpha \right] d\xi d\tau + \int_{t+x-l}^t \int_{(l+t+x-2\tau)/2}^{t+x-\tau} \left[h_0 v(\xi, \xi + 2\tau - t - x) - \int_0^{\xi+2\tau-t-x} H(\xi + 2\tau - t - x - \alpha) v(\xi, \alpha) d\alpha \right] d\xi d\tau.$$

При выполнении условий леммы последнее уравнение является однородным уравнением вольтерровского типа с непрерывным ядром. Отсюда

$$v(x, t) \equiv 0, \quad (x, t) \in D_1,$$

и формула (12) установлена. □

Предположим, что функция $f(t)$ имеет структуру

$$f(t) = -\delta'(t) - h(0)\delta(t)/2 + \theta(t)f_0(t), \quad (14)$$

где $f_0(t)$ — регулярная функция.

Функцию $v(x, t)$ представим в виде

$$v(x, t) = \delta(t - x) + \theta(t - x)\bar{v}(x, t), \quad (15)$$

где $\bar{v}(x, t)$ — регулярная функция. Следуя методике работы [24], подставим выражения функций $f(t)$ и $v(x, t)$ в виде (14), (15) в задачу (7)–(10) и воспользуемся методом выделения особенностей, т.е. приравняем коэффициенты при особенностях к нулю. В результате для регулярной части решения прямой задачи в области $D_2 = \{(x, t) : 0 < x < l, x < t < 2l - x\}$ получим следующие равенства:

$$v_{tt} - v_{xx} + h_0 v + H(t - x) + \int_0^{t-x} H(\tau) v(x, t - \tau) d\tau = 0, \quad (16)$$

$$v|_{t=x+0} = -h(0) - h_0 x/2, \quad (17)$$

$$v(0, t) = k(t) \exp(h(0)t/2), \quad (18)$$

где $v(x, t) = \bar{v}(x, t)$ в области D_2 . Дополнительное условие в терминах функции $v(x, t)$ с учетом (10) принимает вид

$$v_x(0, t) = f_0(t) \exp(h(0)t/2). \quad (19)$$

Заменим равенства (16)–(19) эквивалентной системой интегральных уравнений относительно неизвестных функций. Соотношения (16), (18), (19) в области D_2 представляют собой задачу Коши для уравнения колебания струны

с данными на оси $x = 0$. Применяя формулу Даламбера, получим интегральное уравнение относительно $v(x, t)$:

$$v(x, t) = \frac{1}{2} [\tilde{k}(t+x) + \tilde{k}(t-x)] + \frac{1}{2} \int_{t-x}^{t+x} \tilde{f}_0(\tau) d\tau + \frac{1}{2} \int_0^x \int_{t-x+\xi}^{t+x-\xi} \left[h_0 v(\xi, \tau) - H(\tau - \xi) + \int_0^{\tau-\xi} H(\alpha) v(\xi, \tau - \alpha) d\alpha \right] d\tau d\xi, \quad (20)$$

где $\tilde{k}(t) = k(t) \exp(h(0)t/2)$, $\tilde{f}_0(t) = f_0(t) \exp(h(0)t/2)$.

Из теории интегральных уравнений следует, что уравнение (20) как неоднородное интегральное уравнение Вольтерра второго рода имеет единственное решение, которое можно найти, например, методом последовательных приближений. Тогда, подставляя найденную функцию $\bar{v}(x, t)$ в (15), находим обобщенную функцию $v(x, t)$. Далее, воспользовавшись формулой (5), получим обобщенное решение задачи (1)–(3).

2. Сведение задачи к системе интегральных уравнений.

ЛЕММА 2. Пусть функция $f(t)$ имеет вид (14) и $f_0(t) \in C^1[0, 2l]$, $l > 0$. Тогда обратная задача (1)–(4) для $(x, t) \in D_2$ эквивалентна задаче нахождения вектор-функций $v(x, t)$, $v_t(x, t)$, $H(t)$, $\tilde{k}(t)$, $\tilde{k}'(t)$, $\tilde{k}''(t)$ из следующей системы уравнений и равенства (20):

$$v_t(x, t) = \frac{1}{2} [\tilde{k}'(t+x) + \tilde{k}'(t-x)] + \frac{1}{2} [\tilde{f}_0'(t+x) - \tilde{f}_0'(t-x)] + \frac{x}{2} H(t-x) + \frac{1}{2} \int_0^x [h_0(v(\xi, t+x-\xi) - v(\xi, t-x+\xi)) - H(t+x-2\xi)] d\xi + \frac{1}{2} \int_0^x \int_0^{t+x-2\xi} H(\alpha) v(\xi, t+x-\xi-\alpha) d\alpha d\xi - \frac{1}{2} \int_0^x \int_0^{t-x} H(\alpha) v(\xi, t-x+\xi-\alpha) d\alpha d\xi. \quad (21)$$

$$H(t) = 2\tilde{k}''(t) + 2\tilde{f}_0'(t) - h_0(h(0) + h_0 t/4) + 2 \int_0^{t/2} \left[h_0 v_t(\xi, t-\xi) - (h(0) + h_0 \xi/2) H(t-2\xi) + \int_0^{t-2\xi} H(\alpha) v_t(\xi, t-\xi-\alpha) d\alpha \right] d\xi. \quad (22)$$

$$\tilde{k}(t) = -h(0) + (h^2(0)/2 - h'(0))t + \int_0^t (t-\tau) \tilde{k}''(\tau) d\tau, \quad (23)$$

$$\tilde{k}'(t) = h^2(0)/2 - h'(0) + \int_0^t \tilde{k}''(\tau) d\tau, \quad (24)$$

$$\tilde{k}''(t) = -H(t) + (h^2(0)/4 - h'(0))\tilde{k}(t) - \int_0^t H(t-\tau) \tilde{k}(\tau) d\tau. \quad (25)$$

Доказательство. Уравнение (21) получается непосредственным дифференцированием равенства (20). Далее в уравнении (20) полагаем $t = x + 0$ и используем равенство (17):

$$-h(0) - \frac{h_0 x}{2} = \frac{1}{2} [\tilde{k}(2x) + \tilde{k}(0)] + \frac{1}{2} \int_0^{2x} \tilde{f}_0(\tau) d\tau + \frac{1}{2} \int_0^x \int_\xi^{2x-\xi} \left[h_0 v(\xi, \tau) - H(\tau - \xi) + \int_0^{\tau-\xi} H(\alpha) v(\xi, \tau - \alpha) d\alpha \right] d\tau d\xi.$$

Обозначая $t = 2x$ и дифференцируя полученное уравнение по t , получаем

$$-\frac{h_0}{4} = \frac{1}{2} \tilde{k}'(t) + \frac{1}{2} \tilde{f}_0'(t) + \frac{1}{2} \int_0^{t/2} \left[h_0 v(\xi, t - \xi) + \int_0^{t-2\xi} H(\alpha) v(\xi, t - \xi - \alpha) d\alpha \right] d\xi - \frac{1}{2} \int_0^{t/2} H(t - 2\xi) d\xi. \quad (26)$$

В последнем интеграле сделаем замену переменных $\eta = t - 2\xi$. После этого, продифференцировав последнее равенство еще раз, получим уравнение (23) относительно функции $H(t)$. Для замыкания системы интегральных уравнений (20)–(22) используются очевидные равенства (23)–(25).

Для того чтобы показать эквивалентность обратной задачи системе интегральных уравнений, мы должны убедиться в уместности обратных преобразований. Сделаем это на примере уравнения (22). Заменяя в этом уравнении t на $t - 2\tau$, умножим обе части полученного на $d\tau$ и проинтегрируем по τ в пределах от нуля до $t/2$. В повторных интегралах получаемого равенства изменим порядок интегрирования. Используя условия (17) в обратную сторону, после несложных выкладок приходим к уравнению (20). Равенства (18) и (19) непосредственно следуют из формулы (20). Для полноты системы интегральных уравнений используются равенства (23)–(25). Для получения этих равенств проинтегрируем уравнение (24) по t в пределах от нуля до t . При этом мы получим равенство (23), верность которого устанавливается интегрированием по частям. Формула (25) получена из формулы (6) с использованием равенства $\tilde{k}(t) = k(t) \exp(h(0)t/2)$. \square

ЗАМЕЧАНИЕ. В уравнениях системы (20)–(25) присутствуют неизвестные числа $h(0)$ и $h'(0)$. Для их определения поступаем следующим образом. Из формулы (6) следует, что $h(0) = -k(0)$. Продифференцировав уравнение (6), выразим $k'(0)$ через числа $h(0)$ и $h'(0)$:

$$k'(0) = -h'(0) + h^2(0). \quad (27)$$

Далее, полагая $t = 0$, из равенств (17) и (19) с учетом (11) и (27) получим

$$-7h^2(0) - 4h'(0) = -8f_0(0).$$

Мы получили одно уравнение относительно неизвестных чисел. Для получения второго уравнения положим $t = 0$ в уравнении (26). После упрощений приходим к уравнению

$$-3h^2(0) - 4h'(0) = -8f_0(0).$$

Разрешив эту систему уравнений, находим неизвестные числа:

$$h(0) = 0, \quad h'(0) = 2f_0(0).$$

В дальнейших исследованиях подставляем найденные значения этих чисел в уравнения (23)–(25).

3. Основной результат. Основным результатом настоящей работы является нижеследующая теорема глобальной однозначной разрешимости обратной задачи.

ТЕОРЕМА. Пусть выполнены условия леммы 2. Тогда существует единственное решение обратной задачи (1)–(4) $k(t) \in C^2[0, 2l]$ для любого $l > 0$.

Доказательство. Запишем систему уравнений (23)–(25) в виде операторного уравнения

$$\varphi = A\varphi. \quad (28)$$

Здесь φ — векторная функция с компонентами φ_i :

$$\varphi = [\varphi_1(x, t), \varphi_2(x, t), \varphi_3(t), \varphi_4(t), \varphi_5(t), \varphi_6(t)],$$

где

$$\varphi_1(x, t) = v(x, t) - \frac{1}{2}[\tilde{k}(t+x) + \tilde{k}(t-x)],$$

$$\varphi_2(x, t) = v_t(x, t) - \frac{1}{2}[\tilde{k}'(t+x) + \tilde{k}'(t-x)] - \frac{x}{2}H(t-x),$$

$$\varphi_3(t) = H(t) - 2\tilde{k}''(t), \quad \varphi_4(t) = \tilde{k}(t), \quad \varphi_5(t) = \tilde{k}'(t),$$

$$\varphi_6(t) = \tilde{k}''(t) + H(t) - h_0\tilde{k}(t),$$

а оператор A определен на множестве функций $\varphi \in C[D_2]$ и в соответствии с равенствами (23)–(25) имеет вид $A = (A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6)$:

$$\begin{aligned} A_1\varphi = & \varphi_{01} + \frac{1}{2} \int_0^x \int_{t-x+\xi}^{t+x-\xi} \left[h_0 \left(\varphi_1(\xi, \tau) + \frac{1}{2}(\varphi_4(\tau - \xi) + \varphi_4(\tau + \xi)) \right) - \right. \\ & - \frac{1}{3} (2\varphi_6(\tau - \xi) + \varphi_3(\tau - \xi) - h_0\varphi_4(\tau - \xi)) + \\ & + \frac{1}{3} \int_0^{\tau-\xi} (2\varphi_6(\alpha) + \varphi_3(\alpha) - h_0\varphi_4(\alpha)) \times \\ & \left. \times \left(\varphi_1(\xi, \tau - \alpha) + \frac{1}{2}(\varphi_4(\tau - \alpha - \xi) + \varphi_4(\tau - \alpha + \xi)) \right) d\alpha \right] d\tau d\xi, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A_2\varphi = & \varphi_{02} + \frac{1}{2} \int_0^x \left[h_0 \left(\varphi_1(\xi, t+x-\xi) - \varphi_1(\xi, t-x+\xi) - \right. \right. \\
 & \left. \left. - \frac{1}{2} \left(\varphi_4(t+x) + \frac{1}{3} \varphi_4(t+x-2\xi) + \varphi_4(t-x) + \varphi_4(t-x+2\xi) \right) \right) - \right. \\
 & \left. - \frac{1}{3} (2\varphi_6(t+x-2\xi) + \varphi_3(t+x-2\xi)) \right] d\xi + \\
 & + \frac{1}{6} \int_0^x \int_0^{t+x-2\xi} (2\varphi_6(\alpha) + \varphi_3(\alpha) - h_0\varphi_4(\alpha)) \times \\
 & \times \left(\varphi_1(\xi, t+x-\xi-\alpha) + \frac{1}{2} \left(\varphi_4(t-x-\alpha) + \varphi_4(t+x-2\xi-\alpha) \right) \right) d\alpha d\xi - \\
 & - \frac{1}{6} \int_0^x \int_0^{t-x} (2\varphi_6(\alpha) + \varphi_3(\alpha) - h_0\varphi_4(\alpha)) \times \\
 & \times \left(\varphi_1(\xi, t+x-\xi-\alpha) + \frac{1}{2} \left(\varphi_4(t-x-\alpha) + \varphi_4(t+x-2\xi-\alpha) \right) \right) d\alpha d\xi,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A_3\varphi = & \varphi_{03} + 2 \int_0^{t/2} \left[h_0 \left(\varphi_2(\xi, t-\xi) + \frac{1}{2} (\varphi_5(t-2\xi) + \varphi_5(t)) + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{\xi}{3} (2\varphi_6(t-2\xi) + \varphi_3(t-2\xi) - h_0\varphi_4(t-2\xi)) \right) \right. \\
 & \left. + \left(\varphi_2(\xi, t-\xi-\alpha) + \frac{1}{2} (\varphi_5(t-2\xi-\alpha) + \varphi_5(t-\alpha)) + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{\xi}{6} (2\varphi_6(t-2\xi-\alpha) + \varphi_3(t-2\xi-\alpha) - h_0\varphi_4(t-2\xi-\alpha)) \right) d\alpha \right] d\xi. \quad (29)
 \end{aligned}$$

$$A_4\varphi = \varphi_{04} + \frac{1}{3} \int_0^t (t-\tau) [\varphi_6(\tau) - \varphi_3(\tau) - h_0\varphi_4(\tau)] d\tau,$$

$$A_5\varphi = \varphi_{05} + \frac{1}{3} \int_0^t [\varphi_6(\tau) - \varphi_3(\tau) - h_0\varphi_4(\tau)] d\tau,$$

$$A_6\varphi = \varphi_{06} - \frac{1}{3} \int_0^t [\varphi_6(t-\tau) - \varphi_3(t-\tau) - h_0\varphi_4(t-\tau)] \varphi_4(\tau) d\tau,$$

где $\varphi_0 = [\varphi_{01}(x, t), \varphi_{02}(x, t), \varphi_{03}(t), \varphi_{04}(t), \varphi_{05}(t), \varphi_{06}(t)]$ — векторная функция с компонентами φ_{0i} :

$$\varphi_{01}(x, t) = \frac{1}{2} \int_{t-x}^{t+x} \tilde{f}_0(\tau) d\tau, \quad \varphi_{02}(x, t) = \frac{1}{2} [\tilde{f}_0(t+x) - \tilde{f}_0(t-x)],$$

$$\varphi_{03}(t) = 2\tilde{f}'_0(t) - \frac{h_0^2}{4}t, \quad \varphi_{04}(t) = -2f_0(0)t, \quad \varphi_{05}(t) = -2f_0(0), \quad \varphi_{06}(t) = 0.$$

Обозначим через C_σ банахово пространство непрерывных функций, порожденных семейством весовых норм

$$\|\varphi\|_\sigma = \max \left\{ \sup_{(x,t) \in D_2} |\varphi_i(x, t) e^{-\sigma(t+(1+\theta)x)}|, i = \overline{1, 2}; \sup_{t \in [0, T]} |\varphi_j(t) e^{-\sigma t}|, j = \overline{3, 6} \right\},$$

где $\sigma \geq 0$, $0 < \theta < 1$.

Очевидно, что при $\sigma = 0$ это пространство является пространством непрерывных функций с обычной нормой, которую далее будем обозначать через $\|\varphi\|$.

В силу неравенства

$$e^{-\sigma t} \|\varphi\| \leq \|\varphi\|_\sigma \leq \|\varphi\|$$

нормы $\|\varphi\|_\sigma$ и $\|\varphi\|$ эквивалентны для любого фиксированного $l \in (0, \infty)$. Число σ выберем позже.

Пусть $Q_\sigma(\varphi_0, \|\varphi_0\|) = \{\varphi : \|\varphi - \varphi_0\| \leq \|\varphi_0\|\}$ — шар радиуса $\|\varphi_0\|$ с центром в точке φ_0 некоторого весового пространства $C_\sigma(\sigma \geq 0)$, в котором

$$\|\varphi_0\| = \max(\|\varphi_{01}\|, \|\varphi_{02}\|, \|\varphi_{03}\|, \|\varphi_{04}\|, \|\varphi_{05}\|, \|\varphi_{06}\|).$$

Нетрудно заметить, что для $Q_\sigma(\varphi_0, \|\varphi_0\|)$ имеет место оценка

$$\|\varphi\|_\sigma \leq \|\varphi_0\|_\sigma + \|\varphi_0\| \leq 2\|\varphi_0\|.$$

Пусть $\varphi(x, t) \in Q_\sigma(\varphi_0, \|\varphi_0\|)$. Покажем, что при подходящем выборе $\sigma > 0$ оператор A переводит шар в шар, т.е. $A\varphi \in Q_\sigma(\varphi_0, \|\varphi_0\|)$. На самом деле, составляя с помощью равенств (28) норму разностей, имеем

$$\begin{aligned} \|A_1\varphi - \varphi_{01}\| &= \sup_{(x,t) \in D_2} |(A_1\varphi - \varphi_{01})e^{-\sigma(t+(1+\theta)x)}| = \\ &= \sup_{(x,t) \in D_2} \left| \frac{1}{2} \int_0^x \int_{t-x+\xi}^{t+x-\xi} \left[h_0 \left(\varphi_1(\xi, \tau) e^{-\sigma(\tau+(1+\theta)\xi)} e^{-\sigma(t-\tau+(1+\theta)(x-\xi))} + \right. \right. \right. \\ &+ \frac{1}{2} \left(\varphi_4(\tau - \xi) e^{-\sigma(\tau-\xi)} e^{-\sigma(t-\tau+\xi)} + \varphi_4(\tau + \xi) e^{-\sigma(\tau+\xi)} e^{-\sigma(t-\tau-\xi)} \right) \left. \left. \right) - \right. \\ &- \frac{1}{3} \left(2\varphi_6(\tau - \xi) + \varphi_3(\tau - \xi) - h_0\varphi_4(\tau - \xi) \right) e^{-\sigma(\tau-\xi)} e^{-\sigma(t-\tau+\xi)} + \\ &+ \frac{1}{3} \int_0^{\tau-\xi} (2\varphi_6(\alpha) + \varphi_3(\alpha) - h_0\varphi_4(\alpha)) e^{-\sigma\alpha} \times \\ &\times \left(\varphi_1(\xi, \tau - \alpha) e^{-\sigma(\tau-\alpha+(1+\theta)\xi)} e^{-\sigma(t-\tau+(1+\theta)(x-\xi)-\alpha)} + \right. \\ &+ \frac{1}{2} \left(\varphi_4(\tau - \alpha - \xi) e^{-\sigma(\tau-\alpha-\xi)} e^{-\sigma(t-\tau+\xi)} + \right. \\ &+ \left. \left. \varphi_4(\tau - \alpha + \xi) e^{-\sigma(\tau-\alpha+\xi)} e^{-\sigma(t-\tau-\xi)} \right) \right) d\alpha \Big| \leq \\ &\leq \frac{\|\varphi_0\|}{\sigma} l \left[\left(\frac{7h_0}{3} + 1 \right) + 8h_1\|\varphi_0\|l \right] \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\|\varphi_0\|}{\sigma} \alpha_1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|A_2\varphi - \varphi_{02}\| &= \sup_{(x,t) \in D_2} |(A_2\varphi - \varphi_{02})e^{-\sigma(t+(1+\theta)x)}| \leq \\ &\leq \frac{\|\varphi_0\|}{\sigma} \left[\frac{11h_0}{3} + 2(3 + h_0)\|\varphi_0\|l \right] \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\|\varphi_0\|}{\sigma} \alpha_2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|A_3\varphi - \varphi_{03}\| &= \sup_{t \in [0; T]} |(A_3\varphi - \varphi_{03})e^{-\sigma t}| \leq \\ &\leq \frac{2\|\varphi_0\|}{\sigma} \left[\frac{7}{2}h_0 + h_1l(1 + h_0 + (4 + lh_1)\|\varphi_0\|) \right] \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\|\varphi_0\|}{\sigma} \alpha_3, \end{aligned}$$

$$\|A_4\varphi - \varphi_{04}\| = \sup_{t \in [0; T]} |(A_4\varphi - \varphi_{04})e^{-\sigma t}| \leq \frac{2\|\varphi_0\|}{\sigma} \frac{(2 + h_0)l}{3} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\|\varphi_0\|}{\sigma} \alpha_4,$$

$$\|A_5\varphi - \varphi_{05}\| = \sup_{t \in [0; T]} |(A_5\varphi - \varphi_{05})e^{-\sigma t}| \leq \frac{2\|\varphi_0\|}{\sigma} \frac{2 + h_0}{3} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\|\varphi_0\|}{\sigma} \alpha_5,$$

$$\begin{aligned} \|A_6\varphi - \varphi_{06}\| &= \sup_{t \in [0; T]} |(A_6\varphi - \varphi_{06})e^{-\sigma t}| \leq \\ &\leq \frac{2\|\varphi_0\|}{\sigma} \left[2f_0(0)l + \frac{2}{3}\|\varphi_0\|(2 + h_0)l^2 \right] \frac{2 + h_0}{3} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\|\varphi_0\|}{\sigma} \alpha_6, \end{aligned}$$

где $h_1 = 1 + h_0/3$. Последнее неравенство получено с помощью четвертого и шестого уравнений системы (29)

Выбирая $\sigma \geq \alpha_0 = \max(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6)$, получим, что A переводит шар $Q_\sigma(\varphi_0, \|\varphi_0\|)$ в шар $Q_\sigma(\varphi_0, \|\varphi_0\|)$.

Пусть теперь φ^1, φ^2 — любые два элемента из $Q_\sigma(\varphi_0, \|\varphi_0\|)$. Тогда, используя вспомогательные неравенства вида

$$|\varphi_i^1 \varphi_j^1 - \varphi_i^2 \varphi_j^2| e^{-\sigma t} \leq |\varphi_i^1| |\varphi_j^1 - \varphi_j^2| e^{-\sigma t} + |\varphi_j^2| |\varphi_i^1 - \varphi_i^2| e^{-\sigma t} \leq 4\|\varphi_0\| \|\varphi^1 - \varphi^2\|_\sigma$$

для $(x, t) \in D_2$, получим

$$\begin{aligned} \|A_1\varphi^1 - A_1\varphi^2\|_\sigma &= \sup_{(x, t) \in D_2} |(A_1\varphi^1 - A_1\varphi^2)e^{-\sigma(t+(1+\theta)x)}| \leq \\ &\leq \frac{\|\varphi^1 - \varphi^2\|_\sigma}{\sigma} l \left[\left(\frac{7h_0}{6} + \frac{1}{2} \right) + 8h_1\|\varphi_0\|l \right] \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\|\varphi^1 - \varphi^2\|_\sigma}{\sigma} \beta_1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|A_2\varphi^1 - A_2\varphi^2\|_\sigma &= \sup_{(x, t) \in D_2} |(A_2\varphi^1 - A_2\varphi^2)e^{-\sigma(t+(1+\theta)x)}| \leq \\ &\leq \frac{\|\varphi^1 - \varphi^2\|_\sigma}{\sigma} \left[\frac{11h_0}{6} + 2(3 + h_0)\|\varphi_0\|l \right] \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\|\varphi^1 - \varphi^2\|_\sigma}{\sigma} \beta_2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|A_3\varphi^1 - A_3\varphi^2\|_\sigma &= \sup_{t \in [0; 2l]} |(A_3\varphi^1 - A_3\varphi^2)e^{-\sigma t}| \leq \\ &\leq \frac{\|\varphi^1 - \varphi^2\|_\sigma}{\sigma} \left[\frac{7}{2}h_0 + \frac{1}{2}h_1l(1 + h_0 + 2(4 + lh_1)\|\varphi_0\|) \right] \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\|\varphi^1 - \varphi^2\|_\sigma}{\sigma} \beta_3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|A_4\varphi^1 - A_4\varphi^2\|_\sigma &= \sup_{t \in [0; 2l]} |(A_4\varphi^1 - A_4\varphi^2)e^{-\sigma t}| \leq \\ &\leq \frac{\|\varphi^1 - \varphi^2\|_\sigma}{\sigma} \frac{(2 + h_0)l}{3} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\|\varphi^1 - \varphi^2\|_\sigma}{\sigma} \beta_4, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|A_5\varphi^1 - A_5\varphi^2\|_\sigma &= \sup_{t \in [0; 2l]} |(A_5\varphi^1 - A_5\varphi^2)e^{-\sigma t}| \leq \\ &\leq \frac{\|\varphi^1 - \varphi^2\|_\sigma}{\sigma} \frac{2 + h_0}{3} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\|\varphi^1 - \varphi^2\|_\sigma}{\sigma} \beta_5, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|A_6\varphi^1 - A_6\varphi^2\|_\sigma &= \sup_{t \in [0; 2l]} |(A_6\varphi^1 - A_6\varphi^2)e^{-\sigma t}| \leq \\ &\leq \frac{\|\varphi^1 - \varphi^2\|_\sigma}{\sigma} \left[2f_0(0)l + \frac{4}{3}\|\varphi_0\|(2 + h_0)l^2 \right] \frac{2 + h_0}{3} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\|\varphi^1 - \varphi^2\|_\sigma}{\sigma} \beta_6. \end{aligned}$$

Проведенные исследования показали, что если число σ будет выбрано из условия $\sigma > \max(\alpha_0, \beta_0)$, где $\beta_0 = \max(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5, \beta_6)$, то оператор A является сжимающим на $Q_\sigma(\varphi_0, \|\varphi_0\|)$. Тогда, согласно теореме Банаха [22], существует единственное решение уравнения (28) в $Q_\sigma(\varphi_0, \|\varphi_0\|)$ при любом фиксированном $l > 0$. \square

В итоге имеем, что $k(t) = \tilde{k}(t)$, так как $h(0) = 0$.

Конкурирующие интересы. Конкурирующих интересов не имею.

Авторский вклад и ответственность. Я несу полную ответственность за предоставление окончательной версии рукописи в печать. Окончательная версия рукописи мною одобрена.

Финансирование. Исследование выполнялось без финансирования.

Библиографический список

1. Lorenzi A., Sinestrari E. Stability results for a partial integrodifferential inverse problem / *Volterra integrodifferential equations in Banach spaces and applications, Proc. Conf., Trento/Italy 1987* / Pitman Res. Notes Math. Ser., 190, 1989. pp. 271–294.
2. Lorenzi A., Paparoni E. Direct and inverse problems in the theory of materials with memory // *Rend. Semin. Mat. Univ. Padova*, 1992. vol. 87. pp. 105–138.
3. Lorenzi A. An identification problem related to a nonlinear hyperbolic integro-differential equation // *Nonlinear Anal., Theory Methods Appl.*, 1994. vol. 22, no. 1. pp. 21–44. DOI: [https://doi.org/10.1016/0362-546X\(94\)90003-5](https://doi.org/10.1016/0362-546X(94)90003-5).
4. Сафаров Ж. Ш., Дурдиев Д. К. Обратная задача для интегро-дифференциального уравнения акустики // *Диффер. уравн.*, 2018. Т. 54, № 1. С. 136–144. EDN: QLHNCP. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0374064118010119>.
5. Safarov J. S Global solvability of the one-dimensional inverse problem for the integro-differential equation of acoustics // *J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys.*, 2018. vol. 11, no. 6. pp. 753–763. EDN: YPMSTK. DOI: <https://doi.org/10.17516/1997-1397-2018-11-6-753-763>.
6. Романов В. Г. Об определении коэффициентов в уравнениях вязкоупругости // *Сиб. матем. журн.*, 2014. Т. 55, № 3. С. 617–626. EDN: SJBRGD.
7. Дурдиев Д. К., Сафаров Ж. Ш. Обратная задача об определении одномерного ядра уравнения вязкоупругости в ограниченной области // *Матем. заметки*, 2015. Т. 97, № 6. С. 855–867. EDN: UAJXTD. DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10659>.
8. Рахмонов А. А., Дурдиев У. Д., Бозоров З. Р. Задача определения скорости звука и функции памяти анизотропной среды // *Теор. и матем. физика*, 2021. Т. 207, № 1. С. 112–132. EDN: VQBJPL. DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf10035>.
9. Guidetti D. Reconstruction of a convolution kernel in a parabolic problem with a memory term in the boundary conditions // *Bruno Pini Mathematical Analysis Seminar*, 2013. vol. 4, no. 1. pp. 47–55. DOI: <https://doi.org/10.6092/issn.2240-2829/4154>.

10. Cavaterra C., Guidetti D. Identification of a convolution kernel in a control problem for the heat equation with a boundary memory term // *Ann. Mat. Pura Appl. (4)*, 2014. vol. 193, no. 3. pp. 779–816. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10231-012-0301-y>.
11. Janno J., von Wolfersdorf L. Inverse problems for identification of memory kernels in viscoelasticity // *Math. Methods Appl. Sci.*, 1997. vol. 20, no. 4. pp. 291–314. DOI: [https://doi.org/10.1002/\(SICI\)1099-1476\(19970310\)20:4<291::AID-MMA860>3.0.CO;2-W](https://doi.org/10.1002/(SICI)1099-1476(19970310)20:4<291::AID-MMA860>3.0.CO;2-W).
12. Дурдиев Д. К., Рахронов А. А. Задача об определении двумерного ядра в системе интегро-дифференциальных уравнений вязкоупругой пористой среды // *Сиб. журн. индустр. матем.*, 2020. Т. 23, № 2. С. 63–80. EDN: KIFSZH. DOI: <https://doi.org/10.33048/SIBJIM.2020.23.205>.
13. Durdiev D. K., Nuriddinov Zh. Z Determination of a multidimensional kernel in some parabolic integro-differential equation // *J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys.*, 2021. vol. 14, no. 1. pp. 117–127. EDN: RMPXU. DOI: <https://doi.org/10.17516/1997-1397-2021-14-1-117-127>.
14. Safarov J. Sh. Two-dimensional inverse problem for an integro-differential equation of hyperbolic type // *J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys.*, 2022. vol. 15, no. 5. pp. 651–662. EDN: ADDBPG. DOI: <https://doi.org/10.17516/1997-1397-2022-15-5-651-662>.
15. Дурдиев Д. К., Сафаров Ж. Ш. Локальная разрешимость задачи определения пространственной части многомерного ядра в интегро-дифференциальном уравнении гиперболического типа // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2012. № 4. С. 37–47. EDN: PUQBLB. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1097>.
16. Дурдиев Д. К., Сафаров Ж. Ш. Задача об определении двумерного ядра уравнения вязкоупругости со слабо горизонтальной неоднородностью // *Сиб. журн. индустр. матем.*, 2022. Т. 25, № 1. С. 14–38. EDN: BVTEGR. DOI: <https://doi.org/10.33048/SIBJIM.2022.25.102>.
17. Дурдиев Д. К., Сафаров Ж. Ш. Задача определения памяти среды со слабо горизонтальной неоднородностью // *Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьютер. науки*, 2022. Т. 32, № 3. С. 383–402. EDN: ILHEXI. DOI: <https://doi.org/10.35634/vm220303>.
18. Дурдиев Д. К., Тотиева Ж. Д. О глобальной разрешимости одной многомерной обратной задачи для уравнения с памятью // *Сиб. матем. журн.*, 2021. Т. 62, № 2. С. 269–285. EDN: IAZZFL. DOI: <https://doi.org/10.33048/smzh.2021.62.203>.
19. Алексеев А. С., Добринский В. И. Некоторые вопросы практического использования обратных динамических задач сейсмологии / *Математические проблемы геофизики*. Вып. 6, ч. 2. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1975. С. 7–53.
20. Janno J., von Wolfersdorf L. Inverse problems for identification of memory kernels in heat flow // *J. Inverse Ill-Posed Probl.*, 1996. vol. 4, no. 1. pp. 39–66. DOI: <https://doi.org/10.1515/jiip.1996.4.1.39>.
21. Durdiev D., Shishkina E., Sitnik S. The explicit formula for solution of anomalous diffusion equation in the multi-dimensional space // *Lobachevskii J. Math.*, 2021. vol. 42, no. 6. pp. 1264–1273, arXiv:2009.10594 [math.CA]. DOI: <https://doi.org/10.1134/S199508022106007X>.
22. Коломогоров А. Н., Фомин С. В. *Элементы теории функций и функционального анализа*. М.: Наука, 1976. 542 с.
23. Владимиров В. С. *Уравнения математической физики*. М.: Наука, 1988. 512 с.
24. Романов В. Г. *Обратные задачи математической физики*. М.: Наука, 1984. 310 с.

MSC: 35H10, 35R30, 45K05

Inverse problem for an integro-differential equation of hyperbolic type with additional information of a special form in a bounded domain

J. Sh. Safarov^{1,2}

¹ V. I. Romanovsky Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan, 4, University st., Tashkent, 100174, Uzbekistan.

² Tashkent University of Information Technologies, 108, Amir Timur st., Tashkent, 100202, Uzbekistan.

Abstract

A one-dimensional inverse problem of determining the kernel of the integral term of an integro-differential equation of hyperbolic type in a variable-bounded domain x is considered. Firstly, the direct problem is investigated, for the regular part of which the Cauchy problem on the axis $x = 0$ is obtained using the method of singularity extraction. Subsequently, an integral equation for the unknown function is derived by the d'Alembert formula.

For the direct problem, the inverse problem of determining the kernel entering the integral term of the equation is studied. To find it, an additional condition is specified in a special form. As a result, the inverse problem is reduced to an equivalent system of integral equations for unknown functions. The principle of contraction mappings in the space of continuous functions with weighted norms is applied to the obtained system.

For the given problem, a theorem of global unique solvability has been proven, which is the main result of the study.

Keywords: integro-differential equation, inverse problem, integral kernel, contraction mapping principle, Banach theorem.

Received: 27th January, 2023 / Revised: 16th January, 2024 /

Accepted: 4th March, 2024 / First online: 15th July, 2024

Differential Equations and Mathematical Physics Research Article

© Authors, 2024

© Samara State Technical University, 2024 (Compilation, Design, and Layout)

© The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Please cite this article in press as:

Safarov J. Sh. Inverse problem for an integro-differential equation of hyperbolic type with additional information of a special form in a bounded domain, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2024, vol. 28, no. 1, pp. 29–44. EDN: WSCTDR. DOI: 10.14498/vsgtu1997 (In Russian).

Author's Details:

Jurabek Sh. Safarov  <https://orcid.org/0000-0001-9249-835X>

Dr. Phys. & Math. Sci.; Senior Researcher; Lab. of Differential Equations and their Applications¹; Professor; Dept. of Higher Mathematics²; e-mail: j.safarov65@mail.ru

Competing interests. I have no competing interests.

Authors' contributions and responsibilities. I take full responsibility for submitting the final version of the manuscript for publication. The final version of the manuscript has been approved by me.

Funding. The research was conducted without funding.

References

1. Lorenzi A., Sinestrari E. Stability results for a partial integrodifferential inverse problem, In: *Volterra integrodifferential equations in Banach spaces and applications, Proc. Conf., Trento/Italy 1987*, Pitman Res. Notes Math. Ser., 190, 1989, pp. 271–294.
2. Lorenzi A., Paparoni E. Direct and inverse problems in the theory of materials with memory, *Rend. Semin. Mat. Univ. Padova*, 1992, vol. 87, pp. 105–138.
3. Lorenzi A. An identification problem related to a nonlinear hyperbolic integro-differential equation, *Nonlinear Anal., Theory Methods Appl.*, 1994, vol. 22, no. 1, pp. 21–44. DOI: [https://doi.org/10.1016/0362-546X\(94\)90003-5](https://doi.org/10.1016/0362-546X(94)90003-5).
4. Safarov Z. S., Durdiev D. K. Inverse problem for an integro-differential equation of acoustics, *Differ. Equat.*, 2018, vol. 54, no. 1, pp. 134–142. EDN: SBEEZR. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0012266118010111>.
5. Safarov J. S. Global solvability of the one-dimensional inverse problem for the integro-differential equation of acoustics, *J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys.*, 2018, vol. 11, no. 6, pp. 753–763. EDN: YPMSKT. DOI: <https://doi.org/10.17516/1997-1397-2018-11-6-753-763>.
6. Romanov V. G. On the determination of the coefficients in the viscoelasticity equations, *Siberian Math. J.*, 2014, vol. 55, no. 3, pp. 503–510. EDN: UGODUV. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0037446614030124>.
7. Durdiev D. K., Safarov Z. S. Inverse problem of determining the one-dimensional kernel of the viscoelasticity equation in a bounded domain, *Math. Notes*, 2015, vol. 97, no. 6, pp. 867–877. EDN: UTMWIN. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0001434615050223>.
8. Rahmonov A. A., Durdiev U. D., Bozorov Z. R. Problem of determining the speed of sound and the memory of an anisotropic medium, *Theoret. and Math. Phys.*, 2021, vol. 207, no. 1, pp. 494–513. EDN: IWZQA. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0040577921040085>.
9. Guidetti D. Reconstruction of a convolution kernel in a parabolic problem with a memory term in the boundary conditions, *Bruno Pini Mathematical Analysis Seminar*, 2013, vol. 4, no. 1, pp. 47–55. DOI: <https://doi.org/10.6092/issn.2240-2829/4154>.
10. Cavaterra C., Guidetti D. Identification of a convolution kernel in a control problem for the heat equation with a boundary memory term, *Ann. Mat. Pura Appl. (4)*, 2014, vol. 193, no. 3, pp. 779–816. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10231-012-0301-y>.
11. Janno J., von Wolfersdorf L. Inverse problems for identification of memory kernels in viscoelasticity, *Math. Methods Appl. Sci.*, 1997, vol. 20, no. 4, pp. 291–314. DOI: [https://doi.org/10.1002/\(SICI\)1099-1476\(19970310\)20:4<291::AID-MMA860>3.0.CO;2-W](https://doi.org/10.1002/(SICI)1099-1476(19970310)20:4<291::AID-MMA860>3.0.CO;2-W).
12. Durdiev D. K., Rakhmonov A. A. The problem of determining the 2D kernel in a system of integro-differential equations of a viscoelastic porous medium, *J. Appl. Industr. Math.*, 2020, vol. 14, no. 2, pp. 281–295. EDN: GRSYPW. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1990478920020076>.
13. Durdiev D. K., Nuriddinov Zh. Z. Determination of a multidimensional kernel in some parabolic integro-differential equation, *J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys.*, 2021, vol. 14, no. 1, pp. 117–127. EDN: RMPPXU. DOI: <https://doi.org/10.17516/1997-1397-2021-14-1-117-127>.
14. Safarov J. Sh. Two-dimensional inverse problem for an integro-differential equation of hyperbolic type, *J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys.*, 2022, vol. 15, no. 5, pp. 651–662. EDN: ADDBPG. DOI: <https://doi.org/10.17516/1997-1397-2022-15-5-651-662>.
15. Durdiev D. K., Safarov Zh. Sh. The local solvability of a problem of determining the spatial part of a multidimensional kernel in the integro-differential equation of hyperbolic type,

- Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2012, no. 4, pp. 37–47 (In Russian). EDN: PUQBLB. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1097>.
16. Durdiev D. K., Safarov J. Sh. Problem of determining the two-dimensional kernel of the viscoelasticity equation with a weakly horizontal inhomogeneity, *J. Appl. Ind. Math.*, 2022, vol. 16, no. 1, pp. 22–44. EDN: ANKIMT. DOI: <https://doi.org/10.1134/s1990478922010033>.
 17. Durdiev D. K., Safarov J. Sh. The problem of determining the memory of an environment with weak horizontal heterogeneity, *Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, 2022, vol. 32, no. 3, pp. 383–402 (In Russian). EDN: ILHEXI. DOI: <https://doi.org/10.35634/vm220303>.
 18. Durdiev D. K., Totieva Z. D. About global solvability of a multidimensional inverse problem for an equation with memory /, *Siberian Math. J.*, 2021, vol. 62, no. 2, pp. 215–229. EDN: VRTEUJ. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0037446621020038>.
 19. Alekseev A. S., Dobrinskii V. I. Some questions of practical use of inverse dynamical problems of seismics, In: *Matematicheskie problemy geofiziki* [Mathematical Problems of Geophysics]. Iss. 6, no. 2. Novosibirsk, Computing Center of the USSR Academy of Sciences, 1975, pp. 7–53 (In Russian).
 20. Janno J., von Wolfersdorf L. Inverse problems for identification of memory kernels in heat flow, *J. Inverse Ill-Posed Probl.*, 1996, vol. 4, no. 1, pp. 39–66. DOI: <https://doi.org/10.1515/jiip.1996.4.1.39>.
 21. Durdiev D., Shishkina E., Sitnik S. The explicit formula for solution of anomalous diffusion equation in the multi-dimensional space, *Lobachevskii J. Math.*, 2021, vol. 42, no. 6, pp. 1264–1273, arXiv: 2009.10594 [math.CA]. DOI: <https://doi.org/10.1134/S199508022106007X>.
 22. Kolmogorov A. N., Fomin S. V. *Elementy teorii funktsii i funktsional'nogo analiza* [Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis]. Moscow, Nauka, 1976, 542 pp. (In Russian)
 23. Vladimirov V. S. *Uravneniia matematicheskoi fiziki* [Equations of Mathematical Physics]. Moscow, Nauka, 1988, 512 pp. (In Russian)
 24. Romanov V. G. *Obratnye zadachi matematicheskoi fiziki* [Inverse Problem for Mathematical Physics]. Moscow, Nauka, 1984, 310 pp. (In Russian)



УДК 517.955

Видоизмененная задача Коши для неоднородного вырождающегося гиперболического уравнения второго рода

А. К. Уринов^{1,2}, А. Б. Окбоев²

¹ Ферганский государственный университет, Узбекистан, 150100, Фергана, ул. Мураббийлар, 19.

² Институт математики имени В.И. Романовского АН Республики Узбекистан, Узбекистан, 100174, Ташкент, ул. Университетская, 46.

Аннотация

Изучена видоизмененная задача Коши для неоднородного уравнения вырождающегося гиперболического типа второго рода в характеристическом треугольнике. Известно, что вырождающиеся гиперболические уравнения обладают той особенностью, что для них не всегда имеет место корректность задачи Коши с начальными данными на линии параболического вырождения. Поэтому в таких случаях необходимо рассмотреть задачу с начальными условиями в видоизмененной форме.

Сформулированы видоизмененные задачи Коши с начальными условиями на линии параболического вырождения для неоднородного уравнения вырождающегося гиперболического типа второго рода. Поставленная задача сводится к видоизмененной задаче Коши для однородного уравнения и к задаче Коши для неоднородного уравнения с нулевыми начальными условиями. Решения видоизмененной задачи Коши для однородного уравнения получено из общего решения рассмотренного уравнения, а решения видоизмененной задачи Коши с однородными условиями для уравнения неоднородного уравнения найдены с помощью метода Римана в явном виде.

Доказано, что найденные решения действительно удовлетворяют уравнению и начальным условиям.

Ключевые слова: вырождающееся уравнение гиперболического типа, видоизмененная задача Коши, существование и единственность решения, функция Римана.

Дифференциальные уравнения и математическая физика

Научная статья

© Коллектив авторов, 2024

© СамГТУ, 2024 (составление, дизайн, макет)

📄 ©📄 Контент публикуется на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

Образец для цитирования

Уринов А. К., Окбоев А. Б. Видоизмененная задача Коши для неоднородного вырождающегося гиперболического уравнения второго рода // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2024. Т. 28, № 1. С. 45–58. EDN: WZQYTV. DOI: 10.14498/vsgtu2024.

Сведения об авторах

Азмаджон Кушакович Уринов <https://orcid.org/0000-0002-9586-1799>

доктор физико-математических наук, профессор; профессор каф. математического анализа и дифференциальных уравнений¹; ведущий научный сотрудник²; e-mail: urinovak@mail.ru

Акмаджон Бахромжонович Окбоев <https://orcid.org/0000-0002-5544-3111>

PhD (физико-математические науки); старший научный сотрудник²;

e-mail: akmaljon12012@gmail.com

Получение: 16 мая 2023 г. / Исправление: 7 июля 2023 г. /
 Принятие: 19 сентября 2023 г. / Публикация онлайн: 3 июня 2024 г.

Введение. Известно, что задача Коши для вырождающихся гиперболических уравнений с начальными данными на линии параболического вырождения не всегда бывает корректно поставленной. В том случае, когда задача Коши поставлена некорректно, необходимо рассмотреть видоизмененную задачу Коши (см., напр., [1–3]). На корректность таких задач существенно влияют коэффициенты и показатель вырождения рассматриваемого уравнения. Естественно, что эта проблема связана и с вопросом о корректной постановке и исследовании краевых задач для уравнений смешанного типа, содержащих такие уравнения (см., напр., [4–12]).

В конечной односвязной области D , ограниченной его характеристиками $OB : x - 2\sqrt{-y} = 0$, $AB : x + 2\sqrt{-y} = 1$ и $OA : y = 0$, рассматривается вырождающееся гиперболическое уравнение второго рода

$$L_{\alpha,\lambda}(u) \equiv u_{xx} + yu_{yy} + \alpha u_y - \lambda^2 u = f(x, y), \quad y < 0, \quad (1)$$

где α и λ — заданные числа, причем $\alpha < 1$, $\lambda \in \mathbb{R}$ или $i\lambda \in \mathbb{R}$, $f(x, y)$ — заданная функция.

Отметим, что М. Чибрарио одним из первых провела углубленный анализ уравнения (1) при $\alpha = 0$ и $\lambda = 0$ [13]. С. А. Терсенов [2], И. Л. Кароль [14], М. С. Салахитдинов, С. С. Исамухаммедов [6], В. А. Елеев [3], J. W. Reyn [15], Ю. М. Крикунов [16], Р. С. Хайруллин [4], Н. К. Мамадалиев [5] и многие другие исследовали различные задачи для уравнения (1) при различных значениях α , когда $\lambda = 0$ и $f(x, y) = 0$. Следует отметить, что М. В. Капилевич исследовал задачу Коши для уравнения (1) при $\alpha \in (1/2, 1)$ и $f(x, y) = 0$ [17]. При $\alpha = 1/2$ и $f(x, y) = 0$ уравнение (1) сводится к телеграфному уравнению задачи Коши, которая была изучена в [18]. Задачу Коши для уравнения (1) при $\alpha \in (0, 1/2)$ и $f(x, y) = 0$ исследовал Ф. Ф. Евдокимов [19]. В работе [20] для уравнения (1) при $\alpha \in \mathbb{R} \setminus (0, 1)$ и $f(x, y) = 0$ сформулирована видоизмененная задача Коши, аналогичная предложенной задаче в [2], и получена формула единственного решения поставленной задачи. В работе [21] поставлена и изучена задача типа Коши с производными высокого порядка в начальных условиях для уравнения (1) при $f(x, y) = 0$ в характеристическом треугольнике.

В этой работе исследуется следующая видоизмененная задача Коши для уравнения (1).

Задача Коши. Найти функцию $u(x, y) \in C(\bar{D}) \cap C^2(D)$, удовлетворяющую в области D уравнению (1) и следующим начальным условиям:

$$\begin{cases} u(x, 0) = \tau(x), & x \in [0, 1]; \\ \lim_{y \rightarrow -0} (-y)^\alpha (\partial/\partial y)[u - A_\alpha^-(\tau, \lambda)] = \nu(x), & x \in (0, 1), \end{cases} \quad (2)$$

где $\tau(x)$, $\nu(x)$ и $f(x, y)$ — заданные функции, $A_\alpha^-(\tau, \lambda)$ — оператор вида

$$A_{\alpha}^{-}(\tau, \lambda) = \sum_{k=0}^n \frac{\Gamma(2n+2\beta)(4y)^k C_n^k}{\Gamma^2(n+\beta)(\beta+1/2)_k(\beta+n)_k} \times \\ \times \int_0^1 \Psi_k(\tau, \lambda)[z(1-z)]^{k+n+\beta-1} \bar{J}_{k+n+\beta-1}(\sigma) dz \quad (3)$$

при $\alpha \neq -n, \alpha \neq 1/2 - n, n = 0, 1, 2, \dots$; *вида*

$$A_{-n+1/2}^{-}(\tau, \lambda) = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{C_{n+1}^k (4y)^k}{k!(-n+1/2)_k} \int_0^1 \Psi_k(\tau, \lambda)[z(1-z)]^k \bar{J}_k(\sigma) dz \quad (4)$$

при $\alpha = 1/2 - n, n = 0, 1, 2, \dots$; *вида*

$$A_{-n}^{-}(\tau, \lambda) = \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^n \frac{(4y)^k C_{n+1}^k}{(-n)_k (1/2)_k} \int_0^1 \Psi_k(\tau, \lambda)[z(1-z)]^{k-1/2} \bar{J}_{k-1/2}(\sigma) dz + \\ + \frac{4(4y)^{n+1}}{\pi(-n)_n (3/2)_n} \int_0^1 \Psi_{n+1}(\tau, \lambda)[z(1-z)]^{n+1/2} \times \\ \times \{\ln[\sqrt{-y}z(1-z)] \bar{J}_{n+1/2}(\sigma) - \Omega_{n+1/2}(\sigma)\} dz \quad (5)$$

при $\alpha = -n, n = 0, 1, 2, \dots$;

$$\Omega_{\gamma}(\sigma) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m (\sigma/2)^{2m}}{m!(\gamma+1)_m} \sum_{j=1}^m \frac{1}{\gamma+j};$$

$\Psi_k(\tau, \lambda) = (\lambda^2 - d^2/dx^2)^k \tau(x), \sigma = 4\lambda\sqrt{-yz(1-z)}, \beta = \alpha - 1/2, \Gamma(\delta)$ — гамма-функция Эйлера, $(a)_m = a(a+1)\dots(a+m-1)$ — символ Похгаммера, $J_{\gamma}(z)$ — функция Бесселя первого рода, $\bar{J}_{\gamma}(z) = \Gamma(\gamma+1)(z/2)^{-\gamma} J_{\gamma}(z)$, т.е.

$$\bar{J}_{\gamma}(z) = \Gamma(\gamma+1) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (z/2)^{2m}}{m! \Gamma(m+\gamma+1)}, \quad \gamma \neq -1, -2, -3, \dots$$

1. Исследование видоизмененной задачи Коши. Решение задачи (1), (2) будем искать в виде

$$u(x, y) = v(x, y) + \omega(x, y), \quad (6)$$

где $v(x, y)$ — решение задачи

$$L_{\alpha, \lambda}(v) \equiv v_{xx} + yv_{yy} + \alpha v_y - \lambda^2 v = 0, \quad y < 0; \\ \left\{ \begin{array}{ll} v(x, 0) = \tau(x), & x \in [0, 1]; \\ \lim_{y \rightarrow -0} (-y)^{\alpha} (\partial/\partial y)[v - A_{\alpha}^{-}(\tau, \lambda)] = \nu(x), & x \in (0, 1), \end{array} \right.$$

которое определяется формулой [20]

$$v(x, y) = A_{\alpha}^{-}(\tau, \lambda) - \gamma_1(-y)^{1-\alpha} \int_0^1 \nu(x - 2\sqrt{-y}(1 - 2z)) [z(1 - z)]^{-\beta} \bar{J}_{-\beta}(\sigma) dz. \quad (7)$$

Здесь $\gamma_1 = \Gamma(2 - 2\beta)/[(1 - \alpha)\Gamma^2(1 - \beta)]$, $\sigma = 4\lambda\sqrt{-yz(1 - z)}$, $A_{\alpha}^{-}(\tau, \lambda)$ — определяется по формулам (3)–(5), $\omega(x, y)$ — решение задачи

$$L_{\alpha, \lambda}(\omega) = f(x, y), \quad y < 0; \quad (8)$$

$$\begin{cases} \omega(x, 0) = 0, & x \in [0, 1]; \\ \lim_{y \rightarrow -0} (-y)^{\alpha} (\partial/\partial y)\omega(x, y) = 0, & x \in (0, 1). \end{cases} \quad (9)$$

Из (9) вытекает, что [21]

$$\lim_{y \rightarrow -0} (-y)^{\alpha-1} \omega(x, y) = 0. \quad (10)$$

Исследуем задачу (8), (9) методом Римана. Уравнение (8) и условия (9) в характеристических координатах $\xi = x - 2\sqrt{-y}$, $\eta = x + 2\sqrt{-y}$ имеют вид

$$\begin{aligned} E_{\lambda}(W) &\equiv W_{\xi\eta} + \frac{\beta}{\eta - \xi} (W_{\xi} - W_{\eta}) - \frac{\lambda^2}{4} W = F(\xi, \eta), \\ W(\xi, \xi) &= 0, \quad \lim_{\eta - \xi \rightarrow 0} \frac{(\eta - \xi)^{2\beta}}{4^{\beta-1/2}} [W_{\xi}(\xi, \eta) - W_{\eta}(\xi, \eta)] = 0, \end{aligned} \quad (11)$$

где $W(\xi, \eta) = \omega(x, y)$, $F(x, y) = f(\xi, \eta)/4$. В координатах ξ, η равенство (10) имеет вид

$$\lim_{\eta - \xi \rightarrow 0} \left(\frac{\eta - \xi}{4} \right)^{2\beta-1} W(\xi, \eta) = 0. \quad (12)$$

В характеристическом треугольнике Δ_0 , ограниченном прямыми $\xi = \eta$, $\xi = \xi_0$, $\eta = \eta_0$, рассмотрим функцию Римана [22]:

$$R(\xi, \eta; \xi_0, \eta_0) = \frac{(\eta - \xi)^{2\beta}}{(\eta - \xi_0)^{\beta} (\eta_0 - \xi)^{\beta}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\rho^k}{(k!)^2} F(\beta, \beta + k, 1 + k; \theta),$$

где $\rho = \lambda^2(\eta_0 - \eta)(\xi - \xi_0)/4$, $\theta = (\eta_0 - \eta)(\xi - \xi_0)/[(\eta - \xi_0)(\eta_0 - \xi)]$. Легко видеть, что

$$E_{\lambda}^*(R) \equiv R_{\xi\eta} - \frac{\beta}{\eta - \xi} (R_{\xi} - R_{\eta}) - \frac{2\beta}{(\eta - \xi)^2} R - \frac{\lambda^2}{4} R = 0; \quad (13)$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial \xi} R(\xi, \eta; \xi_0, \eta_0) \right|_{\eta=\eta_0} + \frac{\beta}{\eta - \xi} R(\xi, \eta; \xi_0, \eta_0) \Big|_{\eta=\eta_0} = 0; \quad (13)$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial \eta} R(\xi, \eta; \xi_0, \eta_0) \right|_{\xi=\xi_0} - \frac{\beta}{\eta - \xi} R(\xi, \eta; \xi_0, \eta_0) \Big|_{\xi=\xi_0} = 0; \quad (14)$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial \xi_0} R(\xi, \eta; \xi_0, \eta_0) \right|_{\eta=\eta_0} - \frac{\beta}{\eta_0 - \xi_0} R(\xi, \eta; \xi_0, \eta_0) \Big|_{\eta=\eta_0} = 0; \quad (15)$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial \eta_0} R(\xi, \eta; \xi_0, \eta_0) \right|_{\xi=\xi_0} + \frac{\beta}{\eta_0 - \xi_0} R(\xi, \eta; \xi_0, \eta_0) \Big|_{\xi=\xi_0} = 0; \quad (16)$$

$$R(\xi_0, \eta_0; \xi_0, \eta_0) = 1. \quad (17)$$

Имеет место тождество

$$2RE_\lambda(W) - 2WE_\lambda^*(R) = 2RF(\xi, \eta) = \frac{\partial}{\partial \eta} M + \frac{\partial}{\partial \xi} N, \quad (18)$$

где

$$M = \left(\frac{\partial W}{\partial \xi} R - W \frac{\partial R}{\partial \xi} - \frac{2\beta}{\eta - \xi} WR \right), \quad N = \left(\frac{\partial W}{\partial \eta} R - W \frac{\partial R}{\partial \eta} + \frac{2\beta}{\eta - \xi} WR \right).$$

Проинтегрируем тождество (18) по треугольнику, ограниченному прямыми $\xi = \xi_0, \eta = \eta_0, \eta - \xi = \varepsilon, \varepsilon > 0$:

$$2 \int_{\xi_0}^{\eta_0 - \varepsilon} d\xi \int_{\xi + \varepsilon}^{\eta_0} F(\xi, \eta) R d\eta = \int_{\xi_0}^{\eta_0 - \varepsilon} d\xi \int_{\xi + \varepsilon}^{\eta_0} \frac{\partial}{\partial \eta} M d\eta + \int_{\xi_0 + \varepsilon}^{\eta_0} d\eta \int_{\xi_0}^{\eta - \varepsilon} \frac{\partial}{\partial \xi} N d\xi. \quad (19)$$

Вычислив внутренние интегралы, имеем

$$2 \int_{\xi_0}^{\eta_0 - \varepsilon} d\xi \int_{\xi + \varepsilon}^{\eta_0} F(\xi, \eta) R d\eta = \int_{\xi_0}^{\eta_0 - \varepsilon} M \Big|_{\eta=\xi+\varepsilon}^{\eta=\eta_0} d\xi + \int_{\xi_0 + \varepsilon}^{\eta_0} N \Big|_{\xi=\xi_0}^{\xi=\eta-\varepsilon} d\eta.$$

Отсюда, принимая во внимание свойства (13), (14) и (17), получим

$$\int_{\xi_0}^{\eta_0 - \varepsilon} M \Big|_{\eta=\xi+\varepsilon}^{\eta=\eta_0} d\xi = W(\eta_0 - \varepsilon, \eta_0) R(\eta_0 - \varepsilon, \eta_0; \xi_0, \eta_0) - W(\xi_0, \eta_0) - J_1, \quad (20)$$

$$\int_{\xi_0 + \varepsilon}^{\eta_0} N \Big|_{\xi=\xi_0}^{\xi=\eta-\varepsilon} d\eta = J_2 - W(\xi_0, \eta_0) + W(\xi_0, \xi_0 + \varepsilon) R(\xi_0, \xi_0 + \varepsilon; \xi_0, \eta_0), \quad (21)$$

где

$$J_1 = \int_{\xi_0}^{\eta_0 - \varepsilon} \left(\frac{\partial W}{\partial \xi} R - W \frac{\partial R}{\partial \xi} - \frac{2\beta}{\eta - \xi} WR \right) \Big|_{\eta=\xi+\varepsilon} d\xi, \quad (22)$$

$$J_2 = \int_{\xi_0 + \varepsilon}^{\eta_0} \left(\frac{\partial W}{\partial \eta} R - W \frac{\partial R}{\partial \eta} + \frac{2\beta}{\eta - \xi} WR \right) \Big|_{\xi=\eta-\varepsilon} d\eta. \quad (23)$$

Теперь, вычисляем

$$J_2 - J_1 = \int_{\xi_0}^{\eta_0 - \varepsilon} \left(\frac{\partial W}{\partial \eta} - \frac{\partial W}{\partial \xi} \right) R \Big|_{\eta=\xi+\varepsilon} d\xi + \int_{\xi_0}^{\eta_0 - \varepsilon} W \left(\frac{\partial R}{\partial \xi} - \frac{\partial R}{\partial \eta} + \frac{4\beta}{\eta - \xi} R \right) \Big|_{\eta=\xi+\varepsilon} d\xi. \quad (24)$$

Учитывая (11) и (12), имеем

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{\partial W}{\partial \eta} - \frac{\partial W}{\partial \xi} \right) R \Big|_{\eta=\xi+\varepsilon} = 0, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} W \left(\frac{\partial R}{\partial \xi} - \frac{\partial R}{\partial \eta} + \frac{4\beta}{\eta - \xi} R \right) \Big|_{\eta=\xi+\varepsilon} = 0.$$

Принимая во внимание (20)–(24), из формулы (19) в пределе при $\varepsilon \rightarrow 0$ получаем

$$W(\xi_0, \eta_0) = \int_{\xi_0}^{\eta_0} d\xi \int_{\xi}^{\eta_0} F(\xi, \eta) R(\xi, \eta; \xi_0, \eta_0) d\eta.$$

Возвращаясь к переменным x и y , получим

$$\omega(x, y) = \frac{1}{4} \int_{x-2\sqrt{-y}}^{x+2\sqrt{-y}} d\xi \int_{\xi}^{x+2\sqrt{-y}} f\left(\frac{\xi + \eta}{2}, -\frac{(\eta - \xi)^2}{16}\right) \times \\ \times R(\xi, \eta; x - 2\sqrt{-y}, x + 2\sqrt{-y}) d\eta. \quad (25)$$

ТЕОРЕМА 1. Если $f(x, y) = (-y)^\alpha f_1(x, y)$, $f_1(x, y) \in C^1(\bar{D})$, то функция (25) является единственным решением задачи (8), (9).

Доказательство. Сначала докажем, что функция (25) удовлетворяет уравнению (1). Для этого вычислим следующие производные:

$$\begin{aligned} \omega_{xx}(x, y) &= \frac{1}{2} f(x, y) + \\ &+ \frac{1}{4} \int_{x-2\sqrt{-y}}^{x+2\sqrt{-y}} \frac{\partial}{\partial x} f\left(\frac{x - 2\sqrt{-y} + \eta}{2}, -\frac{(\eta - x + 2\sqrt{-y})^2}{16}\right) \times \\ &\quad \times R(x - 2\sqrt{-y}, \eta; x - 2\sqrt{-y}, x + 2\sqrt{-y}) d\eta + \\ &+ \frac{1}{4} \int_{x-2\sqrt{-y}}^{x+2\sqrt{-y}} f\left(\frac{x - 2\sqrt{-y} + \eta}{2}, -\frac{(\eta - x + 2\sqrt{-y})^2}{16}\right) \times \\ &\quad \times \frac{\partial}{\partial x} R(x - 2\sqrt{-y}, \eta; x - 2\sqrt{-y}, x + 2\sqrt{-y}) d\eta - \\ &- \frac{1}{4} \int_{x-2\sqrt{-y}}^{x+2\sqrt{-y}} \frac{\partial}{\partial x} f\left(\frac{\xi + x + 2\sqrt{-y}}{2}, -\frac{(x + 2\sqrt{-y} - \xi)^2}{16}\right) \times \\ &\quad \times R(\xi, x + 2\sqrt{-y}; x - 2\sqrt{-y}, x + 2\sqrt{-y}) d\xi - \\ &- \frac{1}{4} \int_{x-2\sqrt{-y}}^{x+2\sqrt{-y}} f\left(\frac{\xi + x + 2\sqrt{-y}}{2}, -\frac{(x + 2\sqrt{-y} - \xi)^2}{16}\right) \times \\ &\quad \times \frac{\partial}{\partial x} R(\xi, x + 2\sqrt{-y}; x - 2\sqrt{-y}, x + 2\sqrt{-y}) d\xi - \\ &- \frac{1}{4} \int_{x-2\sqrt{-y}}^{x+2\sqrt{-y}} f\left(\frac{\xi + \eta}{2}, -\frac{(\eta - \xi)^2}{16}\right) \times \\ &\quad \times \frac{\partial}{\partial x} R(\xi, \eta; x - 2\sqrt{-y}, x + 2\sqrt{-y}) \Big|_{\xi=x-2\sqrt{-y}} d\eta - \\ &- \frac{1}{4} \int_{x-2\sqrt{-y}}^{x+2\sqrt{-y}} f\left(\frac{\xi + \eta}{2}, -\frac{(\eta - \xi)^2}{16}\right) \times \\ &\quad \times \frac{\partial}{\partial x} R(\xi, \eta; x - 2\sqrt{-y}, x + 2\sqrt{-y}) \Big|_{\eta=x+2\sqrt{-y}} d\xi - \\ &- \frac{1}{4} \int_{x-2\sqrt{-y}}^{x+2\sqrt{-y}} d\xi \int_{\xi}^{x+2\sqrt{-y}} f\left(\frac{\xi + \eta}{2}, -\frac{(\eta - \xi)^2}{16}\right) \times \end{aligned}$$

$$\times \frac{\partial^2}{\partial x^2} R(\xi, \eta; x - 2\sqrt{-y}, x + 2\sqrt{-y}) d\eta;$$

$$\begin{aligned} \omega_y(x, y) = & \frac{1}{4\sqrt{-y}} \int_{x-2\sqrt{-y}}^{x+2\sqrt{-y}} f\left(\frac{\xi + \eta}{2}, -\frac{(\eta - \xi)^2}{16}\right) \times \\ & \times R(\xi, \eta; x - 2\sqrt{-y}, x + 2\sqrt{-y}) \Big|_{\xi=x-2\sqrt{-y}} d\eta + \\ & + \frac{1}{4\sqrt{-y}} \int_{x-2\sqrt{-y}}^{x+2\sqrt{-y}} f\left(\frac{\xi + \eta}{2}, -\frac{(\eta - \xi)^2}{16}\right) \times \\ & \times R(\xi, \eta; x - 2\sqrt{-y}, x + 2\sqrt{-y}) \Big|_{\eta=x+2\sqrt{-y}} d\xi - \\ & - \frac{1}{4} \int_{x-2\sqrt{-y}}^{x+2\sqrt{-y}} d\xi \int_{\xi}^{x+2\sqrt{-y}} f\left(\frac{\xi + \eta}{2}, -\frac{(\eta - \xi)^2}{16}\right) \times \\ & \times \frac{\partial}{\partial y} R(\xi, \eta; x - 2\sqrt{-y}, x + 2\sqrt{-y}) d\eta. \quad (26) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \omega_{yy}(x, y) = & \frac{1}{8\sqrt{-y^3}} \int_{x-2\sqrt{-y}}^{x+2\sqrt{-y}} f\left(\frac{\xi + \eta}{2}, -\frac{(\eta - \xi)^2}{16}\right) \times \\ & \times R(\xi, \eta; x - 2\sqrt{-y}, x + 2\sqrt{-y}) \Big|_{\xi=x-2\sqrt{-y}} d\eta + \\ & + \frac{1}{2y} f(x, y) + \frac{1}{4\sqrt{-y}} \int_{x-2\sqrt{-y}}^{x+2\sqrt{-y}} \frac{\partial}{\partial y} f\left(\frac{x - 2\sqrt{-y} + \eta}{2}, -\frac{(\eta - x + 2\sqrt{-y})^2}{16}\right) \times \\ & \times R(x - 2\sqrt{-y}, \eta; x - 2\sqrt{-y}, x + 2\sqrt{-y}) d\eta + \\ & + \frac{1}{4\sqrt{-y}} \int_{x-2\sqrt{-y}}^{x+2\sqrt{-y}} f\left(\frac{x - 2\sqrt{-y} + \eta}{2}, -\frac{(\eta - x + 2\sqrt{-y})^2}{16}\right) \times \\ & \times \frac{\partial}{\partial y} R(x - 2\sqrt{-y}, \eta; x - 2\sqrt{-y}, x + 2\sqrt{-y}) d\eta + \\ & + \frac{1}{8\sqrt{-y^3}} \int_{x-2\sqrt{-y}}^{x+2\sqrt{-y}} f\left(\frac{\xi + \eta}{2}, -\frac{(\eta - \xi)^2}{16}\right) \times \\ & \times R(\xi, \eta; x - 2\sqrt{-y}, x + 2\sqrt{-y}) d\xi \Big|_{\eta=x+2\sqrt{-y}} + \\ & + \frac{1}{4\sqrt{-y}} \int_{x-2\sqrt{-y}}^{x+2\sqrt{-y}} \frac{\partial}{\partial y} f\left(\frac{\xi + x + 2\sqrt{-y}}{2}, -\frac{(x + 2\sqrt{-y} - \xi)^2}{16}\right) \times \\ & \times R(\xi, x + 2\sqrt{-y}; x - 2\sqrt{-y}, x + 2\sqrt{-y}) d\xi + \\ & + \frac{1}{4\sqrt{-y}} \int_{x-2\sqrt{-y}}^{x+2\sqrt{-y}} f\left(\frac{\xi + x + 2\sqrt{-y}}{2}, -\frac{(x + 2\sqrt{-y} - \xi)^2}{16}\right) \times \\ & \times \frac{\partial}{\partial y} R(\xi, x + 2\sqrt{-y}; x - 2\sqrt{-y}, x + 2\sqrt{-y}) d\xi + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{4\sqrt{-y}} \int_{x-2\sqrt{-y}}^{x+2\sqrt{-y}} f\left(\frac{\xi + \eta}{2}, -\frac{(\eta - \xi)^2}{16}\right) \times \\
 & \quad \times \frac{\partial}{\partial y} R(\xi, \eta; x - 2\sqrt{-y}, x + 2\sqrt{-y}) \Big|_{\xi=x-2\sqrt{-y}} d\eta + \\
 & + \frac{1}{4\sqrt{-y}} \int_{x-2\sqrt{-y}}^{x+2\sqrt{-y}} f\left(\frac{\xi + \eta}{2}, -\frac{(\eta - \xi)^2}{16}\right) \times \\
 & \quad \times \frac{\partial}{\partial y} R(\xi, \eta; x - 2\sqrt{-y}, x + 2\sqrt{-y}) \Big|_{\eta=x+2\sqrt{-y}} d\xi - \\
 & - \frac{1}{4} \int_{x-2\sqrt{-y}}^{x+2\sqrt{-y}} d\xi \int_{\xi}^{x+2\sqrt{-y}} f\left(\frac{\xi + \eta}{2}, -\frac{(\eta - \xi)^2}{16}\right) \times \\
 & \quad \times \frac{\partial^2}{\partial y^2} R(\xi, \eta; x - 2\sqrt{-y}, x + 2\sqrt{-y}) d\eta.
 \end{aligned}$$

Подставляя $\omega(x, y)$, $\omega_{xx}(x, y)$, $\omega_{yy}(x, y)$, $\omega_y(x, y)$ в $L_{\alpha, \lambda}(\omega)$, имеем

$$L_{\alpha, \lambda}(\omega) = \sum_{j=1}^6 p_j,$$

где $p_1 = f(x, y)$,

$$p_2 = \int_{x-2\sqrt{-y}}^{x+2\sqrt{-y}} f\left(\frac{\xi + \eta}{2}, -\frac{(\eta - \xi)^2}{16}\right) \frac{\partial}{\partial \eta_0} R(\xi, \eta; \xi_0, \eta_0) \Big|_{\xi=x-2\sqrt{-y}} d\eta,$$

$$p_3 = - \int_{x-2\sqrt{-y}}^{x+2\sqrt{-y}} f\left(\frac{\xi + \eta}{2}, -\frac{(\eta - \xi)^2}{16}\right) \frac{\partial}{\partial \xi_0} R(\xi, \eta; \xi_0, \eta_0) \Big|_{\eta=x+2\sqrt{-y}} d\xi,$$

$$p_4 = \frac{\beta}{\eta_0 - \xi_0} \int_{x-2\sqrt{-y}}^{x+2\sqrt{-y}} f\left(\frac{\xi + \eta}{2}, -\frac{(\eta - \xi)^2}{16}\right) R(\xi, \eta; \xi_0, \eta_0) \Big|_{\eta=x+2\sqrt{-y}} d\xi,$$

$$p_5 = \frac{\beta}{\eta_0 - \xi_0} \int_{x-2\sqrt{-y}}^{x+2\sqrt{-y}} f\left(\frac{\xi + \eta}{2}, -\frac{(\eta - \xi)^2}{16}\right) R(\xi, \eta; \xi_0, \eta_0) \Big|_{\xi=x-2\sqrt{-y}} d\eta,$$

$$\begin{aligned}
 p_6 = & - \int_{x-2\sqrt{-y}}^{x+2\sqrt{-y}} d\xi \int_{\xi}^{x+2\sqrt{-y}} f\left(\frac{\xi + \eta}{2}, -\frac{(\eta - \xi)^2}{16}\right) \times \\
 & \times \left[\frac{\partial^2}{\partial \xi_0 \partial \eta_0} + \frac{\beta}{\eta_0 - \xi_0} \left(\frac{\partial}{\partial \xi_0} - \frac{\partial}{\partial \eta_0} \right) - \frac{\lambda^2}{4} \right] R(\xi, \eta; \xi_0, \eta_0) d\eta, \\
 & \xi_0 = x - 2\sqrt{-y}, \quad \eta_0 = x + 2\sqrt{-y}.
 \end{aligned}$$

Принимая во внимание (15) и (16), имеем $p_3 + p_4 = 0$, $p_2 + p_5 = 0$, $p_6 = 0$. Из полученных равенств вытекает, что $L_{\alpha, \lambda}(\omega) = f(x, y)$. Теперь проверим, удовлетворяет ли функция $\omega(x, y)$ первому из условий (2). Для этого запишем $\omega(x, y)$ в виде

$$\omega(x, y) = 4y \int_0^1 (1-t) dt \times$$

$$\begin{aligned} & \times \int_0^1 f(x - 2\sqrt{-y} + 4\sqrt{-y}t + 2\sqrt{-y}(1-t)z, y(1-t)^2z^2) \times \\ & \times R(\xi_0 + 4\sqrt{-y}t, \xi_0 + 4\sqrt{-y}(t + (1-t)z); \xi_0, \eta_0) dz. \end{aligned}$$

Отсюда $\omega(x, 0) = 0$. Проверим, удовлетворяет ли функция $\omega(x, y)$ второму из условий (2). Для этого запишем функцию (26) в виде

$$\begin{aligned} \omega_y(x, y) &= \int_0^1 f(x - 2\sqrt{-y}(1-s), ys^2)R(\xi_0, \xi_0 + 4\sqrt{-y}s; \xi_0, \eta_0)ds + \\ &+ \int_0^1 f(x + 2\sqrt{-y}s, y(1-s)^2)R(\xi_0 + 4\sqrt{-y}s, \eta_0; \xi_0, \eta_0)ds - \\ &- \int_0^1 (1-t)dt \int_0^1 f(\xi_0 + 4\sqrt{-y}t + 2\sqrt{-y}(1-t)s, y(1-t)^2s^2)G(\xi_0, \eta_0; t, s)ds, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} G(\xi_0, \eta_0; t, s) &= \frac{\beta(1-t)^\beta s^{2\beta}}{[t + (1-t)s]^\beta} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\rho^k}{(k!)^2} F(\beta, \beta + k; 1 + k; \theta) + \\ &+ \frac{4\lambda^2(1-t)^{\beta+1} s^{2\beta}(1-s)y}{[t + (1-t)s]^\beta} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k\rho^{k-1}}{(k!)^2} F(\beta, \beta + k; 1 + k; \theta) - \\ &- \frac{(1-t)^{\beta+1} s^{2\beta+1}(1-s)}{[t + (1-t)s]^{\beta+2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\beta(\beta+1)\rho^k}{(k!)^2(k+1)} F(1 + \beta, 1 + \beta + k; 2 + k; \theta) + \\ &+ \frac{\beta(1-t)^{\beta-1} s^{2\beta}}{[t + (1-t)s]^\beta} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\rho^k}{(k!)^2} F(\beta, \beta + k; 1 + k; \theta) + \\ &+ \frac{4y\lambda^2(1-t)^\beta s^{2\beta}t}{[t + (1-t)s]^{\beta+1}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k\rho^{k-1}}{(k!)^2} F(\beta, \beta + k; 1 + k; \theta) + \\ &+ \frac{64y\sqrt{-y}(1-t)^{\beta+1} s^{2\beta+1}t}{[t + (1-t)s]^{\beta+1}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\beta(\beta+k)\rho^k}{(k!)^2(1+k)} F(1 + \beta, 1 + \beta + k; 2 + k; \theta), \end{aligned}$$

$\rho = -4\lambda^2(1-t)sty$, $\theta = t(1-s)/[t + (1-t)s]$. Отсюда из условий $f(x, y) = (-y)^\alpha f_1(x, y)$, $f_1(x, y) \in C^1(D)$ легко вытекает, что

$$\lim_{y \rightarrow -0} (-y)^\alpha (\partial/\partial y)\omega(x, y) = 0.$$

Единственность решения задачи (8), (9) следует из метода получения решения (25). □

Подставляя (7) и (25) в (6), имеем

$$\begin{aligned} u(x, y) &= A_\alpha^-(\tau, \lambda) - \\ &- \gamma_1(-y)^{1-\alpha} \int_0^1 \nu(x - 2\sqrt{-y}(1-2z))[z(1-z)]^{-\beta} \bar{J}_{-\beta}(4\lambda\sqrt{-yz(-z)})dz + \end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{4} \int_{x-2\sqrt{-y}}^{x+2\sqrt{-y}} d\xi \int_{\xi}^{x+2\sqrt{-y}} f\left(\frac{\xi + \eta}{2}, -\frac{(\eta - \xi)^2}{16}\right) \times \\ \times R(\xi, \eta; x - 2\sqrt{-y}, x + 2\sqrt{-y}) d\eta. \quad (27)$$

Таким образом, мы доказали следующие теоремы.

ТЕОРЕМА 2. Если $\tau(x) \in C^{2(n+1)}[0, 1]$, $\nu(x) \in C^2[0, 1]$ и $f(x, y) = (-y)^{1-\alpha} \times f_1(x, y)$, $f_1(x, y) \in C^1(\bar{D})$, то функция $v(x, y)$, определяемая формулой (27), является решением задачи (1), (2) при $\alpha \neq -n$, $\alpha \neq 1/2 - n$, $n = 0, 1, 2, \dots$, $\alpha < 1$, где $A_{\alpha}^{-}(\tau, \lambda)$ — определяется по (3).

ТЕОРЕМА 3. Если $\tau(x) \in C^{2(n+2)}[0, 1]$, $\nu(x) \in C^2[0, 1]$ и $f(x, y) = (-y)^{1-\alpha} \times f_1(x, y)$, $f_1(x, y) \in C^1(\bar{D})$, то функция $u(x, y)$, определяемая формулой (27), является решением задачи (1), (2) при $\alpha = 1/2 - n$, $n = 0, 1, 2, \dots$, где $A_{\alpha}^{-}(\tau, \lambda)$ — определяется по (4).

ТЕОРЕМА 4. Если $\tau(x) \in C^{2(n+2)}[0, 1]$, $\nu(x) \in C^2[0, 1]$ и $f(x, y) = (-y)^{1-\alpha} \times f_1(x, y)$, $f_1(x, y) \in C^1(\bar{D})$, то функция $u(x, y)$, определяемая формулой (27), является решением задачи (1), (2) при $\alpha = -n$, $n = 0, 1, 2, \dots$, где $A_{\alpha}^{-}(\tau, \lambda)$ — определяется по (5).

Заключение. Полученное решение рассматриваемой задачи позволяет исследовать различные задачи для уравнений смешанного типа, включающие в себя уравнение (1).

Конкурирующие интересы. Заявляем, что в отношении авторства и публикации этой статьи конфликта интересов не имеем.

Авторская ответственность. Все авторы принимали участие в разработке концепции статьи и в написании рукописи. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

Финансирование. Исследование выполнялось без финансирования.

Библиографический список

1. Бицадзе А. В. *Уравнение смешанного типа*. М.: АН СССР, 1959. 155 с.
2. Терсенов С. А. К теории гиперболических уравнений с данными на линии вырождения типа // *Сиб. матем. журн.*, 1961. Т. 2, № 6. С. 913–935.
3. Елеев В. А. О некоторых задачах типа задачи Коши и задачи со смещением для одного вырождающегося гиперболического уравнения // *Диффер. уравн.*, 1976. Т. 12, № 1. С. 46–58.
4. Хайруллин Р. С. *Задача Трикоми для уравнения второго рода с сильным вырождением*. Казань: Казан. ун-т, 2015. 236 с. EDN: UWLDMB.
5. Мамадалиев Н. К. О представлении решения видоизменной задачи Коши // *Сиб. матем. журн.*, 2000. Т. 41, № 5. С. 1087–1097.
6. Салахитдинов М. С., Исамухамедов С. С. Краевые задачи для уравнения смешанного типа второго рода // *Сердика Бълг. матем. спис.*, 1977. Т. 3. С. 181–188. <http://www.math.bas.bg/serdica/1977/1977-181-188.pdf>.
7. Сабитов К. Б., Сулейманова А. Х. Задача Дирихле для уравнения смешанного типа с характеристическим вырождением в прямоугольной области // *Изв. вузов. Матем.*, 2009. № 11. С. 43–52. EDN: KVQCZZ.

8. Сабитов К. Б., Сулейманова А. Х. Задача Дирихле для уравнения смешанного типа второго рода в прямоугольной области // *Изв. вузов. Матем.*, 2007. №4. С. 45–53. EDN: JJSQRP.
9. Yuldashev T. K., Islomov B. I., Abdullaev A. A. On Solvability of a Poincare–Tricomi type problem for an elliptic–hyperbolic equation of the second kind // *Lobachevskii J. Math.*, 2021. vol. 42, no. 3. pp. 663–675. EDN: XNSEAX. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1995080221030239>.
10. Уринов А. К., Усмонов Д. А. Начально-граничная задача для гиперболического уравнения второго рода с тремя линиями вырождения // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2022. Т. 26, №4. С. 672–693. EDN: D1OYZF. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1962>.
11. Urinov A. K., Okboev A. B. Nonlocal boundary-value problem for a parabolic-hyperbolic equation of the second kind // *Lobachevskii J. Math.*, 2020. vol. 41, no. 9. pp. 1886–1897. EDN: GDVCS. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1995080220090280>.
12. Okboev A. B. Tricomi problem for second kind parabolic hyperbolic type equation // *Lobachevskii J. Math.*, 2020. vol. 41, no. 1. pp. 58–70. EDN: BCPUBY. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1995080220010096>.
13. Cibrario M. Intorno ad una equazione lineare alle derivate parziali delsecondo ordine di tipo misto iperbolico-ellittica // *Ann. Scuola Normale Sup. di Pisa, Ser. 2*, 1934. vol. 3, no. 3–4. pp. 255–285. <http://eudml.org/doc/82880>.
14. Кароль И. Л. К теории уравнений смешанного типа // *Докл. АН СССР*, 1953. Т. 88, №3. С. 397–400.
15. Reyn J. W. Solutions in the hyperbolic region of an equation, which approximates Chaplygin’s equation near the vacuum line // *J. Math. Phys.*, 1967. vol. 46, no. 1–4. pp. 28–42. DOI: <https://doi.org/10.1002/sapm196746128>.
16. Крикунов Ю. М. Видоизмененная задача Трикоми для уравнения $u_{xx} + u_{yy} + (-n + 1/2)u_y = 0$ // *Изв. вузов. Матем.*, 1979. №9. С. 21–28.
17. Капилевич М. Б. Об одном уравнении смешанного эллиптико-гиперболического типа // *Матем. сб.*, 1952. Т. 30, №1. С. 11–38.
18. Тихонов А. Н., Самарский А. А. *Уравнения математической физики*. М.: Наука, 1966. 724 с.
19. Евдокимов Ф. Ф. Задача Коши для уравнения $u_{xx} - (-y)^m u_{yy} - \lambda^2 u = 0$ // *Диффер. уравн. Тр. пединституттов РСФСР*, Вып. 12. Рязань, 1978. С. 45–50.
20. Уринов А. К., Окбоев А. Б. Видоизмененная задача Коши для одного вырождающегося гиперболического уравнения второго рода // *Укр. мат. ж.*, 2020. Т. 72, №1. С. 100–118.
21. Urinov A. K., Okboev A. B. On a Cauchy type problem for a second kind degenerating hyperbolic equation // *Lobachevskii J. Math.*, 2022. vol. 43, no. 3. pp. 793–803. EDN: QPEVQB. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1995080222060324>.
22. Капилевич М. Б. О конфлюэнтных гипергеометрических функциях Горна // *Диффер. уравн.*, 1966. Т. 2, №9. С. 1239–1254.

MSC: 35L15, 35L80

A modified Cauchy problem for an inhomogeneous equation of degenerate hyperbolic type of the second kind

A. K. Urinov^{1,2}, *A. B. Okboev*²¹ Fergana State University,
19, Murabbiylar st., Ferghana, 150100, Uzbekistan.² V.I. Romanovskiy Institute of Mathematics
of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan,
46, University st., Tashkent, 100174, Uzbekistan.

Abstract

In this study, a modified Cauchy problem was examined for an inhomogeneous equation of degenerate hyperbolic type of the second kind in a characteristic triangle. It is known that degenerate hyperbolic equations have a singularity, meaning that the well-posedness of the Cauchy problem with initial data on the line of parabolic degeneracy does not always hold for them. Therefore, in such cases, it is necessary to consider the problem with initial conditions in a modified form.

In present paper, modified Cauchy problems with initial conditions were formulated on the line of parabolic degeneracy for an inhomogeneous equation of degenerate hyperbolic type of the second kind. The considered problem is reduced to a modified Cauchy problem for a homogeneous equation and to a Cauchy problem for an inhomogeneous equation with zero initial conditions. The solutions of the modified Cauchy problem for a homogeneous equation are derived from the general solution of the considered equation. The explicit solutions of the modified Cauchy problem with homogeneous conditions for the inhomogeneous equation are found using the Riemann method.

It is proven that the discovered solutions indeed satisfy the equation and the initial conditions.

Keywords: degenerate equation of hyperbolic type, modified Cauchy problem, existence and uniqueness of solution, Riemann function.

Received: 16th May, 2023 / Revised: 7th July, 2023 /

Accepted: 19th September, 2023 / First online: 3rd June, 2024

Differential Equations and Mathematical Physics

Research Article

© Authors, 2024

© Samara State Technical University, 2024 (Compilation, Design, and Layout)

 The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Please cite this article in press as:

Urinov A. K., Okboev A. B. A modified Cauchy problem for an inhomogeneous equation of degenerate hyperbolic type of the second kind, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2024, vol. 28, no. 1, pp. 45–58. EDN: WZQYTV. DOI: 10.14498/vsgtu2024 (In Russian).

Authors' Details:

Akhmadjon K. Urinov  <https://orcid.org/0000-0002-9586-1799>

Dr. Phys. & Math. Sci., Professor; Head of Department; Dept. of Mathematical Analysis and Differential Equations¹; Leading Researcher²; e-mail: urinovak@mail.ru

Akmaljon B. Okboev  <https://orcid.org/0000-0000-0000-xxxx>

PhD (Phys. & Math. Sci.); Senior Researcher²; e-mail: akmaljon12012@gmail.com

Competing interests. The authors declare that they have no competing interests.

Authors' contributions and responsibilities. All authors participated in the development of the article's concept and in writing the manuscript. The authors bear full responsibility for providing the final manuscript for publication. The final version of the manuscript was approved by all authors.

Funding. The research was conducted without funding.

References

1. Bitsadze A. V. *Equations of the Mixed Type*. Oxford, Pergamon, 1964, xiii+160 pp. DOI: <https://doi.org/10.1016/C2013-0-01727-6>.
2. Tersenov S. A. On the theory of hyperbolic equations with given degeneracy type on lines, *Sibirsk. Mat. Zh.*, 1961, vol. 2, no. 6, pp. 913–935 (In Russian).
3. Eleev V. A. Some problems of the type of the Cauchy problem and problems with a shift for a certain degenerate hyperbolic equation, *Differ. Uravn.*, 1976, vol. 12, no. 1, pp. 46–58 (In Russian).
4. Khayrullin R. S. *Zadacha Triкоми dlia uravneniia vtorogo roda s sil'nym vyrozhdeniem* [Tricomi Problem for an Equation of the Second Kind with Strong Degeneracy]. Kazan, Kazan. Univ., 2015, 236 pp. (In Russian). EDN: UWLDMB.
5. Mamadaliev N. K. On representation of a solution to a modified Cauchy problem, *Sib. Math. J.*, 2000, vol. 41, no. 5, pp. 889–899. EDN: JFHUB. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF02674745>.
6. Salakhitdinov M. S., Isamukhamedov S. S. Boundary value problems for a mixed type equation of the second kind, *Serdica Bulg. Math. Publ.*, 1977, vol. 3, pp. 181–188 (In Russian). <http://www.math.bas.bg/serdica/1977/1977-181-188.pdf>.
7. Sabitov K. B., Suleimanova A. Kh. The Dirichlet problem for a mixed-type equation with characteristic degeneration in a rectangular domain, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2009, vol. 53, no. 11, pp. 37–45. DOI: <https://doi.org/10.3103/S1066369X0911005X>.
8. Sabitov K. B., Suleimanova A. Kh. The Dirichlet problem for a mixed-type equation with characteristic degeneration in a rectangular domain, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2007, vol. 51, no. 4, pp. 42–50. DOI: <https://doi.org/10.3103/S1066369X07040068>.
9. Yuldashev T. K., Islomov B. I., Abdullaev A. A. On Solvability of a Poincaré–Tricomi type problem for an elliptic–hyperbolic equation of the second kind, *Lobachevskii J. Math.*, 2021, vol. 42, no. 3, pp. 663–675. EDN: XNSEAX. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1995080221030239>.
10. Urinov A. K., Usmonov D. A. An initial-boundary problem for a hyperbolic equation with three lines of degenerating of the second kind, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2022, vol. 26, no. 4, pp. 672–693 (In Russian). EDN: DIOYZF. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1962>.
11. Urinov A. K., Okboev A. B. Nonlocal boundary-value problem for a parabolic-hyperbolic equation of the second kind, *Lobachevskii J. Math.*, 2020, vol. 41, no. 9, pp. 1886–1897. EDN: GDVCS. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1995080220090280>.
12. Okboev A. B. Tricomi problem for second kind parabolic hyperbolic type equation, *Lobachevskii J. Math.*, 2020, vol. 41, no. 1, pp. 58–70. EDN: BCPUBY. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1995080220010096>.
13. Cibrario M. Intorno ad una equazione lineare alle derivate parziali delsecondo ordine di tipo misto iperbolico-ellittica, *Ann. Scuola Normale Sup. di Pisa, Ser. 2*, 1934, vol. 3, no. 3–4, pp. 255–285. <http://eudml.org/doc/82880>.
14. Karol' I. L. On the theory of equations of mixed type, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1953, vol. 88, no. 3, pp. 397–400 (In Russian).
15. Reyn J. W. Solutions in the hyperbolic region of an equation, which approximates Chaplygin's equation near the vacuum line, *J. Math. Phys.*, 1967, vol. 46, no. 1–4, pp. 28–42. DOI: <https://doi.org/10.1002/sapm196746128>.

16. Krikunov Yu. M. The modified Tricomi problem for the equation $u_{xx} + yu_{yy} + (-n+1/2)u_y = 0$, *Soviet Math. (Iz. VUZ)*, 1979, vol. 9, no. 208, pp. 20–27 (In Russian).
17. Kapilevich M. B. On an equation of mixed elliptic-hyperbolic type, *Mat. Sb.*, 1952, vol. 30, no. 1, pp. 11–38 (In Russian).
18. Tikhonov A. N., Samarskii A. A. *Uravneniia matematicheskoi fiziki* [Equations of Mathematical Physics]. Moscow, Nauka, 1969, 724 pp.
19. Evdokimov F. F. Cauchy problem for the equation $u_{xx} - (-y)^m u_{yy} - \lambda^2 u = 0$, In: *Differ. Uravn. Tr. Pedinstitutov RSFSR*, Iss. 12. Ryazan, 1978, pp. 45–50 (In Russian).
20. Urinov A. K., Okboev A. B. Modified Cauchy problem for one degenerated hyperbolic equation of the second kind, *Ukr. Math. J.*, 2020, vol. 72, no. 1, pp. 114–135. EDN: XDI0GV. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11253-020-01766-1>.
21. Urinov A. K., Okboev A. B. On a Cauchy type problem for a second kind degenerating hyperbolic equation, *Lobachevskii J. Math.*, 2022, vol. 43, no. 3, pp. 793–803. EDN: QPEVQB. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1995080222060324>.
22. Kapilevich M. B. Confluent hypergeometric Horn functions, *Differ. Uravn.*, 1966, vol. 2, no. 9, pp. 1239–1254 (In Russian).

MSC: 74B05



Construction of elastic fields in the problem from the action of body forces of a cyclic nature

D. A. Ivanychev¹, E. Yu. Levina²

¹ Lipetsk State Technical University,
30, Moskovskaya st., Lipetsk 398055, Russian Federation.

² Bauman Moscow State Technical University,
5, 2-ya Baumanskaya st., Moscow 105005, Russian Federation.

Abstract

The paper presents a method for determining the stress-strain state of transversely isotropic bodies of revolution under the action of non-axisymmetric stationary volumetric forces. This problem involves the use of boundary state method definitions. The basis of the space of internal states is formed using fundamental polynomials. The polynomial is placed in any position of the displacement vector of the plane auxiliary state, and the spatial state is determined by the transition formulae. The set of such states forms a finite-dimensional basis according to which, after orthogonalization, the desired state is expanded into Fourier series with the same coefficients. Series coefficients are scalar products of vectors of given and basic volumetric forces. Finally, the search for an elastic state is reduced to solving quadratures.

The solutions of problems of the theory of elasticity for a transversely isotropic circular cylinder from the action of volumetric forces given by various cyclic laws (sine and cosine) are analyzed. Recommendations are given for constructing the basis of internal states depending on the form of the function of given volumetric forces. The analysis of the series convergence and the estimation of the solution accuracy in graphical form are given.

Keywords: boundary state method, transversely isotropic materials, body forces, state space, non-axisymmetric deformation.

Received: 12th September, 2023 / Revised: 16th February, 2024 /

Accepted: 4th March, 2024 / First online: 20th June, 2024

Mechanics of Solids

Research Article

© Authors, 2024

© Samara State Technical University, 2024 (Compilation, Design, and Layout)

© The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Please cite this article in press as:

Ivanychev D. A., Levina E. Yu. Construction of elastic fields in the problem from the action of body forces of a cyclic nature, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2024, vol. 28, no. 1, pp. 59–72. EDN: IVANRN. DOI: 10.14498/vsgtu2064.

Authors' Details:

Dmitry A. Ivanychev  <https://orcid.org/0000-0002-7736-9311>

Cand. Phys. & Math. Sci.; Associate Professor; Institute of Mechanical Engineering and Transport; e-mail: lsivdmal@mail.ru

Ekaterina Yu. Levina  <https://orcid.org/0000-0001-6193-9036>

Cand. Techn. Sci.; Associate Professor; Faculty of Basic Sciences; e-mail: hensi-1@yandex.ru

1. Introduction. The development of existing and the creation of new methods for calculating the stress-strain state of bodies made of materials with complex structure and rheology, for the most part, relies on a general or fundamental solution of a particular problem of elasticity theory. S.G. Lekhnitsky, A.Ya. Alexandrov, Yu.I. Soloviev, A.S. Kosmodamiansky made a fundamental contribution to the creation of general solutions for an anisotropic medium, etc. However, these solutions were developed in the last century. Naturally, modern scientists have obtained solutions to particular problems that can be used to build mathematical models based on various methods of mechanics. This is especially true of analytical or numerical-analytical methods, which allow obtaining a solution as a function of several variables (coordinates, time, temperatures, etc.). The development of analytical methods has recently prevailed over numerical methods, where the result of the solution is a table of values of a particular quantity in the entire (and sometimes not in the entire) area of the body.

In the field of implementation of various methods for analyzing the stress-strain state of elastostatic solids, taking into account the influence of body forces, the following works can be distinguished. In [1], an isotropic elastic body bounded by concentric spheres and subjected to axisymmetric unsteady body forces was studied. In [2, 3], using expansions of the displacement vector components into series in terms of the circumferential and radial coordinates, analytical solutions were obtained for the equilibrium problems of thick-walled transversally isotropic composite spheres and those under the action of internal pressure and body forces. In [4], forced deformations arising from the effects of surface and bulk forces were studied. In [5], in addition to the two complex Kolosov–Muskhelishvili potentials, a third potential was proposed that takes into account the influence of body forces. Analytical solutions of some problems of plane deformation are given. The work [6] is devoted to the development of the orthogonal projection method. Problems of the theory of elasticity with the participation of body and surface forces in the functional energy spaces of stress and strain tensors were studied.

In [7, 8], the method for determining the stress-strain state of isotropic elastic bodies from the action of body forces of a non-potential nature is reduced.

For transversally isotropic bodies bounded by coaxial surfaces of revolution by means of the method of boundary states, the first main [9] and the second main [10] problems of the theory of elasticity are solved with simultaneous action of body forces on the body. By an identical method, the contact problem was solved [11].

Works [12, 13] are devoted to the determination of elastic fields from the action of axisymmetric body forces on a transtropic bounded body of revolution, together with the action of surface forces and a steady temperature field.

The purpose of this work is to develop the analytical method for determining the stress-strain state, proposed in [7], for the class of transversally isotropic bodies of revolution and under the action of body forces specified by the cyclic law. Body forces are non-axisymmetric in nature and depend on three cylindrical coordinates.

2. Problem Statement. We consider the elastic equilibrium of a transversally isotropic body bounded by one or more coaxial surfaces of revolution (Fig. 1) under the action of non-axisymmetric body forces $\mathbf{X} = \{R, Q, Z\}$ given by the cyclic law. The axis of anisotropy of a transtropic body coincides with the geometric axis of rotation z .

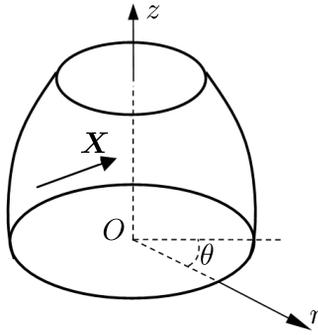


Figure 1. The transversely isotropic body of revolution

The task is to determine the stress-strain state that occurs in the body under the action of body forces.

3. Constitutive Relations of the Theory of Elasticity. In the general case of deformation of a transversally isotropic body in a cylindrical coordinate system, the following relations take place.

Differential equilibrium equation [14]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau_{zr}}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + R &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{zr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{z\theta}}{\partial \theta} + \frac{\tau_{zr}}{r} + Z &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{z\theta}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + 2 \frac{\tau_{r\theta}}{r} + Q &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

where R, Z, Q — mass forces.

The Cauchy relations [14]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{r}, \\ \gamma_{zr} &= \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z}, \quad \gamma_{r\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r}, \quad \gamma_{z\theta} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta}. \end{aligned} \quad (2)$$

Deformation compatibility equations [15]:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varepsilon_\theta}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varepsilon_{rr}}{\partial \theta^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \varepsilon_r}{\partial r} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varepsilon_{r\theta}}{\partial \theta} \right) &= 0, \\ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varepsilon_{z\theta}}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varepsilon_{r\theta}}{\partial \theta \partial z} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varepsilon_{zr}}{\partial \theta^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varepsilon_{\theta\theta}}{\partial z} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial \varepsilon_{rr}}{\partial z} &= 0, \\ -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial (r \varepsilon_{z\theta})}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varepsilon_{r\theta}}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \varepsilon_{zr}}{\partial \theta} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varepsilon_{rr}}{\partial \theta \partial z} &= 0, \\ \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varepsilon_{zz}}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{\theta\theta}}{\partial z^2} - \frac{2}{r} \frac{\partial^2 \varepsilon_{z\theta}}{\partial \theta \partial z} - \frac{2}{r} \frac{\partial \varepsilon_{zr}}{\partial z} &= 0, \\ \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varepsilon_{zr}}{\partial \theta \partial z} + r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \varepsilon_{z\theta}}{\partial z} \right) - \frac{\partial^2 \varepsilon_{r\theta}}{\partial z^2} - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \varepsilon_{zz}}{\partial \theta} \right) &= 0, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{rr}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial r^2} - 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{zr}}{\partial r \partial z} = 0.$$

The generalized Hooke's law [14]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_z &= \frac{1}{E_z} [\sigma_z - \nu_z (\sigma_r + \sigma_\theta)], & \varepsilon_r &= \frac{1}{E_r} (\sigma_r - \nu_r \sigma_\theta) - \frac{\nu_z}{E_z} \sigma_z, \\ \varepsilon_\theta &= \frac{1}{E_r} (\sigma_\theta - \nu_r \sigma_r) - \frac{\nu_z}{E_z} \sigma_z, \\ \gamma_{zr} &= \frac{1}{G_z} \tau_{zr}, & \gamma_{z\theta} &= \frac{1}{G_z} \tau_{z\theta}, & \gamma_{r\theta} &= \frac{1}{G_r} \tau_{r\theta} = \frac{2(1 + \nu_r)}{E_r} \tau_{r\theta}. \end{aligned} \quad (4)$$

Here u , v , w are the displacement vector components along the x , y , z axes, respectively; ε_r , ε_θ , ε_z , $\gamma_{r\theta}$, γ_{zr} , $\gamma_{z\theta}$ are strain tensor components; σ_r , σ_θ , σ_z , $\tau_{r\theta}$, τ_{zr} , $\tau_{z\theta}$ are stress tensor components; R , Q , Z are the components of the body force vector \mathbf{X} along the corresponding axes; E_z and E_r are the elastic modules in the z -axis direction and in the isotropy plane, respectively; ν_z — Poisson's ratio, which characterizes compression along the r axis during tension along the z axis; ν_r — Poisson's ratio characterizing the transverse compression in the plane of isotropy during tension in the same plane; G_r and G_z are the shear modules in the plane of isotropy and perpendicular to it.

4. General Solution of the Elastostatics Problem. In [14], the method of integral overlays established the dependence between the spatial stress-strain state of an elastic transversely isotropic body of revolution and some auxiliary two-dimensional states, the components of which depend on two coordinates z and y (variables). The axis is perpendicular to the zy plane. As plane auxiliary states, we use the plane deformation $\mathbf{u}^{pl} = \{u_y^{pl}, u_\eta^{pl}, u_z^{pl}\}$ that occurs in infinite cylinders having at each point a plane of elastic symmetry parallel to the zy plane (direction η).

The transition to the spatial state in cylindrical coordinates is carried out according to the dependencies:

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^\pi (u_y^{pl} + u_\eta^{pl}) \cos[(n-1)\beta] d\beta + \int_0^\pi (u_y^{pl} - u_\eta^{pl}) \cos[(n+1)\beta] d\beta \right), \\ v_n &= \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^\pi (u_y^{pl} + u_\eta^{pl}) \cos[(n-1)\beta] d\beta - \int_0^\pi (u_y^{pl} - u_\eta^{pl}) \cos[(n+1)\beta] d\beta \right), \quad (5) \\ w_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi u_z^{pl} \cos(n\beta) d\beta, & y &= r \cos(\beta); \\ u &= \sum_{n=a}^b [u_n \cos(n\theta) + v_n \sin(n\theta)], \\ v &= \sum_{n=a}^b [-v_n \sin(n\theta) + u_n \cos(n\theta)], \quad (6) \end{aligned}$$

$$w = \sum_{n=a}^b [w_n \cos(n\theta) + w_n \sin(n\theta)], \quad a = 0, \quad b = \infty.$$

Deformations are calculated through the Cauchy relations (2) and are checked for consistency by relations (3). Stresses are determined through Hooke's law (4), and body forces from equilibrium equations (1).

5. Solution Method. The determination of the elastic state of an anisotropic body is carried out by means similar to the means of the boundary state method [16]. The following sets are accepted as a basis in the space of internal states Ξ :

$$\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_k, \dots\}, \quad \xi_k = \{u_i^{(k)}, \varepsilon_{ij}^{(k)}, \sigma_{ij}^{(k)}, X_i^{(k)}\}.$$

The papers [12, 13] are devoted to a method for determining the stress-strain state of isotropic bodies from the action of non-conservative continuous body forces. Here we use the same approach.

To construct the displacement field for the body from the action of body forces for planar auxiliary states, the fundamental system of polynomials $y^\alpha z^\beta$ is used, which can be placed in any position of the displacement vector $\mathbf{u}^{pl}(y, z)$, forming some admissible elastic state:

$$\mathbf{u}^{pl} = \begin{Bmatrix} u_y^{pl} \\ u_\eta^{pl} \\ u_z^{pl} \end{Bmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} y^\alpha z^\beta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ y^\alpha z^\beta \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ y^\alpha z^\beta \end{pmatrix} \right\}.$$

Further, according to (5) and (6), the components of the displacement vector $\mathbf{u}(r, \theta, z)$ of the spatial state are determined, and the corresponding tensors of strains, stresses, and body forces are determined along the chain (2), (4), (1).

By enumeration of all possible options within $\alpha + \beta \leq n$, ($n = 1, 2, 3, \dots$), one can obtain a set of states and form a finite-dimensional basis that allows one to expand an arbitrary vector of continuous body forces in a Fourier series in its elements as the number n increases to infinity.

After constructing the basis of states, its orthonormalization is carried out using the recursive-matrix orthogonalization algorithm [17]. The algorithm uses the Gram-Schmidt orthogonalization process in which cross dot products are calculated by the formula (for example, for the 1st and 2nd states):

$$(\mathbf{X}^{(1)}, \mathbf{X}^{(2)}) = \int_V \mathbf{X}^{(1)} \cdot \mathbf{X}^{(2)} dV;$$

$$\mathbf{X}^{(k)} = X_i^{(k)} = \{R^{(k)}(r, \theta, z), Q^{(k)}(r, \theta, z), Z^{(k)}(r, \theta, z)\}.$$

Any continuous vector of body forces can be represented as a Fourier series of an orthonormal basis decomposed into elements:

$$\mathbf{X} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \mathbf{X}^{(k)}, \quad c_k = (\mathbf{X}, \mathbf{X}^{(k)}), \quad (7)$$

where $\mathbf{X} = \{R, Q, Z\}$ are given body forces.

Each basis vector $\mathbf{X}^{(k)}$ corresponds to the displacement vector and strain and stress tensors, which together form an internal state from the action of body forces

$$\xi_0 = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \xi_k$$

or in expanded form:

$$u_i = \sum_{k=1}^{\infty} c_k u_i^{(k)}, \quad \varepsilon_{ij} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \varepsilon_{ij}^{(k)}, \quad \sigma_{ij} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sigma_{ij}^{(k)}, \quad X_i = \sum_{k=1}^{\infty} c_k X_i^{(k)}. \quad (8)$$

6. Solving Problem. Let us study the elastic equilibrium of a transversally isotropic circular cylinder made of large dark gray siltstone rock [18]. After the procedure of non-dimensionalization of the parameters of the problem, the analogy of which is presented in [19], the elastic characteristics of the material were $E_z = 6.21$, $E_r = 5.68$, $G_r = 2.29$, $G_z = 2.55$, $\nu_z = 0.22$, $\nu_r = 0.24$ and the cylinder occupies area $V = \{(z, r) \mid 0 \leq r \leq 1, -1 \leq z \leq 1\}$.

To solve the problem, when all three components of a given vector of body forces are not equal to zero, a rather large “segment” of the basis of internal states is required. In this case, it is advisable to use the principle of independence of the action of forces and solve three separate problems, each of which is given $\mathbf{X} = \{R, 0, 0\}$, $\mathbf{X} = \{0, Q, 0\}$, $\mathbf{X} = \{0, 0, Z\}$, and add the resulting elastic fields.

In the practical implementation of the technique for solving problems and testing it for various types of functions of given body forces, it turned out that not for any type of functions of body forces there is a solution. The possibility of obtaining a rigorous or approximate solution depends on the method of forming the basis.

When constructing the basis of internal states, it is necessary to strive for the greatest simplicity of the form of functions that describe the components of the elastic field. Therefore, let us first consider the basis formed from the left parts of expressions (6) and summation thresholds $a = 0$, $b = 1$:

$$u = \sum_{n=a}^b [u_n \cos(n\theta)], \quad v = \sum_{n=a}^b [-v_n \sin(n\theta)], \quad w = \sum_{n=a}^b [w_n \cos(n\theta)]. \quad (9)$$

In this case, the problem will be solved if the given body forces R , Q , Z contain trigonometric functions $\cos \theta$, $\sin \theta$, $\cos \theta$, respectively, for example:

$$R = r^m z^k (1 - p \cos \theta), \quad m, k \in \mathbb{N}; \quad p \in \mathbb{Z}. \quad (10)$$

Otherwise, the scalar products and Fourier coefficients (7) will be equal to zero.

If we form a basis from the right parts of expressions (6) and summation thresholds $a = 0$, $b = 1$:

$$u = \sum_{n=a}^b [u_n \sin(n\theta)], \quad v = \sum_{n=a}^b [v_n \cos(n\theta)], \quad w = \sum_{n=a}^b [w_n \sin(n\theta)], \quad (11)$$

then an approximate solution can be obtained if the body forces R , Q , Z contain the trigonometric functions $\sin \theta$, $\cos \theta$, $\sin \theta$, respectively.

If the summation thresholds $a = 1$ and $b = 1$ are used in expressions (9) and (10), then the body forces of the form (10) cannot be restored; in this case, an approximate solution of the problem is sought for a function of the form $r^m z^k p \cos \theta$ or $r^m z^k p \sin \theta$.

In the case when body forces have the form $r^m z^k (\cos \theta + \sin \theta)$, it is already necessary to use expressions (6) in full with summation thresholds $a = 0, b = 1$. In this case, it is possible to obtain not only approximate, but also rigorous solutions.

For the latter case, we will give an example of solving the problem when the model volumetric forces are generated, for example, by the magnetic induction of the stator winding of an asynchronous machine [20]:

$$\mathbf{X} = \{r^3 z^2 (\sin \theta + \cos \theta), 0, 0\}. \quad (12)$$

After constructing a basis according to relations (6), excluding the basis elements for which $\mathbf{X} = 0$, as well as linearly dependent elements in the process of orthogonalization, the basis components of body forces are presented in Table 1 (showing 7 items).

Table 1

Components of the body force of an orthonormal basis

n	R	Q	Z
ξ_1	$-0.2(\cos \theta + \sin \theta)$	$-0.2(\cos \theta - \sin \theta)$	0
ξ_2	0	$0 - 0.282$	
ξ_3	$-0.172z(\cos \theta + \sin \theta)$	$-0.172z(\cos \theta - \sin \theta)$	0
ξ_4	0	0	$-0.244z$
ξ_5	$-0.399r$	0	0
ξ_6	0	$-0.399r$	0
ξ_7	0	0	$-0.399r(\cos \theta + \sin \theta)$

We use a basis of internal states of 50 elements. Non-zero Fourier coefficients: $c_1 = -1.3368, c_8 = -1.1957, c_{13} = -1.8712, c_{14} = 0.4678, c_{32} = -1.6736, c_{33} = 0.4184, c_{38} = -0.2684, c_{39} = 0.0671$. As a result of the solution for R and Q , approximate solutions are obtained, for Z — strict ($Z_0 = 0$).

The solution is formed by relations (8). The accuracy is estimated by comparing the given body forces (dashed line) with those restored as a result of the solution (solid line) (Fig. 2).

According to the first graph of Fig. 2, the maximum error is at points $\pi/4$ and $5\pi/4$, therefore, to assess the accuracy of the restored force R depending on r and z , it is advisable to carry out for a section with an angular coordinate of $\pi/4$ (plots 3, 5 in Fig. 2). In the second graph of Fig. 2, the maximum error is at point $3\pi/4$, so the verification of the force Q depending on r and z is considered in a section with an angular coordinate of $3\pi/4$ (plots 4, 6 in Fig. 2).

The maximum error of the problem was 25% and was determined at point $(1, \pi/4, 0)$ (plot 5 in Fig. 2). The error is overcome by increasing the number of basis elements used. When using a basis of 70 elements, two non-zero Fourier coefficients are added: $c_{69} = -0.24, c_{70} = 0.06$ and the accuracy of the solution is greatly improved. On Fig. 3 shows plots 5 and 6 of Fig. 2 with 70 elements of the basis retained.

The final internal state ξ_0 is built on 70 basic elements and looks like:

$$u_0 = (31.123z^4 - 1369.44r^2z^4 - 1971.16r^4z^4 + 165.557z^6 + 1390.77r^2z^6 - 74.417z^8)(\cos \theta + \sin \theta) \cdot 10^{-5},$$

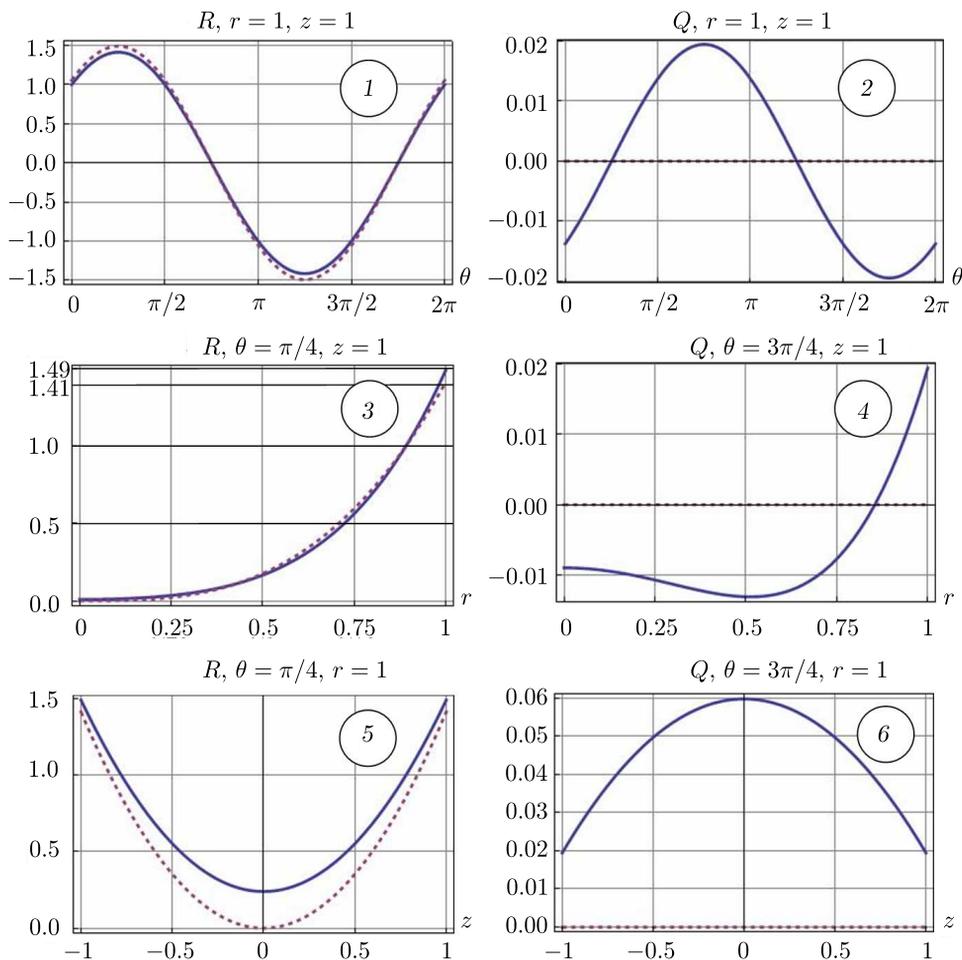


Figure 2. Verification of volumetric forces with 50 retention elements of the basis

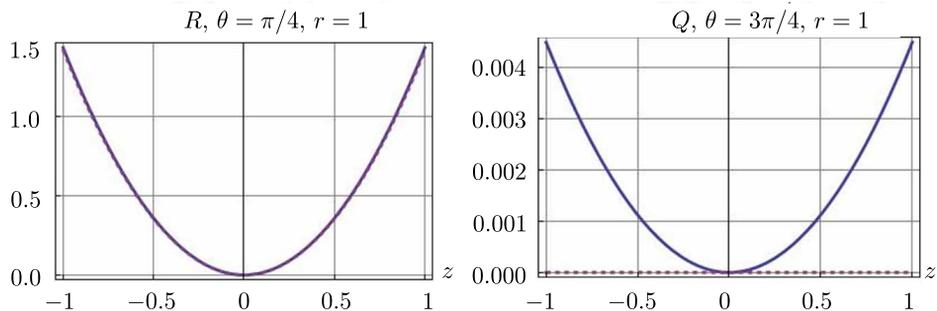


Figure 3. Verification of volumetric forces with 70 retention elements of the basis

$$\begin{aligned}
 v_0 &= (31.123z^4 - 124.494r^2z^4 + 103.745r^4z^4 + 165.557z^6 + \\
 &\quad + 264.805r^2z^6 - 74.417z^8)(\cos\theta - \sin\theta) \cdot 10^{-5}, \\
 w_0 &= (500.016rz^5 + 1250.04r^3z^5 - 436.69rz^7)(\cos\theta + \sin\theta) \cdot 10^{-5}; \\
 R_0 &= (-952.381z^2 + 4190.8r^2z^2 + 60317.5r^4z^2)(\cos\theta + \sin\theta) \cdot 10^{-5}, \\
 Q_0 &= (-952.381z^2 + 3809.5r^2z^2 - 3174.6r^4z^2)(\cos\theta - \sin\theta) \cdot 10^{-5}.
 \end{aligned}$$

The isolines of the obtained characteristics of the elastic field are shown in Fig. 4. The isolines on the plots are shown to scale. The true value of the displayed value is equal to the value on the graph, multiplied by the coefficient κ .

An approximate solution can also be obtained for a body force of the form $r^m(z+p)^k \cos\theta$ or $r^m(z+p)^k \sin\theta$, and for $m=k=2$ is a strict solution.

If for \sin and \cos in expression (12) there are different coefficients, for example $r^m z^k(p \sin\theta + l \cos\theta)$, then the solution cannot be obtained. This is due to the same coefficients (one) for the corresponding functions in the basic expressions (6).

In the case when body forces depend on $\sin(n\theta)$ or $\cos(n\theta)$, $n=2,3,\dots$, in expressions (6), (9), (11) it is necessary to use summation thresholds $a=n, b=n$.

Consider a function that describes, for example, the body force R of the following form $R = r^m z^k p \cos(n\theta)$. The peculiarity of the solution at $n > 1$ is that the restored body forces differ in amplitude from those given by a certain constant — a correction factor κ , which is calculated through the given R and restored R_0 component of the body forces for fixed coordinates r and z : $\kappa = \frac{R}{R_0} \Big|_{r,z}$.

Then all other characteristics of the resulting elastic field are multiplied by a factor of κ .

Let the body force $\mathbf{X} = \{0, r^2 z \cos(3\theta), 0\}$ be given. The basis is formed using expressions (11) and 76 elements of the basis are used to solve this problem (we will not give Fourier coefficients). The result is presented graphically in Fig. 5 (values of body forces R, Q are shown on the surface $r=1, z=1$).

Restored expressions for body forces:

$$R_0 = (0.25r^2z - 2r^4z + 5.4r^6z - 6r^8z + 2.357r^{10}z) \sin(3\theta);$$

$$Q_0 = (0.25r^2z + 2r^4z - 5.4r^6z + 6r^8z - 2.357r^{10}z) \cos(3\theta); \quad Z_0 = 0.$$

Correction factor $\kappa = r^2 / (0.25r^2 + 2r^4 - 5.4r^6 + 6r^8 - 2.357r^{10})$. In this problem κ depends only on r .

Finally, the solution looks like $\xi = \kappa \xi_0$. At $r=1, z=1$, the coefficient $\kappa = 2.029$ and the error for R increased, but the result is still satisfactory (the maximum error was 1.5%).

7. Conclusion. In this paper, the solution of the problem of the theory of elasticity from the action of body forces is constructed as follows. The dependence of the displacement vector of the planar auxiliary state on coordinates $y^\alpha z^\beta$ is specified, and on its basis the displacement vector of the spatial state, which depends on coordinates r, θ, z , is determined. For such a vector, the strain tensor is determined by the Cauchy relation, the stress tensor is determined from Hooke's law, and the body forces are determined from the equilibrium equation. This constructs a strict particular solution of the problem corresponding to the displacement function given at each point of the body. Going through $\alpha + \beta \leq n$

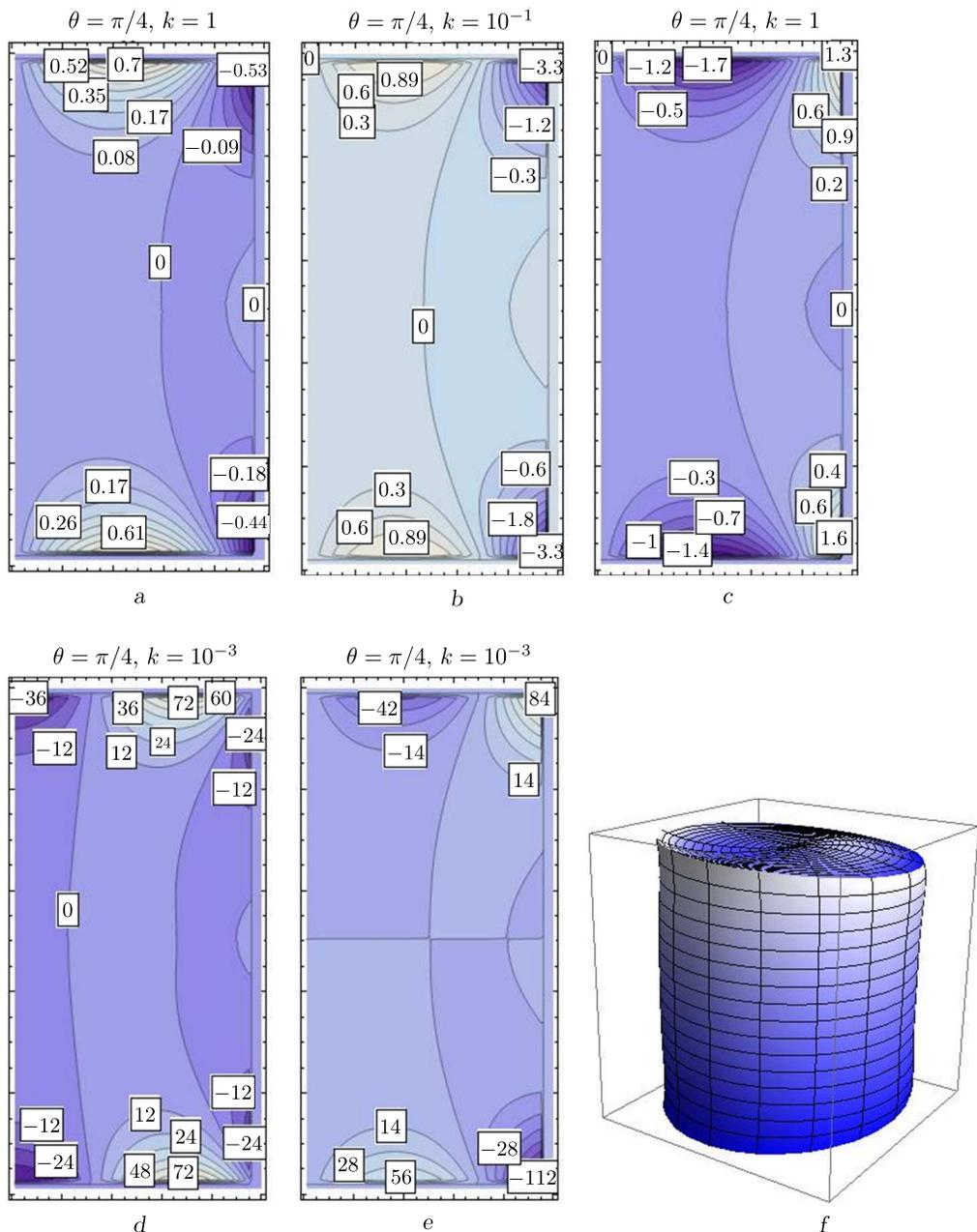


Figure 4. Characteristics of the elastic field: a — component of the stress tensor $\sigma_{\theta\theta}$, b — component of the stress tensor σ_{rr} , c — component of the stress tensor σ_{zz} , d — component of the displacement vector u , e — component of the displacement vector w , f — deformed state contour

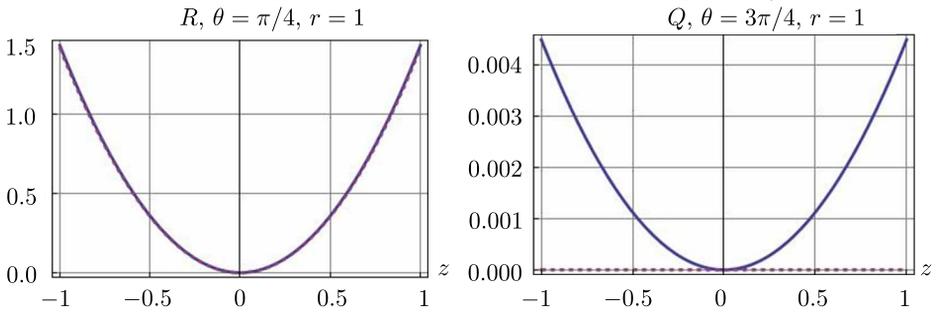


Figure 5. Verification of bulk forces in the problem with the coefficient

($n = 1, 2, 3, \dots$), a set of strict particular solutions of the problem of linear elasticity theory is constructed: displacement vectors \mathbf{u}_k , strain tensors $\boldsymbol{\varepsilon}_k$, stress tensors $\boldsymbol{\sigma}_k$, body force vectors \mathbf{X}_k . Leaving among these solutions only linearly independent ones and implementing them orthogonalization in accordance with relation (7), we obtain a basis according to which the corresponding vectors or tensors are expanded into series with the same coefficients (7). Therefore, the presented approach allows us to immediately construct a solution the problem with given body forces.

Competing interests. We declare that we have no conflict of interest regarding the authorship and publication of this article.

Authors' contributions and responsibilities. Each author has participated in the article concept development and in the manuscript writing. The authors are absolutely responsible for submitting the final manuscript in print. Each author has approved the final version of manuscript.

Funding. The study was carried out with the financial support of RFBR and the Lipetsk Region as part of the research project no. 19–41–480003.

References

1. Vestyak V. A., Tarlakovskii D. V. Unsteady axisymmetric deformation of an elastic thick-walled sphere under the action of volume forces, *J. Appl. Mech. Techn. Phys.*, 2015, vol. 56, no. 6, pp. 984–994. EDN: WPQXUN. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0021894415060085>.
2. Fukalov A. A. Problems of elastic equilibrium of composite thick-walled transversely isotropic spheres under the action of mass forces and internal pressure, and their applications, In: *Proc. of XI Russian Congress on Fundamental Problems of Theoretical and Applied Mechanics*. Kazan, 2015, pp. 3951–3953 (In Russian). EDN: UXGYNX.
3. Zaitsev A. V., Fukalov A. A. Exact analytical solutions of problems on the equilibrium of elastic anisotropic bodies with central and axial symmetry located in the field of gravitational forces, and their applications to problems of geomechanics, In: *Proc. of Russian Conference on Mathematical Modeling in Natural Sciences*. Perm, 2015, pp. 141–144 (In Russian). EDN: UMSHT.
4. Agakhanov E. K. On the development of complex methods for solving problems of the mechanics of a deformable solid body, *Vestn. Dagestan Gos. Tekhn. Univ. Tekhn. Nauki*, 2013, no. 2, pp. 39–45 (In Russian). EDN: SCMJQR.
5. Sharafutdinov G. Z. Functions of a complex variable in problems in the theory of elasticity with mass forces, *J. Appl. Mech. Techn. Phys.*, 2009, vol. 73, no. 1, pp. 48–62. EDN: WRUJZL. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2009.03.008>.
6. Struzhanov V. V. On the solution of boundary value problems of the theory of elasticity

- by the method of orthogonal projections, *Vestn. Perm. Gos. Tekhn. Univ. Matem. Model. Sist. Prots.*, 2004, no. 12, pp. 89–100 (In Russian). EDN: PBHAIN.
7. Kuz'menko V. I., Kuz'menko N. V., Levina L. V., Pen'kov V. B. A method for solving problems of the isotropic elasticity theory with bulk forces in polynomial representation, *Mech. Solids*, 2019, vol. 54, no. 5, pp. 741–749. EDN: YXZLRX. DOI: <https://doi.org/10.3103/S0025654419050108>.
 8. Pen'kov V. B., Levina L. V., Novikova O. S. Analytical solution of elastostatic problems of a simply connected body loaded with nonconservative volume forces: theoretical and algorithmic support, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2020, vol. 24, no. 1, pp. 56–73 (In Russian). EDN: IUYYDV. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1711>.
 9. Ivanychev D. A. A method of boundary states in a solution to the first fundamental problem of the theory of anisotropic elasticity with mass forces, *Vestn. Tomsk. Gos. Univ. Matem. Mekhanika* [Tomsk State Univ. J. Math. Mech.], 2020, no. 66, pp. 96–111 (In Russian). EDN: DFNLEW. DOI: <https://doi.org/10.17223/19988621/66/8>.
 10. Ivanychev D. A. The method of boundary states in the solution to the second fundamental problem of the theory of anisotropic elasticity with mass forces, *Vestn. Tomsk. Gos. Univ. Matem. Mekhanika* [Tomsk State Univ. J. Math. Mech.], 2019, no. 61, pp. 45–60 (In Russian). EDN: GLTGDZ. DOI: <https://doi.org/10.17223/19988621/61/5>.
 11. Ivanychev D. A. The contact problem Solution of the elasticity theory for anisotropic rotation bodies with mass forces, *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2019, no. 2, pp. 49–62 (In Russian). EDN: XMFCKQ. DOI: <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2019.2.05>.
 12. Ivanychev D. A., Levina E. Yu. Solution of thermoelasticity problems for solids of revolution with transversal isotropic feature and a body force, *J. Phys.: Conf. Ser.*, 2019, vol. 1348, 012058. EDN: CTQIWR. DOI: <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1348/1/012058>.
 13. Ivanychev D. A. The method of boundary states in solving problems of thermoelasticity in the presence of mass forces, In: *Proc. of International Conference on Control Systems, Mathematical Modelling, Automation and Energy Efficiency*. Lipetsk, 2019, pp. 83–87. DOI: <https://doi.org/10.1109/SUMMA48161.2019.8947505>.
 14. Aleksandrov A. Ya., Solov'ev Yu. I. *Prostranstvennye zadachi teorii uprugosti (primenenie metodov teorii funktsii kompleksnogo peremennogo)* Spatial Problems in the Elasticity Theory (Application of Methods of the Theory of Functions of a Complex Variable). Moscow, Nauka, 1978, 464 pp. (In Russian)
 15. Lur'e A. I. *Three-dimensional Problems of the Theory of Elasticity*. New York, Interscience Publ., 1964, xii+493 pp.
 16. Pen'kov V. B., Pen'kov V. V. Boundary conditions method for solving linear mechanics problems, *Far Eastern Math. J.*, 2001, vol. 2, no. 2, pp. 115–137 (In Russian). EDN: EQVLZP.
 17. Satalkina L. V. Increasing the basis of the state space under strict restrictions to the energy intensity of calculations, In: *Collection of Abstracts of the Scientific Conference*. Lipetsk, Lipetsk State Univ., 2007, pp. 130–131 (In Russian).
 18. Lekhnitsky S. G. *Teoriia uprugosti anizotropnogo tela* [Theory of Elasticity of Anisotropic Body]. Moscow, Nauka, 1977, 416 pp. (In Russian)
 19. Levina L. V., Novikova O. S., Pen'kov V. B. Full-parameter solution of the problem of the theory of elasticity of a simply connected bounded body, *Vestn. Lipetsk. Gos. Tekhn. Univ.*, 2016, no. 2, pp. 16–24 (In Russian). EDN: WEEWJN.
 20. Vikharev D. Yu., Rodin N. A. Model of implicit pole electric machine based on mathematical formulation of magnetic field in air gap, *Vestnik IGEU*, 2021, no. 6, pp. 27–37 (In Russian). EDN: SSSJQH. DOI: <https://doi.org/10.17588/2072-2672.2021.6.027-037>.

УДК 539.3

Построение упругих полей в задаче от действия объемных сил циклического характера

Д. А. Иванычев¹, Е. Ю. Левина²

¹ Липецкий государственный технический университет,
Россия, 398055, Липецк, ул. Московская, 30.

² Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана
(национальный исследовательский университет),
Россия, 105005, Москва, ул. 2-я Бауманская, 5.

Аннотация

Представлен метод определения напряженно-деформированного состояния трансверсально-изотропных тел вращения, возникающего под действием неосесимметричных стационарных объемных сил. Поставленная задача предполагает использование понятий метода граничных состояний. Базис пространства внутренних состояний формируется с помощью фундаментальных полиномов. Многочлен ставится в любое положение вектора смещения плоского вспомогательного состояния и по формулам перехода формируется пространственное состояние. Множество таких состояний образует конечномерный базис, по которому после ортогонализации искомое состояние разлагается в ряды Фурье с теми же коэффициентами. Коэффициенты рядов представляют собой скалярные произведения векторов заданной и базисной объемных сил. Наконец, поиск упругого состояния сводится к решению квадратур.

Анализируются решения задач теории упругости для трансверсально-изотропного кругового цилиндра от действия объемных сил, заданных различными циклическими законами (синуса и косинуса). Даны рекомендации по построению базиса внутренних состояний в зависимости от вида функции заданных объемных сил. Даны анализ сходимости рядов и оценка точности решения в графическом виде.

Механика деформируемого твердого тела Научная статья

© Коллектив авторов, 2024

© СамГТУ, 2024 (составление, дизайн, макет)

Контент публикуется на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

Образец для цитирования

Ivanychev D. A., Levina E. Yu. Construction of elastic fields in the problem from the action of body forces of a cyclic nature, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2024, vol. 28, no. 1, pp. 59–72. EDN: IVANRN. DOI: 10.14498/vsgtu2064.

Сведения об авторах

Дмитрий Алексеевич Иванычев  <https://orcid.org/0000-0002-7736-9311>

кандидат физико-математических наук; доцент; институт машиностроения и транспорта;
e-mail: lsivdmal@mail.ru

Екатерина Юрьевна Левина  <https://orcid.org/0000-0001-6193-9036>

кандидат технических наук; доцент; факультет фундаментальных наук;
e-mail: hens1-1@yandex.ru

Ключевые слова: метод граничных состояний, трансверсально-изотропные материалы, объемные силы, пространство состояний, неосесимметричная деформация.

Получение: 12 сентября 2023 г. / Исправление: 16 февраля 2024 г. /
Принятие: 4 марта 2024 г. / Публикация онлайн: 20 июня 2024 г.

Конкурирующие интересы. Заявляем, что в отношении авторства и публикации этой статьи конфликта интересов не имеем.

Авторская ответственность. Все авторы принимали участие в разработке концепции статьи и в написании рукописи. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

Финансирование. Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и Липецкой области в рамках научного проекта № 19–41–480003 “p_a”.



УДК 539.376:519.651

Численный метод структурной и параметрической идентификации математической модели неполной обратимости деформации ползучести

В. П. Радченко, В. Е. Зотеев, Е. А. Афанасьева

Самарский государственный технический университет,
Россия, 443100, Самара, ул. Молодогвардейская, 244.

Аннотация

Разработан новый численный метод параметрической и структурной идентификации физически нелинейной теории обратимости деформации ползучести, справедливой в пределах первой и второй стадий. В качестве базовой экспериментальной информации используется серия кривых стационарной ползучести. Задача сведена к нелинейному регрессионному анализу определения оценок случайных параметров на основе временных рядов последовательности результатов наблюдений деформации ползучести при различных постоянных напряжениях с использованием разностных уравнений. Полученные соотношения между коэффициентами разностного уравнения и параметрами нелинейной регрессии позволяют свести задачу к оценке коэффициентов линейно-параметрической дискретной модели. Разработаны соответствующие итерационные алгоритмы уточнения оценок параметров с любой заданной точностью. Выполнена параметрическая и структурная идентификация теории неполной обратимости деформации ползучести для стали ЭИ736 (500 °С) и сплавов ЭИ437А (700 °С), ВЖ98 (900 °С), ЭП693 (700 °С). Приводятся численные значения оценок параметров моделей для этих сплавов. Выполнена проверка адекватности построенных математических моделей, наблюдается соответствие расчетных и экспериментальных данных. Экспериментальные данные для всех рассмотренных материалов принадлежат соответствующим расчетным доверительным ин-

Механика деформируемого твердого тела Научная статья

© Коллектив авторов, 2024

© СамГТУ, 2024 (составление, дизайн, макет)

© Контент публикуется на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

Образец для цитирования

Радченко В. П., Зотеев В. Е., Афанасьева Е. А. Численный метод структурной и параметрической идентификации математической модели неполной обратимости деформации ползучести // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2024. Т. 28, № 1. С. 73–95. EDN: KRTZPA. DOI: 10.14498/vsgtu2071.

Сведения об авторах

Владимир Павлович Радченко <https://orcid.org/0000-0003-4168-9660>

доктор физико-математических наук, профессор; заведующий кафедрой; каф. прикладной математики и информатики; e-mail: radchenko.vp@samgtu.ru

Владимир Евгеньевич Зотеев <https://orcid.org/0000-0001-7114-4894>

доктор технических наук, доцент; профессор; каф. прикладной математики и информатики; e-mail: zoteev.ve@samgtu.ru

Елена Андреевна Афанасьева <https://orcid.org/0000-0001-7815-2723>

аспирант; каф. прикладной математики и информатики; e-mail: afanasieva.ea@samgtu.ru

тервалам для деформации ползучести, что свидетельствует о достоверности полученных оценок параметров моделей.

Ключевые слова: ползучесть, нелинейная регрессионная модель, идентификация, разностные уравнения, среднеквадратичные оценки параметров.

Получение: 15 декабря 2023 г. / Исправление: 13 февраля 2024 г. /
Принятие: 27 февраля 2024 г. / Публикация онлайн: 28 мая 2024 г.

Введение. Во многих работах, например [1–4], отмечалось существенное влияние случайных микронеоднородных возмущений механических характеристик материала на поля напряжений и деформаций и, как следствие этого, — построение соответствующих стохастических реологических моделей для расчетов на прочность. Особую актуальность эта проблема приобретает при построении моделей ползучести, где разброс реологической деформации составляет до 50–70 %, и такие результаты приходится рассматривать как приемлемые [1, 4–6]. Как правило, построение стохастических уравнений ползучести базируется на обобщении соответствующих детерминированных соотношений, в которых часть параметров и функций полагаются случайными, а остальные — детерминированными [5–9]. С использованием стохастических уравнений установившейся ползучести решен ряд краевых задач для элементов конструкций из микронеоднородных материалов [10–15]. Анализ экспериментальных данных по ползучести материалов, представленных в работах [1, 16–22], показывает, что поведение реономных материалов отличается большим разнообразием. Описание всех особенностей их деформирования не укладывается в рамки наиболее употребительных определяющих уравнений на основе теорий упрочнения, течения, старения, кинетических уравнений Ю. Н. Работнова и других [23]. Основной недостаток подавляющего большинства теорий ползучести заключается в невозможности описать частичную обратимость деформации ползучести после полной разгрузки. Разновидности теории наследственности не приспособлены для описания отмеченного эффекта, поскольку теоретическая величина возврата оказывается слишком большой по сравнению с экспериментально наблюдаемой [19, 20]. К тому же область применимости большинства теорий ограничена случаем подобия стационарных кривых ползучести в целом. Вариант теории ползучести в пределах первой и второй стадий, учитывающей частичную обратимость реологической деформации, предложен Ю. П. Самариным [22] и обобщен в более поздней работе [20] для учета всех трех стадий ползучести.

Однако все представленные в работах [1, 16–23] уравнения состояния являются детерминированными, процедуры идентификации параметров моделей, как правило, являются эвристическими и многоступенчатыми с использованием некоторого набора характерных точек на кривых стационарной ползучести. Отсутствие алгоритмов статистической обработки экспериментальных данных и статистического анализа результатов вычислений не позволяют строго оценить адекватность построенных моделей ползучести и достоверность оценок их параметров. В связи с этим целью данной работы является разработка метода идентификации параметров реологической модели неполной обратимости деформации ползучести [22], который принципиально устраняет вышеизложенные недостатки известных методов.

1. Численный метод параметрической идентификации аппроксимации кривых ползучести при постоянных напряжениях. В соответствии с теорией неполной обратимости деформации ползучести при переменных напряжениях $\sigma = \sigma(t) \geq 0$ при наличии первой и второй стадий имеем следующую математическую модель [22]:

$$\begin{aligned}
 p(t) &= u(t) + v(t) + w(t), \\
 \left\{ \begin{aligned}
 u(t) &= \sum_{i=1}^s u_i(t), \\
 \dot{u}_i(t) &= \alpha_i \left[\beta b_i \varphi_i \left(\frac{\sigma(t)}{\sigma_*} \right) - u_i(t) \right], \\
 v(t) &= \sum_{i=1}^s v_i(t), \\
 \dot{v}_i(t) &= \begin{cases} \alpha_i \left[(1 - \beta) b_i \varphi_i \left(\frac{\sigma(t)}{\sigma_*} \right) - v_i \left(\frac{\sigma(t)}{\sigma_*} \right) \right], \\ (1 - \beta) b_i \varphi_i \left(\frac{\sigma(t)}{\sigma_*} \right) > v_i(t), \\ 0, (1 - \beta) b_i \varphi_i \left(\frac{\sigma(t)}{\sigma_*} \right) \leq v_i(t); \end{cases} \\
 \dot{w}(t) &= f \left(\frac{\sigma(t)}{\sigma_*} \right),
 \end{aligned} \right. \quad (1)
 \end{aligned}$$

где $p(t)$ — деформации ползучести; $u(t)$, $v(t)$, $w(t)$ — вязкоупругая, вязкопластическая и вязкая компонента $p(t)$ соответственно; $u_i(t)$, $v_i(t)$ — компоненты вязкоупругой и вязкопластической компонент соответственно; σ_* , α_i , b_i , $\beta \in [0, 1]$ — параметры модели; $\varphi_i(\sigma/\sigma_*)$ и $f(\sigma/\sigma_*)$ — функции от безразмерных напряжений.

Из (1) следует, что $u(t)+v(t)$ описывает деформацию, накопленную на первой стадии ползучести при постоянном напряжении, при этом при $\beta = 1$ эта деформация полностью обратима после разгрузки, а при $\beta = 0$ — полностью необратима.

Исходной информацией для определения параметров и функций соотношений (1) являются экспериментально полученные кривые стационарной ползучести при действии постоянного напряжения с последующей разгрузкой:

$$\sigma(t) = \begin{cases} \sigma^j, & 0 < t \leq T, \\ 0, & t > T, \quad j = \overline{1, m}. \end{cases}$$

m — количество кривых ползучести, $\sigma^j = \text{const}$. Величина σ_* в (1) полагается равной одному из напряжений σ^j , т.е. $\sigma_* = \sigma^j$, $1 \leq j \leq m$.

Модель (1) применима при следующих ограничениях: материал является нестареющим; напряжение $\sigma(t)$ не изменяет знака и не достигает предела текучести, третья стадия отсутствует, температура постоянна.

При постоянном напряжении $\sigma = \sigma^j = \text{const}$ ($0 \leq t \leq T$) интегрирование (1) дает аналитическое выражение для кривой ползучести вида

$$p(t) = \sum_{i=1}^s a_i [1 - \exp(-\alpha_i t)] + ct, \quad (2)$$

где $a_i = b_i \varphi_i(\sigma^j / \sigma_*)$, $c = f(\sigma^j / \sigma_*)$.

Ставится задача достоверной оценки параметров аппроксимации (2) по результатам эксперимента $p(t_k)$, $k = 0, 1, 2, \dots, N - 1$, где N — объем выборки результатов наблюдений, полученных в ходе промышленного или научно-технического эксперимента. Аппроксимация (2) содержит $2s + 1$ параметров (как правило, количество экспоненциальных составляющих $s \leq 3$), достоверная оценка которых по результатам наблюдений является основной проблемой параметрической идентификации. При этом одновременно решается задача структурной идентификации, под которой понимается оценка числа экспоненциальных составляющих s в модели (2).

Одним из известных методов решения этой задачи является метод, в основе которого лежит последовательное выделение экспоненциальных составляющих при аппроксимации кривых ползучести [24]. Однако этот метод имеет ряд существенных недостатков: требование выпуклости и монотонности функции, описывающей экспериментальную кривую ползучести, что не всегда выполняется в практике эксперимента и предварительно необходимо выполнять методы непараметрического выравнивания опытных данных; применение интерполяции к предварительно сглаженным экспериментальным данным, что существенно искажает оценки параметров экспоненциальных составляющих при наличии случайной помехи в результатах наблюдений. Однако основным недостатком этого метода является детерминированный подход к решению задачи идентификации.

Принципиально устранить указанный недостаток можно на основе численных методов нелинейного регрессионного анализа [26, 27]. При таком подходе задача параметрической идентификации решается на основе нелинейной регрессионной зависимости, построенной с учетом функциональной зависимости (2):

$$y_k = \sum_{i=1}^s a_i (1 - \exp(-\alpha_i t_k)) + ct_k + \varepsilon_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N - 1, \quad (3)$$

где $y_k = p(t_k)$ — результаты эксперимента объемом N , ε_k — случайное возмущение в результатах наблюдений, $0 \leq k \leq N - 1$. При этом среднеквадратичные оценки параметров модели (3) находятся из условия минимизации величины отклонения построенной модели $\hat{y}_k = \sum_{i=1}^s \hat{a}_i (1 - \exp(-\hat{\alpha}_i t_k)) + \hat{c}t_k$ от результатов наблюдения y_k , $0 \leq k \leq N - 1$:

$$\|y - \hat{y}\|^2 = \|e\|^2 \rightarrow \min. \quad (4)$$

Нелинейный характер регрессионной модели (3) обуславливает одну из основных проблем при оценивании параметров модели — проблему выбора начального приближения вектора оценок, обеспечивающего сходимость итерационной процедуры уточнения среднеквадратичных оценок к параметрам, удовлетворяющим критерию (4). Кроме того, большое число идентифицируемых переменных, а также неравномерность вклада различных экспоненциальных составляющих в наблюдаемый выходной сигнал может привести

к проблеме вычислительной устойчивости оценок, без решения которой невозможно не только обеспечить достоверность результатов, но даже реализовать необходимые алгоритмы вычислений.

В работах [28, 29] задача параметрической идентификации аппроксимации кривой ползучести с экспоненциальным ядром решается на основе разностных уравнений. При таком подходе строится модель временного ряда, описывающая последовательность результатов наблюдений деформации ползучести. Известные соотношения между коэффициентами разностного уравнения и параметрами нелинейной регрессии позволяют свести задачу к оценке коэффициентов линейно-параметрической дискретной модели [30]. Это дает возможность не только решить проблему выбора начального приближения вектора оценок, но и непосредственно находить оценки параметров модели кривой ползучести, а также проводить статистический анализ результатов вычислений.

По сравнению с известным методом [22] построенная на основе разностных уравнений модель более адекватна результатам наблюдений, среднеквадратичные оценки параметров более достоверны и для них могут быть найдены доверительные интервалы, однако, несмотря на это, проблема устойчивости вычисления оценок остается по-прежнему актуальной. Кроме того, метод [28, 29] не позволяет решить задачу структурной идентификации — определить число экспоненциальных составляющих в модели на основе статистических методов обработки результатов наблюдений.

В данной работе рассматривается новый численный метод оценки параметров математической модели кривой ползучести, в котором учтены основные достоинства обоих известных методов:

- последовательное выделение из модели (3) каждой экспоненциальной составляющей $a_i \exp(-\alpha_i t_k)$, $i = 1, 2, 3$, как в известном методе [22];
- параметрическая идентификация на основе разностных уравнений каждой отдельной экспоненциальной составляющей, в том числе статистический анализ результатов расчета.

Такой подход не только позволяет существенно повысить устойчивость вычислений, а, следовательно, и эффективность оценок параметров a_i и α_i , но и дает возможность определить количество составляющих, в совокупности обеспечивающих заданную адекватность построенной модели $\hat{y}(t)$ результатам эксперимента (например, не менее $R^2 = 97\%$, где R^2 — коэффициент детерминации).

Следует отметить, что поскольку в алгоритме метода используются разностные уравнения, описывающие экспоненциальные составляющие, перед его применением следует провести предварительную обработку кривой ползучести, которая заключается в формировании равномерной выборки результатов эксперимента y_k , $0 \leq k \leq N-1$, с шагом τ , равным наименьшему промежутку времени измерений деформации ползучести. Объем выборки N , сформированной в результате предварительной обработки, вычисляется по формуле $N = \lceil t_{\max}/\tau \rceil$, где t_{\max} — заданное время наблюдений.

Предлагаемый численный метод включает следующие основные этапы.

Этап 1. На первом этапе строится аппроксимация второй стадии ползучести:

$$\hat{y}_{1k} = A + ct_k. \quad (5)$$

В равенстве (5) параметр A равен сумме коэффициентов в экспоненциальных составляющих: $A = \sum_{i=1}^s a_i$. Параметрическая идентификация линейной модели (5) проводится на множестве точек t_k , $n_1 \leq k \leq N-1$, в которых экспоненциальной составляющей можно пренебречь:

$$y_k = A - \sum_{i=1}^s a_i \exp(-\alpha_i t_k) + ct_k + \varepsilon_k \approx A + ct_k + \varepsilon_k, \quad k = n_1, n_1+1, \dots, N-1. \quad (6)$$

Момент времени t_k ($k \geq n_1$), начиная с которого экспоненты считаются полностью затухающими и не влияют на вторую стадию, определяется из условия

$$\frac{\Delta y'_k}{\max |y'_k|} \approx \frac{y_k - 2y_{k-1} + y_{k-2}}{y_1} < 0.001, \quad k = 2, 3, \dots, N-1.$$

Среднеквадратичные оценки параметров линейной регрессии (6) находят-ся из условия

$$\|y - \hat{y}_1\|^2 = \sum_{k=n_1}^{N-1} (y_k - \hat{y}_{1k})^2 = \sum_{k=n_1}^{N-1} (y_k - \hat{A} - \hat{c}t_k)^2 \rightarrow \min$$

на основе решения нормальной системы уравнений

$$\begin{cases} \hat{A} \cdot (N - n_1) + \hat{c} \cdot \sum_{k=n_1}^{N-1} t_k = \sum_{k=n_1}^{N-1} y_k; \\ \hat{A} \cdot \sum_{k=n_1}^{N-1} t_k + \hat{c} \cdot \sum_{k=n_1}^{N-1} t_k^2 = \sum_{k=n_1}^{N-1} t_k y_k \end{cases}$$

по формулам

$$\begin{aligned} \hat{A} &= \frac{\sum_{k=n_1}^{N-1} y_k \cdot \sum_{k=n_1}^{N-1} t_k^2 - \sum_{k=n_1}^{N-1} t_k y_k \cdot \sum_{k=n_1}^{N-1} t_k}{(N - n_1) \sum_{k=n_1}^{N-1} t_k^2 - \left(\sum_{k=n_1}^{N-1} t_k \right)^2}, \\ \hat{c} &= \frac{(N - n_1) \sum_{k=n_1}^{N-1} t_k y_k - \sum_{k=n_1}^{N-1} y_k \cdot \sum_{k=n_1}^{N-1} t_k}{\sum_{k=n_1}^{N-1} t_k^2 - \left(\sum_{k=n_1}^{N-1} t_k \right)^2}. \end{aligned} \quad (7)$$

Результатом расчетов, выполненных на первом этапе алгоритма рассматриваемого численного метода, является построенная аппроксимация для второй стадии ползучести:

$$\hat{y}_{1k} = \hat{A} + \hat{c}t_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1. \quad (8)$$

Этап 2. На втором этапе находятся среднеквадратичные оценки параметров первой экспоненциальной составляющей:

$$f_k = -a_1 \exp[-\alpha_1 \tau(k-1)], \quad k = 1, 2, \dots, N. \quad (9)$$

Вначале формируется выборка результатов расчета $y_k^{(1)} = y_k - \hat{y}_{1k}$, $k = 0, 1, 2, \dots, N-1$. Среднеквадратичные оценки параметров a_1 и α_1 вычисляются на основе нелинейной регрессии

$$y_k^{(1)} = -a_1 \exp(-\alpha_1 \tau k) + \varepsilon_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1,$$

$$\text{из условия } \|\hat{\varepsilon}\|^2 = \sum_{k=0}^{N-1} [y_k^{(1)} + \hat{a}_1 \exp(-\hat{\alpha}_1 \tau k)]^2 \rightarrow \min.$$

В формате данного метода эта задача решается с использованием разностного уравнения, построенного на основе дискретной функции (9):

$$\begin{cases} f_1 = \lambda_2; \\ f_k = \lambda_1 f_{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots, N, \end{cases} \quad (10)$$

где $\lambda_1 = \exp(-\alpha_1 \tau)$, $\lambda_2 = -a_1$.

Введем обозначения: $z_k = y_k^{(1)}$, $0 \leq k \leq N-1$. Тогда с учетом равенства $f_{k+1} = z_k - \varepsilon_k$, $0 \leq k \leq N-1$, из системы (10) получаем

$$\begin{cases} z_0 = \lambda_2 + \eta_0; \\ z_k = \lambda_1 z_{k-1} + \eta_k, \quad k = 1, 2, \dots, N-1; \\ \eta_0 = \varepsilon_0; \\ \eta_k = \varepsilon_k - \lambda_1 \varepsilon_{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots, N-1 \end{cases} \quad (11)$$

или в матричной форме:

$$z = F\lambda + \eta,$$

где $z = (z_0, z_1, \dots, z_{N-1})^\top$, $\eta = (\varepsilon_0, \varepsilon_1 - \lambda_1 \varepsilon_0, \varepsilon_2 - \lambda_1 \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{N-1} - \lambda_1 \varepsilon_{N-2})^\top$,

$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)^\top$, $F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & z_0 & z_1 & \dots & z_{N-2} \end{bmatrix}^\top$, $^\top$ — символ транспонирования.

Начальные оценки параметров нелинейной регрессии (11) находятся из условия $\|\hat{\eta}\|^2 = \|z - F\lambda\|^2 \rightarrow \min$ по формуле $\hat{\lambda}^{(0)} = (F^\top F)^{-1} F^\top z$, откуда получаем оценки

$$\hat{\lambda}_1^{(0)} = \frac{\sum_{k=1}^{N-1} z_k z_{k-1}}{\sum_{k=1}^{N-1} z_{k-1}^2}, \quad \hat{\lambda}_2^{(0)} = z_0. \quad (12)$$

Для уточнения среднеквадратичных оценок параметров математической модели (11) с учетом выполнения условия $\|\hat{\varepsilon}\|^2 \rightarrow \min$ рассмотрим нелинейную регрессию относительно коэффициентов разностного уравнения

$$z_{k-1} = f_k(\lambda_1, \lambda_2) + \varepsilon_k, \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad (13)$$

где нелинейная дискретная функция $f_k(\lambda_1, \lambda_2)$ описывается рекуррентной формулой (10).

Итерационная процедура уточнения среднеквадратичных оценок нелинейной регрессии (13) описывается формулой [26, 27, 30]

$$\hat{\lambda}^{(i+1)} = \hat{\lambda}^{(i)} + [(W(\hat{\lambda}^{(i)}))^T W(\hat{\lambda}^{(i)})]^{-1} (W(\hat{\lambda}^{(i)}))^T [y^{(1)} - f(\hat{\lambda}^{(i)})], \quad i = 0, 1, 2, \dots, \quad (14)$$

где $W(\lambda_1, \lambda_2)$ — матрица Якоби размера $[N \times 2]$, элементы которой имеют вид

$$w_{1k}(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{\partial f_k(\lambda_1, \lambda_2)}{\partial \lambda_1} = \begin{cases} 0, & k = 1; \\ f_{k-1}(\lambda_1, \lambda_2) + \lambda_1 w_{1,k-1}(\lambda_1, \lambda_2), & 2 \leq k \leq N; \end{cases}$$

$$w_{2k}(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{\partial f_k(\lambda_1, \lambda_2)}{\partial \lambda_2} = \begin{cases} 0, & k = 1; \\ \lambda_1 w_{2,k-1}(\lambda_1, \lambda_2), & 2 \leq k \leq N. \end{cases}$$

Начальное приближение в рекуррентной формуле (14) находится по формулам (12). Процесс уточнения среднеквадратичных оценок $\hat{\lambda}^{(i)}$ заканчивается при выполнении условия

$$\|\hat{\lambda}^{(i+1)} - \hat{\lambda}^{(i)}\| < 0.001 \|\hat{\lambda}^{(i)}\|. \quad (15)$$

С учетом полученных среднеквадратичных оценок коэффициентов разностного уравнения можно найти оценки параметров первой экспоненциальной составляющей:

$$\hat{a}_1 = -\hat{\lambda}_2^{(i)}, \quad \hat{\alpha}_1 = -\frac{1}{\tau} \ln \hat{\lambda}_1^{(i)}. \quad (16)$$

и записать ее зависимость в виде

$$\hat{y}_k^{(1)} = -\hat{a}_1 \exp(-\hat{\alpha}_1 t_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1. \quad (17)$$

На основе полученных выше результатов можно перейти к решению задачи уточнения среднеквадратичных оценок параметров нелинейной регрессии (3) при использовании одной экспоненциальной составляющей.

На этом шаге с учетом найденных ранее оценок коэффициентов разностного уравнения $\hat{\lambda}_1^{(i)}$ и $\hat{\lambda}_2^{(i)}$ (формула (14)), а также оценки \hat{c} (формула (7)) вычисляется вектор $\hat{\mu}^{(0)} = (\hat{a}_1^{(0)}, \hat{\alpha}_1^{(0)}, \hat{c}^{(0)})^T$ начальных оценок параметров функциональной зависимости

$$f_k(\mu) = a_1 [1 - \exp(-\alpha_1 t_k)] + ct_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1,$$

по формулам

$$\hat{a}_1^{(0)} = -\hat{\lambda}_2^{(i)}, \quad \hat{\alpha}_1^{(0)} = -\frac{1}{\tau} \ln \hat{\lambda}_1^{(i)}, \quad \hat{c}^{(0)} = \hat{c}.$$

Далее находятся элементы матрицы Якоби $W(\mu)$ размера $[N \times 3]$:

$$w_{k1}(\mu) = \frac{\partial f_k(\mu)}{\partial a_1} = 1 - \exp(-\alpha_1 t_k), \quad k = 0, 1, \dots, N-1;$$

$$w_{k2}(\mu) = \frac{\partial f_k(\mu)}{\partial \alpha_1} = a_1 t_k \exp(-\alpha_1 t_k), \quad k = 0, 1, \dots, N-1;$$

$$w_{k3}(\mu) = \frac{\partial f_k(\mu)}{\partial c} = t_k, \quad k = 0, 1, \dots, N-1.$$

Итерационная процедура уточнения среднеквадратичных оценок нелинейной регрессии (3) при использовании одной экспоненциальной составляющей описывается формулой

$$\hat{\mu}^{(i+1)} = \hat{\mu}^{(i)} + [(W(\hat{\mu}^{(i)}))^T W(\hat{\mu}^{(i)})]^{-1} (W(\hat{\mu}^{(i)}))^T [y - f(\hat{\mu}^{(i)})],$$

$$i = 0, 1, 2, \dots \quad (18)$$

Процесс уточнения среднеквадратичных оценок $\hat{\mu}^{(i)}$ заканчивается при выполнении условия

$$\|\hat{\mu}^{(i+1)} - \hat{\mu}^{(i)}\| < 0.001 \|\hat{\mu}^{(i)}\|. \quad (19)$$

Результатом расчетов, выполненных на этом шаге алгоритма рассматриваемого численного метода, является построенная аппроксимация кривой ползучести с одной экспоненциальной составляющей:

$$\hat{y}_k = \hat{a}_1 [1 - \exp(-\hat{\alpha}_1 t_k)] + \hat{c} t_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1, \quad (20)$$

в которой оценки параметров соответствуют элементам вектора $\hat{\mu}^{(i+1)}$:

$$\hat{a}_1 = \hat{\mu}_1^{(i+1)}, \quad \hat{\alpha}_1 = \hat{\mu}_2^{(i+1)}, \quad \hat{c} = \hat{\mu}_3^{(i+1)}.$$

Для вычисления дисперсий величин a_1 , α_1 , c находится матрица

$$V[\mu] = (W^T W)^{-1} s_{\text{ост}}^2,$$

$$\text{где } s_{\text{ост}}^2 = \frac{1}{N-3} \sum_{i=0}^{N-1} (y_k - \hat{y}_k)^2.$$

Диагональные элементы $V_{11}(\mu) = D(a_1)$, $V_{22}(\mu) = D(\alpha_1)$ и $V_{33}(\mu) = D(c)$ задают дисперсию параметров a_1 , α_1 и c .

На заключительном шаге второго этапа решается задача проверки адекватности построенной модели результатам наблюдений и, как следствие, целесообразности использования в модели других экспоненциальных составляющих. Для этого могут быть выбраны различные критерии адекватности модели.

Например, можно использовать относительную величину среднеквадратической нормы отклонения аппроксимации (20) от данных эксперимента:

$$h, \% = \left(\frac{\sum_{k=0}^{N-1} (y_k - \hat{y}_k)^2}{\sum_{k=0}^{N-1} y_k^2} \right)^{1/2} \cdot 100 \%. \quad (21)$$

В качестве другого критерия адекватности модели можно использовать «коэффициент детерминации» R^2 , %, который определяется через выборочный коэффициент множественной корреляции (коэффициент корреляции между случайными векторами y и \hat{y}):

$$R = \frac{\sum_{k=0}^{N-1} (y_k - \bar{y})(\hat{y}_k - \bar{\hat{y}})}{\left(\sum_{k=0}^{N-1} (y_k - \bar{y})^2\right)^{1/2} \left(\sum_{k=0}^{N-1} (\hat{y}_k - \bar{\hat{y}})^2\right)^{1/2}}, \quad R^2, \% = R^2 \cdot 100 \%. \quad (22)$$

Условием адекватности построенной модели результатам эксперимента можно считать выполнение одного из неравенств

$$h, \% \leq 3 \%, \quad R^2, \% \geq 97 \%. \quad (23)$$

Этап 3. Если условия (23) не выполняются, то следует перейти к третьему этапу численного метода — выделению в соотношении для кривой ползучести (3) второй экспоненциальной составляющей: $a_2 [1 - \exp(-\alpha_2 t_k)]$.

При решении этой задачи используются результаты, полученные на первых двух этапах: построенные аппроксимации второй стадии ползучести (8) и первой экспоненциальной составляющей (17). На первом шаге этого этапа формируется выборка результатов расчета $y_k^{(2)} = y_k - \hat{y}_{1k} - \hat{y}_k^{(1)}$, $k = 0, 1, 2, \dots, N-1$. Для этой выборки рассматривается аппроксимация второй экспоненциальной составляющей вида

$$f_k = -a_2 \exp[-\alpha_2 \tau(k-1)], \quad k = 1, 2, \dots, N.$$

Среднеквадратичные оценки параметров a_2 и α_2 вычисляются с применением нелинейной регрессии

$$y_k^{(2)} = -a_2 \exp(-\alpha_2 \tau k) + \varepsilon_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1,$$

из условия $\|\hat{\varepsilon}\|^2 = \sum_{k=0}^{N-1} [y_k^{(2)} + \hat{a}_2 \exp(-\hat{\alpha}_2 \tau k)]^2 \rightarrow \min$.

Эта задача решается на основе алгоритма, описанного выше на втором этапе численного метода, с использованием формул (10)–(15) с учетом обозначений $z_k = y_k^{(2)}$, $0 \leq k \leq N-1$, $\lambda_1 = \exp(-\alpha_2 \tau)$ и $\lambda_2 = -a_2$.

Благодаря полученным среднеквадратичным оценкам коэффициентов разностного уравнения можно найти оценки параметров второй экспоненциальной составляющей:

$$\hat{a}_2 = -\hat{\lambda}_2^{(i)}, \quad \hat{\alpha}_2 = -\frac{1}{\tau} \ln \hat{\lambda}_1^{(i)} \quad (24)$$

и записать ее выражение в виде

$$\hat{y}_k^{(2)} = -\hat{a}_2 \exp(-\hat{\alpha}_2 \tau k) + \varepsilon_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1.$$

На основе полученных выше результатов можно перейти к решению задачи уточнения среднеквадратичных оценок параметров нелинейной регрессии (3) при использовании двух экспоненциальных составляющих.

На этом шаге с учетом найденных на предыдущих шагах оценок параметров экспоненциальных составляющих (формулы (16) и (24)), а также оценки \hat{c} (формула (7)) вычисляется вектор $\hat{\mu}^{(0)} = (\hat{a}_1^{(0)}, \hat{\alpha}_1^{(0)}, \hat{a}_2^{(0)}, \hat{\alpha}_2^{(0)}, \hat{c}^{(0)})^\top$ начальных оценок параметров функциональной зависимости

$$f_k(\mu) = a_1 [1 - \exp(-\alpha_1 t_k)] + a_2 [1 - \exp(-\alpha_2 t_k)] + ct_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N - 1,$$

по формулам

$$\hat{a}_1^{(0)} = \hat{a}_1, \quad \hat{\alpha}_1^{(0)} = \hat{\alpha}_1, \quad \hat{a}_2^{(0)} = \hat{a}_2, \quad \hat{\alpha}_2^{(0)} = \hat{\alpha}_2, \quad \hat{c}^{(0)} = \hat{c}.$$

Далее находятся элементы матрицы Якоби $W(\mu)$ размера $[N \times 5]$:

$$w_{k1}(\mu) = \frac{\partial f_k(\mu)}{\partial a_1} = 1 - \exp(-\alpha_1 t_k), \quad k = 0, 1, \dots, N - 1; \quad (25)$$

$$w_{k2}(\mu) = \frac{\partial f_k(\mu)}{\partial \alpha_1} = a_1 t_k \exp(-\alpha_1 t_k), \quad k = 0, 1, \dots, N - 1; \quad (26)$$

$$w_{k3}(\mu) = \frac{\partial f_k(\mu)}{\partial a_2} = 1 - \exp(-\alpha_2 t_k), \quad k = 0, 1, \dots, N - 1; \quad (27)$$

$$w_{k4}(\mu) = \frac{\partial f_k(\mu)}{\partial \alpha_2} = a_2 t_k \exp(-\alpha_2 t_k), \quad k = 0, 1, \dots, N - 1; \quad (28)$$

$$w_{k5}(\mu) = \frac{\partial f_k(\mu)}{\partial c} = t_k, \quad k = 0, 1, \dots, N - 1. \quad (29)$$

Итерационная процедура уточнения среднеквадратичных оценок нелинейной регрессии (3) при использовании двух экспоненциальных составляющих описывается формулой (18). Процесс уточнения среднеквадратичных оценок $\hat{\mu}^{(i)}$ заканчивается при выполнении условия (19). Результатом расчетов, выполненных на этом шаге алгоритма рассматриваемого численного метода, является построенная аппроксимация кривой ползучести с двумя экспоненциальными составляющими:

$$\hat{y}_k = \hat{a}_1 [1 - \exp(-\hat{\alpha}_1 t_k)] + \hat{a}_2 [1 - \exp(-\hat{\alpha}_2 t_k)] + \hat{c} t_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N - 1,$$

в которой оценки параметров соответствуют элементам вектора $\hat{\mu}^{(i+1)}$:

$$\hat{a}_1 = \hat{\mu}_1^{(i+1)}, \quad \hat{\alpha}_1 = \hat{\mu}_2^{(i+1)}, \quad \hat{a}_2 = \hat{\mu}_3^{(i+1)}, \quad \hat{\alpha}_2 = \hat{\mu}_4^{(i+1)}, \quad \hat{c} = \hat{\mu}_5^{(i+1)}.$$

Для вычисления дисперсий величин a_1 , α_1 , a_2 , α_2 и c находится матрица $V[\mu] = (W^\top W)^{-1} s_{\text{ост}}^2$, диагональные элементы которой $V_{11}(\mu) = D(a_1)$, $V_{22}(\mu) = D(\alpha_1)$, $V_{33}(\mu) = D(a_2)$, $V_{44}(\mu) = D(\alpha_2)$, $V_{55}(\mu) = D(c)$ и задают дисперсию величин a_1 , α_1 , a_2 , α_2 и c .

На заключительном шаге третьего этапа решается задача проверки адекватности построенной модели результатам наблюдений и, как следствие, целесообразности использования в модели третьей экспоненциальной составляющей. Для этого следует применить критерии адекватности модели, представленные соотношениями (21) или (22).

Этап 4. Если условия (23) не выполняются, то следует перейти к четвертому этапу численного метода — выделению в соотношении для кривой ползучести (3) третьей экспоненциальной составляющей: $a_3[1 - \exp(-\alpha_3 t_k)]$.

Алгоритм вычисления среднеквадратичных оценок параметров третьей экспоненциальной составляющей аналогичен процедурам, описанным выше на втором и третьем этапах численного метода. В основе этого алгоритма лежит выборка результатов расчета:

$$y_k^{(3)} = y_k - \hat{y}_{1k} - y_k^{(1)} - y_k^{(2)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N - 1.$$

При уточнении среднеквадратичных оценок параметров нелинейной регрессии (3) с тремя экспоненциальными составляющими на основе итерационной процедуры (18) матрица Якоби $W(\mu)$ имеет размер $[N \times 7]$ и содержит уже семь столбцов w_{kj} , $1 \leq j \leq 7$, первые четыре из которых описываются формулами (25), (26), (27), (28), последний седьмой — формулой (29), а пятый и шестой — формулами

$$w_{k5}(\mu) = \frac{\partial f_k(\mu)}{\partial a_3} = 1 - \exp(-\alpha_3 t_k), \quad k = 0, 1, \dots, N - 1;$$

$$w_{k6}(\mu) = \frac{\partial f_k(\mu)}{\partial \alpha_3} = a_3 t_k \exp(-\alpha_3 t_k), \quad k = 0, 1, \dots, N - 1.$$

Далее алгоритм аналогичен случаю построения первых двух экспонент.

Таким образом, разработанный метод параметрической идентификации кривых ползучести в пределах первых двух стадий при постоянных напряжениях позволяет за счет последовательного выделения экспоненциальных составляющих и статистических методов нелинейной регрессии существенно повысить вычислительную устойчивость и достоверность оценок параметров соответствующей аппроксимации, а также ее адекватность экспериментальным данным.

2. Построение математической модели теории неполной обратимости деформации ползучести. Как отмечено выше, исходной информацией для идентификации параметров и функций в (1) является серия кривых стационарной ползучести при постоянных напряжениях $\sigma(t) = \sigma^j$, $1 \leq j \leq m$, при $t \in [0, T]$ с последующей разгрузкой: $\sigma(t) = 0$, $t > T$.

Этап 1. На первом этапе для каждой кривой ползучести при $\sigma(t) = \sigma^j$, $t \in [0, T]$, описываемой соотношением (2), по изложенной в п. 1 методике определяются оценки величин \hat{a}_i^j , $\hat{\alpha}_i^j$, \hat{c}_i^j и их дисперсии, $1 \leq i \leq s$, $1 \leq j \leq m$. Поскольку стохастически нелинейные определяющие соотношения трудно использовать при решении соответствующих краевых задач, величины α_i в (1) будем считать детерминированными и полагать их значения равными усредненным значениям α_i^j при всех уровнях напряжений:

$$\alpha_i = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \alpha_i^j.$$

Аналогично, по этой же причине и величину β будем также считать детерминированной (процедура ее вычисления приводится ниже). Тогда уравнения (1) будут стохастически линейными.

Этап 2. На втором этапе находятся аппроксимационные зависимости для величин $\hat{a}_i^j, \hat{c}^j, 1 \leq j \leq m$, вида

$$\hat{a}_i^* = \hat{b}_i \left(\frac{\sigma}{\sigma_*} \right)^{n_i}, \quad \hat{c}^* = \hat{\gamma} \left(\frac{\sigma}{\sigma_*} \right)^n \quad (30)$$

по методу наименьших квадратов, т.е. в (1) полагаем, что

$$\varphi_i \left(\frac{\sigma}{\sigma_*} \right) = \left(\frac{\sigma}{\sigma_*} \right)^{n_i}, \quad f \left(\frac{\sigma}{\sigma_*} \right) = \hat{\gamma} \left(\frac{\sigma}{\sigma_*} \right)^n,$$

где n_i и n — детерминированные параметры.

Этап 3. На третьем этапе в качестве базовой принимается кривая ползучести при $\sigma(t) = \sigma^j = \sigma_*$, $1 \leq j \leq m$. Тогда соотношение типа (2) для этой кривой ползучести имеет вид

$$p(t) = \sum_{i=1}^s \hat{b}_i [1 - \exp(-\alpha_i t)] + \hat{\gamma} t, \quad (31)$$

где \hat{b}_i и $\hat{\gamma}$ определяются из аппроксимации (30), а величина \hat{a}_i находится усреднением величин $\alpha_i^j, 1 \leq j \leq m$, по всем реализациям. Поскольку величины \hat{b}_i и $\hat{\gamma}$ в (31) не совпадают с аналогичными значениями a_i и c в (2), оценки дисперсий величин b_i и γ определим, используя дисперсии a_i и c , полученные ранее для кривой ползучести при $\sigma = \sigma_*$ на первом этапе исследований, полагая

$$D[b_i] = \left(\frac{\hat{b}_i}{\hat{a}_i} \right)^2 D[a_i], \quad D[\gamma] = \left(\frac{\hat{\gamma}}{\hat{c}} \right)^2 D[c]. \quad (32)$$

Полученным оценкам параметров b_i и γ придается универсальный характер, т.е. они используются при любых значениях напряжений $\sigma = \sigma(t)$ в определяющих соотношениях (1).

Поскольку оценки математических ожиданий случайных величин b_i и γ и их дисперсий известны, можно построить доверительные интервалы для деформации ползучести $p(t)$ при любых законах $\sigma = \sigma(t)$ на основании (1), в частности для серии кривых ползучести при $\sigma(t) = \sigma^j, 1 \leq j \leq m$, используя стохастически линейную зависимость вида

$$p(t) = \sum_{i=1}^s b_i \left(\frac{\sigma}{\sigma_*} \right)^{n_i} [1 - \exp(-\alpha_i t)] + \gamma \left(\frac{\sigma}{\sigma_*} \right)^n t,$$

из которой нетрудно определить дисперсию величины $p(t)$ в любой момент времени.

Этап 4. На четвертом этапе определяется величина β в соотношениях (1), которая задает величину обратимой компоненты деформации ползучести, накопленной на первой стадии ползучести после полной разгрузки образца. В дальнейшем для сохранения стохастической линейности (1) вводим гипотезу, что величина β также является детерминированной. Если на кривых ползучести при $\sigma = \sigma^j$ наблюдается ярко выраженная вторая стадия

ползучести, т.е. величина $w^j(t) + v^j(t)$ достигла асимптотического значения

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [w^j(t) + v^j(t)] = \sum_{i=1}^s b_i \left(\frac{\sigma^j}{\sigma_*} \right)^{n_i},$$

то величина β^j для этой кривой ползучести находится по формуле

$$\beta^j = \frac{p^j(T) - p^j(T + t^*)}{\sum_{i=1}^s b_i (\sigma^j / \sigma_*)^{n_i}},$$

где t^* — время окончания наблюдения за деформацией ползучести после разгрузки ($\sigma^j(t) = 0$, $t \in [T, t^*]$).

В случае если вторая стадия отсутствует, т.е. в наличии только первая стадия, величина β^j определяется в соответствии с зависимостью

$$\beta^j = \frac{p^j(T) - p^j(T + t_1)}{p^j(t_1)},$$

где $t_1 \in (0, T)$.

Далее в качестве величины β принимается осредненное значение

$$\beta = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \beta^j.$$

Последним четвертым этапом завершается построение стохастически линейных уравнений теории неполной обратимости деформации ползучести вида (1), при этом в качестве исходной информации используется серия осредненных кривых стационарной ползучести при постоянных напряжениях с последующей разгрузкой.

3. Результаты расчетов и их анализ. Применение разработанной методики построения теории неполной обратимости деформации ползучести (1) реализовано на основе большого массива экспериментальных данных из работ [19, 31]. В качестве примера приведем результаты расчетов для сплавов ВЖ98 при температуре 900 °С, ЭИ437А при температуре 700 °С, стали ЭИ736 при 500 °С из [31] (здесь отсутствуют данные о деформации ползучести при полной разгрузке образцов, поэтому полагалось, что $\beta = 0$) и сплава ЭП693 при температуре 700 °С [19], где имеются кривые обратной ползучести ($\beta \neq 0$).

Применение разработанной методики определения оценок параметров аппроксимации (2) показало, что для всех материалов достаточно одного экспоненциального слагаемого ($s = 1$). В табл. 1 приведены оценки основных параметров (2) для каждой кривой ползучести при фиксированном напряжении. Далее в соответствии с методикой строились степенные аппроксимации (30) и определялись \hat{b}_i , n_1 , $\hat{\gamma}$, n , а для определения дисперсий $D[b_1]$ и $D[\gamma]$ пользовались формулой (32), где \hat{a}_1 и \hat{c} соответствуют базовой кривой ползучести при $\sigma = \sigma_*$. В табл. 2 приведены окончательные оценки всех параметров определяющих уравнений состояния (1) для всех исследуемых материалов.

Таблица 1

Расчетные оценки параметров аппроксимаций кривых ползучести для сплавов ВЖ98, ЭИ437А, ЭП693 и стали ЭИ698 при фиксированных напряжениях [Estimated parameters for the approximation of creep curves for alloys VZh98, EI437A, EP693, and steel EI698 at fixed stresses]

σ , МПа	α_1, h^{-1}	$\hat{a}_1 \cdot 10^4$	$\hat{c} \cdot 10^6$	$D[a_1] \cdot 10^9$	$D[c] \cdot 10^{13}$	σ_* , МПа
EI736 steel, 500°C						
170	0.2	4.67	1.9	0.324	0.74	200
200	0.5	7.74	4.36	0.72	1.9	
250	0.38	9.81	6.87	1.14	2.72	
EI437A alloy, 700°C						
240	0.16	2.38	3.1	0.25	0.55	300
300	0.37	3.44	6.71	0.124	0.39	
350	0.28	5.71	11.36	0.162	0.44	
VZh98 alloy, 900°C						
10	0.27	4.48	10.2	0.818	1.97	15
15	0.24	11.07	19.5	4.23	9.76	
20	0.25	13.5	30	4.35	10.3	
25	0.3	17.8	49.5	8.9	21.4	
EP693 alloy, 700°C						
245.3	0.25	2.82	8.3	0.163	0.37	294.3
294.3	0.28	3.26	16.1	1.5	3.19	
343.4	0.56	4.15	38.9	1.83	12.2	

Таблица 2

Расчетные оценки параметров стохастической модели (1) [Estimated parameters of the stochastic model (1)]

Material	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{b}_1 \cdot 10^4$	$\hat{\gamma} \cdot 10^6$	$D[b_1] \cdot 10^9$	$D[\gamma] \cdot 10^{13}$	n_1	n	β
VZh98 alloy, 900°C	0.27	9.0	20.0	2.80	10.0	1.46	1.71	0
EI736 steel, 500°C	0.36	7.0	4.0	0.59	1.60	1.86	3.2	0
EI437A alloy, 700°C	0.27	3.8	7.0	0.15	0.43	2.24	3.45	0
EP693 alloy, 700°C	0.36	3.4	18	1.63	4.0	1.14	4.6	0.64

Анализ данных табл. 2 свидетельствует, что величины α_i^j , $D[b_i^j]$, $D[\gamma^j]$ ($1 \leq j \leq m$) монотонно не зависят от величины напряжения, что может служить некоторым обоснованием принятой гипотезы об их фиксированной величине в соотношениях (1).

На рис. 1, а в качестве иллюстрации приведены результаты аппроксимации после первичной статистической обработки кривых ползучести сплава ЭИ437А при температуре 700°C для трех уровней напряжений на основании функциональной зависимости, задаваемой соотношением (2). Исходя из некоррелированности случайных величин a_i и c , дисперсия для деформации $p(t)$ для каждой кривой в любой момент времени с данными из табл. 1 рассчитывалась по формуле

$$D[p(t)] = \sum_{i=1}^s D[a_i] (1 - \exp(-\alpha_i t))^2 + D[c] t^2,$$

а затем с использованием классической методики [27] строились 99% доверительные интервалы для математического ожидания деформации $p(t)$. Зна-

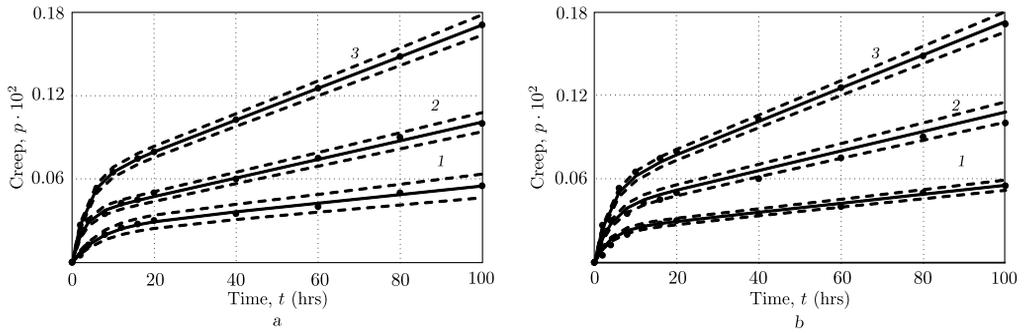


Рис. 1. Результаты первичной аппроксимации кривых ползучести ЭИ437А при температуре 700 °С с данными из табл. 1 (а) и по модели (1) с данными из табл. 2 (b): 1 — $\sigma = 240$ МПа, 2 — $\sigma = 300$ МПа, 3 — $\sigma = 350$ МПа; сплошная линия — математическое ожидание; штриховые линии — границы доверительных интервалов; маркеры (точки) — экспериментальные данные для ползучести

[Figure. 1. Results of the primary approximation of creep curves for EI437A at a temperature of 700 °C with data from table 1 (a), and according to the model (1) with data from table 2 (b): 1 — $\sigma = 240$ MPa, 2 — $\sigma = 300$ MPa, 3 — $\sigma = 350$ MPa; solid line — mathematical expectation; dashed lines — confidence interval boundaries; markers (dots) — experimental data for creep]

чения математических ожиданий величин \hat{a}_i , \hat{c} и $\hat{\alpha}_i$ и дисперсий $D[a_i]$, $D[c]$ приведены в табл. 1. На рис. 1, b и рис. 2 приведены расчетные значения для деформации ползучести по реологической модели (1) с параметрами, приведенными в табл. 2, для четырех материалов: ЭИ437А (700 °С), ЭИ736 (500 °С), ВЖ98 (900 °С) и ЭП693 (700 °С). На всех рисунках сплошная линия — математическое ожидание, штриховые линии — границы 99% доверительного интервала, маркеры (точки) — экспериментальные значения деформации ползучести. Для построения доверительных интервалов по модели (1) расчет дисперсии для деформации ползучести осуществлялся по формуле (см. формулу (32))

$$D[p(t)] = \sum_{i=1}^s D[b_i] \left[\left(\frac{\sigma}{\sigma_*} \right)^{n_i} (1 - \exp(-\alpha_i t)) \right]^2 + D[\gamma] \left[\left(\frac{\sigma}{\sigma_*} \right)^n t \right]^2.$$

Для всех приведенных вариантов расчета экспериментальные данные не выходят за пределы соответствующих доверительных интервалов для деформации ползучести, что свидетельствует о достоверности оценок параметров модели (1) и ее адекватности.

Прокомментируем полученные результаты с точки зрения построения детерминированных теорий ползучести на основании осредненных экспериментальных стационарных кривых ползучести. Как отмечено выше, идентификация параметров в этих теориях осуществляется эвристически по некоторому набору характерных точек на кривых ползучести без какого-либо строгого научного обоснования их выбора, при этом вопросы достоверности полученных детерминированных оценок параметров, устойчивости алгоритмов определения оценок к выбору и количеству характерных точек, помехозащищенности предлагаемых эвристических численных процедур идентификации со строгих позиций вычислительной математики вообще не рассматриваются. В данной же статье показано, что при использовании полной экспериментальной статистической информации о кривых стационарной ползучести па-

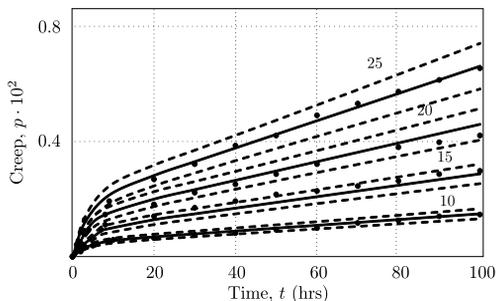
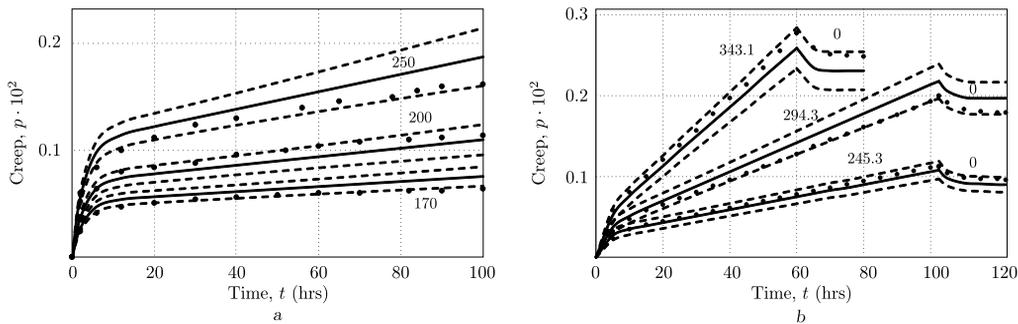


Рис. 2. Расчетные данные деформации ползучести по модели (1) для стали ЭИ736 (500 °С) (а), сплава ВЖ98 (900 °С) (б), сплава ЭП693 (700 °С) (с): сплошная линия — математическое ожидание; штриховые линии — границы доверительных интервалов; маркеры (точки) — экспериментальные данные; цифры — напряжения в МПа

[Figure. 2. Calculated data of creep deformation according to the model (1) for EI736 steel (500 °C) (a), VZh98 alloy (900 °C) (b), and EP693 alloy (700 °C) (c): solid line — mathematical expectation; dashed lines — confidence interval boundaries; markers (dots) — experimental data; numbers — stress in MPa]

параметры модели являются не детерминированными, а случайными, и поэтому соответствующие реологические модели являются стохастическими, даже если ориентироваться на осредненные экспериментальные зависимости для деформации ползучести при постоянных напряжениях. Такого рода модели позволяют получать более достоверную информацию, например, о деформации ползучести в фиксированные моменты времени или о времени достижения заданного значения деформации.

Закключение.

1. Разработан новый численный метод параметрической и структурной идентификации нелинейной теории неполной обратимости деформации ползучести, позволяющий свести задачу к нелинейному регрессионному анализу определения оценок случайных параметров реологической модели на основе временных рядов последовательности результатов наблюдений деформации ползучести при различных постоянных напряжениях.
2. Показано, что при использовании даже осредненных экспериментальных кривых ползучести построенная реологическая модель на их основе является стохастической вследствие процедуры параметрической идентификации нелинейной регрессионной модели.
3. Выполнена параметрическая и структурная идентификация теории неполной обратимости деформации ползучести для ряда сталей и сплавов, получены численные значения оценок параметров для этих материалов.
4. Выполнена проверка адекватности построенной математической теории неполной обратимости деформации ползучести эксперименталь-

ным данным для стали ЭИ736 (500°C) и сплавов: ЭИ437А (700°C), ВЖ98 (900°C) и ЭП693 (700°C). Наблюдается соответствие расчетных и опытных данных. Экспериментальные данные принадлежат соответствующим доверительным интервалам для деформации ползучести, что свидетельствует о достоверности полученных оценок параметров модели.

5. Разработано не имеющее аналогов программное обеспечение для предложенного численного метода идентификации параметров реологической модели.

Конкурирующие интересы. Конфликта интересов в отношении авторства и публикации этой статьи нет.

Авторский вклад и ответственность. Все авторы в равной степени принимали участие в разработке концепции статьи и в написании рукописи. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

Финансирование. Работа поддержана Министерством науки и высшего образования Российской Федерации в рамках государственного задания Самарского государственного технического университета (тема № FSSE-2023-0003).

Библиографический список

1. Работнов Ю. Н. *Ползучесть элементов конструкций*. М.: Наука, 1966. 752 с.
2. Болотин В. В. *Прогнозирование ресурсов машин и конструкций*. М.: Машиностроение, 1984. 312 с.
3. Ломакин В. А. *Статистические задачи механики твердых деформируемых тел*. М.: Наука, 1970. 139 с.
4. Радченко В. П., Дудкин С. А., Тимофеев М.И. Экспериментальное исследование и анализ полей неупругих микро- и макродеформаций сплава АД-1 // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2002. № 16. С. 111–117. EDN: EBNEIR. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu107>.
5. Самарин Ю. П. О применении стохастических уравнений в теории ползучести материалов // *Изв. АН СССР. МТТ*, 1974. № 1. С. 88–94.
6. Самарин Ю. П. Стохастические механические характеристики и надежность конструкций с реологическими свойствами / *Ползучесть и длительная прочность конструкций*. Куйбышев: КПТИ, 1986. С. 8–17.
7. Радченко В. П., Саушкин М. Н., Голудин Е. П. Стохастическая модель неизотермической ползучести и длительной прочности материалов // *ПМТФ*, 2012. Т. 53, № 2. С. 167–174. EDN: NJQRJC.
8. Радченко В. П., Симонов А. В., Дудкин С.А. Стохастический вариант одномерной теории ползучести и длительной прочности // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2001. № 12. С. 73–84. EDN: EBNDJR. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu64>.
9. Радченко В. П., Голудин Е.П. Феноменологическая стохастическая модель изотермической ползучести поливинилхлоридного пластика // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2008. № 1. С. 45–52. EDN: JTBCLH. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu571>.
10. Должковой А. А., Попов Н. Н., Радченко В. П. Решение стохастической краевой задачи установившейся ползучести для толстостенной трубы методом малого параметра // *ПМТФ*, 2006. Т. 47, № 1. С. 160–171. EDN: NYCLUT.
11. Попов Н. Н., Радченко В. П. Аналитическое решение стохастической краевой задачи установившейся ползучести для толстостенной трубы // *ПММ*, 2012. Т. 76, № 6. С. 1023–1031. EDN: PJCSUP.

12. Попов Н. Н., Самарин Ю. П. Исследование полей напряжений вблизи границы стохастически неоднородной полуплоскости при ползучести // *ПМТФ*, 1988. Т. 29, № 1. С. 159–164. EDN: TTRZEF.
13. Попов Н. Н., Самарин Ю. П. Пространственная задача стационарной ползучести стохастически неоднородной среды // *ПМТФ*, 1985. Т. 26, № 2. С. 150–155. EDN: TTRZCH.
14. Попов Н. Н. Нелинейная стохастическая задача ползучести толстостенной сферической оболочки // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2000. № 9. С. 186–189. EDN: IРKHCH. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu48>.
15. Попов Н. Н. Ползучесть стохастически неоднородной пластины с круговым отверстием // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2008. № 2. С. 126–132. EDN: JZASMP. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu630>.
16. Локощенко А. М. *Ползучесть и длительная прочность металлов*. М.: Физматлит, 2016. 489 с.
17. Никитенко А. Ф. *Ползучесть и длительная прочность металлических материалов*. Новосибирск: Новосиб. гос. архит.-строит. ун-т, 1997. 278 с.
18. Волков И. А., Коротких Ю. Г. *Уравнения состояния вязкоупругопластических сред с повреждениями*. М.: Физматлит, 2008. 424 с. EDN: RYRTNT.
19. Радченко В. П., Еремин Ю. А. *Реологическое деформирование и разрушение материалов и элементов конструкций*. М.: Машиностроение-1, 2004. 265 с. EDN: QNATSX.
20. Волков И. А., Игумнов Л. А., Сметанин И. В. [и др.] *Ползучесть и длительная прочность материалов и конструкций*. Нижний Новгород: Нижегород. ун-т, 2021. 155 с.
21. Волков И. А., Игумнов Л. А., Шишулин Д. Н. *Оценка ресурсных характеристик материалов и конструкций при усталости и ползучести*. Нижний Новгород: Нижегород. ун-т, 2020. 106 с.
22. Самарин Ю. П. *Уравнения состояния материалов со сложными реологическими свойствами*. Куйбышев: КуГУ, 1979. 84 с.
23. *Расчетные и расчетно-экспериментальные методы определения несущей способности и долговечности элементов машин и конструкций. Расчетно-экспериментальный метод определения параметров ползучести и длительной прочности при одноосном нагружении в условиях нестационарного нагружения: Методические рекомендации (1-я редакция)*. М.: Госстандарт, 1982.
24. Самарин Ю. П. Построение экспоненциальных аппроксимаций для кривых ползучести методом последовательного выделения экспоненциальных слагаемых // *Пробл. прочности*, 1974. № 9. С. 24–27.
25. Мухина Л. Г. Вычисление характеристик ползучести по опытным данным с применением метода непараметрического выравнивания / *Теоретико-экспериментальный метод исследования ползучести в конструкциях*. Куйбышев: КуАИ, 1984. С. 86–94.
26. Draper N. R., Smith H. *Applied Regression Analysis*. New York: John Wiley and Sons, 1998. xix+716 pp. DOI: <https://doi.org/10.1002/9781118625590>.
27. Демиденко Е. З. *Линейная и нелинейная регрессии*. Куйбышев: Финансы и статистика, 1981. 302 с.
28. Зотеев В. Е. Параметрическая идентификация кривых ползучести на основе стохастических разностных уравнений // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2008. № 1. С. 90–95. EDN: JTBCNZ. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu578>.
29. Зотеев В. Е., Макаров Р. Ю. Численный метод определения параметров первой стадии деформации ползучести // *Современные технологии. Системный анализ. Моделирование*, 2017. № 4. С. 40–48. EDN: YLXFDY. DOI: [https://doi.org/10.26731/1813-9108.2017.4\(56\).40-48](https://doi.org/10.26731/1813-9108.2017.4(56).40-48).
30. Зотеев В. Е. Численный метод нелинейного оценивания на основе разностных уравнений // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2018. Т. 22, № 4. С. 669–701. EDN: YSDYZN. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1643>.
31. Бульгин И. П., Власова П. Т., Горбодей А. Т. [и др.] *Атлас диаграмм растяжения при высоких температурах, кривых ползучести и длительной прочности сталей и сплавов для двигателей*. М.: Оборонгиз, 1957. 174 с.

MSC: 74S60, 74D10

Numerical method for structural and parametric identification of a mathematical model of incomplete inverse deformation of creep strain

*V. P. Radchenko, V. E. Zoteev, E. A. Afanaseva*Samara State Technical University,
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russian Federation.

Abstract

A new numerical method for parametric and structural identification of the physically nonlinear theory of reversibility of creep strain, valid within the first and second stages, has been developed. A series of stationary creep curves is used as basic experimental information. The problem is reduced to nonlinear regression analysis of determining estimates of random parameters based on time series of a sequence of observations of creep deformation at various constant stresses using difference equations. The obtained relationships between the coefficients of the difference equation and the parameters of nonlinear regression allow us to reduce the problem of estimating the coefficients of a linear-parametric discrete model. Corresponding iterative algorithms for refining parameter estimates with any given accuracy have been developed. Parametric and structural identification of the theory of incomplete reversibility of creep deformation has been carried out for steel EI736 (500 °C) and alloys EI437A (700 °C), VZh98 (900 °C), EP693 (700 °C). Numerical values of model parameter estimates for these alloys are given. The adequacy of the constructed mathematical models was checked, and the relation between the calculated and experimental data was observed. Experimental data for all materials considered belong to the corresponding

Mechanics of Solids

Research Article

© Authors, 2024

© Samara State Technical University, 2024 (Compilation, Design, and Layout)

© The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Please cite this article in press as:

Radchenko V. P., Zoteev V. E., Afanaseva E. A. Numerical method for structural and parametric identification of a mathematical model of incomplete inverse deformation of creep strain, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2024, vol. 28, no. 1, pp. 73–95. EDN: KRTZPA. DOI: 10.14498/vsgtu2071 (In Russian).

Authors' Details:

Vladimir P. Radchenko  <https://orcid.org/0000-0003-4168-9660>Dr. Phys. & Math. Sci., Professor; Head of Dept.; Dept. of Applied Mathematics & Computer Science; e-mail: radchenko.vp@samgtu.ru*Vladimir E. Zoteev*  <https://orcid.org/0000-0001-7114-4894>Dr. Tech. Sci.; Professor; Dept. of Applied Mathematics & Computer Science; e-mail: zoteev.ve@samgtu.ru*Elena A. Afanaseva*  <https://orcid.org/0000-0001-7815-2723>Postgraduate Student; Dept. of Applied Mathematics & Computer Science; e-mail: afanasieva.ea@samgtu.ru

calculated confidence intervals for creep deformation, which indicates the reliability of the obtained estimates of the model parameters.

Keywords: creep, nonlinear regression model, identification, difference equations, root-mean-square parameter estimates.

Received: 15th December, 2023 / Revised: 13th February, 2024 /

Accepted: 27th February, 2024 / First online: 28th May, 2024

Competing interests. There is no conflict of interest regarding the authorship and publication of this article.

Authors' contributions and responsibilities. All authors equally participated in the development of the article's concept and in writing the manuscript. The authors take full responsibility for submitting the final manuscript for publication. The final version of the manuscript has been approved by all authors.

Funding. The work was supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (theme no. FSSE-2023-0003) as part of the state task of the Samara State Technical University.

References

1. Rabotnov Yu. N. *Creep Problems in Structural Members*, North-Holland Series in Applied Mathematics and Mechanics, T.7. Amsterdam, London, North-Holland Publ., 1969, xiv+822 c.
2. Bolotin V. V. *Prognozirovanie resursov mashin i konstruktssii* [Forecasting Resource Machines and Structures]. Moscow, Mashinostroenie, 1984, 312 pp. (In Russian)
3. Lomakin V. A. *Statisticheskie zadachi mekhaniki tverdykh deformiruemyykh tel* [Statistical Problems of the Mechanics of Deformable Solids]. Moscow, Nauka, 1970, 139 pp. (In Russian)
4. Radchenko V. P., Dudkin S. A., Timofeev M. I. Experimental study and analysis of the inelastic micro- and macro-inhomogeneity fields of AD-1 alloy, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2002, no. 16, pp. 111–117 (In Russian). EDN: EBNEIR. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu107>.
5. Samarin Yu. P. Use of stochastic equations in the theory of creep of materials, *Izv. AN SSSR. MTT*, 1974, no. 1, pp. 88–94 (In Russian).
6. Samarin Yu. P. Stochastic mechanical properties and reliability of structures with rheological properties, In: *Polzuchest' i dlitel'naiia prochnost' konstruktssii* [Creep and Long-Term Strength of Structures]. Kuybyshev, Kuybyshev Polytech. Inst., 1986, pp. 8–17 (In Russian).
7. Radchenko V. P., Saushkin M. N., Goludin E. P. Stochastic model of nonisothermal creep and long-term strength of materials, *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2012, vol. 53, no. 2, pp. 292–298. EDN: PDNKAX. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0021894412020186>.
8. Radchenko V. P., Simonov A. V., Dudkin S. A. Stochastic version of the one-dimensional theory of creep and long-term strength, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2001, no. 12, pp. 73–84 (In Russian). EDN: EBNDRJ. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu64>.
9. Radchenko V. P., Goludin E. P. Phenomenological stochastic isothermal creep model for an polivinylchloride elastron, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2008, no. 1, pp. 45–52 (In Russian). EDN: JTBCLH. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu571>.
10. Dolzhkovi A. A., Popov N. N., Radchenko V. P. Solution of the stochastic boundary-value problem of steady-state creep for a thick-walled tube using the small-parameter method, *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2006, vol. 47, no. 1, pp. 134–142. EDN: LJWXBX. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10808-006-0017-0>.

11. Popov N. N., Radchenko V. P. Analytical solution of the stochastic steady-state creep boundary value problem for a thick-walled tube, *J. Appl. Math. Mech.*, 2012, vol. 76, no. 6, pp. 738–744. EDN: WQYAXJ. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2013.02.011>.
12. Popov N. N., Samarin Yu. P. Stress fields close to the boundary of a stochastically inhomogeneous half-plane during creep, *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 1988, vol. 29, no. 1, pp. 149–154. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00909710>.
13. Popov N. N., Samarin Yu. P. Spatial problem of stationary creep of a stochastically inhomogeneous medium, *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 1985, vol. 26, no. 2, pp. 296–301. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00908983>.
14. Popov N. N. Nonlinear stochastic creep problem of a thick-walled spherical shell, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2000, no. 9, pp. 186–189 (In Russian). EDN: IPKHCH. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu48>.
15. Popov N. N. Creep of a stochastic heterogeneous plate with a small circular hole, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2008, no. 2, pp. 126–132 (In Russian). EDN: JZASMP. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu630>.
16. Lokoshchenko A. M. *Creep and Long-Term Strength of Metals*. Boca, Raton, CRC Press, 2016, xviii+545 pp.
17. Nikitenko A. F. *Polzuchest' i dlitel'naia prochnost' metallicheskih materialov* [Creep and Long-Term Strength of Metallic Materials]. Novosibirsk, Novosibirsk State Univ. of Archit. and Civil Engin., 1997, 278 pp. (In Russian)
18. Volkov I. A., Korotkikh Yu. G. *Uravneniia sostoianiiia viazkouprugoplasticheskikh sred s povrezhdeniiami* [Equations of State for Viscoelastic-Plastic Media with Damage]. Moscow, Fizmatlit, 2008, 424 pp. (In Russian). EDN: RYRTNT.
19. Radchenko V. P., Eremin Yu. A. *Reologicheskoe deformirovanie i razrushenie materialov i elementov konstruksii* [Rheological Deformation and Fracture of Materials and Structural Elements]. Moscow, Mashinostroenie-1, 2004, 265 pp. (In Russian). EDN: QNAT SX.
20. Volkov I. A., Igumnov L. A., Smetanin I. V., et al. *Polzuchest' i dlitel'naia prochnost' materialov i konstruksii* [Creep and Long-Term Strength of Materials and Structures]. Nizhny Novgorod, Nizhny Novgorod Univ., 2021, 155 pp. (In Russian)
21. Volkov I. A., Igumnov L. A., Shishulin D. N. *Otsenka resursnykh kharakteristik materialov i konstruksii pri ustalosti i polzuchesti* [Assessment of Resource Characteristics of Materials and Structures during Fatigue and Creep]. Nizhny Novgorod, Nizhny Novgorod Univ., 2020, 106 pp. (In Russian)
22. Samarin Yu. P. *Uravneniia sostoianiiia materialov so slozhnymi reologicheskimi svoistvami* [Equations of State of Materials with Complex Rheological Properties]. Kuybyshev, Kuybyshev State Univ., 1979, 84 pp. (In Russian)
23. *Theoretical and Theoretical-Empirical Methods of Determining the Load-Carrying Capacity and Life of Machine Elements and Structures. Theoretical-Experimental Method of Determining Creep and Rupture-Strength Parameters for Nonsteady Uniaxial Loading* (1st ed.). Moscow, Gosstandart, 1982 (In Russian).
24. Samarin Yu. P. Derivation of exponential approximations for creep curves by the method of successive isolation of exponential terms, *Strength Mater.*, 1974, vol. 6, no. 9, pp. 1062–1066. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01528264>.
25. Mukhina L. G. Calculation of creep characteristics from experimental data using the non-parametric alignment method, In: *Teoretiko-eksperimental'nyi metod issledovaniia v konstruksiiakh* [Theoretical and Experimental Method of Research in Construction]. Kuybyshev, KuAI, 1984, pp. 86–94 (In Russian).
26. Draper N. R., Smith H. *Applied Regression Analysis*. New York, John Wiley and Sons, 1998, xix+716 pp. DOI: <https://doi.org/10.1002/9781118625590>.
27. Demidenko E. Z. *Lineinaia i nelineinaia regressii* [Linear and Nonlinear Regressions]. Moscow, Finansy i statistika, 1981, 302 pp.

28. Zoteev V. E. Parametrical identification of creep's curve on the basis of stochastic difference equations, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2008, no. 1, pp. 90–95 (In Russian). EDN: JTBCNZ. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu578>.
29. Zoteev V. E., Makarov R. Yu. A numerical method for determining the parameters of the first stage of creep deformation, *Sovremennye tekhnologii. Sistemnyi analiz. Modelirovanie* [Modern Technologies. System Analysis. Modeling], 2017, no. 4, pp. 40–48 (In Russian). EDN: YLXFDY. DOI: [https://doi.org/10.26731/1813-9108.2017.4\(56\).40-48](https://doi.org/10.26731/1813-9108.2017.4(56).40-48).
30. Zoteev V. E. A numerical method of nonlinear estimation based on difference equations, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2018, vol. 22, no. 4, pp. 669–701 (In Russian). EDN: YSDYZN. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1643>.
31. Bulygin I. P., Vlasova P. T., Gorbodey A. T. et al. *Atlas diagramm rastiazheniia pri vysokikh temperaturakh, krivykh polzuchesti i dlitel'noi prochnosti stalei i splavov dlia dvigatelei* [Atlas of Tensile Diagrams at High Temperatures, Curves of Creep and Long-Term Strength of Steels for Engines]. Moscow, Oborongiz, 1957, 174 pp. (In Russian)



УДК 534.13

Математические модели нелинейной динамики функционально-градиентных нано/микро/макромасштабных пористых замкнутых цилиндрических оболочек Кирхгофа–Лява

Т. В. Яковлева, В. А. Крысько

Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А., Россия, 410054, Саратов, ул. Политехническая, 77.

Аннотация

Построены новые математические модели динамики нелинейных нано/микро/макромасштабных функционально-градиентных пористых замкнутых цилиндрических оболочек. В качестве кинематической модели для оболочек выбрана гипотеза Кирхгофа–Лява. Геометрическая нелинейность учитывается по модели фон Кармана. Нанозффекты учитываются согласно модифицированной моментной теории упругости. Вариационные и дифференциальные уравнения, граничные и начальные условия получены из принципа Гамильтона. Проводится доказательство теоремы существования решения на основе теории обобщенных решений дифференциальных уравнений (методы гильбертовых пространств, вариационные методы).

В качестве примеров рассмотрены нано/микро/макромасштабные замкнутые цилиндрические оболочки как системы с «почти» бесконечным числом степеней свободы под действием полосовой поперечной знакопеременной нагрузки. В качестве метода сведения уравнений в частных производных к задаче Коши принят метод Бубнова–Галеркина в высших приближениях. Исследована его сходимость.

Задача Коши решена методами Рунге–Кутты от четвертого до восьмого порядков точности и методом Ньюмарка. Применение нескольких численных методов на каждом этапе моделирования необходимо для достоверности получаемых результатов. Исследование характера сложных колебаний замкнутой цилиндрической нано/микро/макромасштабной

Механика деформируемого твердого тела

Научная статья

© Коллектив авторов, 2024

© СамГТУ, 2024 (составление, дизайн, макет)

Контент публикуется на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

Образец для цитирования

Яковлева Т. В., Крысько В. А. Математические модели нелинейной динамики функционально-градиентных нано/микро/макромасштабных пористых замкнутых цилиндрических оболочек Кирхгофа–Лява // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2024. Т. 28, № 1. С. 96–116. EDN: UHLXVK. DOI: 10.14498/vsgtu2046.

Сведения об авторах

Татьяна Владимировна Яковлева <https://orcid.org/0000-0003-3238-2317>

кандидат физико-математических наук, доцент; доцент; каф. математики и моделирования; e-mail: yan-tan1987@mail.ru

Вадим Анатольевич Крысько <https://orcid.org/0000-0002-4914-764X>

доктор технических наук, профессор; заведующий кафедрой; каф. математики и моделирования; e-mail: tak@san.ru

оболочки проведено методами нелинейной динамики, для этого построены сигналы, фазовые портреты, применены Фурье-анализ и различные вейвлет-преобразования, среди которых вейвлет Морле оказался наиболее информативным.

Анализ типа хаотических колебаний проводится на основе спектра показателей Ляпунова методом Сано–Савада и старшего показателя несколькими методами: Канца, Розенштейна, Вольфа. Показано, что величина размерно-зависимого параметра и учет пористости оказывают существенное влияние на характер колебаний цилиндрических оболочек. Обнаружено явление гиперхаоса.

Ключевые слова: динамика, пористость, модифицированная моментная теория упругости, теоремы существования решения, гиперхаос, модель Кирхгофа–Лява.

Получение: 26 июля 2023 г. / Исправление: 28 февраля 2024 г. /
Принятие: 4 марта 2024 г. / Публикация онлайн: 5 августа 2024 г.

Введение. Цилиндрические нанооболочки являются структурными элементами наноэлектромеханических систем, поэтому доказательство существования решения изучаемых задач является важным вопросом. Ранее в работе [1] была сформулирована и доказана теорема о существовании обобщенного решения математической модели многослойных ортотропных оболочек. Большое внимание в научной литературе уделяется исследованию устойчивости и напряженно-деформированного состояния оболочек, пластин [2] и балок [3] с учетом геометрической и физической нелинейности и размерно-зависимого параметра. Хаотическая динамика в основном рассматривалась в физике и радиофизике. Этому вопросу посвящены исследования классических систем: аттрактор Лоренца, Реслера, отображение Эно и др. [4]. В задачах теории однослойных оболочек хаотической динамике макромасштабных оболочек посвящены работы [5, 6]. Большинство исследований по нелинейной динамике нано/микро/макромасштабных замкнутых цилиндрических оболочек ограничиваются численным анализом без должного внимания к вопросу существования решения поставленных задач. Данная работа направлена на построение новых математических моделей нано/микро/макромасштабных пористых замкнутых цилиндрических оболочек с учетом геометрической и физической нелинейностей, которые охватывают реальную работу таких механических структур. Также данная работа направлена на математическое обоснование (формулировка и доказательство теорем существования решения), разработку численных методов решения поставленных задач, которые позволили бы изучать механические структуры корректно как системы с «почти» бесконечным числом степеней свободы, и получение достоверных результатов.

1. Постановка задачи. Рассмотрим упругое тело как обратимую среду, термодинамическими параметрами которой являются температура T , удельная энтропия S , напряжения σ_{ij} и деформации ε_{ij} . При этом энтропия и температура, соответствующие компоненты напряжения и деформации являются взаимно сопряженными параметрами состояния. Материал, из которого изготовлена цилиндрическая оболочка, считается изотропным, но неоднород-

ным, так что модуль растяжения \tilde{E} , сдвига \tilde{G} , коэффициент Пуассона $\tilde{\nu}$, коэффициент линейного теплового расширения $\tilde{\alpha}_T$ являются функциями от пространственных координат x, y, z , температуры T , объемной деформации ε_0 и интенсивности деформации ε_i . На таком представлении базируется метод переменных параметров упругости И. А. Биргера [7] для решения нелинейно-упругих и упругопластических задач. Метод переменных параметров упругости И. А. Биргера является итерационным методом, поэтому встает важный вопрос о его сходимости, доказательство которого приведено в работах И. И. Воровича и Ю. П. Красовского [8]. Это сделано в свете общей постановки задачи, о которой было сказано выше.

Рассмотрим тонкую оболочку объемом V с поверхностной площадью Ω , срединная поверхность которой ограничена замкнутой линией. Координатная поверхность $z = 0$ может проходить внутри оболочки или может совпадать с какой-либо из граничных поверхностей оболочки. Отнесем координатную поверхность $z = 0$ к криволинейной системе координат α и β таким образом, чтобы координатные линии α и β совпадали с линиями главной кривизны данной координатной поверхности. Внешняя нормаль направлена к центру кривизны оболочки.

Для описания термоупругого пластического динамического поведения оболочки используются следующие предположения: 1) гипотеза недеформируемых нормалей, данная для пологих оболочек в целом; 2) основные допущения нелинейной технической теории пологих оболочек; 3) гипотеза Дюамеля—Неймана. В этом случае из обобщенного закона Гука с учетом принятых допущений можно получить связь между компонентами напряженного и деформированного состояния:

$$\sigma_\alpha = B_{11}\varepsilon_1 + B_{12}\varepsilon_2 + z(B_{11}\varkappa_1 + B_{12}\varkappa_2) - (B_{11} + B_{12}) \int_{T_0}^T \tilde{\alpha}_T dT, \quad (1)$$

$$\sigma_\beta = B_{22}\varepsilon_2 + B_{21}\varepsilon_1 + z(B_{22}\varkappa_2 + B_{21}\varkappa_1) - (B_{22} + B_{21}) \int_{T_0}^T \tilde{\alpha}_T dT, \quad (2)$$

$$\tau_{\alpha\beta} = B_{11}\varepsilon_{\alpha\beta} + zB_{11}\varkappa_{12}, \quad (3)$$

где $B_{11} = B_{22} = \tilde{E}/(1 - \tilde{\nu}^2)$; $B_{12} = B_{21} = \tilde{\nu}\tilde{E}/(1 - \tilde{\nu}^2)$, $\varkappa_1 = \partial^2 w/\partial\alpha^2$, $\varkappa_2 = \partial^2 w/\partial\beta^2$, $\varkappa_{12} = \partial^2 w/(\partial\alpha\partial\beta)$.

Соотношения между деформациями и перемещениями координатной поверхности и выражения для кривизны приняты согласно теории фон Кармана. Интегрируя (1)–(3) по толщине оболочки, получим выражения для внутренних сил T_1, T_2, S_{12} . Умножая (1)–(3) на z и интегрируя полученное после этого по толщине оболочки, получим выражения для моментов M_1, M_2, H . При рассмотрении уравнений пологих оболочек в смешанной форме вводят функцию усилий обычным образом [9]. Для вариационной постановки будем использовать принцип Гамильтона—Остроградского [10], состоящий из суммы энергии деформации упругого тела, кинетической энергии упругого тела и работы внешних сил. Следует отметить, что этот вариационный принцип остается справедливым и для задачи с начальными деформациями, и для задачи с температурными напряжениями [11]. Вычисляя соответствующие вариации, получим уравнения равновесия, совместности деформаций и граничные условия для динамической задачи упругой термочувствительной тонкой

гибкой оболочки. Выпишем указанные уравнения в явном виде:

– уравнение равновесия:

$$\begin{aligned}
 & (d_{11}F_{\beta\beta} + d_{21}F_{\alpha\alpha} + k_2F)_{\alpha\alpha} + (d_{12}F_{\beta\beta} + d_{22}F_{\alpha\alpha} + k_1F)_{\beta\beta} + \\
 & + [(D_{11}^* - C_{11}^2)w_{\alpha\alpha} + (D_{12}^* - C_{12}^2)w_{\beta\beta}]_{\alpha\alpha} + 4[(D_{11}^* - C_{11}^2)w_{\alpha\beta}]_{\alpha\beta} + \\
 & + 4[(D_{22}^* - C_{22}^2)w_{\alpha\beta}]_{\alpha\beta} + [(D_{12}^* - C_{12}^2)w_{\alpha\alpha} + (D_{22}^* - C_{11}^2)w_{\beta\beta}]_{\beta\beta} + \\
 & + (F_{\beta\beta}w_{\alpha\alpha} - 2F_{\alpha\beta}w_{\alpha\beta} - F_{\alpha\alpha}w_{\beta\beta}) - (C_{1T}^1 - (d_{11} + d_{21})C_{1T}^0)_{\alpha\alpha} - \\
 & - (C_{1T}^1 - (d_{12} + d_{22})C_{1T}^0)_{\beta\beta} + q - m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0; \quad (4)
 \end{aligned}$$

– уравнение совместности деформаций:

$$\begin{aligned}
 & (A_{12}F_{\beta\beta} + A_{11}F_{\alpha\alpha})_{\alpha\alpha} + (A_{11}F_{\alpha\beta})_{\alpha\beta} + (A_{22}F_{\alpha\beta})_{\alpha\beta} + \\
 & + (A_{11}F_{\beta\beta} + A_{12}F_{\alpha\alpha})_{\beta\beta} + (d_{21}w_{\alpha\alpha} + d_{22}w_{\beta\beta} + k_2w) - \\
 & - 2(d_{11}w_{\alpha\beta})_{\alpha\beta} - 2(d_{22}w_{\alpha\beta})_{\alpha\beta} + (d_{11}w_{\alpha\alpha} + d_{12}w_{\beta\beta} + k_1w)_{\beta\beta} + \\
 & + \frac{1}{2}(w_{\alpha\alpha}w_{\beta\beta} - 2w_{\alpha\beta}w_{\alpha\beta} + w_{\beta\beta}w_{\alpha\alpha}) + \\
 & + (C_{1T}^0(A_{11} + A_{12}))_{\alpha\alpha} + (C_{1T}^0(A_{11} + A_{12}))_{\beta\beta} = 0, \quad (5)
 \end{aligned}$$

где F — функция усилий; w — прогиб координатной поверхности; u , v — продольное и окружное перемещения; k_1 , k_2 — главные кривизны координатной поверхности; $m = \rho h$ — масса элемента оболочки;

$$C_{ij}^l = \int_{-h/2}^{h/2} B_{ij} z^l dz, \quad i, j = 1, 2, \quad l = 0, 1, 2; \quad C_{11}^l = C_{22}^l;$$

$$C_{iT}^l = \int_{-h/2}^{h/2} B_{ii} \left(\int_{T_0}^T \tilde{\alpha}_T (1 + \nu) \right) z^l dz; \quad C_{1T}^l = C_{2T}^l;$$

$$A_{11} = \frac{C_{11}^0}{\Delta}; \quad A_{12} = -\frac{C_{12}^0}{\Delta}; \quad \Delta = (C_{11}^0)^2 - (C_{12}^0)^2;$$

$$d_{11} = \frac{C_{12}^0(C_{11}^1 - C_{12}^1)}{\Delta}; \quad d_{12} = \frac{C_{11}^0 C_{12}^1 - C_{12}^0 C_{11}^1}{\Delta};$$

$$d_{21} = \frac{C_{12}^1(C_{11}^0 - C_{12}^0)}{\Delta}; \quad d_{22} = \frac{C_{11}^1 C_{12}^0 - C_{12}^1 C_{11}^0}{\Delta};$$

$$D_{11}^* = C_{11}^1 d_{11} + C_{12}^1 d_{21}; \quad D_{22}^* = C_{12}^1 d_{12} + C_{11}^1 d_{22};$$

$$D_{12}^* = C_{11}^1 d_{12} + C_{12}^1 d_{22};$$

– граничные условия:

$$\begin{aligned}
 & \bar{T}_\eta - (\mu_2 \bar{M}_\alpha - \mu_1 \bar{M}_\beta)_t - [\mu_1 (F_{\beta\beta} w_\alpha - F_{\alpha\beta} w_\beta + M_{1\alpha} + H_\beta) + \\
 & + \mu_2 (F_{\alpha\alpha} w_\beta - F_{\alpha\beta} w_\alpha + M_{2\beta} + H_\alpha) - \mu_1 \mu_2 (M_1 - M_2)_t + H_t (\mu_1^2 - \mu_2^2)] = 0;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu_1 \bar{M}_\alpha + \mu_2 \bar{M}_\beta - (\mu_1^2 M_1^2 + 2\mu_1 \mu_2 H + \mu_2^2 M_2^2) &= 0; \\ \bar{T}_\beta - (-\mu_1 F_{\alpha\beta} + \mu_2 F_{\alpha\beta}) &= 0; \quad \bar{T}_\alpha - (\mu_1 F_{\beta\beta} - \mu_2 F_{\alpha\beta}) = 0, \end{aligned}$$

где $\bar{M}_\alpha, \bar{M}_\beta, \bar{T}_\alpha, \bar{T}_\beta, \bar{T}_\eta$ — компоненты, отвечающие за возможную неоднородность в краевых условиях.

Кроме статических граничных условий на контуре оболочки могут быть заданы кинематические граничные условия:

$$u = u_k, \quad v = v_k, \quad w = w_k, \quad \frac{\partial w}{\partial \mu} = \gamma_k,$$

где u_k, v_k, w_k, γ_k — заданные смещения контура и угол поворота нормали μ . Если оболочка замкнута по одной из координат, то условие периодичности используют только по этой координате.

2. О существовании решения в теории гибких пологих термочувствительных оболочек. Вопросы существования решения в задачах механики и физики относятся к методам качественного исследования операторных уравнений и представляют большой интерес, так как они дают рациональный способ проверять адекватность теории (которая сводит в некоторую математическую схему факты и явления физического мира), не связанный с проведением экспериментов [12]. При этом используют две возможности для решения указанной проблемы. С одной стороны, это теория многомерных сингулярных потенциалов и сингулярных интегральных уравнений, с другой — теория обобщенных решений дифференциальных уравнений (методы гильбертовых пространств, вариационные методы) [13]. В данной работе используется второй подход, обладающий большей общностью и охватывающий случай переменных коэффициентов и граничных условий.

Основные этапы при применении этого подхода — вывод априорных оценок и использование этих оценок. При этом существенную роль здесь играет выбор функциональных пространств, в которых ищется решение. Для получения и использования априорных оценок применяется метод компактности [14]. Полученные в данной работе результаты являются обобщением известных результатов [14–16] на случай задачи о колебаниях термочувствительной полой оболочкой. Основное внимание уделено формулировке и доказательству теоремы существования для указанной задачи в случае достаточно регулярной области при граничных условиях Дирихле. Реализованный в работе подход основывается на применении функции Грина.

Рассмотрим ограниченную область Ω_0 в \mathbb{R}^2 (Ω_0 — колеблющаяся оболочка). Мы ищем пару функций w, F , определенных в $\Omega_0 \times [0, t_k]$, удовлетворяющих уравнениям (4), (5) и описывающих динамическое поведение гибкой полой оболочки с характеристиками материала, зависящими от температуры, а также краевым условиям [17] (защемление по контуру оболочки Σ_0)

$$w|_{\Sigma_0} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial n}|_{\Sigma_0} = 0, \quad F|_{\Sigma_0} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial n}|_{\Sigma_0} = 0, \quad (6)$$

где n — это нормаль к контуру оболочки, и начальным условиям

$$w|_{t=0} = w_0, \quad \frac{\partial w}{\partial t}|_{t=0} = w'_0. \quad (7)$$

Будем считать, что температурное поле стационарное. В этом случае можно упростить уравнения (4), (5), если выбрать поверхность приведения таким образом, чтобы коэффициент C_{ij}^1 в уравнениях равнялся нулю. Обозначая аппликату этой поверхности через z_0 и вводя обозначения $\alpha = x$, $\beta = y$, получим уравнение для данной функции:

$$C_{ij}^1 = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\tilde{E}}{1 - \tilde{\nu}^2} (z - z_0) dz = 0.$$

Введем обозначения для величин $B(x, y)$, $D(x, y)$, $N_T(x, y)$ и $M_T(x, y)$:

$$B(x, y) = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\tilde{E}}{1 - \tilde{\nu}^2} dz, \quad D(x, y) = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\tilde{E}}{1 - \tilde{\nu}^2} (z - z_0)^2 dz,$$

$$N_T(x, y) = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\tilde{E}}{1 - \tilde{\nu}} \left(\int_{T_0}^T \tilde{\alpha}_T dT \right) dz = C_{1T},$$

$$M_T(x, y) = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\tilde{E}}{1 - \tilde{\nu}^2} (z - z_0) \left(\int_{T_0}^T \tilde{\alpha}_T dT \right) dz.$$

Следует отметить, что в рассматриваемой задаче о температурных напряжениях температура считается известной функцией, следовательно, функции $B(x, y)$, $D(x, y)$, $N_T(x, y)$ и $M_T(x, y)$ — также известные функции. Перепишем уравнения (4), (5) с учетом принятых выше допущений:

$$mw'' + (\Delta_{1D}^2 + \nu \Delta_{2D}^2)w - [w, F] - \{k, F\} + \nabla^2 M_T - q = 0, \quad (8)$$

$$(\Delta_{1H}^2 - \nu \Delta_{2H}^2)F + \frac{1}{2}(1 - \nu^2)[w, w] + (1 - \nu^2)\{k, w\} + (1 - \nu)\nabla^2 \left(\frac{N_T}{B} \right) = 0, \quad (9)$$

Здесь приняты обозначения работы [18]:

$$\Delta_{1G}^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(G \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) + 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(G \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(G \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right),$$

$$\{k, f\} \equiv k_1 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + k_2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2},$$

$$[w, w] = L(w, w) = 2 \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right], \quad (10)$$

$$[w, F] = L(w, F) = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y},$$

$$\Delta_{2G}^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(G \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) - 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(G \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(G \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right).$$

Введем пространство $H_0^2(\Omega_0) = \{v : v \in H^2(\Omega_0), v|_\Gamma = 0, \frac{\partial v}{\partial n}|_\Gamma = 0\}$ [14]. Таким образом, $H_0^2(\Omega_0)$ является пространством Соболева [19] функций, обращающихся в нуль на границе области Γ вместе со своими производными. Обозначим через Q цилиндр в $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_t$: $Q = \Omega_0 \times [0, t_k]$, t_k — конечно,

а через Σ — его боковую границу: $\Sigma = \Gamma \times [0, t_k]$. Введем также обозначение $L^p(0, t_k; \Omega_0)$ [14] — пространство функций $t - f(t) : [0, t_k] \rightarrow \Omega_0$, измеримых и принимающих значения из Ω_0 , и таких, что

$$\left(\int_0^{t_k} \|f\|_{\Omega_0}^p dt \right)^{1/p} = \|f\|_{L^p(0, t_k; \Omega_0)} < \infty. \quad (11)$$

Если $p = \infty$, то норма (11) заменяется нормой $\sup_{t \in [0, t_k]} \|f(t)\|_{\Omega_0} = \|f\|_{L^\infty(0, t_k; \Omega_0)}$, $t \in [0, t_k]$ [14]. При этом имеем $L^p(0, t_k; L^p(\Omega)) = L^p(Q)$.

ТЕОРЕМА. Пусть заданы $q, \nabla^2 M_T, \nabla^2 \left(\frac{N_T}{B}\right), k_1, k_2, w_0, w'_0$, причем $q \in L^2(Q), \nabla^2_{M_T} \in L^2(\Omega), \nabla^2 \left(\frac{N_T}{B}\right) \in L^1(\Omega), k_1, k_2 \in L^2(\Omega), w_0 \in H^2_0(\Omega), w'_0 \in L^2(\Omega)$.

Тогда существуют w и F , удовлетворяющие (6)–(9), причем

$$w \in L^\infty(0, t_k; H^2_0(\Omega)), \quad w' \in L^\infty(0, t_k; L^2(\Omega)), \quad F \in L^\infty(0, t_k; H^2_0(\Omega)). \quad (12)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Из (12) и (10) следует, что $[w, F] \in L^\infty(0, t_k; L_1(\Omega))$ и уравнения (8) приводит к включению $w'' \in L^\infty(0, t_k; H^{-2}(\Omega))$, так что условия (7) имеют смысл.

В работе [14] доказывается несколько свойств скобки $[u, \vartheta]$, необходимых для дальнейшего.

ЛЕММА 1. *Отображение $u, \vartheta \rightarrow [u, \vartheta]$ является билинейным отображением $H^2_0(\Omega) \times H^2_0(\Omega) \rightarrow H^{-2}(\Omega)$.*

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Форма $u, \vartheta, f \rightarrow [[u, \vartheta], f]$ является непрерывной трилинейной формой на $H^2_0(\Omega)$.

ЛЕММА 2. *Трилинейная форма $u, \vartheta, f \rightarrow [[u, \vartheta], f]$ симметрична на $H^2_0(\Omega)$. Аналогично можно доказать, что те же свойства присущи трилинейной форме $(\{k, u\}, \vartheta)$.*

ЛЕММА 3. *Трилинейная форма $k, u, \vartheta \rightarrow (\{k, u\}, \vartheta)$ является симметричной трилинейной формой на $H^2_0(\Omega)$.*

ЛЕММА 4. *Операторы $\Delta^2_{1D} + \nu \Delta^2_{2D}$ и $\Delta^2_{1H} - \nu \Delta^2_{2H}$ являются симметричными положительно определенными операторами.*

ЛЕММА 5. *Операторы $\Delta^2_{1D} + \nu \Delta^2_{2D}$ и $\Delta^2_{1H} - \nu \Delta^2_{2H}$ являются сильно эллиптическими операторами [20].*

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Оператор $\Delta^2_{1D} + \nu \Delta^2_{2D}$ имеет в Ω полную систему векторов [20].

Из указанных свойств следует следующая лемма.

ЛЕММА 6. *Сильно эллиптический оператор $\Delta^2_{1H} - \nu \Delta^2_{2H}$ отображает пространство $H^2_0(\Omega)$ на сопряженное пространство $H^{-2}(\Omega)$ гомеоморфно [21].*

В частности, это означает, что справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА. *Существует оператор G_F , обратный к $\Delta^2_{1H} - \nu \Delta^2_{2H}$, который является непрерывным оператором из $H^{-2}(\Omega) \rightarrow H^2_0(\Omega)$, т.е. существует «оператор Грина», обратный к $\Delta^2_{1H} - \nu \Delta^2_{2H}$ в Ω при условиях Дирихле.*

Доказательство.

1. *Построение приближенного решения.* Пусть $\vartheta_1, \dots, \vartheta_m$ — «базис», образованный, например, функциями из $D(\Omega)$ ($g \in D(\Omega)$ — пространство функций класса C^∞ в Ω , имеющих компактный носитель в Ω), обладающий следующими свойствами: 1) $\vartheta_i \in H_0^2(\Omega) \forall i$; 2) $\forall m \vartheta_1, \dots, \vartheta_m$ линейно независимы; 3) линейные комбинации ϑ_i плотны в $H_0^2(\Omega)$.

Пусть $w_m(t)$ удовлетворяет следующим условиям:

$$w_m(t) \in [v_1, \dots, v_m], \quad \text{т.е.} \quad w_m(t) = \sum_{i=1}^{\infty} g_{im}(t)v_i; \quad (13)$$

$$(w_m''(t), v_i) + ((\Delta_{1D}^2 + \nu\Delta_{2D}^2)w_m(t), v_j) - ([F_m(t), w_m(t)], v_j) - (\{k, F_m(t)\}, v_j) + (\nabla^2 M_T, v_j) - (q, v_j) = 0, \quad 1 \leq j \leq m, \quad (14)$$

где выражение (\cdot, \cdot) — означает скалярное произведение;

$$w_m(0) = w_{0m} \in [v_1, \dots, v_m], \quad w_{0m} \rightarrow w_0 \quad \text{в} \quad H_0^2(\Omega); \quad (15)$$

$$w_m'(0) = w'_{0m} \in [v_1, \dots, v_m], \quad w'_{0m} \rightarrow w'_0 \quad \text{в} \quad L^2(\Omega). \quad (16)$$

Определим $F_m(t)$ соотношением

$$\begin{aligned} (\Delta_{1H}^2 - \nu\Delta_{2H}^2)F_m(t) = \\ = -\frac{1}{2}(1 - \nu)[w_m(t), w_m(t)] - (1 - \nu^2)\{k, w_m(t)\} - \\ - (1 - \nu)\nabla^2\left(\frac{N_T}{B}\right) = 0, \quad F_m(t) \in H_0^2(\Omega). \end{aligned} \quad (17)$$

При этом $F_m(t)$ может и не принадлежать $[\vartheta_1, \dots, \vartheta_m]$. В силу леммы 6 $F_m(t)$ можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} F_m(t) = G_F\left(-\frac{1}{2}(1 - \nu^2)[w_m(t), w_m(t)] - \right. \\ \left. - (1 - \nu^2)\{k, w_m(t)\} - (1 - \nu)\nabla^2\left(\frac{N_T}{B}\right)\right). \end{aligned} \quad (18)$$

Подставляя это выражение в (14), можно получить систему обыкновенных уравнений относительно $w_m(t)$. Таким образом, можно быть уверенным в существовании $w_m(t)$ в силу разрешимости системы обыкновенных дифференциальных уравнений, а следовательно, и в существовании $F_m(t)$ в некотором интервале $[0, t_m]$, $t_m > 0$.

2. *Априорные оценки.* Умножим (13) на g'_{jm} и просуммируем по j . Получим

$$\begin{aligned} (w_m''(t), w'_m(t)) + ((\Delta_{1D}^2 + \nu\Delta_{2D}^2)w_m(t), w'_m(t)) - ([F_m(t), w_m(t)], w'_m(t)) - \\ - (\{k, F_m(t)\}, w'_m(t)) + (\nabla^2 M_T, w'_m(t)) - (q, w'_m(t)) = 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Согласно леммам 2 и 3

$$(\{k, F_m(t)\}, w'_m(t)) = (\{k, w'_m(t)\}, F_m(t)), \quad (20)$$

$$\begin{aligned} ([F_m(t), w_m(t)], w'_m(t)) &= ([w_m(t), w'_m(t)], F_m(t)) = \\ &= \left(\frac{1}{2} \frac{d}{dt} [w_m(t), w_m(t)], F_m(t) \right). \end{aligned} \quad (21)$$

В силу (17) последнее выражение равно

$$\begin{aligned} - \frac{1}{1 - \nu^2} \frac{d}{dt} ((\Delta_{1H}^2 - \nu \Delta_{2H}^2) F_m(t), F_m(t)) &- \left(\frac{d}{dt} \{k, w_m(t)\}, F_m(t) \right) - \\ &- \left(\frac{1}{1 + \nu} \frac{d}{dt} \left(\nabla^2 \frac{N_T}{B} \right), F_m(t) \right). \end{aligned} \quad (22)$$

Подставляя (20)–(22) в (19), получим

$$\begin{aligned} (w''_m(t), w'_m(t)) &+ ((\Delta_{1D}^2 + \nu \Delta_{2D}^2) w_m(t), w'_m(t)) + \\ &+ \frac{1}{1 + \nu} \frac{d}{dt} ((\Delta_{1H}^2 - \nu \Delta_{2H}^2) F_m(t), F_m(t)) + \\ &+ (\{k, w'_m(t)\}, F_m(t)) - (\{k, w'_m(t)\}, F_m(t)) + \\ &+ (\nabla^2 M_T, w'_m(t)) - (q, w'_m(t)) = 0. \end{aligned} \quad (23)$$

Далее на основании свойств операторов $\Delta_{1H}^2 - \nu \Delta_{2H}^2$ и $\Delta_{1D}^2 + \nu \Delta_{2D}^2$ с использованием соотношений

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} ((\Delta_{1H}^2 - \nu \Delta_{2H}^2) F_m(t), F_m(t)) &\equiv \frac{1}{2} \frac{d}{dt} ((\Delta_{1H}^2 - \nu \Delta_{2H}^2) F_m, F_m), \\ ((\Delta_{1D}^2 - \nu \Delta_{2D}^2) w_m(t), w'_m(t)) &\equiv \frac{1}{2} \frac{d}{dt} ((\Delta_{1D}^2 + \nu \Delta_{2D}^2) w_m(t), w_m(t)), \\ (w''_m(t), w'_m(t)) &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (w'_m(t), w'_m(t)) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (w'_m(t))^2 \end{aligned}$$

соотношение (23) можно переписать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (|w'_m(t)|^2 + ((\Delta_{1D}^2 + \nu \Delta_{2D}^2) w_m(t), w_m(t)) + \\ + \frac{1}{1 - \nu^2} ((\Delta_{1H}^2 - \nu \Delta_{2H}^2) F_m(t), F_m(t))) = \\ = (q, w'_m(t)) - (\nabla^2 M_T, w'_m(t)) \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (|w'_m(t)|^2 + ((\Delta_{1D}^2 + \nu \Delta_{2D}^2) w_m(t), w_m(t)) + \\ + \frac{1}{1 - \nu^2} ((\Delta_{1H}^2 - \nu \Delta_{2H}^2) F_m(t), F_m(t))) = \\ = \int_0^t (q(\sigma), w'_m(\sigma)) d\sigma - \int_0^t (\nabla^2 M_T, w'_m(\sigma)) d\sigma + \\ + \frac{1}{2} (|w'_{0m}|^2 + ((\Delta_{1D}^2 + \nu \Delta_{2D}^2) w_{0m}, w_{0m}) + \end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{1 - \nu^2} ((\Delta_{1H}^2 - \nu\Delta_{2H}^2)F_m(0), F_m(0)).$$

В силу (15), (16) $|w'_{0m}|^2 + ((\Delta_{1H}^2 - \nu\Delta_{2H}^2)w_{0m}, w_{0m}) \leq \text{const}$, поэтому на основании (18) имеем

$$F_m(0) = G_F \left(-\frac{1}{2}(1 - \nu^2)[w_{m0}, w_{m0}] - (1 - \nu^2)\{k, w_{m0}\} - (1 - \nu)\nabla^2 \left(\frac{N_T}{B} \right) \right).$$

Однако $[w_{0m}, w_{0m}]$ принадлежит ограниченному множеству $L_1(\Omega)$, а следовательно, и в $H^{-2}(\Omega)$, поэтому $F_m(0)$ принадлежит ограниченному множеству в $H_0^2(\Omega)$ и поэтому $((\Delta_{1H}^2 - \nu\Delta_{2H}^2)F_m(0), F_m(0)) \leq \text{const}$. Далее, используя свойство положительной определенности операторов $\Delta_{1H}^2 - \nu\Delta_{2H}^2$ и $\Delta_{1D}^2 + \nu\Delta_{2D}^2$, неравенство Коши для ε , а также лемму Гронуолла [22], можно показать, что $t_m = t_\kappa$ и

$$\begin{aligned} w_m, F_m \text{ ограничены в } L^\infty(0, t_k; H_0^2(\Omega)), \\ w'_m \text{ ограничены в } L^\infty(0, t_k; L^2(\Omega)). \end{aligned} \quad (24)$$

3. *Предельный переход.* В силу (24) мы можем выделить такие последовательности w_μ, F_μ , что $w_\mu \rightarrow w$ слабо в $L^\infty(0, t_k; H_0^2(\Omega))$, $F_\mu \rightarrow F$ слабо в $L^\infty(0, t_k; H_0^2(\Omega))$, $w'_\mu \rightarrow w'$ слабо в $L^\infty(0, t_k; L^2(\Omega))$, $w_\mu \rightarrow w$ сильно в $L^\infty(Q)$ (в силу теорем вложения Соболева).

Пусть функции ϕ_j , $1 \leq j \leq j_0$, принадлежат $G^1([0, t_k])$, тогда

$$\phi(t_k) = 0 \quad \text{и} \quad \psi = \sum_{j=1}^{j_0} \phi_j \otimes v_j. \quad (25)$$

Из (14) следует, что при $m = \mu > j_0$

$$\begin{aligned} - \int_0^{t_k} (w'_\mu \psi') dt + \int_0^{t_k} ((\Delta_{1D}^2 + \nu\Delta_{2D}^2)w_\mu, \psi) dt - \\ - \int_0^{t_k} ([F_\mu, w_\mu], \psi) dt - \int_0^{t_k} (\{k, F_\mu\}, \psi) dt = \\ = \int_0^{t_k} (q, \psi) dt - \int_0^{t_k} (\nabla^2 M_T, \psi) dt + (w'_\mu(0), \psi(0)). \end{aligned} \quad (26)$$

В силу леммы 2

$$\int_0^{t_k} ([F_\mu, w_\mu], \psi) dt = \int_0^{t_k} ([\psi, F_\mu], w_\mu) dt,$$

$[\psi, F_\mu] \rightarrow [\psi, F]$, скажем, слабо в $L^2(Q)$, и так как $w_\mu \rightarrow w$ сильно в $L^2(Q)$, мы видим, что

$$\int_0^{t_k} ([F_\mu, w_\mu], \psi) dt \rightarrow \int_0^{t_k} ([\psi, F], w) dt = \int_0^{t_k} ([w, F], \psi) dt$$

и (26) в пределе переходит в соотношение

$$\begin{aligned} & - \int_0^{t_k} (w', \psi') dt + \int_0^{t_k} ((\Delta_{1D}^2 + \nu \Delta_{2D}^2)w, \psi) dt - \\ & - \int_0^{t_k} ([w, F], \psi) dt - \int_0^{t_k} (\{k, F\}, \psi) dt = \int_0^{t_k} (\{k, F\}, \psi) dt = \\ & = \int_0^{t_k} (q, \psi) dt - \int_0^{t_k} (\nabla^2 M_T, \psi) dt + (w'_0, \psi(0)), \end{aligned} \quad (27)$$

которое справедливо для всех ψ вида (25).

Предельным переходом мы устанавливаем, что (27) выполнено для всех $\psi \in L^2(0, t_k; H_0^2(\Omega))$ таких, что $\psi' \in L^2(0, t_k; L^2(\Omega))$. Тем самым показано, что w, F удовлетворяют (8) и что $w'(0) = w'_0$. Для установления (9) можно непосредственно перейти к пределу в (17) (при $m = \mu$), заметив, что $[w_\mu, w_\mu] \rightarrow [w, w]$, например, в $D'(Q)$ (пространстве распределений). Действительно, если $\phi \in D(Q)$, то

$$\int_0^{t_k} ([w_\mu, w_\mu], \phi) dt = \int_0^{t_k} ([w_\mu, \phi], w_\mu) dt$$

и можно перейти к пределу, как и выше. □

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Приведенные теорема и леммы верны и для случая оболочечных структур, выполненных из функционально-градиентного пористого материала (ФГМ). Тогда модуль Юнга $E(z)$, коэффициент Пуассона $\nu(z)$ и плотность $\rho(z)$ могут быть определены формулами вида

$$\begin{aligned} E(z) &= (E_c - E_m)(1/2 + z/h)^k + E_m - (E_c + E_m)K(1/2 - |z|h), \\ \nu(z) &= (\nu_c - \nu_m)(1/2 + z/h)^k + \nu_m - (\nu_c + \nu_m)K(1/2 - |z|h), \\ \rho(z) &= (\rho_c - \rho_m)(1/2 + z/h)^k + \rho_m - (\rho_c + \rho_m)K(1/2 - |z|h), \end{aligned} \quad (28)$$

где $E_c, E_m, \nu_c, \nu_m, \rho_c, \rho_m$ — модули Юнга, коэффициенты Пуассона, плотности, связанные с керамической и металлической фазами ФГМ; K — показатель пористости; k — показатель градиента свойства материала (коэффициент, определяющий соотношение объемных долей материала); h — толщина оболочки. Если $k = 0$, то пор нет.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Для фазы керамики $E_c, \nu_c, \rho_c = \text{const}$ [23], однако для фазы металла E_m, ν_m, ρ_m — функции, зависящие от координат (x, y, z) и напряженно-деформированного состояния $(\varepsilon_0, \varepsilon_i)$. Поэтому в данной работе впервые предлагается учесть физическую нелинейность для таких структур. Такое представление E, ν и ρ делается согласно методу переменных параметров упругости И. А. Биргера [7], доказательство сходимости которого проведено Н. И. Воровичем и Ю. П. Красовским [8].

3. Нелинейная динамика функционально-градиентной пористой гибкой цилиндрической оболочке. Используя гипотезы, изложенные в разделе 1 настоящей работы, без учета температурного поля, полагая

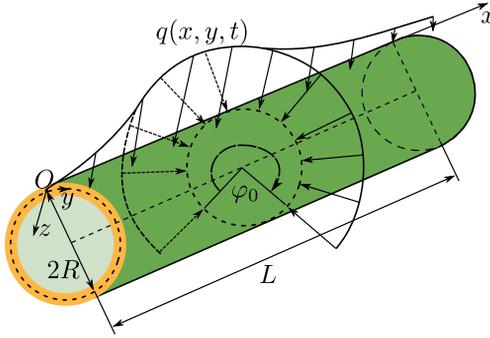


Рис. 1. Схема нагружения замкнутой цилиндрической нанооболочки
 [Figure 1. Load scheme of a closed cylindrical nanoshell]

$k_x = 0$, получим уравнения движения и совместности деформаций функционально-градиентной пористой гибкой замкнутой цилиндрической оболочки (рис. 1).

Для учета наноэффектов применим модифицированную моментную теорию упругости [24]:

$$\begin{cases} D_1 \Delta^2 w - k_y \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - L(w, F) + \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \varepsilon \rho \frac{\partial w}{\partial t} = q(x, y, t), \\ \Delta^2 \frac{F}{E} = -\frac{1}{2} L(w, w) - k_y \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \end{cases} \quad (29)$$

где

$$D_1 = \int_{-1/2}^{1/2} \frac{E(z)z^2}{1 - \nu^2(z)} dz + \frac{1}{2} \int_{-1/2}^{1/2} \frac{E(z)\gamma^2}{1 + \nu(z)} dz;$$

$\gamma = l/h$ — масштабный параметр длины материала, учитывающий эффект моментов высшего порядка; Δ — оператор Лапласа; $L(w, F)$, $L(w, w)$ — нелинейные операторы в теории гибких оболочек [9], определяемые соотношениями (10). Уравнения (29) приведены к безразмерному виду обычным образом [25, 26].

Присоединим к системе (29) краевые условия для шарнирного опирания по торцам

$$w|_{x=0;1} = 0; \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}|_{x=0;1} = 0; \quad F|_{x=0;1} = 0; \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}|_{x=0;1} = 0;$$

условие периодичности при $y = 0; 2\pi$ и начальные условия

$$w|_{t=0} = w_0 = 0; \quad \frac{\partial w}{\partial t}|_{t=0} = w'_0 = 0.$$

4. Методы решения. Для решения уравнения (29) применяем метод Бубнова—Галеркина в высших приближениях. Для этого функции w и F , являющиеся решениями уравнения, приближенно аппроксимируем рядами

$$w = \sum_{i=1}^N \sum_{j=0}^N A_{ij}(t) \sin i\pi x \cos jy, \quad F = \sum_{i=1}^N \sum_{j=0}^N B_{ij}(t) \sin i\pi x \cos jy.$$

Исследована сходимость метода Бубнова—Галеркина в зависимости от количества членов ряда, при этом наложено требование совпадения как самих функций, так и их производных до второго порядка включительно. Установлено, что сходимость метода достигается при $N = 9$. Цилиндрические оболочки рассматриваются как системы с «почти» бесконечным числом степеней свободы. Полученную задачу Коши решаем методами типа Рунге—Кутты от второго до восьмого порядков точности и методом Ньюмарка по времени. Шаг по времени выбирается по правилу Рунге. Применение нескольких численных методов на каждом этапе моделирования необходимо для достоверности получаемых результатов. Исследование характера сложных колебаний замкнутой цилиндрической нано/микро/макромасштабной оболочки проведено методами нелинейной динамики, для этого построены сигналы, фазовые портреты, применены Фурье-анализ, вейвлет-анализ и различные методы вычисления показателей Ляпунова.

5. Численный эксперимент. Изучим нелинейную динамику пористой функционально-градиентной замкнутой цилиндрической нано/микро/макромасштабной оболочки (см. рис. 1) с шарнирно закрепленными краями. Численный эксперимент проведен в безразмерных величинах. На оболочку действует поперечная распределенная полосовая знакопеременная нагрузка с амплитудой q_0 и частотой вынуждающих колебаний $\omega_p = 20.3$, угол нагружения $\varphi_0 = 5.98$ рад по всей длине цилиндра.

Исследуем влияние величины интенсивности нагрузки q_0 и масштабного параметра γ на характер колебаний оболочки без учета пористости. Значения параметра $\gamma = l/h$ для учета наноэффектов были найдены экспериментально в работе [27]. Величина параметра l в работах [28, 29] принята равной 17.6 нм; при $h > 17$ мм параметр $\gamma \approx 0$. Например, значение $\gamma = 0.4$ соответствует $h = l/\gamma = 7.25$ нм. В настоящей работе при проведении численных экспериментов принято безразмерное значение γ в диапазоне $[0; 0.7]$.

С этой целью рассмотрим сигналы $w(0.5, 0.5, t)$ и спектры мощности Фурье $F(\omega)$ для $\gamma = 0; 0.5; 0.7$ при амплитудах нагрузки $q_0 = 0.185$ и $q_0 = 0.25$.

При действии внешней нагрузки малой интенсивности $q_0 = 0.185$ характер колебаний замкнутой цилиндрической оболочки гармонический и качественно совпадает для величин масштабного параметра $\gamma = 0; 0.5; 0.7$ (рис. 2).

О таком характере колебаний свидетельствуют и показатели Ляпунова $\lambda_1 - \lambda_4$. В основном они имеют отрицательные значения. Некоторые показатели Ляпунова имеют значения, большие нуля, но только в третьем знаке после запятой, т.е. они имеют значения, близкие к нулю, что соответствует устойчивому предельному циклу (см. таблицу). Анализ показателей Ляпунова является важной характеристикой, так как согласно критерию хаоса, данного Гуликом [30], хаос существует тогда, когда либо имеется существенная зависимость от начальных условий, либо функция имеет положительный показатель Ляпунова в каждой точке области ее определения и поэтому не является в конечном итоге периодической. Так как не существует точного метода вычисления показателей Ляпунова, для исключения численной погрешности следует применять сразу несколько методов [25, 26]: Розенштейна [31], Вольфа [32], Канца [33] и Сано—Савады [34]. В таблице приведены значения старшего показателя Ляпунова, вычисленные разными методами. Для анализа важен знак показателя Ляпунова, а не его абсолютная величина.

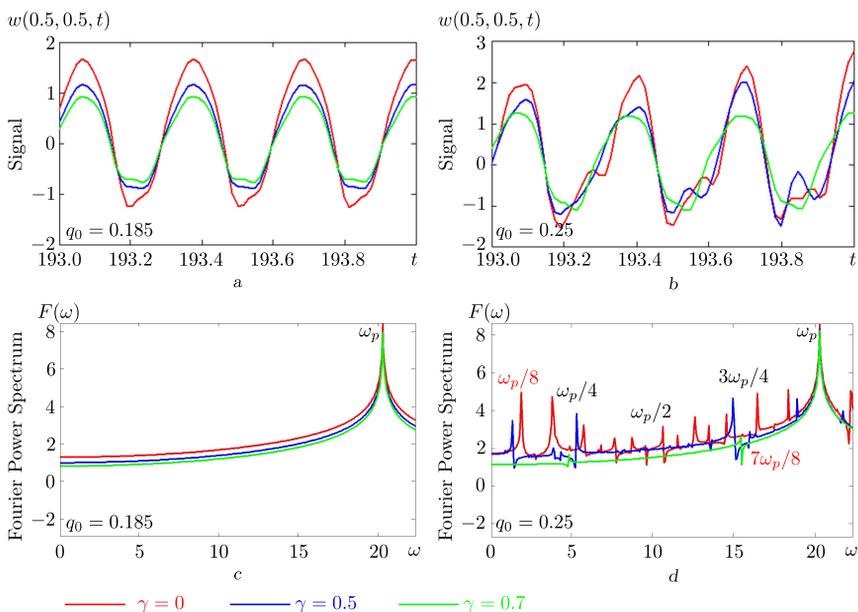


Рис. 2. Динамические характеристики цилиндрической оболочки: а — сигнал при $q_0 = 0.185$; б — сигнал при $q_0 = 0.25$; в — спектр мощности Фурье при $q_0 = 0.185$; д — спектр мощности Фурье при $q_0 = 0.25$
 [Figure 2. Dynamic characteristics of a cylindrical shell: а — signal at $q_0 = 0.185$; б — signal at $q_0 = 0.25$; в — Fourier power spectrum at $q_0 = 0.185$; д — Fourier power spectrum at $q_0 = 0.25$]

Значения старшего показателя Ляпунова λ_1 , вычисленные несколькими методами
 [The values of the largest Lyapunov exponent calculated by several methods]

q_0	Wolf Method	Rosenstein Method	Kantz Method	Sano-Sawada Method
0.185	1.19	6.305	7.139	39.998
0.25	1.11	3.17	133.6	414.72

на. В таблице все значения одного знака, т.е. результаты хорошо согласуются между собой.

При увеличении амплитуды внешней нагрузки до $q_0 = 0.25$ характер колебаний меняется (см. рис. 2). Первые два показателя Ляпунова в спектре имеют положительные значения, что соответствует гиперхаотическому состоянию. Ранее явление гиперхаоса было обнаружено для классических задач [4]. При этом на характер колебаний существенное влияние оказывает и величина масштабного параметра γ (см. рис. 2). В случае макрооболочки ($\gamma = 0$) и нанооболочки при $\gamma = 0.5$ наступает серия бифуркаций Хопфа. В случае, когда $\gamma = 0.7$, наблюдается только две бифуркации Хопфа. Об этом свидетельствуют спектры мощности Фурье (см. рис. 2) и вейвлет-спектры. В качестве материнских были рассмотрены вейвлеты Морле, Гаусса, Мейера и Мексиканская шляпа. Вейвлет Морле оказался наиболее информативным для рассматриваемых систем.

С ростом величины масштабного параметра γ изгибание поверхности оболочки менее выражено и прогибы уменьшаются. Таким образом, замкнутая цилиндрическая оболочка становится более устойчивой. Рассмотрим пористость X-PFGM типа, задаваемую формулами (28). В формулах (28) приняты

следующие значения параметров: $K = 0.4$, $k = 1$, $E_c = 210$ ГПа, $E_m = 70$ ГПа, $\nu_c = 0.24$, $\nu_m = 0.35$, $\rho_c = 6060$ кг/м³, $\rho_m = 2700$ кг/м³ [35].

В случае макрооболочки ($\gamma = 0$) при действии внешней нагрузки малой интенсивности $q_0 = 0.14$ характер колебаний замкнутой цилиндрической оболочки гармонический. По мере увеличения амплитуды внешней нагрузки ($q_0 = 0.15$) наблюдаются двухчастотные колебания на частотах ω_p и $\omega_p/2$, т.е. наступает бифуркация Хопфа, в то время как без учета пористости система находилась в гармоническом состоянии. При этом все четыре показателя Ляпунова в спектре λ_1 – λ_4 отрицательные. При увеличении интенсивности нагрузки ($q_0 = 0.25$) характер колебаний меняется, наблюдается явление гиперхаоса, два первых показателя Ляпунова в спектре λ_1 – λ_4 имеют положительные значения: $\lambda_1 = 0.077104$; $\lambda_2 = 0.02422$; $\lambda_3 = -0.051742$; $\lambda_4 = -0.18263$. При этом происходит серия бифуркаций Хопфа.

В случае наноболочки при величине масштабного параметра ($\gamma = 0.7$), прежних значениях остальных параметров и с учетом пористости X-PFGM типа, для амплитуды нагрузки $q_0 = 0.15$ и $q_0 = 0.25$ система совершает двухчастотные колебания, в отличие от макрооболочки ($\gamma = 0$). Далее по мере увеличения интенсивности внешней нагрузки происходит смена характера колебаний и наблюдается явление гиперхаоса.

Заключение. В настоящей работе впервые построены общая теория и новые математические модели динамики физически и геометрически нелинейных функционально-градиентных пористых нано/микро/макромасштабных замкнутых цилиндрических оболочек. На основе теории обобщенных решений дифференциальных уравнений с применением методов гильбертовых пространств и вариационных методов проведено доказательство теоремы существования решения поставленных задач. Изучены сценарии перехода от гармонических колебаний к хаотическим для цилиндрических оболочек с шарнирно закрепленными краями под действием поперечной распределенной полосовой знакопеременной нагрузки в зависимости от величины мелкомасштабного параметра γ и учета пористости материала. Выявлены серия бифуркаций Хопфа и гиперхаос.

Конкурирующие интересы. Конкурирующих интересов не имеется.

Авторский вклад и ответственность. Т. В. Яковлева — построение математических моделей на базе кинематических гипотез для нано/микро/макромасштабных систем; обоснование корректности постановки задач; создание программного комплекса; проведение серии численных экспериментов; работа с черновиком и переработанным вариантом рукописи. В. А. Крысько — выбор гипотез и допущений; обсуждение получаемых результатов и выводов исследования; работа с черновиком и переработанным вариантом рукописи. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

Финансирование. Исследования проведены при финансовой поддержке гранта Российского научного фонда (проект № 22-71-10083, <https://rscf.ru/project/22-71-10083/>).

Библиографический список

1. Krysko V. A., Awrejcewicz J., Zhigalov M. V., et al. On the mathematical models of the Timoshenko-type multi-layer flexible orthotropic shells // *Nonlinear Dyn.*, 2018. vol. 92, no. 4. pp. 2093–2118. EDN: XXZWL. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11071-018-4183-4>.
2. Awrejcewicz J., Krysko V. A., Zhigalov M. V., Krysko A. V. Contact interaction of two rectangular plates made from different materials with an account of physical nonlinearity // *Nonlinear Dyn.*, 2018. vol. 91, no. 3. pp. 1191–1211. EDN: GBOHTC. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11071-017-3939-6>.
3. Awrejcewicz J., Krysko V. A., Pavlov S. P., et al. Thermoelastic vibrations of a Timoshenko microbeam based on the modified couple stress theory // *Nonlinear Dyn.*, 2020. vol. 99, no. 2. pp. 919–943. EDN: AGXVQ. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11071-019-04976-w>.
4. Awrejcewicz J., Krysko A., Erofeev N., et al. Quantifying chaos by various computational methods. Part 1: Simple systems // *Entropy*, 2018. vol. 20, no. 3, 175. EDN: XXGLGX. DOI: <https://doi.org/10.3390/e20030175>.
5. Amabili M., Balasubramanian P., Ferrari G. Travelling wave and non-stationary response in nonlinear vibrations of water-filled circular cylindrical shells: Experiments and simulations // *J. Sound Vib.*, 2016. vol. 381. pp. 220–245. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2016.06.026>.
6. Amabili M. *Nonlinear Mechanics of Shells and Plates: Composite, Soft and Biological Materials*. New York: Cambridge Univ. Press, 2018. xvi+568 pp. DOI: <https://doi.org/10.1017/9781316422892>.
7. Биргер И. А. Некоторые общие методы задач теории пластичности // *ПММ*, 1951. Т. 15, № 6. С. 765–770.
8. Ворович И. И., Красовский Ю. П. О методе упругих решений // *ДАН СССР*, 1959. Т. 126, № 4. С. 740–743.
9. Вольмир А. С. *Нелинейная динамика пластин и оболочек*. М.: Наука, 1972. 432 с.
10. Hamilton W. R. On a general method in dynamics // *Philos. Trans. R. Soc. Lond.*, 1834. part II. pp. 247–308.
11. Washizu K. *Variational Methods in Elasticity and Plasticity* / International Series of Monographs in Aeronautics and Astronautics. vol. 9. Oxford: Pergamon Press, 1968. x+349 pp.
12. Fichera G. Boundary value problems of elasticity with unilateral constraints / *C. Truesdell (eds) Linear Theories of Elasticity and Thermoelasticity*. Berlin, Heidelberg: Springer, 1973. pp. 391–424. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-662-39776-3_4.
13. Kupradze V. D., Gegelia T. G., Basheleishvili M. O., Burchuladze T. V. *Three-dimensional Problems of the Mathematical Theory of Elasticity and Thermoelasticity* / North-Holland Series in applied Mathematics and Mechanics. vol. 25. Amsterdam, New York, Oxford: North-Holland Publ., 1979. xix+929 pp.
14. Lions J.-L. *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*. Paris: Dunod, Gauthier-Villars, 1969 (In French).
15. Ворович И. И., Александров В. М., Бабенко В. А. *Неклассические смешанные задачи теории упругости*. М.: Наука, 1974. 455 с.
16. Морозов Н. Ф. *Избранные двумерные задачи теории упругости*. Л.: ЛГУ, 1978. 182 с.
17. Корнишин М. С., Исанбаева Ф. С. *Гибкие пластины и панели*. М.: Наука, 1968. 258 с.
18. Piechocki W. On the existence of solutions for heated non-linear orthotropic inhomogeneous shallow shells // *Bull. Acad. Pol. Sci., Sér. Sci. Tech.*, 1969. vol. 17. pp. 597–601.
19. Соболев С. Л. *Некоторые применения функционального анализа в математической физике*. Л.: ЛГУ, 1950. 255 с.
20. Вишик М. И. Квазилинейные сильно эллиптические системы дифференциальных уравнений, имеющие дивергентную форму / *Тр. ММО*, Т. 12. М.: ГИФМЛ, 1963. С. 125–184.
21. Дубинский Ю. А. Квазилинейные эллиптические и параболические уравнения любого порядка // *УМН*, 1968. Т. 23, № 1. С. 45–90.
22. Lions J.-L., Magenes E. *Non-homogeneous boundary value problems and applications*. vol. I. New York: Springer Verlag, 1972. xvi+357 pp.

23. Cabrera-Covarrubias F. G., Gómez-Soberón J. M., Almaral-Sánchez J. L., et al. An experimental study of mortars with recycled ceramic aggregates: Deduction and prediction of the stress-strain // *Materials*, 2016. vol.9, no.12, 1029. DOI: <https://doi.org/10.3390/ma9121029>.
24. Yang F., Chong A. C. M., Lam D. C. C., Tong P. Couple stress based strain gradient theory for elasticity // *Int. J. Solids Struct.*, 2002. vol.39, no.10. pp. 2731–2743. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0020-7683\(02\)00152-X](https://doi.org/10.1016/S0020-7683(02)00152-X).
25. Yakovleva T. V., Awrejcewicz J., Kruzhilin V. S., Krysko V. A. On the chaotic and hyperchaotic dynamics of nanobeams with low shear stiffness // *Chaos*, 2021. vol. 31, no. 2, 023107. DOI: <https://doi.org/10.1063/5.0032069>.
26. Yakovleva T. V., Awrejcewicz J., Krysko A. V., et al. Quantifying chaotic dynamics of nanobeams with clearance // *Int. J. Non-Linear Mech.*, 2022. vol.144, 104094. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2022.104094>.
27. Farokhi H., Ghayesh M. H. Nonlinear resonant response of imperfect extensible Timoshenko microbeams // *Int. J. Mech. Mater. Des.*, 2017. vol. 13, no. 1. pp. 43–55. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10999-015-9316-z>.
28. Ke L. L., Wang Y. S., Yang J., Kitipornchai S. Free vibration of size-dependent Mindlin microplates based on the modified couple stress theory // *J. Sound Vib.*, 2012. vol. 331, no. 1. pp. 94–106. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2011.08.020>.
29. Ma H. M., Gao X.-L., Reddy J. N. A non-classical Mindlin plate model based on a modified couple stress theory // *Acta Mech.*, 2011. vol. 220, no. 1–4. pp. 217–235. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00707-011-0480-4>.
30. Gulick D. *Encounters with Chaos*. New York: McGraw-Hill Education, 1992.
31. Rosenstein M. T., Collins J. J., De Luca C. J. A practical method for calculating largest Lyapunov exponents from small data sets // *Phys. D: Nonl. Phen.*, 1993. vol. 65, no. 1–2. pp. 117–134. DOI: [https://doi.org/10.1016/0167-2789\(93\)90009-P](https://doi.org/10.1016/0167-2789(93)90009-P).
32. Wolf A., Swift J. B., Swinney H. L., Vastano J. A. Determining Lyapunov exponents from a time series // *Phys. D: Nonl. Phen.*, 1985. vol. 16, no. 3. pp. 285–317. DOI: [https://doi.org/10.1016/0167-2789\(85\)90011-9](https://doi.org/10.1016/0167-2789(85)90011-9).
33. Kantz H. A robust method to estimate the maximal Lyapunov exponent of a time series // *Phys. Lett. A*, 1994. vol. 185, no. 1. pp. 77–87. DOI: [https://doi.org/10.1016/0375-9601\(94\)90991-1](https://doi.org/10.1016/0375-9601(94)90991-1).
34. Sano M., Sawada Y. Measurement of the Lyapunov spectrum from a chaotic time series // *Phys. Rev. Lett.*, 1985. vol. 55, no. 10, 1082. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.55.1082>.
35. Hou F., Wu S., Moradi Z., Shafiei N. The computational modeling for the static analysis of axially functionally graded micro-cylindrical imperfect beam applying the computer simulation // *Engineering with Computers*, 2022. vol. 38 (Suppl. 4). pp. 3217–3235. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00366-021-01456-x>.

MSC: 74K25, 74H15

Mathematical models of nonlinear dynamics of functionally graded nano/micro/macro-scale porous closed cylindrical Kirchhoff–Love shells

*T. V. Yakovleva, V. A. Krysko*Yuri Gagarin State Technical University of Saratov,
77, Polytechnicheskay st., Saratov, 410054, Russian Federation.

Abstract

The article presents new mathematical models for the dynamics of nonlinear nano/micro/macro-scale functionally graded porous closed cylindrical shells. The Kirchhoff–Love hypothesis is chosen as the kinematic model for the shells. Geometric nonlinearity is considered according to the von Karman model. Nanoeffects are accounted for using by a modified moment theory of elasticity. Variational and differential equations, as well as boundary and initial conditions, are derived from Hamilton’s principle. A proof of the existence of a solution is conducted based on the theory of generalized solutions to differential equations (using methods of Hilbert spaces and variational methods).

As examples, nano/micro/macro-scale closed cylindrical shells are considered as systems with “almost” an infinite number of degrees of freedom subjected to banded transverse alternating loading. The Bubnov–Galerkin method in higher approximations is adopted as the method for reducing partial differential equations to the Cauchy problem. Its convergence is investigated.

The Cauchy problem is solved using Runge–Kutta methods of fourth to eighth order accuracy and the Newmark method. The application of several numerical methods at each stage of modeling is necessary to ensure the reliability of the obtained results. The study of complex oscillation characteristics of the closed cylindrical nano/micro/macro-scale shell is conducted using nonlinear dynamics methods, which involve constructing signals, phase

Mechanics of Solids

Research Article

© Authors, 2024

© Samara State Technical University, 2024 (Compilation, Design, and Layout)

 The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Please cite this article in press as:

Yakovleva T. V., Krysko V. A. Mathematical models of nonlinear dynamics of functionally graded nano/micro/macro-scale porous closed cylindrical Kirchhoff–Love shells, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2024, vol. 28, no. 1, pp. 96–116. EDN: UHLXVK. DOI: 10.14498/vsgtu2046 (In Russian).

Authors’ Details:

Tatiana V. Yakovleva  <https://orcid.org/0000-0003-3238-2317>Cand. Phys. & Math. Sci.; Associate Professor; Dept. of Mathematics and Modeling;
e-mail: yan-tan1987@mail.ru*Vadim A. Krysko*  <https://orcid.org/0000-0002-4914-764X>Dr. Tech. Sci., Professor; Head of Department; Dept. of Mathematics and Modeling;
e-mail: tak@san.ru

portraits, applying Fourier analysis, and various wavelet transformations, among which the Morlet wavelet proved to be the most informative.

An analysis of the type of chaotic oscillations is carried out based on the spectrum of Lyapunov exponents using the Sano–Sawada method and the dominant exponent through several methods: Kanca, Rosenstein, and Wolf. It is shown that the size-dependent parameter and the consideration of porosity have a significant impact on the nature of the oscillations of cylindrical shells. The phenomenon of hyper-chaos has been discovered.

Keywords: dynamics, porosity, modified couple stress theory, solution existence theorems, hyper chaos, Kirchhoff–Love model.

Received: 26th July, 2023 / Revised: 28th February, 2024 /

Accepted: 4th March, 2024 / First online: 5th August, 2024

Competing interests. The authors declare that they have no competing interests.

Authors' contributions and responsibilities. T. V. Yakovleva: Development of mathematical models based on kinematic hypotheses for nano/micro/macroscale systems; Justification of the correctness of the problem formulations; Creation of the software package; Conducting a series of numerical experiments; Writing — original draft and review & editing. V. A. Krysko: Selection of hypotheses and assumptions; Discussion of the results and conclusions of the research; Writing — original draft and review & editing. The authors bear full responsibility for providing the final manuscript for publication. The final version of the manuscript was approved by all authors.

Funding. This study was supported by the Russian Science Foundation, project no. 22-71-10083, <https://rscf.ru/en/project/22-71-10083/>.

References

1. Krysko V. A., Awrejcewicz J., Zhigalov M. V., et al. On the mathematical models of the Timoshenko-type multi-layer flexible orthotropic shells, *Nonlinear Dyn.*, 2018, vol. 92, no. 4, pp. 2093–2118. EDN: XXZWWL. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11071-018-4183-4>.
2. Awrejcewicz J., Krysko V. A., Zhigalov M. V., Krysko A. V. Contact interaction of two rectangular plates made from different materials with an account of physical nonlinearity, *Nonlinear Dyn.*, 2018, vol. 91, no. 3, pp. 1191–1211. EDN: GBOHTC. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11071-017-3939-6>.
3. Awrejcewicz J., Krysko V. A., Pavlov S. P., et al. Thermoelastic vibrations of a Timoshenko microbeam based on the modified couple stress theory, *Nonlinear Dyn.*, 2020, vol. 99, no. 2, pp. 919–943. EDN: AGXVWQ. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11071-019-04976-w>.
4. Awrejcewicz J., Krysko A., Erofeev N., et al. Quantifying chaos by various computational methods. Part 1: Simple systems, *Entropy*, 2018, vol. 20, no. 3, 175. EDN: XXGLGX. DOI: <https://doi.org/10.3390/e20030175>.
5. Amabili M., Balasubramanian P., Ferrari G. Travelling wave and non-stationary response in nonlinear vibrations of water-filled circular cylindrical shells: Experiments and simulations, *J. Sound Vib.*, 2016, vol. 381, pp. 220–245. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2016.06.026>.
6. Amabili M. *Nonlinear Mechanics of Shells and Plates: Composite, Soft and Biological Materials*. New York, Cambridge Univ. Press, 2018, xvi+568 pp. DOI: <https://doi.org/10.1017/9781316422892>.
7. Birger I. A. Some general methods of solution for problems in the theory of plasticity, *Prikl. Mat. Mekh.*, 1951, vol. 15, no. 6, pp. 765–770 (In Russian).
8. Vorovich I. I., Krasovskii Yu. P. On a method of elastic solutions, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1959, vol. 126, no. 4, pp. 740–743 (In Russian).

9. Volmir A. S. *Nelineinaia dinamika plastin i obolochek* [The Nonlinear Dynamics of Plates and Shells]. Moscow, Nauka, 1972, 432 pp. (In Russian)
10. Hamilton W. R. On a general method in dynamics, *Philos. Trans. R. Soc. Lond.*, 1834, part II, pp. 247–308.
11. Washizu K. *Variational Methods in Elasticity and Plasticity*, International Series of Monographs in Aeronautics and Astronautics, vol. 9. Oxford, Pergamon Press, 1968, x+349 pp.
12. Fichera G. Boundary value problems of elasticity with unilateral constraints, In: *C. Truesdell (eds) Linear Theories of Elasticity and Thermoelasticity*. Berlin, Heidelberg, Springer, 1973, pp. 391–424. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-662-39776-3_4.
13. Kupradze V. D., Gegelia T. G., Basheleishvili M. O., Burchuladze T. V. *Three-dimensional Problems of the Mathematical Theory of Elasticity and Thermoelasticity*, North-Holland Series in applied Mathematics and Mechanics, vol. 25. Amsterdam, New York, Oxford, North-Holland Publ., 1979, xix+929 pp.
14. Lions J.-L. *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*. Paris, Dunod, Gauthier-Villars, 1969 (In French).
15. Vorovich I. I., Aleksandrov V. M., Babenko V. A. *Neklassicheskie smeshannye zadachi teorii uprugosti* [Nonclassical Mixed Problems of Elasticity]. Moscow, Nauka, 1974, 455 pp. (In Russian)
16. Morozov N. F. *Izbrannye dvumernye zadachi teorii uprugosti* [Selected Two-Dimensional Problems of the Elasticity Theory]. Leningrad, Leningrad State Univ., 1978, 182 pp. (In Russian)
17. Kornishin M. S., Isanbaeva F. S. *Gibkie plastiny i paneli* [Flexible Plates and Panels]. Moscow, Nauka, 1968, 258 pp. (In Russian)
18. Piechocki W. On the existence of solutions for heated non-linear orthotropic inhomogeneous shallow shells, *Bull. Acad. Pol. Sci., Sér. Sci. Tech.*, 1969, vol. 17, pp. 597–601.
19. Sobolev S. L. *Applications of functional analysis in mathematical physics*, Translations of Mathematical Monographs, vol. 7. Providence, R.I., American Mathematical Society, 1963, vii+239 pp.
20. Vishik M. I. Quasi-linear strongly elliptic systems of differential equations in divergence form, *Trans. Mosc. Math. Soc.*, 1963, vol. 12, pp. 140–208.
21. Dubinskii Yu. A. Quasilinear elliptic and parabolic equations of arbitrary order, *Russian Math. Surveys*, 1968, vol. 23, no. 1, pp. 45–91. DOI: <https://doi.org/10.1070/RM1968v023n01ABEH001233>.
22. Lions J.-L., Magenes E. *Non-homogeneous boundary value problems and applications*, vol. I. New York, Springer Verlag, 1972, xvi+357 pp.
23. Cabrera-Covarrubias F. G., Gómez-Soberón J. M., Almaral-Sánchez J. L., et al. An experimental study of mortars with recycled ceramic aggregates: Deduction and prediction of the stress-strain, *Materials*, 2016, vol. 9, no. 12, 1029. DOI: <https://doi.org/10.3390/ma9121029>.
24. Yang F., Chong A. C. M., Lam D. C. C., Tong P. Couple stress based strain gradient theory for elasticity, *Int. J. Solids Struct.*, 2002, vol. 39, no. 10, pp. 2731–2743. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0020-7683\(02\)00152-X](https://doi.org/10.1016/S0020-7683(02)00152-X).
25. Yakovleva T. V., Awrejcewicz J., Kruzhilin V. S., Krysko V. A. On the chaotic and hyperchaotic dynamics of nanobeams with low shear stiffness, *Chaos*, 2021, vol. 31, no. 2, 023107. DOI: <https://doi.org/10.1063/5.0032069>.
26. Yakovleva T. V., Awrejcewicz J., Krysko A. V., et al. Quantifying chaotic dynamics of nanobeams with clearance, *Int. J. Non-Linear Mech.*, 2022, vol. 144, 104094. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2022.104094>.
27. Farokhi H., Ghayesh M. H. Nonlinear resonant response of imperfect extensible Timoshenko microbeams, *Int. J. Mech. Mater. Des.*, 2017, vol. 13, no. 1, pp. 43–55. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10999-015-9316-z>.
28. Ke L. L., Wang Y. S., Yang J., Kitipornchai S. Free vibration of size-dependent Mindlin microplates based on the modified couple stress theory, *J. Sound Vib.*, 2012, vol. 331, no. 1, pp. 94–106. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2011.08.020>.

29. Ma H. M., Gao X.-L., Reddy J. N. A non-classical Mindlin plate model based on a modified couple stress theory, *Acta Mech.*, 2011, vol. 220, no. 1–4, pp. 217–235. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00707-011-0480-4>.
30. Gulick D. *Encounters with Chaos*. New York, McGraw-Hill Education, 1992.
31. Rosenstein M. T., Collins J. J., De Luca C. J. A practical method for calculating largest Lyapunov exponents from small data sets, *Phys. D: Nonl. Phen.*, 1993, vol. 65, no. 1–2, pp. 117–134. DOI: [https://doi.org/10.1016/0167-2789\(93\)90009-P](https://doi.org/10.1016/0167-2789(93)90009-P).
32. Wolf A., Swift J. B., Swinney H. L., Vastano J. A. Determining Lyapunov exponents from a time series, *Phys. D: Nonl. Phen.*, 1985, vol. 16, no. 3, pp. 285–317. DOI: [https://doi.org/10.1016/0167-2789\(85\)90011-9](https://doi.org/10.1016/0167-2789(85)90011-9).
33. Kantz H. A robust method to estimate the maximal Lyapunov exponent of a time series, *Phys. Lett. A*, 1994, vol. 185, no. 1, pp. 77–87. DOI: [https://doi.org/10.1016/0375-9601\(94\)90991-1](https://doi.org/10.1016/0375-9601(94)90991-1).
34. Sano M., Sawada Y. Measurement of the Lyapunov spectrum from a chaotic time series, *Phys. Rev. Lett.*, 1985, vol. 55, no. 10, 1082. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.55.1082>.
35. Hou F., Wu S., Moradi Z., Shafiei N. The computational modeling for the static analysis of axially functionally graded micro-cylindrical imperfect beam applying the computer simulation, *Engineering with Computers*, 2022, vol. 38 (Suppl. 4), pp. 3217–3235. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00366-021-01456-x>.



УДК 519.612

Неявная итерационная схема на основе алгоритма псевдообращения и ее применения

А. И. Жданов^{1,2}, Ю. В. Сидоров¹

¹ Самарский государственный технический университет, Россия, 443100, Самара, ул. Молодогвардейская, 244.

² Филиал ФГБОУ ВО «СамГТУ» в г. Новокуйбышевске, Россия, 446200, Новокуйбышевск, ул. Миронова, 5.

Аннотация

Предложена новая версия неявной итерационной схемы, для реализации которой требуются лишь матрично-векторные вычислительные процедуры. Это делает предлагаемую вычислительную схему потенциально высокоэффективной для решения широкого класса задач большой размерности на современных высокопроизводительных вычислительных платформах, например *Nvidia Cuda*. Показано, что предлагаемые алгоритмы могут быть использованы для решения плохо обусловленных линейных систем и задач наименьших квадратов, а также для построения итерационных алгоритмов регуляризации. Приводятся результаты вычислительных экспериментов, подтверждающие эффективность предлагаемых вычислительных алгоритмов.

Ключевые слова: неявная итерационная схема, метод простых итераций, плохо обусловленные задачи, итерационное псевдообращение Бен–Израэля, итерационная регуляризация, матрично-векторные операции.

Получение: 29 мая 2023 г. / Исправление: 12 февраля 2024 г. /

Принятие: 4 марта 2024 г. / Публикация онлайн: 22 мая 2024 г.

Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ Научная статья

© Коллектив авторов, 2024

© СамГТУ, 2024 (составление, дизайн, макет)

📄 ©📄 Контент публикуется на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

Образец для цитирования

Жданов А. И., Сидоров Ю. В. Неявная итерационная схема на основе алгоритма псевдообращения и ее применения // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2024. Т. 28, № 1. С. 117–129. EDN: HIGWRZ. DOI: 10.14498/vsgtu2026.

Сведения об авторах

Александр Иванович Жданов ✉ <https://orcid.org/0000-0001-6082-9097>

доктор физико-математических наук, профессор; профессор; каф. прикладной математики и информатики¹; профессор; каф. электроэнергетики, электротехники и автоматизации технологии процессов²; e-mail: zhdanov.ai@samgtu.ru

Юрий Вячеславович Сидоров <https://orcid.org/0000-0002-8138-9200>

кандидат физико-математических наук; доцент; каф. прикладной математики и информатики; e-mail: sidorov.yv@samgtu.ru

Введение. Неявные итерационные схемы широко применяются для решения различных задач вычислительной математики, таких как плохо обусловленные и сингулярные системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) большой размерности [1], задач наименьших квадратов, а также в итерационных методах регуляризации решений приближенных СЛАУ [2]. Известно, что одним из существенных преимуществ неявных итерационных схем перед явными является их абсолютная сходимость и достаточно высокая вычислительная устойчивость, но эти схемы не лишены недостатков.

В [2] предложена вычислительная схема неявного итерационного метода на базе сингулярного разложения (SVD-разложения). Однако применение этой вычислительной схемы приводит к существенному увеличению вычислительной работы и усложнению алгоритмической реализации итерационного алгоритма. Кроме того, использование в алгоритме SVD-разложения приводит к тому, что этот алгоритм не может быть адаптирован для эффективной обработки разреженных матриц. В конечном итоге все это серьезно осложняет практическое применение данного алгоритма для решения задач большой размерности на современных высокопроизводительных вычислительных платформах.

В [3] предложена еще одна неявная итерационная схема на основе расширенных линейных систем. Эта схема представляет большой интерес для решения плохо обусловленных больших разреженных линейных систем и задач наименьших квадратов, а также итерационных алгоритмов регуляризации. Однако для ее применения требуется использовать известные прямые методы решения («решатели») СЛАУ.

В настоящей работе предлагается новый вариант неявного метода простых итераций с использованием итерационного алгоритма псевдообращения Бен—Израэля [4]. Этот вариант алгоритма имеет полностью итерационный характер и обладает алгоритмической простотой. Для реализации этого метода требуются лишь матрично-векторные вычислительные процедуры, при его применении нет необходимости использования дополнительных стандартных «решателей» СЛАУ. Этот факт делает его потенциально более эффективным, чем указанные методы [2, 3], для решения задач большой размерности на современных высокопроизводительных вычислительных платформах, например Nvidia Cuda.

С вычислительной точки зрения наиболее затратной составляющей предлагаемого метода является итерационный метод Бен—Израэля. Однако учитывая специальную структуру матрицы с использованием «регуляризирующего» параметра, который одновременно выполняет роль предобуславливателя в задаче, данный метод, как показывают многочисленные вычислительные эксперименты, обладает высокой скоростью сходимости и вычислительной устойчивостью.

1. Постановка задачи. Рассмотрим задачу решения СЛАУ вида

$$Au = f, \quad (1)$$

где $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $m \geq n$, $\text{rank } A = n$.

Псевдорешение исходной СЛАУ (1) определяется как $u_* = A^+ f$, где A^+ — псевдообратная матрица Мура—Пенроуза [4].

Отметим, что $A^+ = (A^\top A)^{-1}A^\top$, поскольку предполагается, что матрица A имеет полный столбцовый ранг, т.е. $\text{rank } A = n$, и, следовательно, является левой обратной матрицей.

В [2] показано, что в общем виде неявный метод простых итераций можно представить выражением

$$u_{k+1} = \operatorname{argmin}_{u \in \mathbb{R}^n} \left\| \begin{pmatrix} A \\ \sqrt{\alpha}E_n \end{pmatrix} u - \begin{pmatrix} f \\ \sqrt{\alpha}u_k \end{pmatrix} \right\|_2^2, \quad (2)$$

где

$$\begin{pmatrix} A \\ \sqrt{\alpha}E_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(m+n) \times n}, \quad \begin{pmatrix} f \\ \sqrt{\alpha}u_k \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m+n},$$

E_n — единичная матрица порядка n , $\|\cdot\|_2$ — евклидова векторная норма, $\alpha > 0$, $k = 0, 1, \dots$.

Из (2) видно, что различные варианты реализации неявного метода простых итераций отличаются лишь методом решения на каждой итерации линейной задачи наименьших квадратов:

$$\min_{u \in \mathbb{R}^n} \left\| \begin{pmatrix} A \\ \sqrt{\alpha}E_n \end{pmatrix} u - \begin{pmatrix} f \\ \sqrt{\alpha}u_k \end{pmatrix} \right\|_2^2. \quad (3)$$

В зависимости от методов решения задачи (3) получаются различные варианты неявных итерационных схем.

Первый подход основан на применении метода нормальных уравнений. В этом случае получаем классическую форму неявного метода простых итераций, которая была предложена J.D. Riley в [5]:

$$(A^\top A + \alpha E_n)u_{k+1} = A^\top f + \alpha u_k. \quad (4)$$

Второй подход для решения задачи наименьших квадратов (3) предполагает использование метода, основанного на QR-разложении.

Третий подход основан на SVD-разложении. Этот подход рассмотрен в работе [2].

В [3] показано, что неявная итерационная схема (4) решения задачи (3) эквивалентна решению последовательности регуляризованных расширенных систем

$$\begin{pmatrix} \omega E_m & A \\ A^* & -\omega E_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{k+1} \\ u_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ -\omega u_k \end{pmatrix}, \quad (5)$$

где $y_k = \omega^{-1}(f - Au_k)$, $\omega = \sqrt{\alpha}$.

Итерационная схема (5) имеет существенно более высокую скорость сходимости по сравнению с неявной итерационной схемой (4) и значительно меньшее число обусловленности вычислительной задачи. Важнейшим достоинством итерационной схемы (5) является возможность решать большие разреженные СЛАУ. Это обусловлено тем, что для решения расширенных систем (5) можно использовать хорошо известные «решатели», адаптированные для решения разреженных СЛАУ.

2. Новый вариант неявного итерационного метода. В настоящей работе предлагается новый вариант неявного метода простых итераций с использованием итерационного алгоритма псевдообращения Бен–Израэля.

Пусть

$$\left\| \left(\begin{array}{c} A \\ \sqrt{\alpha} E_n \end{array} \right) u - \left(\begin{array}{c} f \\ \sqrt{\alpha} u_k \end{array} \right) \right\|_2^2 = \|A_\alpha u - f_k^\alpha\|_2^2,$$

где

$$A_\alpha = \left(\begin{array}{c} A \\ \sqrt{\alpha} E_n \end{array} \right) \in \mathbb{R}^{(m+n) \times n}, \quad f_k^\alpha = \left(\begin{array}{c} f \\ \sqrt{\alpha} u_k \end{array} \right) \in \mathbb{R}^{m+n}.$$

Как показано в [2], итерационную схему (2) можно представить в виде

$$u_{k+1} = A_\alpha^+ f_k^\alpha. \quad (6)$$

Пусть $A_\alpha^+ = (U_\alpha : V_\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times (m+n)}$, где $U_\alpha \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $V_\alpha \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Тогда неявный метод простых итераций (6) можно записать в виде

$$u_{k+1} = U_\alpha f + \sqrt{\alpha} V_\alpha u_k. \quad (7)$$

Для последовательности $(u_k)_{k=0}^\infty$, определяемой итерационной формулой (7) при произвольном начальном u_0 , справедливо $\lim_{k \rightarrow \infty} \|u_k - u_*\|_2 = 0$, где u_* — псевдорешение СЛАУ (1).

Так как матрица A_α всегда имеет полный столбцовый ранг, т.е. $\text{rank } A_\alpha = n$, для вычисления A_α^+ можно воспользоваться итерационным методом Бен—Израэля [4]:

$$X_{i+1} = (2E_n - X_i A_\alpha) X_i, \quad (8)$$

где $X_i \in \mathbb{R}^{n \times (m+n)}$, $i = 0, 1, 2, \dots$.

Итерационный метод Бен—Израэля (8) имеет квадратичную скорость сходимости [4] и, как отмечено в [6, 7], высокую численную устойчивость.

Пусть $X_i = (Y_i : Z_i)$, где $Y_i \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $Z_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Тогда (8) можно записать в виде

$$X_{i+1} = [2E_n - (Y_i A + \sqrt{\alpha} Z_i)] X_i \quad (9)$$

или

$$(Y_{i+1} : Z_{i+1}) = (2E_n - Y_i A - \sqrt{\alpha} Z_i)(Y_i : Z_i).$$

Если $X_0 = \beta A_\alpha^\top = \beta(A^\top : \sqrt{\alpha} E_n)$ или $Y_0 = \beta A^\top$, $Z_0 = \beta \sqrt{\alpha} E_n$ и

$$0 < \beta < \frac{2}{\sigma_1^2(A_\alpha)} = \frac{2}{\sigma_1^2(A) + \alpha},$$

где $\sigma_1(A_\alpha)$ и $\sigma_1(A)$ — максимальные сингулярные числа матриц A_α и A соответственно, то последовательность (8) при $i \rightarrow \infty$ сходится к A_α^+ [4].

Так как $\sigma_1^2 = \|A\|_2^2 \leq \|A\|_F^2$, можно принять, что

$$\beta = \frac{1.8}{\|A\|_F^2 + \alpha},$$

где $\|A\|_F$ — сферическая матричная норма (норма Фробениуса), $\|A\|_2$ — спектральная матричная норма [8, § 2.3].

Критерий останковки итерационного процесса (9): $i = 0, 1, \dots, i(\delta)$, где

$$i(\delta) = \min \left\{ i \in \mathbb{N} : \frac{\|X_{k+1} - X_k\|_\infty}{1 + \|X_k\|_\infty} \leq \delta \right\},$$

δ — априори заданное число для останковки итерационного процесса (8) по относительной скорости сходимости, $\|X\|_\infty$ — матричная норма, подчиненная кубической векторной норме (∞ -норме) [8, § 2.3].

Тогда (7) принимает вид

$$\tilde{u}_{k+1} = \sqrt{\alpha} V_\delta \tilde{u}_k + g_\delta, \quad (10)$$

где $X_\delta = X_{i(\delta)}$, а $U_\delta = Y_{i(\delta)}$, $V_\delta = Z_{i(\delta)}$ и $g_\delta = U_\delta f$.

3. Вычислительные эксперименты. Проведем сравнение предлагаемого в статье итерационного алгоритма (10) для решения задач вида (1) с методами, основанными на вычислении псевдообратной матрицы A^+ , т.е. когда решения находятся по формуле $u_* = A^+ f$.

В первом случае псевдообратная матрица A^+ вычисляется на основе хорошо известного алгоритма сингулярного разложения (SVD-разложения).

Во втором случае псевдообратная матрица A^+ вычисляется известным итерационным методом Бэн—Израэля. В случае, когда матрица A задачи (1) — невырожденная квадратная матрица, для вычисления обратной матрицы применяется итерационный метод Шульца [9], который является частным случаем итерационного алгоритма псевдообращения Бен—Израэля.

Все дальнейшие вычисления выполняются на Python 3.7.4.

3.1. Решение плохо обусловленных совместных СЛАУ. Рассмотрим решение плохо обусловленных совместных СЛАУ вида (1) с квадратными матрицами $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Для первого вычислительного эксперимента матрица A системы (1) генерировалась с помощью функции `deriv2` из пакета `RTools` [10], вектор точного решения брался в виде $u_{\text{ext}} = (1, 2, \dots, n)^\top$, а вектор правой части определялся по формуле $f = Au_{\text{ext}}$. Спектральное число обусловленности матрицы A определяется по формуле $\kappa_2(A) = \sigma_1/\sigma_n$, где σ_1 и σ_n — максимальное и минимальное сингулярные числа матрицы A соответственно.

Решение задачи (1) находилось с помощью следующих подходов:

- решение вычислялось как $u_{\text{svd}} = A^+ f$, где матрица A^+ вычислялась на основе SVD-алгоритма;
- нахождение обратной матрицы A^{-1} с помощью итерационного алгоритма Шульца и вычисление решения задачи (1);
- вычисление решения задачи (1) с помощью предлагаемого в статье алгоритма (10).

Критерий останковки итерационных алгоритмов Шульца и Бен—Израэля:

$$\frac{\|X_{k+1} - X_k\|_\infty}{1 + \|X_k\|_\infty} \leq 10^{-7}.$$

Критерий останковки итерационного алгоритма (10):

$$\text{Err} = \frac{\|u_{k+1} - u_k\|_\infty}{1 + \|u_k\|_\infty} \leq 10^{-6}.$$

При использовании итерационного алгоритма (10) для рассматриваемой задачи параметр $\omega = \sqrt{\alpha}$ выбирался равным $\sigma_n/2$, σ_n , $2\sigma_n$, $3\sigma_n$.

В табл. 1 и на рис. 1 представлены результаты вычислений для задачи (1), когда $n = 512$, $\kappa_2(A) = 3.19 \cdot 10^5$, $\sigma_n = 3.17 \cdot 10^{-7}$, полученные при использовании итерационного алгоритма (10). Здесь и далее $\kappa_2(A_\alpha)$ — спектральное число обусловленности матрицы A_α , it_1 — число итераций алгоритма (10), it_2 — число итераций алгоритма Бен—Израэля, $RErr = \frac{\|u_{ext} - u_k\|_2}{\|u_{ext}\|_2}$ — относительная ошибка вычислений.

Таблица 1

Результаты вычислений для тестовой задачи (решение плохо обусловленных совместных СЛАУ (1)) при использовании итерационного алгоритма (10)

[The results of computations for a test problem (solving the ill-conditioned consistent systems of linear equations (1)) by the iteration algorithm (10)]

ω	$\kappa_2(A_\alpha)$	it_1	it_2	RErr
$\sigma_n/2$	$2.85 \cdot 10^5$	23	41	$1.90 \cdot 10^{-11}$
σ_n	$2.25 \cdot 10^5$	53	40	$1.88 \cdot 10^{-11}$
$2\sigma_n$	$1.43 \cdot 10^5$	151	39	$1.52 \cdot 10^{-11}$
$3\sigma_n$	$1.01 \cdot 10^5$	309	38	$2.16 \cdot 10^{-11}$

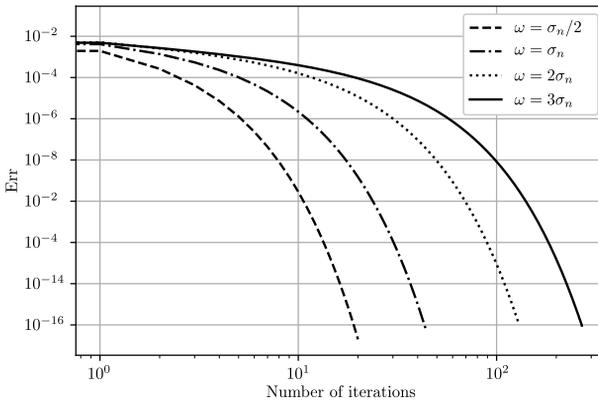


Рис. 1. Скорость сходимости итерационного алгоритма (10) при решении плохо обусловленных совместных СЛАУ (1)

[Figure 1. Convergence rate of the iterative algorithm (10) when solving ill-conditioned systems of linear equations (1)]

Отметим, что для этой же задачи для SVD-алгоритма получена относительная ошибка вычислений, равная $1.62 \cdot 10^{-10}$, а для алгоритма Шульца при числе итераций, равном 41, получена относительная ошибка вычислений, равная $5.75 \cdot 10^{-8}$.

Данный вычислительный эксперимент демонстрирует, что предлагаемый в работе итерационный алгоритм (10) по точности превосходит метод на основе итерационного алгоритма Шульца и не уступает методам, основанным на сингулярном разложении, применяемым для решения подобных плохо обусловленных совместных СЛАУ. Итерационный метод Бен—Израэля вычисления псевдообратной матрицы для предложенного способа выбора параметра ω , имеет достаточно высокую скорость сходимости и не сильно зависит от параметра ω .

Рассматриваемый в статье итерационный алгоритм (10) при выборе параметра ω , близким к минимальному сингулярному числу σ_n матрицы A , позволяет вычислять решения плохо обусловленных задач вида (1) с достаточно высокой скоростью и точностью. Увеличение параметра ω для задач данного класса приводит к значительному замедлению итерационного процесса, что, в свою очередь, может вызвать потерю точности получаемого решения.

Как отмечалось ранее, одними из преимуществ предлагаемого алгоритма (10) являются алгоритмическая простота и возможность реализации итерационного процесса только с помощью матрично-векторных операций.

3.2. Решение плохо обусловленных линейных задач наименьших квадратов. Рассмотрим плохо обусловленную линейную задачу наименьших квадратов

$$Au = f, \tag{11}$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 10^{-8} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10^{-8} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10^{-8} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10^{-8} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10^{-8} \end{pmatrix},$$

$$u = (1, 1, 1, 1, 1)^\top, f = Au + r_0, r_0 \in \text{null}(A^\top).$$

Учитывая, что вектор невязки $r_0 \in \text{null}(A^\top)$, псевдорешение $u_* = A^+ f$ системы (11) равно вектору u . Спектральное число обусловленности матрицы A задачи (11) равно $\kappa_2(A) = 2.24 \cdot 10^8$.

Решение задачи (11) с помощью псевдообратной матрицы, вычисленной с применением SVD-алгоритма, получено с относительной ошибкой вычислений, равной $9.42 \cdot 10^{-10}$. Решение этой задачи итерационным алгоритмом Бен–Израэля при числе итераций, равном 60, получено с относительной ошибкой вычислений, равной $1.46 \cdot 10^{-9}$. При этом в качестве критерия остановки итерационного алгоритма Бен–Израэля использовалось условие

$$\frac{\|X_{k+1} - X_k\|_\infty}{1 + \|X_k\|_\infty} \leq 10^{-7}.$$

В табл. 2 представлены результаты вычислений для задачи (11), полученные с помощью алгоритма (10). Здесь σ_5 — минимальное сингулярное значение матрицы A для задачи (11). При этом в качестве критерия остановки

Таблица 2

Результаты вычислений для тестовой задачи (решение плохо обусловленной линейной задачи наименьших квадратов (11)) при использовании итерационного алгоритма (10)

[The results of computations for a test problem (solving the ill-conditioned linear least squares problem (11)) by the iteration algorithm (10)]

ω	$\kappa_2(A_\omega)$	it ₁	it ₂	RErr
σ_1	≈ 1	64	7	$5.98 \cdot 10^{-15}$
$\sigma_1/100$	$\approx 1 \cdot 10^2$	7	18	$2.67 \cdot 10^{-16}$
σ_5	$\approx 1 \cdot 10^8$	30	59	$3.67 \cdot 10^{-8}$

итерационного процесса использовалось условие

$$\frac{\|u_{k+1} - u_k\|_\infty}{1 + \|u_k\|_\infty} \leq 10^{-16}.$$

Анализ результатов вычислительного эксперимента демонстрирует, что при решении плохо обусловленных линейных задач наименьших квадратов предлагаемый алгоритм (10) по точности не уступает известным методам решения этой задачи, а соответствующий выбор параметра ω позволяет получать более точные решения. Алгоритм Бен—Израэля для данного вычислительного эксперимента, как и для предыдущего, демонстрирует достаточно высокую скорость сходимости и близкую к линейной зависимость от параметра ω .

3.3. Решение задач с возмущенными исходными данными. В рассмотренных выше вычислительных экспериментах предложенный итерационный алгоритм (10) применялся для нахождения решения задач вида (1) с точными исходными данными (A, f) . Очень часто при решении различных прикладных задач вместо точных данных (A, f) имеются возмущенные исходные данные (A, \tilde{f}) . Наиболее широко применяемыми на практике подходами для решения задач вида (1) с возмущенными исходными данными (A, \tilde{f}) являются методы регуляризации.

Рассматриваемый итерационный метод (10) при выборе критерия остановки, в котором номер итерации играет роль параметра регуляризации (правило остановки по невязке), можно отнести к итерационным алгоритмам регуляризации.

Проиллюстрируем регуляризирующие свойства итерационного алгоритма (10) на следующей задаче решения СЛАУ:

$$Au = f, \tag{12}$$

где

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 + 10^{-8} & 1 - 10^{-8} \end{pmatrix}, \quad f = (1, 1)^\top.$$

Максимальное и минимальное сингулярные числа матрицы A для задачи (12) соответственно равны $\sigma_1 = 1$ и $\sigma_2 = 5 \cdot 10^{-9}$, а спектральное число обусловленности задачи $\kappa_2(A) = 2 \cdot 10^8$. Рассматриваемая задача относится к плохо обусловленным вычислительным задачам регрессионного анализа.

Вектор $u = (1, 1)^\top$ является точным решением задачи (12).

Рассмотрим задачу (12) с небольшим возмущением в векторе правой части:

$$Au = \tilde{f}, \tag{13}$$

где $\tilde{f} = f + (0.01, 0)^\top$.

Решая систему (13) известными методами, например с помощью процедуры `solve` библиотеки NumPy, получим $u_* = (-10^6, 10^6)^\top$.

В работе [11] для решения возмущенной задачи (13) предлагалось использовать усеченное сингулярное разложение (TSVD). Для возмущенной задачи (13) в [11] параметр усечения был принят равным $\text{tol} = 10^{-7}$ и получено решение $u_{\text{tsvd}} = (1.0050, 1.0049)^\top$.

Найдем решение возмущенной задачи (13) с помощью итерационного алгоритма (10) со следующими параметрами: $\delta = 0.01$, а $\omega = \sqrt{\alpha}$ со значениями σ_1 , $\sigma_1/2$, $\sigma_1/5$.

Критерий останковки итерационного процесса примем в виде

$$k_\delta = \min\{k \in \mathbb{N} : \|Au_k - \tilde{f}\| \leq \tau\delta\}, \quad (14)$$

где $\tau \geq 1$ — параметр демпфирования (в вычислительном эксперименте использовалось значение $\tau = 1.01$). Выражение (14) представляет собой итерационный принцип невязки Тихонова.

Результаты вычислений представлены в табл. 3 и на рис. 2.

Таблица 3

Результаты вычислений для тестовой задачи (решение возмущенной задачи (13)) при использовании итерационного алгоритма (10)

[The results of computations for a test problem (solving the perturbed problem (13)) by the iteration algorithm (10)]

ω	Number of iterations, k	$\ u - u_k\ /\ u\ $	u_k
σ_1	8	$1.07 \cdot 10^{-3}$	$(1.0011, 1.0011)^\top$
$\sigma_1/2$	4	$3.39 \cdot 10^{-3}$	$(1.0033, 1.0033)^\top$
$\sigma_1/5$	2	$3.51 \cdot 10^{-3}$	$(1.0035, 1.0035)^\top$

Полученные результаты позволяют сделать вывод, что предложенный алгоритм (10) с критерием останковки по итерационному принципу невязки (14) по точности не уступают методу регуляризации, основанному на сингулярном разложении. При этом важно отметить, что для решения задачи итерационной регуляризации можно использовать оценку максимального сингулярного числа σ_1 , например $\omega_1 = \|A\|_F$, которая может быть легко вычислена в отличие от оценки минимального сингулярного числа σ_n .

4. Заключение. Одним из преимуществ предлагаемого в статье итерационного алгоритма является его простая алгоритмическая структура. Основными операциями алгоритма являются матрично-векторные произведения, для которых существуют эффективные программные реализации на современных высокопроизводительных платформах. Например, данный алгоритм может быть реализован с использованием высокопроизводительных библиотек Intel® Math Kernel Library [12] для многоядерных/многопроцессорных систем, CUDA Toolkit [13] для систем с графическими ускорителями общего назначения или адаптирован к конкретной вычислительной платформе.

Предлагаемый в статье алгоритм позволяет получать высокоэффективные алгоритмы итеративной регуляризации, основанные на итерационном принципе невязки (discrepancy principle [14]).

Конкурирующие интересы. Конкурирующих интересов не имеем.

Авторская ответственность. Мы несем полную ответственность за предоставление окончательной версии рукописи в печать. Окончательная версия рукописи нами одобрена.

Финансирование. Исследование выполнялось без финансирования.

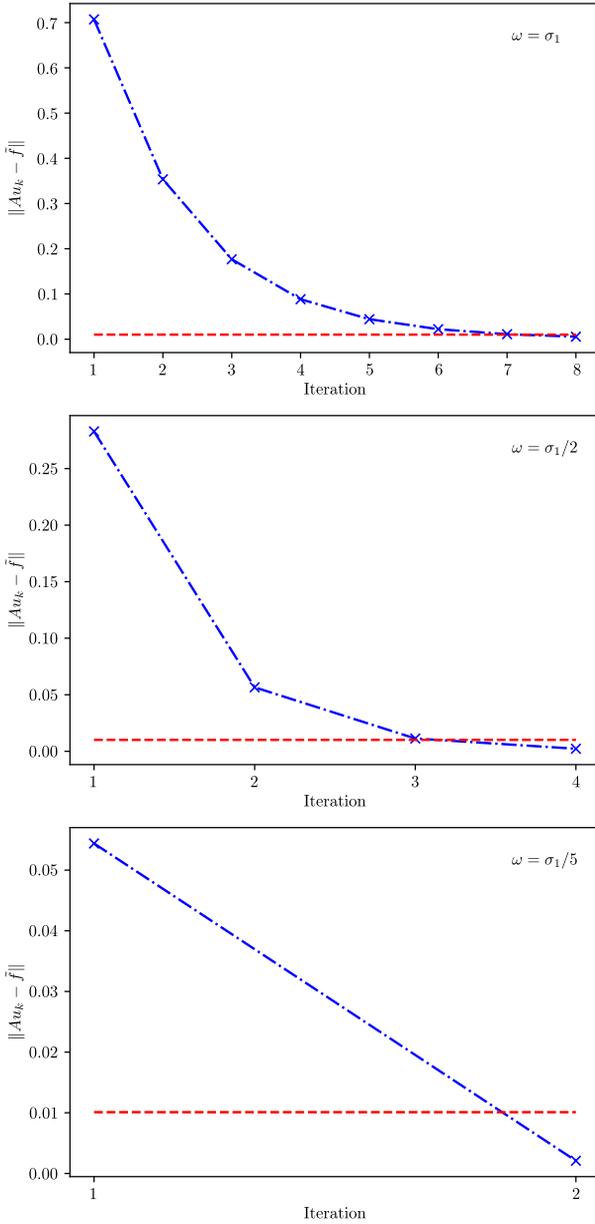


Рис. 2. Скорость сходимости итерационного процесса при решении возмущенной задачи (13); горизонтальная линия соответствует значению $\tau\delta$

[Figure 2. Convergence rate of the iterative process when solving the perturbed problem (13); the horizontal line corresponds to the value $\tau\delta$]

Библиографический список

1. Sun L., Wei Y., Zhou J. On an iterative method for solving the least squares problem of rank-deficient systems // *Int. J. Comp. Math.*, 2015. vol. 92, no. 3. pp. 532–541. DOI: <https://doi.org/10.1080/00207160.2014.900173>.
2. Zhdanov A. I. Implicit iterative schemes based on singular decomposition and regularizing algorithms // *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2018. vol. 22, no. 3. pp. 549–556. EDN: PJITAX. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1592>.
3. Жданов А. И. Неявная итерационная схема на основе расширенных линейных систем // *Докл. РАН. Матем., информ., проц. упр.*, 2022. Т. 503. С. 91–94. EDN: COMJBF. DOI: <https://doi.org/10.31857/S2686954322020205>.
4. Ben-Israel A., Greville T. N. E. *Generalized Inverses: Theory and Applications*. New York: Springer, 2003. xv+420 pp. DOI: <https://doi.org/10.1007/b97366>.
5. Riley J. D. Solving systems of linear equations with a positive definite, symmetric, but possibly ill-conditioned matrix // *Math. Comp.*, 1955. vol. 9. pp. 96–101. DOI: <https://doi.org/10.1090/S0025-5718-1955-0074915-1>.
6. Esmaeili H., Erfanifar R., Rashidi M. An efficient Schulz-type method to compute the Moore–Penrose inverse // *Int. J. Industr. Math.*, 2018. vol. 10, no. 2. pp. 221–228.
7. Toutounian F., Soleymani F. An iterative method for computing the approximate inverse of a square matrix and the Moore–Penrose inverse of a non-square matrix // *Appl. Math. Comp.*, 2013. vol. 224. pp. 671–680. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.amc.2013.08.086>.
8. Golub G. H. van Loan C. F. *Matrix Computations*. Baltimore: Johns Hopkins Univ., 2013. xxiv+756 pp.
9. Schulz G. Iterative Berechnung der reziproken Matrix // *ZAMM*, 1933. vol. 13, no. 1. pp. 57–59. DOI: <https://doi.org/10.1002/zamm.19330130111>.
10. Hansen P. C. REGULARIZATION TOOLS: A Matlab package for analysis and solution of discrete ill-posed problems // *Numer. Algor.*, 1994. vol. 6. pp. 1–53. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF02149761>.
11. Pillonetto G., Chen T., Chiuso A., et al. *Regularized System Identification: Learning Dynamic Models from Data*. Cham: Springer, 2022. xxiv+377 pp. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-030-95860-2>.
12. Wang E., Zhang Q., Shen B. et al. Intel math kernel library / *High-Performance Computing on the Intel® Xeon Phi™*. Cham: Springer, 2014. pp. 167–188. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-319-06486-4_7.
13. Fatica M. CUDA toolkit and libraries / *2008 IEEE Hot Chips 20 Symposium* (24–26 August 2008). Stanford, CA, USA, 2008. pp. 1–22. DOI: <https://doi.org/10.1109/HOTCHIPS.2008.7476520>.
14. Zare H., Hajarian M. Determination of regularization parameter via solving a multi-objective optimization problem // *Appl. Num. Math.*, 2020. vol. 156. pp. 542–554. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.apnum.2020.05.021>.

MSC: 65F10, 65F22

Implicit iterative scheme based on the pseudo-inversion algorithm and its application

A. I. Zhdanov^{1,2}, Yu. V. Sidorov¹

¹ Samara State Technical University,
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russian Federation.

² Samara State Technical University, Novokuybyshevsk Branch,
5, Mironova st., Novokuybyshevsk, 446200, Russian Federation.

Abstract

A new version of the implicit iterative scheme is proposed for the implementation of which only matrix-vector computational procedures are required. This makes the proposed computational scheme potentially highly efficient for solving a wide class of high-dimensional problems on modern high-performance computing platforms, such as Nvidia Cuda. It is shown that the proposed algorithms can be used to solve ill-conditioned linear systems and least squares problems, as well as to construct iterative regularization algorithms. The results of computational experiments are presented, confirming the effectiveness of the proposed computational algorithms.

Keywords: implicit iterative scheme, simple iteration method, ill-conditioned problems, Ben-Israel iterative pseudo-inversion, iterative regularization, matrix-vector operations.

Received: 29th May, 2023 / Revised: 12th February, 2024 /

Accepted: 4th March, 2024 / First online: 22nd May, 2024

Competing interests. We have no competing interests.

Authors' contributions and responsibilities. We take full responsibility for submitting the final version of the manuscript for publication. The final version of the manuscript has been approved by us.

Funding. The research was conducted without funding.

Mathematical Modeling, Numerical Methods and Software Complexes

Research Article

© Authors, 2024

© Samara State Technical University, 2024 (Compilation, Design, and Layout)

© The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Please cite this article in press as:

Zhdanov A. I., Sidorov Yu. V. Implicit iterative scheme based on the pseudo-inversion algorithm and its application, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2024, vol. 28, no. 1, pp. 117–129. EDN: HIGWRZ. DOI: 10.14498/vsgtu2026 (In Russian).

Authors' Details:

Aleksander I. Zhdanov  <https://orcid.org/0000-0001-6082-9097>

Dr. Phys. & Math. Sci., Professor; Professor; Dept. of Applied Mathematics and Informatics¹; Professor; Dept. of Electrical Power Engineering, Electrical Engineering, and Automation Process Technology²; e-mail: zhdanov.ai@samgtu.ru

Yuri V. Sidorov  <https://orcid.org/0000-0002-8138-9200>

Cand. Phys. & Math. Sci.; Associate Professor; Dept. of Applied Mathematics and Informatics; e-mail: sidorov.yv@samgtu.ru

References

1. Sun L., Wei Y., Zhou J. On an iterative method for solving the least squares problem of rank-deficient systems, *Int. J. Comp. Math.*, 2015, vol. 92, no. 3, pp. 532–541. DOI: <https://doi.org/10.1080/00207160.2014.900173>.
2. Zhdanov A. I. Implicit iterative schemes based on singular decomposition and regularizing algorithms, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2018, vol. 22, no. 3, pp. 549–556. EDN: PJITAX. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1592>.
3. Zhdanov A. I. Implicit iterative schemes based on augmented linear systems, *Dokl. Math.*, 2022, vol. 105, no. 2, pp. 131–134. EDN: SNWVMI. DOI: <https://doi.org/10.1134/S106456242202020X>.
4. Ben-Israel A., Greville T. N. E. *Generalized Inverses: Theory and Applications*. New York, Springer, 2003, xv+420 pp. DOI: <https://doi.org/10.1007/b97366>.
5. Riley J. D. Solving systems of linear equations with a positive definite, symmetric, but possibly ill-conditioned matrix, *Math. Comp.*, 1955, vol. 9, pp. 96–101. DOI: <https://doi.org/10.1090/S0025-5718-1955-0074915-1>.
6. Esmaeili H., Erfanifar R., Rashidi M. An efficient Schulz-type method to compute the Moore–Penrose inverse, *Int. J. Industr. Math.*, 2018, vol. 10, no. 2, pp. 221–228.
7. Toutounian F., Soleymani F. An iterative method for computing the approximate inverse of a square matrix and the Moore–Penrose inverse of a non-square matrix, *Appl. Math. Comp.*, 2013, vol. 224, pp. 671–680. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.amc.2013.08.086>.
8. Golub G. H. van Loan C. F. *Matrix Computations*. Baltimore, Johns Hopkins Univ., 2013, xxiv+756 pp.
9. Schulz G. Iterative Berechnung der reziproken Matrix, *ZAMM*, 1933, vol. 13, no. 1, pp. 57–59. DOI: <https://doi.org/10.1002/zamm.19330130111>.
10. Hansen P. C. REGULARIZATION TOOLS: A Matlab package for analysis and solution of discrete ill-posed problems, *Numer. Algor.*, 1994, vol. 6, pp. 1–53. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF02149761>.
11. Pillonetto G., Chen T., Chiuso A., et al. *Regularized System Identification: Learning Dynamic Models from Data*. Cham, Springer, 2022, xxiv+377 pp. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-030-95860-2>.
12. Wang E., Zhang Q., Shen B. et al. Intel math kernel library, In: *High-Performance Computing on the Intel® Xeon Phi™*. Cham, Springer, 2014, pp. 167–188. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-319-06486-4_7.
13. Fatica M. CUDA toolkit and libraries, In: *2008 IEEE Hot Chips 20 Symposium (24–26 August 2008)*. Stanford, CA, USA, 2008, pp. 1–22. DOI: <https://doi.org/10.1109/HOTCHIPS.2008.7476520>.
14. Zare H., Hajarian M. Determination of regularization parameter via solving a multi-objective optimization problem, *Appl. Num. Math.*, 2020, vol. 156, pp. 542–554. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.apnum.2020.05.021>.



УДК 517.958:531.72

Гибридный численно-аналитический метод решения задач переноса ионов соли в мембранных системах с осевой симметрией

*Е. В. Казаковцева, А. В. Коваленко,
А. В. Письменский, М. Х. Уртенев*

Кубанский государственный университет,
Россия, 350040, Краснодар, ул. Ставропольская, 149.

Аннотация

Целью работы является разработка нового гибридного численно-аналитического метода решения краевых задач с осевой симметрией, например, с вращающимся мембранным диском, основанного на сращивании асимптотического решения вблизи катионнообменной мембраны (КОМ) с численным решением в оставшейся части области. Для это используется следующий метод:

1) предлагается базовая математическая модель переноса ионов соли в электрохимической ячейке с вращающимся катионнообменным мембранным диском на основе общих законов сохранения, представленных уравнениями Нернста–Планка–Пуассона и Навье–Стокса с естественными граничными и начальными условиями. Эта модель не содержит никаких подгоночных параметров или упрощающих предположений. Однако численное решение соответствующей краевой задачи представляет собой значительные вычислительные сложности при реальных концентрациях раствора и больших скачках потенциала и угловой скорости вращения мембранного диска, связанные с большими градиентами концентрации

Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ Научная статья

© Коллектив авторов, 2024

© СамГТУ, 2024 (составление, дизайн, макет)

Этот контент публикуется на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

Образец для цитирования

Казаковцева Е. В., Коваленко А. В., Письменский А. В., Уртенев М. Х. Гибридный численно-аналитический метод решения задач переноса ионов соли в мембранных системах с осевой симметрией // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2024. Т. 28, № 1. С. 130–151. EDN: VOXTTX. DOI: 10.14498/vsgtu2043.

Сведения об авторах

Екатерина Васильевна Казаковцева ✉ <https://orcid.org/0009-0003-0040-0880>
старший преподаватель; каф. анализа данных и искусственного интеллекта;
e-mail: vivkaterina@mail.ru

Анна Владимировна Коваленко <https://orcid.org/0000-0002-3991-3953>
доктор технических наук, доцент; заведующий кафедрой; каф. анализа данных и искусственного интеллекта; e-mail: savanna-05@mail.ru

Александр Владимирович Письменский <https://orcid.org/0000-0003-4046-2229>
кандидат физико-математических наук; заведующий кафедрой; каф. прикладной математики; e-mail: archer812@mail.ru

Махамет Хусеевич Уртенев <https://orcid.org/0000-0002-0252-6247>
доктор физико-математических наук, профессор; профессор; каф. прикладной математики; e-mail: urtenovmax@mail.ru

и потенциала вблизи КОМ в квазиравновесной области пространственного заряда (ОПЗ);

2) область решения разбивается на две части, одна из которых представляет собой небольшую область возрастания катионов (ОВК), расположенную вблизи КОМ, и оставшуюся основную часть области (ОЧО);

3) в ОВК находится аналитическое решение методом сращивания асимптотических решений;

4) в ОЧО строится упрощенная математическая модель, которая отличается от базовой математической модели таким граничным условием на границе с ОВК, которое позволяет затем произвести сращивание решения соответствующей краевой задачи с решением в ОВК.

Основным результатом является гибридный численно-аналитический метод, который дает возможность проводить численный анализ переноса ионов соли при реальных концентрациях раствора электролита бинарной соли при широком диапазоне изменения скачка потенциала и угловой скорости вращения мембранного диска.

По результатам работы можно сделать следующий вывод: сочетание аналитического (асимптотического) метода решения в области погранслоя и численного решения в остальной области, за исключением погранслоя, с их последующим сращиванием позволяет построить эффективный гибридный численно-аналитический метод решения задач переноса ионов соли в мембранных системах с осевой симметрией.

Ключевые слова: асимптотическое решение, гибридный численно-аналитический метод, вращающийся мембранный диск, осевая симметрия, цилиндрическая система координат.

Получение: 22 июля 2023 г. / Исправление: 12 апреля 2024 г. /

Принятие: 15 апреля 2024 г. / Публикация онлайн: 17 мая 2024 г.

Введение. Гидродинамические системы с осевой симметрией в настоящее время широко используются и интенсивно исследуются [1–8]. Так, например, в работе [9] найдено точное решение в рамках уравнений Эйлера закрученных осесимметричных стационарных течений идеальной несжимаемой жидкости, а в работе [10] в рамках уравнений Навье—Стокса рассмотрены нестационарные осесимметричные течения однородной вязкой несжимаемой жидкости, в которых осевая и окружная скорости зависят только от радиуса и от времени, а радиальная скорость равна нулю. Произведено расщепление краевых задач для рассматриваемого типа течений на две задачи, каждая из которых содержит две неизвестные функции (давление и одна из компонент скорости). Актуальным является исследование аналогичных задач, но с дополнительными процессами переноса вещества за счет конвекции, диффузии, электромиграции и т.д. Изучению свойств переноса ионов соли в системах с вращающейся жидкостью, в том числе методом вращающегося мембранного диска, посвящены ряд работ [1–8]. Эта работа является продолжением работы [3], где приведена базовая модель, основанная только на основных законах сохранения и естественных граничных условиях и не использующая никаких гипотез для упрощения. Базовая модель служит для проверки исследования основных свойств и вывода упрощенных моделей на основе этих свойств. Достоинствами базовой модели являются общность и отсутствие подгоночных параметров, к недостаткам можно отнести сложность расчета при высоких

скоростях вращения мембранного диска и скачке потенциала, а также реальных концентрациях раствора. Это связано с большими градиентами концентрации и потенциала вблизи катионообменной мембраны (КОМ). Для преодоления указанных ограничений предлагается разбиение области решения на две подобласти: первая — основная часть области (ОЧО) вдали от катионообменной мембраны; вторая — область возрастания катионов (ОВК) вблизи КОМ, границей которой служит точка локального минимума концентрации катионов около КОМ. Для каждой из этих областей из базовой модели выводятся упрощенные модельные задачи, удобные как для численного решения (в ОЧО), так и для аналитического (в ОВК). Аналитическое решение зависит от того, больше или меньше ток, протекающий через систему, по сравнению с предельным током [11]. В допредельном режиме ОВК совпадает с квазиравновесной областью пространственного заряда (ОПЗ), однако в сверхпредельном режиме ОВК должна содержать наряду с квазиравновесной ОПЗ еще и промежуточную область (слой), необходимую для сращивания решений. Решения в этих подобластях сращиваются, что позволяет искать решение при большой угловой скорости, начальной концентрации и скачке потенциала. Модель без области возрастания катионов назовем упрощенной моделью без ОВК. Аналогичная модель переноса ионов соли для плоского канала впервые была предложена, по-видимому, в работе [12], однако в этой работе не было исследовано решение в ОВК и поэтому не было произведено сращивание.

1. Формулировка базовой модели и модели без ОВК в задачах с осевой симметрией. В допредельном режиме область решения состоит из области электронейтральности (ОЭН) и квазиравновесной ОПЗ. В сверхпредельном режиме между ОЭН и квазиравновесной ОПЗ возникает расширенная ОПЗ. В расширенной ОПЗ электромиграция преобладает над диффузией, а в области электронейтральности миграционный и диффузионный потоки равны. В квазиравновесной ОПЗ миграционный поток равен диффузионному, но они противоположны по направлению, что приводит к тому, что ток становится равным нулю, а также в этой области концентрации и напряженность электрического поля резко возрастают, поэтому их градиенты имеют значительные величины, а это затрудняет численное решение в данной области. Поэтому возникает необходимость в формулировке упрощенных моделей, которые дают решение, близкое к решению базовой математической модели, и позволяют выполнять численные расчеты при большой угловой скорости, начальной концентрации и скачке потенциала.

Приведем краевую задачу базовой математической модели, которая состоит из области исследования, системы уравнений, а также краевых условий.

1.1. Область исследования. Для моделирования течения жидкости и переноса ионов соли в электрохимической ячейке с вращающимся катионообменным диском [2] благодаря осевой симметрии можно описать только половину сечения цилиндрической области (рис. 1), которую обозначим через Ω .

1.2. Система уравнений. В области Ω для описания переноса ионов соли используются связанная система уравнений Навье—Стокса с объемной электрической силой \vec{f} и Нернста—Планка—Пуассона, которые в цилиндрической системе координат с учетом осевой симметрии принимают следующий

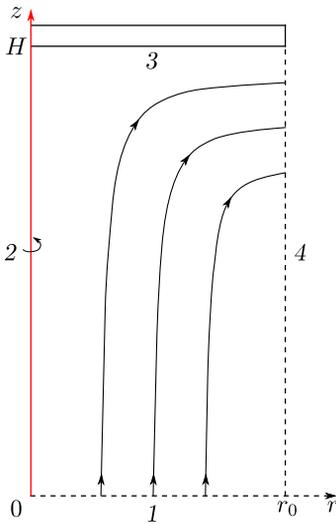


Рис. 1. Исследуемое сечение области Ω и ее границы: 1—глубина раствора, где выполняется условие электронейтральности; 2—ось симметрии; 3—катионнообменная мембрана; 4—открытая граница

[Figure 1. Investigated cross-section of the region Ω and its boundaries: 1—depth of the solution where the electroneutrality condition is satisfied; 2—axis of symmetry; 3—cation-exchange membrane; 4—open boundary]

ВИД:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho \left(u \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{v^2}{r} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \frac{\partial p}{\partial r} &= \eta \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) - \frac{u}{r^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right] + f_r, \\ \rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho \left(u \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{uv}{r} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) &= \eta \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v}{\partial r} \right) - \frac{v}{r^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right] + f_\varphi, \\ \rho \frac{\partial w}{\partial t} + \rho \left(u \frac{\partial w}{\partial r} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \frac{\partial p}{\partial z} &= \eta \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial w}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right] + f_z; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{N}_i &= \left(\frac{F}{RT} z_i D_i C_i E_r - D_i \frac{\partial C_i}{\partial r} + C_i u \right) \vec{e}_r + C_i v \vec{e}_\varphi + \\ &+ \left(\frac{F}{RT} z_i D_i C_i E_z - D_i \frac{\partial C_i}{\partial z} + C_i w \right) \vec{e}_z, \quad i = 1, 2; \quad (1) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial C_i}{\partial t} = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r N_{i,r}) - \frac{\partial N_{i,z}}{\partial z}, \quad i = 1, 2; \quad (2)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = -\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} - \frac{F}{\varepsilon} (z_1 C_1 + z_2 C_2), \quad (3)$$

$$\vec{I} = F(z_1 \vec{N}_1 + z_2 \vec{N}_2), \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} f_r &= \varepsilon \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right) \frac{\partial \Phi}{\partial r} = \varepsilon \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right) \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \varepsilon \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial r} \right)^2, \\ f_\varphi &= 0, \end{aligned}$$

$$f_z = \varepsilon \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right) \frac{\partial \Phi}{\partial z} = \varepsilon \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right) \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \varepsilon \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \frac{\partial \Phi}{\partial z};$$

u, v, w — радиальная, азимутальная и аксиальная компоненты скорости течения раствора; $\vec{N}_1, \vec{N}_2, \vec{C}_1, \vec{C}_2$ — потоки и концентрации катионов и анионов

в растворе соответственно; z_1, z_2 — зарядовые числа катионов и анионов; \vec{I} — плотность тока; D_1, D_2 — коэффициенты диффузии катионов и анионов соответственно; Φ — потенциал электрического поля; $\vec{E} = -\nabla\Phi$ — напряженность электрического поля; ε — диэлектрическая проницаемость электролита; F — постоянная Фарадея; R — газовая постоянная; T — абсолютная температура; t — время; ρ — плотность; η — динамическая вязкость; p — давление.

1.3. Краевые условия для базовой модели. Граница 1 является входом для раствора; для концентраций выполняется условие электронейтральности; задается постоянная начальная концентрация C_0 ; для скорости ставится условие отсутствия нормального напряжения $(\nabla\vec{u} + (\nabla\vec{u})^\top)\vec{n} = 0$; задается нулевое давление; граница 1 считается также эквипотенциальной (анодом) — $\Phi(t, r, 0) = d_\phi$.

Граница 2 является осью симметрии.

Граница 3 соответствует вращающейся идеально селективной КОМ и является выходом для катионов, концентрация которых постоянна и определяется емкостью мембраны — $C_1(t, r, H) = C_{km}$. КОМ предполагается идеально селективной и поэтому для анионов задается условие отсутствия потока — $-\vec{n} \cdot \vec{N}_2 = 0$; для потенциала $\Phi(t, r, H) = 0$ задается азимутальная скорость в виде $v(t, r, H) = \omega r$, а остальные компоненты скорости принимаются равными нулю.

Граница 4 является выходом для раствора; ставится условие выноса ионов только конвективным потоком — $\vec{N}_i = -u \cdot C_i, i = 1, 2$; для потенциала задается условие $-\vec{n} \cdot (r \frac{\partial\Phi}{\partial r}, \frac{\partial\Phi}{\partial z})^\top = 0$; для скорости предполагается условие отсутствия нормального напряжения — $(\nabla\vec{u} + (\nabla\vec{u})^\top)\vec{n} = 0$.

В начальный момент времени концентрация ионов соли предполагается постоянной — $C_1(0, r, z) = C_2(0, r, z) = C_0$, а раствор — неподвижным.

1.4. Краевые условия для модели без ОВК. Все начальные и граничные условия остаются такими же, как в базовой модели, за исключением условия на границе ОВК, для которой задается концентрации катионов — $-\vec{n}\nabla C_1|_{z=z_m} = 0$, где z_m — координата минимума концентрации, зависящая от угловой скорости вращения диска и начальной концентрации. Поскольку толщина области возрастания катионов (ОВК) мала, т.е. $z_m \approx H$, это условие может быть заменено на условие $-\vec{n}\nabla C_1|_{z=H} = 0$. Таким образом, модель без ОВК будет определена во всей ячейке. Ниже показано, что ее решение близко к решению базовой модели в ОЧО, но, естественно, их решения отличаются в ОВК.

1.5. Сравнительный анализ численных результатов исследования базовой модели и модели без ОВК. Были проведены исследования для разнообразных исходных данных (концентрация, угловая скорость и т.д.), соответствующих сверхпредельному режиму, когда возникают электроконвективные вихри. В качестве примера ниже приведены результаты вычислений при следующих условиях:¹ $C_0 = 0.01$ моль/м³, $\omega = \pi/2$, $d_\phi = 1.5$ В, радиус вращающегося мембранного диска $r = 1$ мм, высота ячейки — 2 мм.

На рис. 2 приведены линии тока жидкости в базовой модели и для модели без ОВК, которые показывают образование электроконвективного вихря,

¹Эти данные соответствуют конструкции электрохимической ячейки с вращающимся мембранным диском, приведенной в [2].

причем линии тока раствора практически полностью совпадают.

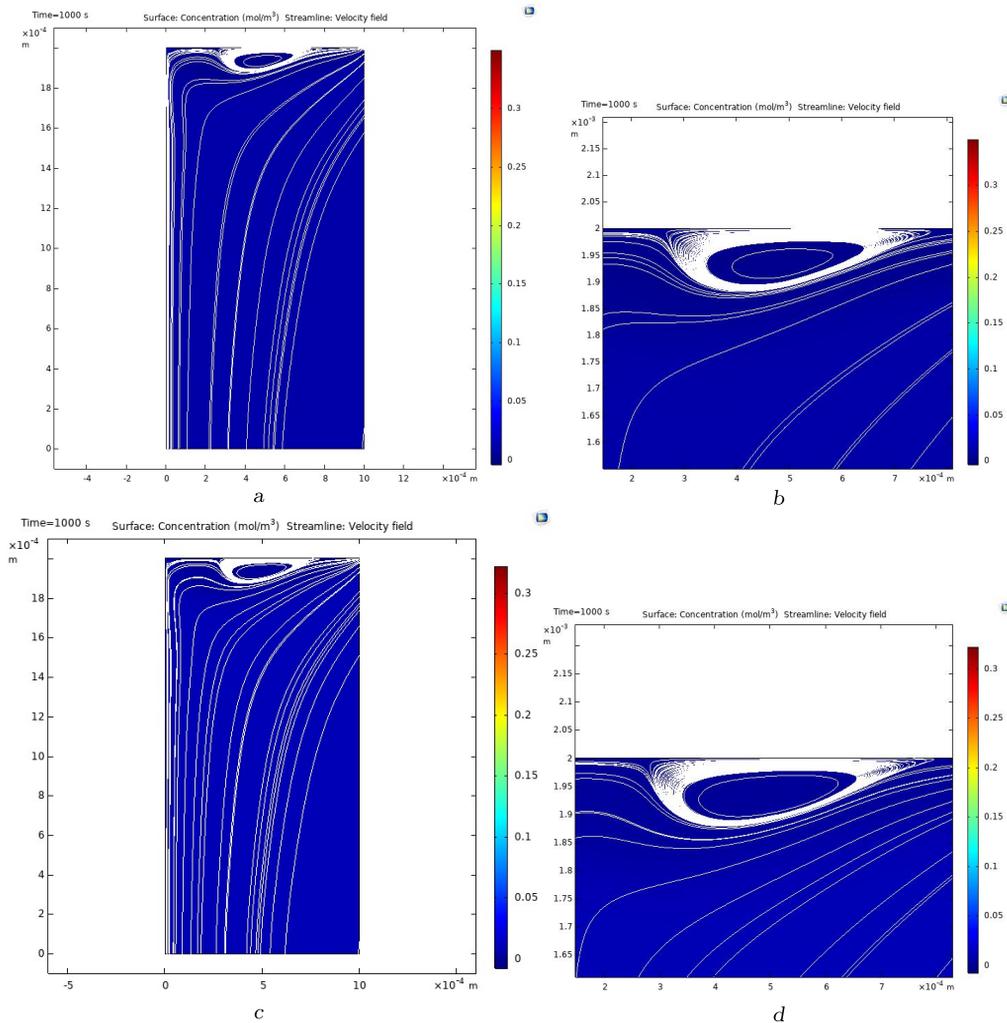


Рис. 2. Линии тока жидкости при $t = 1000$ с в базовой модели (a), в базовой модели около катионнообменной мембраны (b), в модели без области возрастания катионов (c), в модели без области возрастания катионов около катионнообменной мембраны (d)

[Figure 2. Fluid streamlines at $t = 1000$ s in the base model (a), in the base model near the cation-exchange membrane (b), in the model without the cation increase region (c), in the model without the cation increase region near the cation-exchange membrane (d)]

Концентрации, потенциал и т.д. зависят от t , r и z . Для того чтобы сделать обзорной их зависимость от z , рассмотрим графики при фиксированных r начиная со значения $r = 0.1$ мм и до значения $r = 0.9$ мм с шагом 0.1 мм. На всех приведенных ниже рисунках по оси абсцисс показаны координаты высоты ячейки z , причем $z = 0$ соответствует глубине раствора, где выполняется условие электронейтральности, а $z = 2$ мм — условной границе раствор/КОМ. По оси ординат показаны требуемые величины (концентрации, потенциал, компоненты скорости и т.д.).

На рис. 3, а показаны профили концентрации катионов C_1 в базовой модели, по которым можно сделать вывод, что концентрация сначала почти

постоянна, а затем линейно убывает, что соответствует поведению в области электронейтральности, далее образуется расширенная ОПЗ и концентрация достигает своего минимума, а потом нелинейно возрастает в квазиравновесной ОПЗ (рис. 3, *b*).

На рис. 3 показаны графики концентрации катионов в базовой модели и модели без ОВК, из которых можно сделать вывод, что они совпадают с большой точностью в области электронейтральности и расширенной ОПЗ, однако около КОМ отличаются. В базовой модели концентрации достигают минимума в некоторой точке z_m , расположенной вблизи КОМ, и далее увеличиваются до граничного значения $C_{1,m}$, в то время как в модели без ОВК концентрации продолжают монотонно убывать, причем в области $(z_m, 1]$ практически постоянны, что объясняется разницей в граничном условии для катионов около КОМ.

Графики концентрации анионов C_2 , показанные на рис. 4 для базовой модели и в модели без ОВК, ведут себя примерно одинаково, включая область около КОМ.

Для анализа распределения пространственного заряда рассмотрим разность концентраций $C_1 - C_2$, которая представляет собой плотность распределения пространственного заряда, нормированную на число Фарадея F . Из анализа графиков разности концентраций $C_1 - C_2$ (рис. 5, *b, c*) в базовой модели и модели без ОВК следует их совпадение с высокой точностью в области электронейтральности и расширенной ОПЗ, однако, как показано на рис. 5, *a*, с базовой модели дополнительно формируется квазиравновесная ОПЗ.

На рис. 6 показано визуальное совпадение с большой точностью графиков потенциала базовой модели и модели без ОВК при небольших $C_{k,m}$ — порядка C_0 . При этом график разницы потенциалов этих двух моделей (рис. 7) показывает небольшие отличия (максимум которых достигается при $z = 0.1$ мм и в сечениях от $r = 0.3$ мм до 0.5 мм). Это связано с тем, что при данных условиях скачок потенциала в ОВК мал.

Если $C_{k,m}$ значительно больше C_0 , например, в тысячу и более раз, что вполне реально, то тогда разница будет более существенной и она компенсируется скачком потенциала в ОВК, рассчитанным аналитически.

По графикам радиальной скорости (см. рис. 8) базовой модели и модели без ОВК можно сделать вывод об их высокой степени совпадения.

На рис. 9 и рис. 10 приведены графики азимутальной и аксиальной компонент скорости для базовой модели и модели без ОВК соответственно, которые показывают их практически полное совпадение.

Таким образом, модельная задача приближает решение базовой задачи с высокой точностью всюду за исключением ОВК, где решение должно быть дополнено аналитическими формулами, полученными асимптотическим методом.

2. Аналитическое решение краевой задачи в ОВК. Аналитическое решение в ОВК зависит от величины скачка потенциала, а именно допредельного или сверхпредельного. В допредельном режиме ОВК совпадает с квазиравновесной ОПЗ, а в сверхпредельном режиме эти области очень близки. Из численного исследования базовой модели следует, что толщина ОВК не зависит от радиальной координаты r , радиальная (u) и аксиальная (w) компоненты скорости близки к нулю, а азимутальная (v) компонента скорости

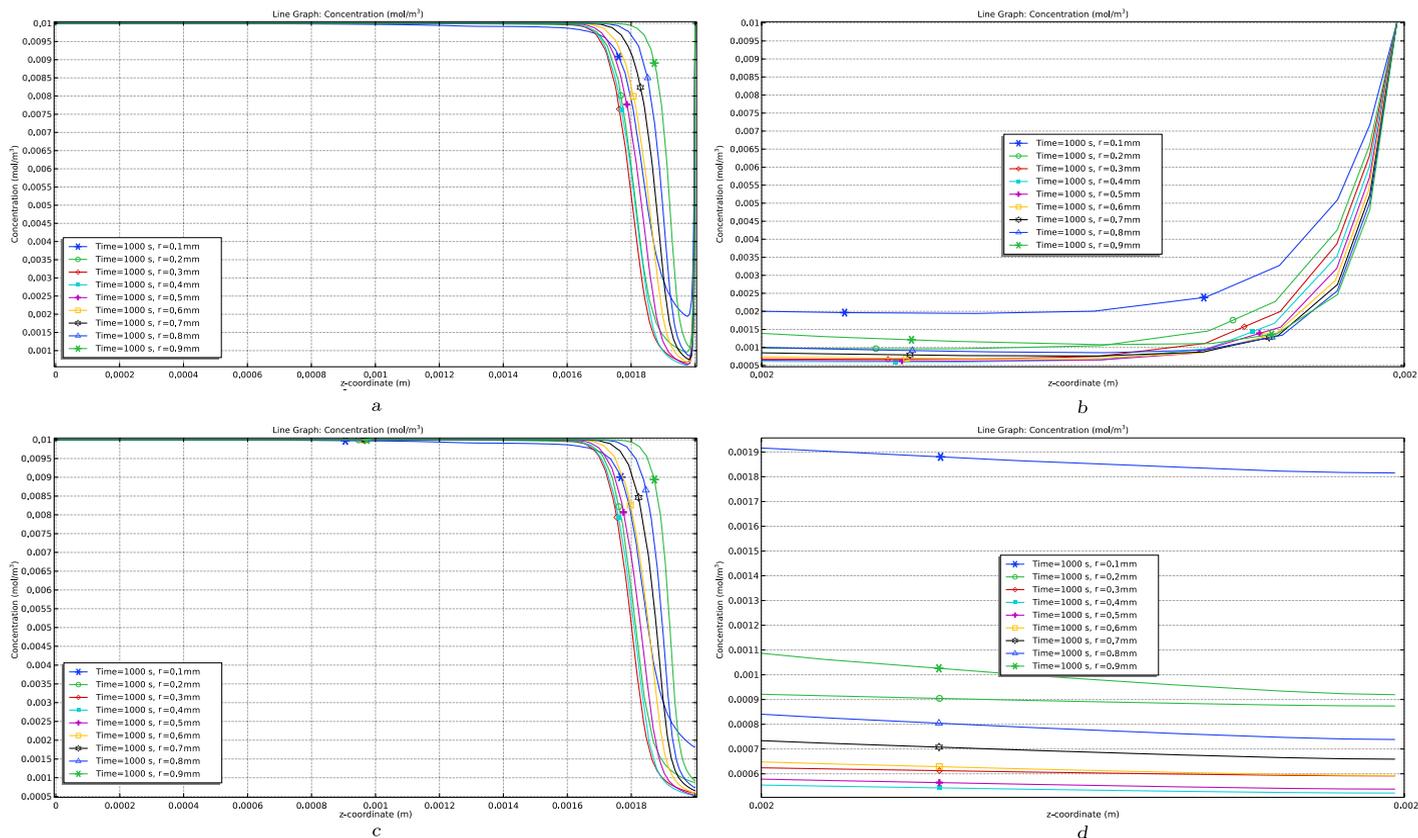


Рис. 3. Концентрация C_1 при $t = 1000$ с и разных сечениях по r в базовой модели (а), в базовой модели вблизи катионнообменной мембраны (б), в модели без области возрастания катионов (с), в модели без области возрастания катионов вблизи катионнообменной мембраны (д)
 [Figure 3. Concentration C_1 at $t = 1000$ s and different cross sections for r in the base model (a), in the base model near the cation-exchange membrane (b), in the model without the cation increase region (c), in the model without the cation increase region near the cation-exchange membrane (d)]

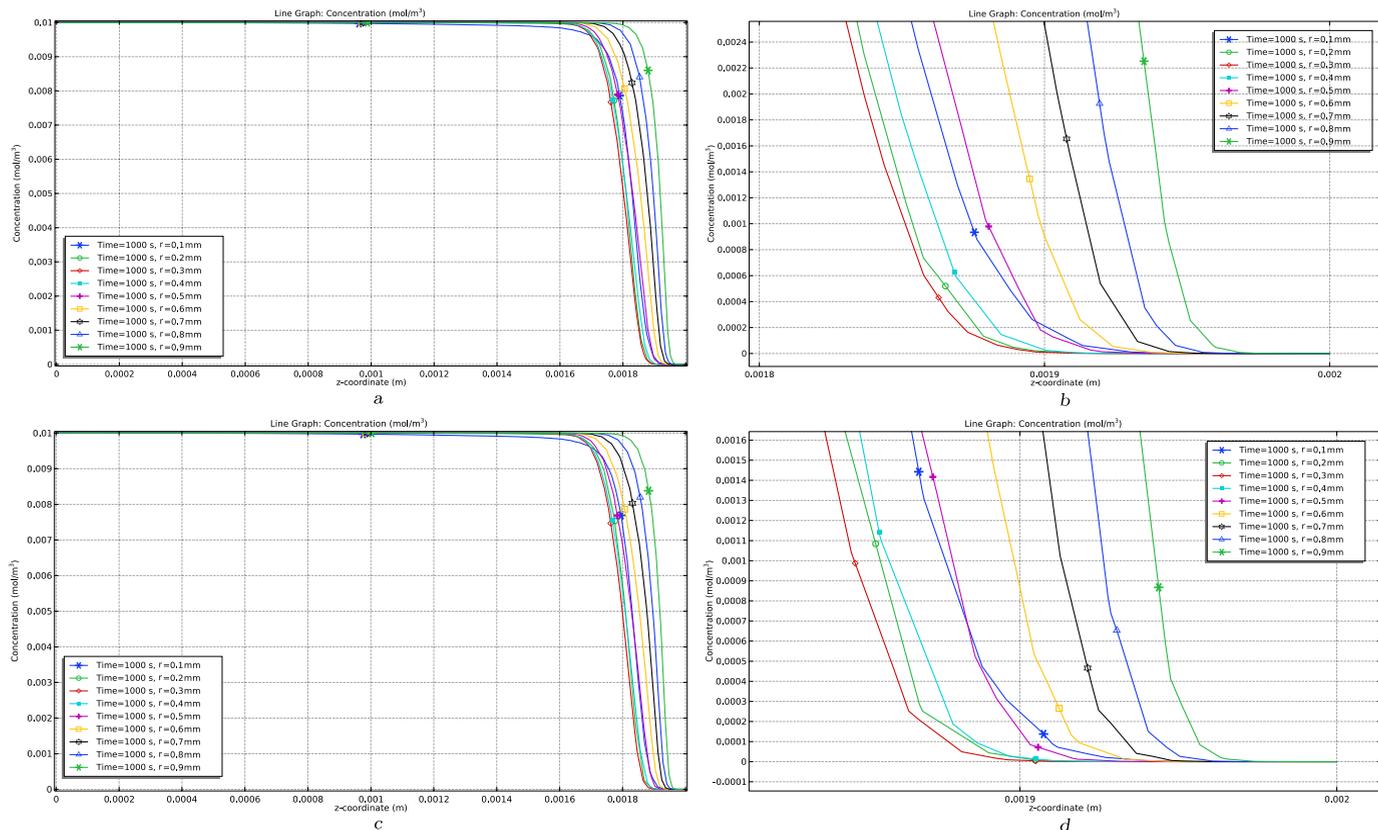


Рис. 4. Концентрация C_2 при $t = 1000$ с и разных сечениях по r в базовой модели (а), в базовой модели вблизи катионнообменной мембраны (б), в модели без области возрастания катионов (с), в модели без области возрастания катионов вблизи катионнообменной мембраны (д)
 [Figure 4. Concentration C_2 at $t = 1000$ s and different cross sections for r in the base model (a), in the base model near the cation-exchange membrane (b), in the model without the cation increase region (c), in the model without the cation increase region near the cation-exchange membrane (d)]

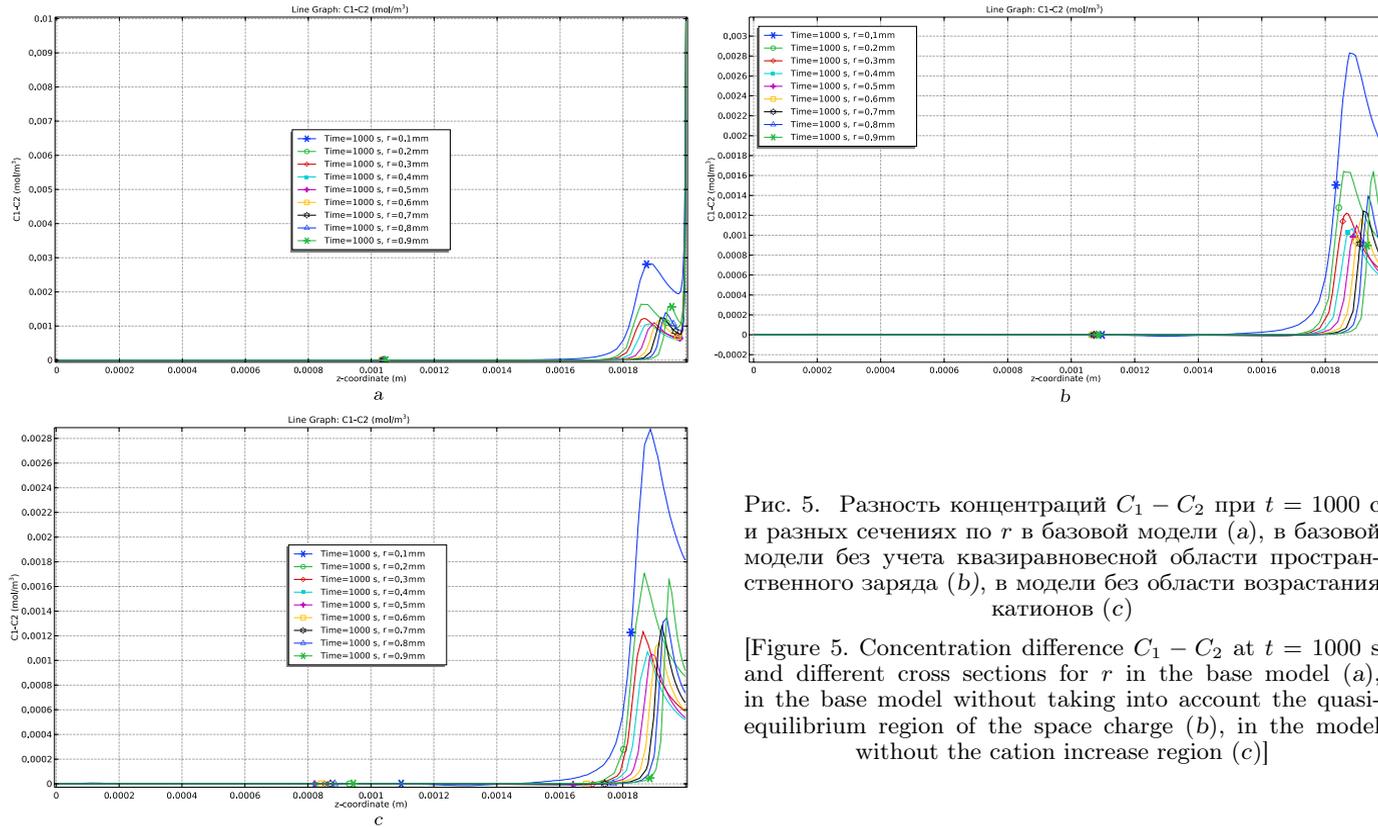


Рис. 5. Разность концентраций $C_1 - C_2$ при $t = 1000$ с и разных сечениях по r в базовой модели (а), в базовой модели без учета квазиравновесной области пространственного заряда (б), в модели без области возрастания катионов (с)

[Figure 5. Concentration difference $C_1 - C_2$ at $t = 1000$ s and different cross sections for r in the base model (a), in the base model without taking into account the quasi-equilibrium region of the space charge (b), in the model without the cation increase region (c)]

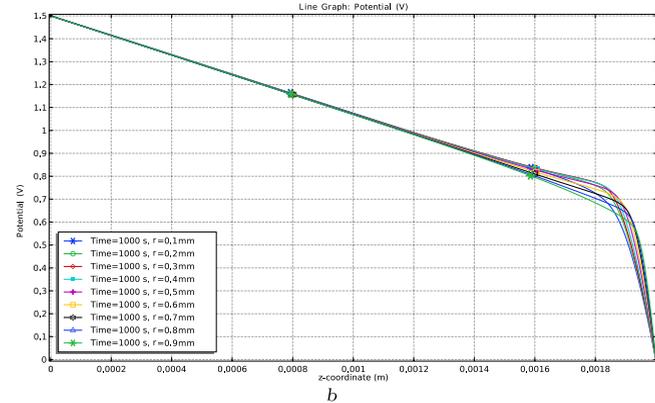
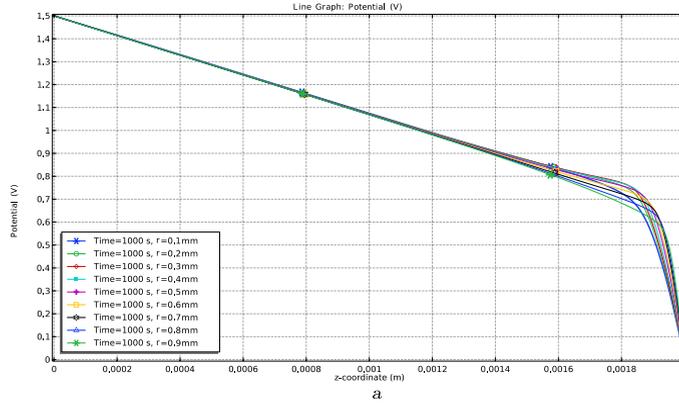


Рис. 6. Графики потенциала при $t = 1000$ с и разных сечениях по r в базовой модели (а), в модели без области возрастания катионов (b)
 [Figure 6. Plots of the potential at $t = 1000$ s and different cross sections for r in the base model (a), in the model without the cation increase region (b)]

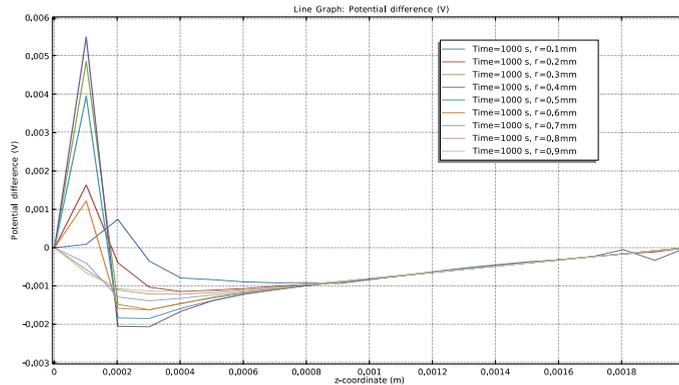


Рис. 7. Графики разности потенциалов между базовой моделью и моделью без области возрастания катионов при $t = 1000$ с и разных сечениях по r
 [Figure 7. Plots of the potential difference between the base model and the model without the cation increase region at $t = 1000$ s and different cross sections for r]

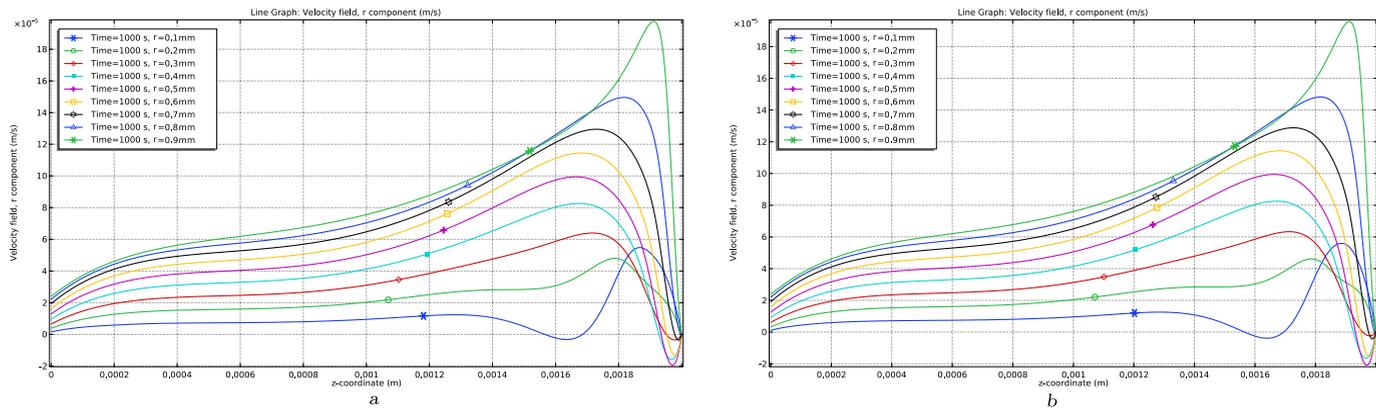


Рис. 8. Графики радиальной скорости при $t = 1000$ с и разных сечениях по r в базовой модели (а), в модели без области возрастания катионов (б) [Figure 8. Plots of the radial velocity at $t = 1000$ s and different cross sections for r in the base model (a), in the model without the cation increase region (b)]

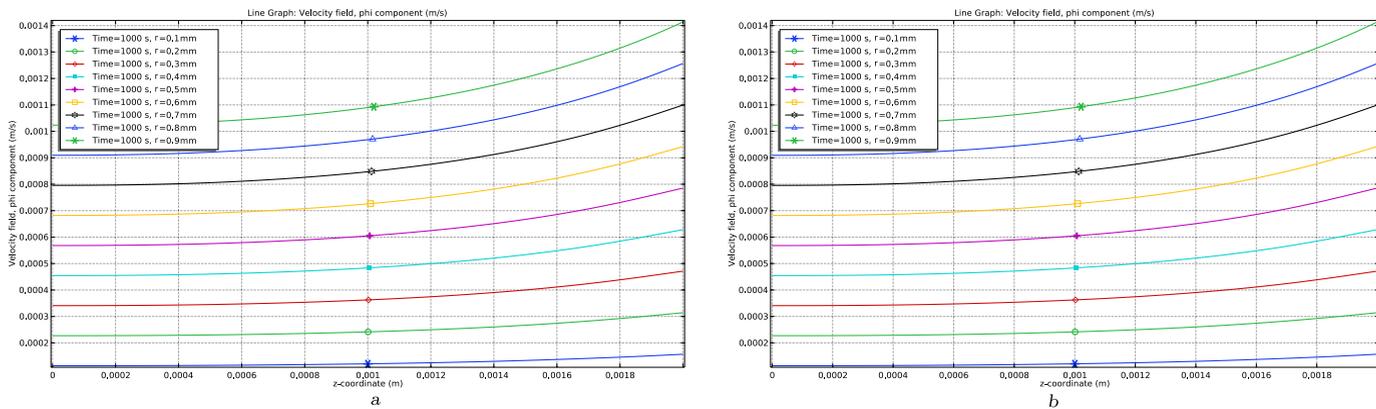


Рис. 9. Графики азимутальной скорости при $t = 1000$ с и разных сечениях по r в базовой модели (а), в модели без области возрастания катионов (б) [Figure 9. Plots of the azimuthal velocity at $t = 1000$ s and different cross sections for r in the base model (a), in the model without the cation increase region (b)]

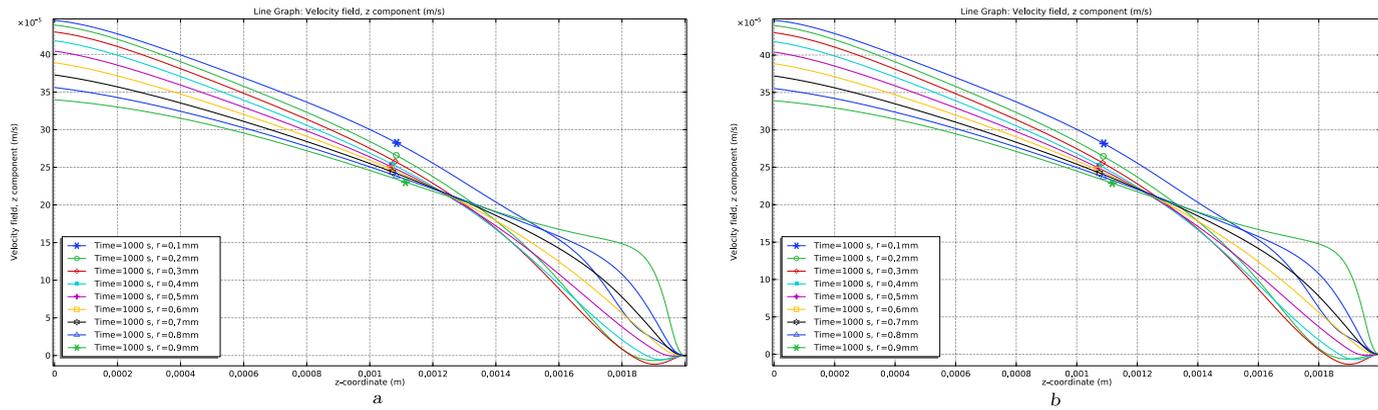


Рис. 10. Графики аксиальной скорости при $t = 1000$ с и разных сечениях по r в базовой модели (а), в модели без области возрастания катионов (б) [Figure 10. Plots of the axial velocity at $t = 1000$ s and different cross sections for r in the base model (a), in the model without the cation increase region (b)]

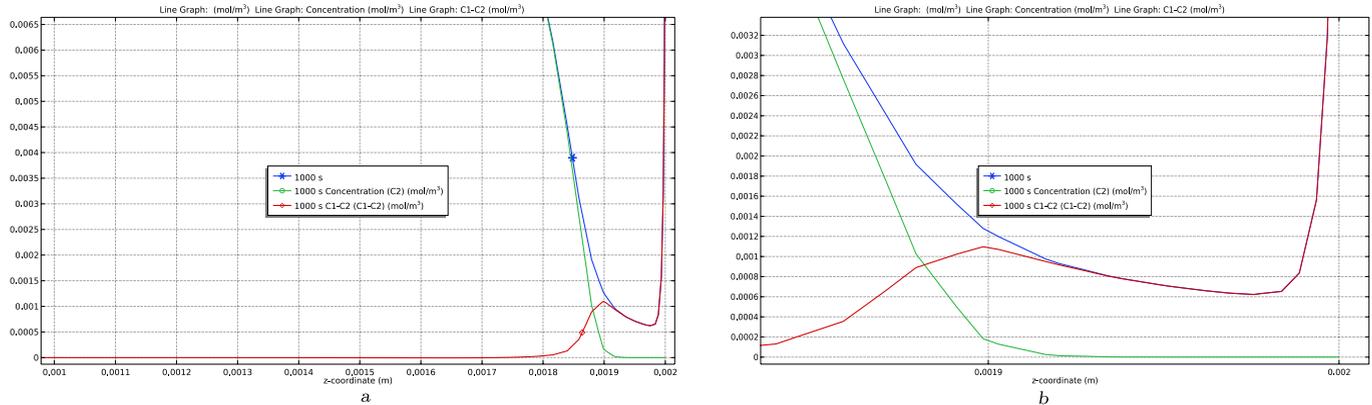


Рис. 11. Графики аксиальной скорости при $t = 1000$ с и разных сечениях по r в базовой модели (а), в модели без области возрастания катионов (б) [Figure 11. Plots of the axial velocity at $t = 1000$ s and different cross sections for r in the base model (a), in the model without the cation increase region (b)]

почти постоянна в ОВК. Поэтому в уравнении (1) останется только третья компонента:

$$N_{i,z} = \frac{F}{RT} z_i D_i C_i E_z - D_i \frac{\partial C_i}{\partial z}, \quad i = 1, 2.$$

Кроме того, толщина ОВК также практически не зависит и от времени t , т.е. наблюдается квазистационарный режим. В результате левая часть уравнения (2) равна нулю, а в правой части в силу независимости от r равна нулю производная потока по z , кроме того, в уравнениях (3) и (4) также остаются составляющие, зависящие только от z . Таким образом, для нахождения неизвестных функций в ОВК получается следующая система уравнений:

$$N_{i,z} = \frac{F}{RT} z_i D_i C_i E_z - D_i \frac{\partial C_i}{\partial z}, \quad i = 1, 2; \quad (5)$$

$$\frac{\partial N_{i,z}}{\partial z} = 0, \quad i = 1, 2; \quad (6)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = -\frac{F}{\varepsilon} (z_1 C_1 + z_2 C_2); \quad (7)$$

$$I_z = F(z_1 N_{1,z} + z_2 N_{2,z}). \quad (8)$$

Для асимптотического решения системы (5)–(8) выполним переход в области ОВК ($z_m \leq z \leq H$) к безразмерному виду с использованием характерных величин: $z^{(u)} = z/H$; $i^{(u)} = C_i/C_0$; $\vec{N}_i^{(u)} = \vec{N}_i/N_0$; $D_i^{(u)} = D_i/D_0$; $I_z^{(u)} = I_z/I_0$; $\Phi^{(u)} = \Phi/\Phi_0$; $E_z^{(u)} = E_z/E_0$; $\varepsilon^{(u)} = \varepsilon/b_0$. Здесь C_0 — начальная концентрация раствора; H — высота ячейки; D_0 — коэффициент диффузии электролита; $\Phi_0 = RT_0/F$ — тепловой потенциал; $I_0 = FD_0C_0/H$ — характерный ток; $N_0 = D_0C_0/H$ — характерный поток ионов; $E_0 = \Phi_0/H$ — отношение теплового потенциала к характерной ширине; $b_0 = H^2FC_0/\Phi_0$ — характерная величина, имеющая размерность электрической постоянной.

Параметр $\varepsilon^{(u)}$ является малым параметром, имеющим смысл отношения квадрата толщины области пространственного заряда к квадрату высоты ячейки. Другими словами, это отношение (квадратов) толщин заряженной и незаряженной областей раствора.

Параметр $\varepsilon^{(u)}$ может быть записан в виде $\varepsilon^{(u)} \approx 0.58 \cdot 10^{-12}/C_0$.

При начальной концентрации $C_0 = 0.01$ моль/м³, использованной для численного расчета, получаем $\varepsilon^{(u)} \approx 5.8 \cdot 10^{-11}$. Поэтому в дальнейшем $\varepsilon^{(u)}$ считается малым параметром.

Система уравнений (5)–(8) в безразмерной форме, например, для раствора NaCl, с учетом идеальной селективности КОМ принимает следующий вид (индекс « u » для простоты записи опущен):

$$\frac{dC_1}{dz} = C_1 E_z - I_z, \quad \frac{dC_2}{dz} = -C_2 E_z, \quad \varepsilon \frac{dE_z}{dz} = C_1 - C_2, \quad (9)$$

где $E(z, \varepsilon) = -d\Phi/dz$ — напряженность электрического поля, а $\Phi(z, \varepsilon)$ — его потенциал; $C_1(z, \varepsilon)$, $C_2(z, \varepsilon)$, I_z — искомые концентрации катионов и анионов соответственно; I_z — ток, равный потоку катионов; $\varepsilon > 0$ — малый параметр.

В качестве краевых условий в безразмерном виде при $z = z_m/H$ ставятся условия сращивания с упрощенной моделью, а при $z = 1$ — условия

$$C_1|_{z=1} = C_{1,M}, \quad \left[-C_2 \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\partial C_2}{\partial z} \right]_{z=1} = 0, \quad \Phi|_{z=1} = 0. \quad (10)$$

2.1. Решение в допредельном случае. Система уравнений (9) представляет собой сингулярно-возмущенную задачу. Проведя замену

$$\xi = (z - 1)/\sqrt{\varepsilon}, \quad E_z = \tilde{E}(\xi, \varepsilon)/\sqrt{\varepsilon}, \quad C_1(z, \varepsilon) = \tilde{C}_1(\xi, \varepsilon), \quad C_2(z, \varepsilon) = \tilde{C}_2(\xi, \varepsilon)$$

можно убедиться, что в допредельном режиме ОВК совпадает с квазиравновесной ОПЗ.

Действительно, эти замены при малых ε в начальном приближении сводят систему уравнений к классической системе уравнений Больцмана—Дебая, которая и описывает квазиравновесную ОПЗ [11]

$$\frac{d\tilde{C}_1}{d\xi} = \tilde{C}_1\tilde{E}, \quad \frac{d\tilde{C}_2}{d\xi} = -\tilde{C}_2\tilde{E}, \quad \frac{d\tilde{E}}{d\xi} = \tilde{C}_1 - \tilde{C}_2 \quad (11)$$

с соответствующими краевыми условиями, которая имеет аналитическое решение:

$$E(z, \varepsilon) = \frac{\sqrt{-\alpha}}{\sqrt{\varepsilon}} \frac{4\sqrt{\beta} \exp(\sqrt{-\alpha}(z - 1)/\sqrt{\varepsilon})}{1 - \beta \exp(\sqrt{-4\alpha}(z - 1)/\sqrt{\varepsilon})}, \quad (12)$$

$$C_1(z, \varepsilon) = \frac{\varepsilon}{2} \frac{dE}{dz} + \frac{\varepsilon E^2}{4} - \frac{\alpha}{2}, \quad (13)$$

$$C_2(z, \varepsilon) = -\frac{\varepsilon}{2} \frac{dE}{dz} + \frac{\varepsilon E^2}{4} - \frac{\alpha}{2}, \quad (14)$$

где

$$\alpha = -(C_1(z_m, \varepsilon) + C_2(z_m, \varepsilon)) \approx -(C_1(1, \varepsilon) + C_2(1, \varepsilon)) < 0,$$

β — некоторое положительное число, которое определяется из условия

$$\tilde{E}(0, \varepsilon) = \sqrt{2(C_{1,m} + \alpha)},$$

выведенного из граничных условий (10) с использованием первого интеграла системы уравнений (11) и эквивалентного условию $C_1(1, \varepsilon) = C_{1,m}$.

При допредельном режиме нет расширенной ОПЗ, поэтому $E(z_m - 0, \varepsilon)$ — значение численного решения (решение в ОЧО в точке z_m) должно быть конечным и, соответственно, $E(z_m + 0, \varepsilon)$ (значение аналитического решения в ОВК) тоже должно быть конечным. Это условие выполняется, если $z_m = 1 - k\sqrt{\varepsilon}|\ln \varepsilon|$, тогда получаем $E(z_m + 0, \varepsilon) = 4\sqrt{\beta}\sqrt{-\alpha}$, при $\varepsilon \rightarrow 0$, если взять $k = 1/(2\sqrt{-\alpha})$. Равенства $E(z_m - 0, \varepsilon) = E(z_m + 0, \varepsilon)$ можно добиться с использованием уже следующего первого приближения.

Сравнение точек z_m , полученных при допредельном режиме в результате численного решения базовой модели, где z_m вычисляется как точка, в которой достигается минимум концентрации, и аналитического решения в ОВК показывает их совпадение с высокой точностью: в базовой модели $z_m \approx 1.976$ мм, а в модели ОВК $z_m \approx 1.999$ мм.

Концентрации срачиваются в силу выбора α и формул (13), (14).

2.2. Решение в сверхпредельном случае. В сверхпредельном режиме наряду с квазиравновесным погранслоем возникает и расширенная ОПЗ [11], где концентрации ионов малы (рис. 11) (имеют порядок $O(\sqrt{\varepsilon})$) и поэтому

процедура сращивания в допредельном режиме не может быть использована и должна быть модифицирована. Возьмем сечение $r = 0.5$ мм и построим графики концентрации катионов и анионов, а также функцию $C_1 - C_2$ (см. рис. 11). Из этого рисунка видно, что в сверхпредельном состоянии ОВК состоит из двух частей: квазиравновесной ОПЗ и промежуточной области, которая служит для сращивания решения в квазиравновесной ОПЗ и в расширенной ОПЗ, являющейся частью ОЧО. Причем на правой границе промежуточной области сращивается напряженность электрического поля, а на левой границе — концентрация катионов. Точка z_m , где производная концентрации равна нулю, близка к 1. При допредельном режиме z_m и z_k совпадают, при сверхпредельном режиме $z_m < z_k$ (см. рис. 11).

При асимптотическом решении краевой задачи для системы (9) в области $(z_m, 1]$ в сверхпредельном режиме примем естественное для этого режима предположение об отсутствии в этой области анионов, то есть $C_2(z, \varepsilon) \equiv 0$, $z \in (z_m, 1]$.

Тогда получаем систему уравнений

$$\frac{dC_1}{dz} = C_1 E_z - I_z, \quad \varepsilon \frac{dE_z}{dz} = C_1,$$

которая имеет аналитическое решение в общем виде:

$$E(z, \varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \frac{4b\sqrt{\beta} \exp(b(z-1)/\sqrt{\varepsilon})}{1 - \beta \exp(2b(z-1)/\sqrt{\varepsilon})}, \quad (15)$$

$$C_1(z, \varepsilon) = \frac{4b^2\sqrt{\beta} \exp(b(z-1)/\sqrt{\varepsilon}) (1 + \beta \exp(2b(z-1)/\sqrt{\varepsilon}))}{(1 - \beta \exp(2b(z-1)/\sqrt{\varepsilon}))^2}, \quad (16)$$

где $b > 0$.

2.3. Сращивание решений и определение констант. Возьмем

$$z_k = 1 - k_1\sqrt{\varepsilon} + \dots \rightarrow 1, \quad \varepsilon \rightarrow 0+.$$

Для сращивания напряженности $E(z, \varepsilon)$ в точке z_k применим соотношение

$$E(z_k + 0, \varepsilon) = E(z_k - 0, \varepsilon),$$

где в $E(z_k + 0, \varepsilon)$ используется решение в интервале $(z_k, 1]$, а в $E(z_k - 0, \varepsilon)$ — решение в расширенной ОПЗ $E(z, \varepsilon) = \sqrt{2(I_z z - I)}/\sqrt{\varepsilon}$, которое продолжается в интервал (z_m, z_k) . Таким образом получаем, что

$$\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \frac{4b\sqrt{\beta} \exp(-k_1 b)}{1 - \beta \exp(-2k_1 b)} = \frac{\sqrt{2(I_z - I)}}{\sqrt{\varepsilon}}.$$

Отсюда

$$k_1 = -\frac{1}{b} \ln \left(\frac{-4b\sqrt{\beta} + \sqrt{8\beta(2b^2 + I_z - I)}}{2\beta\sqrt{2(I_z - I)}} \right).$$

Положим

$$z_m = 1 - k_2\sqrt{\varepsilon} |\ln \varepsilon| + \dots \rightarrow 1, \quad \varepsilon \rightarrow 0+.$$

Условие сращивания концентрации $C_1(z, \varepsilon)$ в точке z_m имеет вид

$$C_1(z_m - 0, \varepsilon) = C_1(z_m + 0, \varepsilon),$$

где в $C_1(z_m - 0, \varepsilon)$ используется решение в расширенной ОПЗ $C_1(z, \varepsilon) = I_z \sqrt{\varepsilon} / \sqrt{2(I_z z - I)}$, а в $C_1(z_m + 0, \varepsilon)$ — решение из интервала $(z_k, 1]$, продолженное в интервал (z_m, z_k) . Откуда получим, что

$$k_2 = \frac{1}{2b}, \quad \beta = \left(\frac{I_z}{4b^2 \sqrt{2(I_z - I)}} \right)^2.$$

Для нахождения b используем условие $C_1(1, \varepsilon) = C_{1,m}$, откуда

$$b = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{C_{1,m}(1 - \beta)^2}{\sqrt{\beta}(1 + \beta)}}.$$

3. Алгоритм гибридного численно-аналитического решения.

- 1) Численно решаем модель без ОВК и находим $C_1(1, \varepsilon)$, $C_2(1, \varepsilon)$.
- 2) Находим численно скачок потенциала для упрощенной модели в ОЧО. Находим скачок потенциала для базовой, используя соотношение

$$\begin{aligned} \Phi_0 &= \int_0^1 E(z, \varepsilon) dz = \\ &= \int_0^{z_m} E(z, \varepsilon) dz + \int_{z_m}^{z_k} E(z, \varepsilon) dz + \int_{z_k}^1 E(z, \varepsilon) dz = \\ &= \int_0^{z_m} E(z, \varepsilon) dz + \int_{z_m}^{z_k} E(z, \varepsilon) dz - \int_{z_k}^1 \frac{dC_2}{C_2} = \\ &= -\ln \frac{C_2(1, \varepsilon)}{C_2(z_k, \varepsilon)} + \int_0^{z_m} E(z, \varepsilon) dz + \int_{z_m}^{z_k} E(z, \varepsilon) dz. \end{aligned}$$

С учетом того, что $z_k \approx z_m \approx 1$, получаем

$$\Phi_0 \approx -\ln \frac{C_2(1, \varepsilon)}{C_2(z_k, \varepsilon)} + \int_0^1 E(z, \varepsilon) dz \quad \text{или} \quad \Phi_0 \approx \Phi_{\text{ОВК}} + \Phi_{\text{ОЧО}}.$$

Здесь первое слагаемое $\Phi_{\text{ОВК}}$ — скачок потенциала в области возрастания катионов (около КОМ), а второе слагаемое $\Phi_{\text{ОЧО}}$ — скачок потенциала, численно рассчитанный в ОЧО.

- 3) Находим аналитическое решение в ОВК по формулам (12)–(14) при допредельном токовом режиме и по формулам (15), (16) при сверхпредельном.
- 4) Используя шаги 1) и 3), получаем решение базовой задачи.

Закключение. В статье предложен новый гибридный численно-аналитический метод, позволяющий находить решение базовой задачи при произвольных скоростях вращения мембранного диска и начальной концентрации. Это достигается путем сращивания численного решения упрощенной модели без

ОВК с асимптотическим решением в области возрастания катионов. Предложенный метод позволяет проводить численный анализ переноса ионов соли в реальных концентрациях раствора электролита бинарной соли при широком диапазоне изменения скачка потенциала и угловой скорости вращения мембранного диска.

Конкурирующие интересы. Заявляем, что в отношении авторства и публикации этой статьи конфликта интересов не имеем.

Авторский вклад и ответственность. Е.В. Казаковцева — разработка численно-аналитического метода и программы численных экспериментов; компьютерное и математическое моделирование; интерпретация полученных результатов; работа с черновиком и переработанным вариантом рукописи. А.В. Коваленко — компьютерное моделирование; обработка и анализ экспериментальных данных; подготовка первичного варианта рукописи. А.В. Письменский — обработка и анализ экспериментальных данных, интерпретация полученных результатов. М.Х. Уртенев — идея исследования; математическое моделирование; разработка численно-аналитического метода; интерпретация полученных результатов; подготовка первичного варианта рукописи; работа с черновиком и переработанным вариантом рукописи. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

Финансирование. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-19-00648, <https://rscf.ru/project/24-19-00648/>.

Благодарность. Авторы благодарны рецензентам за тщательное прочтение статьи, ценные предложения и комментарии.

Библиографический список

1. Бурмашева Н. В., Просвиряков Е. Ю. Точное решение уравнений Навье–Стокса, описывающее пространственно неоднородные течения вращающейся жидкости // *Тр. ИММ УрО РАН*, 2020. Т. 26, № 2. С. 79–87. EDN: IAWMLK. DOI: <https://doi.org/10.21538/0134-4889-2020-26-2-79-87>.
2. Заболоцкий В. И., Шельдешов Н. В., Шарафан М. В. Исследование электромассопереноса хлорида натрия через катионообменную мембрану МК-40 методом вращающегося мембранного диска // *Электрохимия*, 2006. Т. 42, № 12. С. 1494–1500. EDN: HYLEUX.
3. Казаковцева Е. В. Теоретическое исследование квазиравновесной области пространственного заряда в мембранных системах с осевой симметрией // *Перспективы науки*, 2023. № 6(165). С. 58–68. EDN: DRJSOK.
4. Просвиряков Е. Ю. Восстановление радиально-осевой скорости в закрученных осесимметричных течениях вязкой несжимаемой жидкости при лагранжевом рассмотрении эволюции завихренности // *Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки*, 2021. Т. 31, № 3. С. 505–516. EDN: ORVWHT. DOI: <https://doi.org/10.35634/vm210311>.
5. Чубырь Н. О., Коваленко А. В., Уртенев М. Х., Гудза И. В. Математическая модель стационарного переноса ионов соли в сечении канала при равновесии // *Моделирование, оптимизация и информационные технологии*, 2022. Т. 10, № 3(38). EDN: DIEUCU. DOI: <https://doi.org/10.26102/2310-6018/2022.38.3.009>.
6. Achoh A., Melnikov S., Bondarev D. Electrochemical characteristics of the MF-4SK membrane doped with the hyperbranched phosphorylated dendrimer BOLTORN H20 / *Ion Transport in Organic and Inorganic Membranes: Conference Proceedings (Sochi, 22–27 May 2023)*. Krasnodar, 2023. pp. 15–17. EDN: RPXPHA.
7. Bondarev D., Eterevska S., Zabolotsky V., et al. Homogeneous anion-exchange membrane with heterocyclic functional groups / *Ion Transport in Organic and Inorganic Membranes: Conference Proceedings (Sochi, 22–27 May 2023)*. Krasnodar, 2023. pp. 31–32. EDN: BPLDVU.

8. Melnikov S. Experimental and theoretical study of ion transport through bilayer ion-exchange membranes / *Ion Transport in Organic and Inorganic Membranes: Conference Proceedings* (Sochi, 22–27 May 2023). Krasnodar. pp. 185–187. EDN: WKHJME.
9. Prosviryakov E. Yu. Non-helical exact solutions to the Euler equations for swirling axisymmetric fluid flows // *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2019. vol. 23, no. 4. pp. 764–770. EDN: WITBIY. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1715>.
10. Сизых Г. Б. Расщепление уравнений Навье–Стокса для одного класса осесимметричных течений // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2020. Т. 24, № 1. С. 163–173. EDN: RUDNVJ. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1740>.
11. Заболоцкий В. И., Никоненко В. В. *Перенос ионов в мембранах*. М.: Наука, 1996. 392 с.
12. Узденова А. М., Коваленко А. В., Уртенев М. Х., Никоненко В. В. Теоретический анализ влияния концентрации ионов в объеме раствора и у поверхности мембраны на массоперенос при сверхпредельных токах // *Электрохимия*, 2017. Т. 53, № 11. С. 1421–1433. EDN: JVMTDS. DOI: <https://doi.org/10.7868/S0424857017110032>.

MSC: 80A30, 35Q60, 78A57

Hybrid numerical-analytical method for solving the problems of salt ion transport in membrane systems with axial symmetry

*E. V. Kazakovtseva, A. V. Kovalenko,
A. V. Pismenskiy, M. Kh. Urtenov*

Kuban State University,
149, Stavropolskaya st., Krasnodar, 350040, Russian Federation.

Abstract

The aim of this study is to develop a new hybrid numerical-analytical method for solving boundary value problems with axial symmetry, for example, with a rotating membrane disk, based on matching the asymptotic solution near the cation-exchange membrane (CEM) with the numerical solution in the rest of the region. For this, the following method is used:

1) a basic mathematical model for the transfer of salt ions in an electrochemical cell with a rotating cation-exchange membrane disk is proposed based on the general conservation laws represented by the Nernst-Planck-Poisson and Navier-Stokes equations with natural boundary and initial conditions. This model contains no fitting parameters or simplifying assumptions. However, the numerical solution of the corresponding boundary value problem presents significant computational difficulties for real solution concentrations and large jumps in the potential and angular velocity of the membrane disk rotation, associated with large concentration and potential gradients near the CEM in the quasi-equilibrium space charge region (SCR);

Mathematical Modeling, Numerical Methods and Software Complexes Research Article

© Authors, 2024

© Samara State Technical University, 2024 (Compilation, Design, and Layout)

© The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Please cite this article in press as:

Kazakovtseva E. V., Kovalenko A. V., Pismenskiy A. V., Urtenov M. Kh. Hybrid numerical-analytical method for solving the problems of salt ion transport in membrane systems with axial symmetry, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2024, vol. 28, no. 1, pp. 130–151. EDN: BOXTX. DOI: 10.14498/vsgtu2043 (In Russian).

Authors' Details:

Ekaterina V. Kazakovtseva  <https://orcid.org/0009-0003-0040-0880>

Senior Lecturer; Dept. of Data Analysis and Artificial Intelligence; e-mail: vivkaterina@mail.ru

Anna V. Kovalenko  <https://orcid.org/0000-0002-3991-3953>

Dr. Techn. Sci., Associate Professor; Head of Department; Dept. of Data Analysis and Artificial Intelligence; e-mail: savanna-05@mail.ru

Alexander V. Pismenskiy  <https://orcid.org/0000-0003-4046-2229>

Cand. Phys. & Math. Sci.; Head of Department; Dept. of Applied Mathematics; e-mail: archer812@mail.ru

Makhamet Kh. Urtenov  <https://orcid.org/0000-0002-0252-6247>

Dr. Phys. & Math. Sci., Professor; Dept. of Applied Mathematics; e-mail: urtenovmax@mail.ru

2) the solution region is divided into two parts, one of which is a small cation increase region (CIR) located near the CEM, and the remaining main part of the region (MPOR);

3) in the CIR, an analytical solution is found by the method of matching asymptotic solutions;

4) a simplified mathematical model is constructed in the MPOR, which differs from the basic mathematical model in such a boundary condition at the boundary with the CIR, which then allows us the solution of the corresponding boundary value problem to be matched with the solution in the CIR.

The main result is a hybrid numerical-analytical method that allows one to carry out a numerical analysis of the transfer of salt ions at real concentrations of a binary salt electrolyte solution in a wide range of changes in the potential jump and the angular velocity of the membrane disk.

Based on the results of the work, the following conclusion can be drawn, that the combination of the analytical (asymptotic) method of solving in the region of the boundary layer and the numerical solution in the rest of the region, with the exception of the boundary layer, with their subsequent splicing, makes it possible to construct an effective hybrid numerical-analytical method for solving the problems of salt ion transport in membrane systems with axial symmetry.

Keywords: asymptotic solution, hybrid numerical-analytical method, rotating membrane disk, axial symmetry, cylindrical coordinate system.

Received: 22nd July, 2023 / Revised: 12th April, 2024 /

Accepted: 15th April, 2024 / First online: 17th May, 2024

Competing interests. We declare that we have no conflict of interest regarding the authorship and publication of this article.

Authors' contributions and responsibilities. E.V. Kazakovtseva: Development of a numerical-analytical method and a program of numerical experiments; Computer and mathematical modeling; Interpretation of the obtained results; Writing — original draft and review & editing. A.V. Kovalenko: Computer modeling; Processing and analysis of experimental data; Writing — original draft. A.V. Pisemskiy: Processing and analysis of experimental data; Interpretation of the obtained results. M.Kh. Urtenov: Idea of study; Mathematical modeling; Development of a numerical-analytical method; Interpretation of the obtained results; preparation of the initial version of the manuscript; Writing — original draft and review & editing. The authors bear full responsibility for providing the final manuscript for publication. The final version of the manuscript was approved by all authors.

Funding. The research was funded by the Russian Science Foundation (project no. 24-19-00648), <https://rscf.ru/en/project/24-19-00648/>.

Acknowledgments. The authors are grateful to the reviewers for the careful reading of the article, valuable suggestions, and comments.

References

1. Burmasheva N. V., Prosviryakov E. Yu. Exact solution of Navier–Stokes equations describing spatially inhomogeneous flows of a rotating fluid, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2020, vol. 26, no. 2, pp. 79–87 (In Russian). EDN: IAWMLK. DOI: <https://doi.org/10.21538/0134-4889-2020-26-2-79-87>.

2. Zabolotskii V. I., Shel'deshov N. V., Sharafan M. V. Electric mass transfer of sodium chloride through cation-exchange membrane MK-40: A rotating membrane disk study, *Russ. J. Electrochem.*, 2006, vol. 42, no. 12, pp. 1345-1351. EDN: LJVHER. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1023193506120123>.
3. Kazakovtseva E. V. A theoretical study of the quasi-equilibrium region of the space charge in membrane systems with axial symmetry, *Perspektivy Nauki*, 2023, no. 6(165), pp. 58-68 (In Russian). EDN: DRJSOK.
4. Prosviryakov E. Yu. Recovery of radial-axial velocity in axisymmetric swirling flows of a viscous incompressible fluid in the Lagrangian consideration of vorticity evolution, *Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, 2021, vol. 31, no. 3, pp. 505-516 (In Russian). EDN: ORVWHT. DOI: <https://doi.org/10.35634/vm210311>.
5. Chubyr N. O., Kovalenko A. V., Urtenov M. Kh., Gudza I. V. Mathematical model of salt ion stationary transport in the cross section of the channel at equilibrium, *Modeling, Optimization and Information Technology*, 2022, vol. 10, no. 3(38) (In Russian). EDN: DIECUK. DOI: <https://doi.org/10.26102/2310-6018/2022.38.3.009>.
6. Achoh A., Melnikov S., Bondarev D. Electrochemical characteristics of the MF-4SK membrane doped with the hyperbranched phosphorylated dendrimer BOLTORN H20, In: *Ion Transport in Organic and Inorganic Membranes*, Conference Proceedings (Sochi, 22-27 May 2023). Krasnodar, 2023, pp. 15-17. EDN: RPXPHA.
7. Bondarev D., Eterevskaia S., Zabolotsky V., et al. Homogeneous anion-exchange membrane with heterocyclic functional groups, In: *Ion Transport in Organic and Inorganic Membranes*, Conference Proceedings (Sochi, 22-27 May 2023). Krasnodar, 2023, pp. 31-32. EDN: BPLDVU.
8. Melnikov S. Experimental and theoretical study of ion transport through bilayer ion-exchange membranes, In: *Ion Transport in Organic and Inorganic Membranes*, Conference Proceedings (Sochi, 22-27 May 2023). Krasnodar, pp. 185-187. EDN: WKHJME.
9. Prosviryakov E. Yu. Non-helical exact solutions to the Euler equations for swirling axisymmetric fluid flows, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2019, vol. 23, no. 4, pp. 764-770. EDN: WITBIY. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1715>.
10. The splitting of Navier-Stokes equations for a class of axisymmetric flows, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2020, vol. 24, no. 1, pp. 163-173 (In Russian). EDN: RUDNVJ. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1740>.
11. Zabolotskii V. I., Nikonenko V. V. *Perenos ionov v membranakh* [Ion Transport in Membranes]. Moscow, Nauka, 1996, 392 pp. (In Russian)
12. Uzdzenova A. M., Kovalenko A. V., Urtenov M. K., Nikonenko V. V. Theoretical analysis of the effect of ion concentration in solution bulk and at membrane surface on the mass transfer at overlimiting currents, *Russ. J. Electrochem.*, 2017, vol. 53, no. 11, pp. 1254-1265. EDN: XXDDNZ. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1023193517110179>.



УДК 517.958:539.18

Расширенная математическая модель обратной задачи ядерного гамма-резонанса. Достоверность и информативность применения

О. М. Немцова, Г. Н. Коныгин, И. С. Веселков

Удмуртский федеральный исследовательский центр
Уральского отделения Российской академии наук,
Россия, 426067, Ижевск, ул. Т. Барамзиной, 34.

Аннотация

При изучении свойств твердых растворов на основе железа методом мессбауэровской спектроскопии возникает проблема интерпретации результатов обработки экспериментальных данных в рамках традиционной математической модели. Поскольку для разупорядоченных, например в результате механоактивации, твердых растворов характерно наличие ансамбля различных локальных атомных конфигураций, то соответствующие им мессбауэровские спектры содержат большое количество смещенных относительно друг друга спектральных составляющих с близкими значениями параметров сверхтонкого взаимодействия. При этом величина и знак смещения определяются многими факторами: количественным распределением атомов каждого сорта в координационных сферах, симметрией их распределения относительно оси квантования, возможным локальным смещением относительно среднестатистического положения в кристаллографической структуре и т.д. Аналитически учесть все эффекты смещения в математической модели, как правило, невозможно.

Предложенная расширенная математическая модель описания мессбауэровских спектров твердых растворов позволяет учесть смещения спектральных составляющих посредством введения в модель функции нормального распределения Гаусса, описывающей статистический набор

Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ Научная статья

© Коллектив авторов, 2024

© СамГТУ, 2024 (составление, дизайн, макет)

📄 📄 📄 Контент публикуется на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

Образец для цитирования

Немцова О. М., Коныгин Г. Н., Веселков И. С. Расширенная математическая модель обратной задачи ядерного гамма-резонанса. Достоверность и информативность применения // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2024. Т. 28, № 1. С. 152–170. EDN: EKWSDV. DOI: 10.14498/vsgtu2060.

Сведения об авторах

Ольга Михайловна Немцова ✉  <https://orcid.org/0000-0002-5676-9578>

кандидат физико-математических наук, доцент; старший научный сотрудник; лаб. физики и химии наноматериалов; e-mail: olganemtsova@udman.ru

Григорий Николаевич Коныгин  <https://orcid.org/0000-0002-6202-9509>

кандидат физико-математических наук; заведующий лабораторией; лаб. физики и химии наноматериалов; e-mail: gnkon@mail.ru

Иван Сергеевич Веселков  <https://orcid.org/0009-0008-5590-6068>

аспирант; лаб. физики и химии наноматериалов; e-mail: nerorus97@gmail.com

локальных искажений. Ширина распределения Гаусса позволяет оценить степень локальных искажений кристаллической решетки, возникающих из-за различий в размерах атомов смешиваемых компонентов, локальных искажений структуры и симметрии окружения резонансного атома.

Обратная задача ядерного гамма-резонанса выражается интегральным уравнением Фредгольма 1 рода и является некорректно поставленной задачей с априорными ограничениями на искомое решение. Введение в ядро интегрального уравнения двух функций Гаусса с неизвестными априори ширинами линий приводит к проблеме решения уравнения классическими методами. В работе предложен алгоритм получения достоверного решения, опирающийся на метод регуляризации Тихонова с коррекцией параметров ядра интегрального уравнения. Достоверность и информативность расширенной математической модели обратной задачи ядерного гамма-резонанса продемонстрирована на примерах исследования реальных объектов.

Ключевые слова: обратная задача ядерного гамма-резонанса, твердый раствор, вероятность атомной конфигурации, математическая модель, интегральное уравнение Фредгольма 1 рода.

Получение: 5 сентября 2023 г. / Исправление: 20 ноября 2023 г. /

Принятие: 15 декабря 2023 г. / Публикация онлайн: 16 августа 2024 г.

1. Введение. Твердые растворы являются основой важнейших конструкционных и нержавеющей сталей, бронз, латуней, алюминиевых и магниевых сплавов высокой прочности. Свойства твердых растворов регулируются их составом, термической или термомеханической обработкой [1–3]. Получение материалов с заданными свойствами невозможно без знания их микроструктуры. Как известно, при смешении компонентов твердого раствора имеют место локальные искажения кристаллической решетки, возникающие из-за различий в размерах атомов смешиваемых компонентов [4, 5]. При изучении свойств твердых растворов, содержащих железо, традиционно применяется метод мессбауэровской спектроскопии в виде обратной задачи ядерного гамма-резонанса. Классическая математическая модель обратной задачи ядерного гамма-резонанса представляет собой интегральное уравнение Фредгольма 1 рода с функцией Лоренца в качестве интегрального ядра и набором параметров, характеризующих сверхтонкую структуру [6, 7]. Однако опыт исследования разупорядоченных, например в результате механоактивации, твердых растворов бинарных и особенно многокомпонентных систем методом мессбауэровской спектроскопии показал, что применение такой математической модели не обеспечивает корректность результатов [8–11]. Очевидно, что невозможность достоверной интерпретации мессбауэровских спектров затрудняет изучение свойств этих материалов и их дальнейшее использование.

Известно, что для структуры твердых растворов характерно наличие ансамбля различных локальных атомных конфигураций, а для твердых растворов на основе Fe в ОЦК (объемно-центрированной кубической) решетке возможно формирование различных типов твердых растворов (рис. 1). Особенно много различных локальных атомных конфигураций возникает в разупорядоченных твердых растворах многокомпонентных систем. В результате

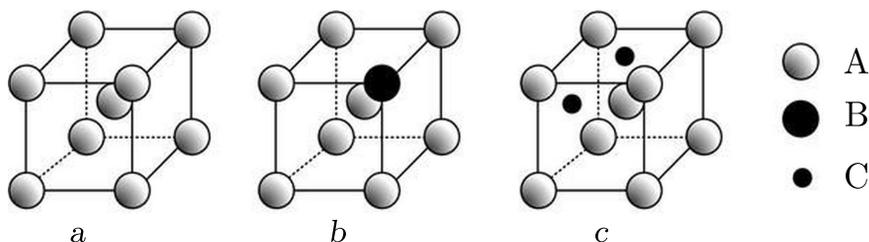


Рис. 1. Решетка чистого металла А (а); твердый раствор замещения (атом металла А заменили на атом типа В) (b); твердый раствор внедрения (атомы С внутри решетки металла А) (c)

[Figure 1. Lattice of pure metal A (a); substitutional solid solution (a metal atom A is replaced by a type B atom) (b); interstitial solid solution (C atoms are inside the lattice of metal A) (c)]

мессбауэровские спектры таких материалов являются суперпозицией достаточно большого количества смещенных относительно друг друга резонансных линий с близкими значениями параметров сверхтонкого взаимодействия [12–14]. При этом величина и знак смещения определяются многими факторами: количественным распределением атомов каждого сорта в координационных сферах, симметрией их распределения относительно оси квантования, возможным локальным смещением относительно среднестатистического положения в кристаллографической структуре и т.д. Аналитически учесть все эффекты смещения в математической модели, как правило, невозможно. Поэтому для обработки экспериментальных данных с удовлетворительной точностью экспериментаторы используют интегральную форму линии [15–18]: модифицированную функцию Лоренца; суперпозицию двух смещенных линий Лоренца; функцию псевдо-Фойгта (линейная комбинация распределений Лоренца и Гаусса с весами) и т.д. В ряде работ [12, 13, 19–21] для описания случайного распределения атомов в ближайшем окружении резонансного атома предлагается использовать свертку функций Лоренца и Гаусса — функцию Фойгта. Однако в работе [22] показано, что применения одной функции Гаусса недостаточно для описания возможных локальных искажений кристаллической решетки: на функции распределения сверхтонкого магнитного поля $P(H)$ определяется избыточное количество локальных максимумов и возникает проблема их идентификации (рис. 2, b). При интерпретации функции распределения основное внимание уделяется следующим свойствам: количество локальных максимумов (указывает на количество спектральных составляющих, соответствующих локальным атомным конфигурациям с K атомами второго или третьего компонента в ближайшем окружении резонансного атома Fe), их положение (характеризует величину локального магнитного поля H_K) и вероятности P_K . Только применение двух функций Гаусса в математической модели обратной задачи ядерного гамма-резонанса позволяет получать количество локальных максимумов, соответствующих биномиальному распределению локальных атомных конфигураций с атомами в ближайшем атомном окружении для ОЦК решетки с координационным числом $Z = 8$ (рис. 2, c).

Обратная задача ядерного гамма-резонанса выражается интегральным уравнением Фредгольма 1 рода и является некорректно поставленной задачей с априорными ограничениями на искомое решение [7, 23]. Введение

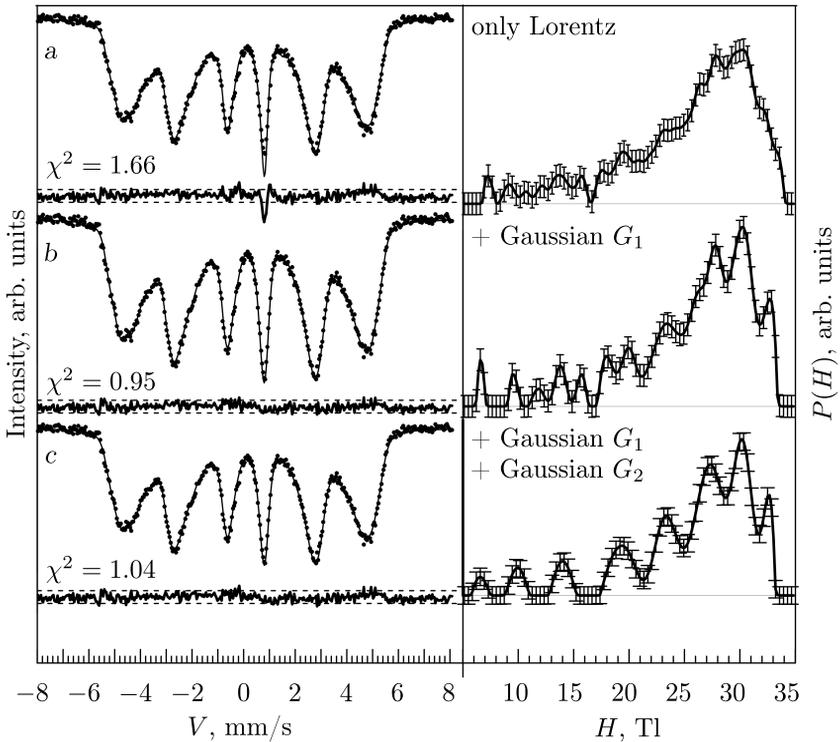


Рис. 2. Обработка мессбауэровского спектра системы $\text{Fe}_{75}\text{Al}_{10}\text{Si}_{15}$ (слева) в рамках разных моделей спектральных составляющих (справа): функция Лоренца ($\chi^2 \gg 1$) (a); свертка функций Лоренца и Гаусса (b); свертка функции Лоренца и двух функций Гаусса (c)

[Figure 2. Processing of the Mössbauer spectrum of the $\text{Fe}_{75}\text{Al}_{10}\text{Si}_{15}$ system (left) by different models of spectral components (right): Lorentz function ($\chi^2 \gg 1$) (a); convolution of Lorentz and Gaussian functions (b); convolution of Lorentz function and two Gaussian functions (c)]

в ядро интегрального уравнения свертки функции Фойгта с еще одной функцией Гаусса с априори неизвестной шириной осложняет задачу вычисления интеграла. Для решения уравнения с одной функцией Фойгта используют различные методы приближенных вычислений: разложение в ряд, представление в комплексном виде и преобразование Фурье, аппроксимация псевдо-Фойгтом с весовыми множителями и др. [13, 17, 24]. В рамках математически обоснованного и успешно применяемого метода регуляризации Тихонова замена функции Лоренца на свертку функций Фойгта и Гаусса не представляет особой сложности [25–28]. Более того, замена непрерывной задачи разностным аналогом позволяет определять ширину распределения Гаусса методом коррекции параметров [22, 29]. В работе представлена расширенная математическая модель обратной задачи ядерного гамма-резонанса, описана методика получения достоверного решения методом регуляризации Тихонова с коррекцией параметров и доказана достоверность и информативность применения расширенной модели.

2. Расширенная математическая модель. Мессбауэровский спектр формируется в результате регистрации резонансного поглощения, излучения и рассеяния гамма-квантов ядрами атомов твердого тела и описывается су-

перпозицией функций Лоренца [6]:

$$Y(V) = Y(\infty) \left[1 - \sum_l^6 L(V - V_l(H)) \right],$$

$$L(V - V_l(H)) = \frac{I_l}{1 + 4(V - V_l(H))^2 / \Gamma_L^2}. \quad (1)$$

Здесь V — относительная скорость источника мессбауэровского излучения; $Y(\infty)$ — количество импульсов в отсутствие резонансного поглощения, фоновая составляющая; I_l — интенсивность l -й линии поглощения (при $l = 6$ существует шесть разрешенных энергетических переходов и формируется магнитное сверхтонкое взаимодействие); Γ_L — ширина линии поглощения; $V_l(H)$ — положение резонанса на шкале скорости:

$$V_l(H) = S_l V(H) + V(\delta_H, Q_H),$$

где H — сверхтонкое магнитное поле на ядре атома (СТМП); S_l — коэффициенты энергетических переходов, попарно различные для 1 и 6 линии спектра, 2 и 5, 3 и 4; δ_H, Q_H — параметры сверхтонкого взаимодействия, характеризующие смещения спектральных составляющих; их значения априори неизвестны [7].

Обратная задача ядерного гамма-резонанса в случае непрерывного распределения СТМП и экспериментальных исследований описывается математической моделью в виде интегрального уравнения Фредгольма 1 рода:

$$\int_{H_{\min}}^{H_{\max}} \sum_l^6 L(V - V_l(H)) P(H) dH = Y_\sigma(V), \quad V \in [V_{\min}, V_{\max}], \quad (2)$$

где $Y_\sigma(V) = Y(V) + \sigma$ — экспериментальный спектр со статистической ошибкой $\sigma = \sqrt{M}$; M — экспериментальная фоновая составляющая; $P(H)$ — искомое распределение сверхтонкого магнитного поля H ; $L(V)$ — функция Лоренца (1), полученная в результате калибровки оборудования; $[V_{\min}, V_{\max}]$ — интервал скорости при проведении эксперимента; $[H_{\min}, H_{\max}]$ — интервал существования СТМП.

На искомую функцию распределения $P(H)$ накладываются априорные ограничения, обусловленные вероятностными свойствами функции и физическим смыслом решения задачи:

1) $P(H) \in W_2^1[H_{\min}, H_{\max}]$ — непрерывно дифференцируемая функция;

$$\|P(H)\|_{W_2^1} = \left(\int_{H_{\min}}^{H_{\max}} P^2(H) dH + \int_{H_{\min}}^{H_{\max}} \left(\frac{dP}{dH} \right)^2 dH \right)^{1/2};$$

2) граничные условия:

$$P(H_{\min}) = 0 \quad \text{или} \quad \frac{dP}{dH}(H_{\min}) = 0, \quad P(H_{\max}) = 0 \quad \text{или} \quad \frac{dP}{dH}(H_{\max}) = 0;$$

3) условие нормировки:

$$\int_{H_{\min}}^{H_{\max}} P(H)dH = 1; \quad (3)$$

4) неотрицательность решения: $P(H) \geq 0$ на $[H_{\min}, H_{\max}]$.

Для решения этой задачи применяются методы многопараметрической подгонки [31, 25] и методы регуляризации в сочетании с итерационными алгоритмами обеспечения априорных ограничений [32–35]. Для обработки мессбауэровских спектров, характерных для разупорядоченных твердых растворов, в качестве элементарной спектральной составляющей необходимо использовать свертку функции калибровочного Лоренца с двумя функциями Гаусса, которые описывают статистические наборы локальных атомных конфигураций с различными значениями сверхтонких параметров. Одна функция Гаусса описывает наборы смещений, вызванные изомерным сдвигом δ_H и квадрупольным расщеплением Q_H , а другая — доплеровское смещение СТМП $S_l H$. В результате расширенная модель обратной задачи ядерного гамма-резонанса (2) записывается в виде интегрального уравнения:

$$\int_{H_{\min}}^{H_{\max}} \sum_{l=1}^6 F(V - V_l(H))P(H)dH = Y(V), \quad (4)$$

где ядром является функция двойной свертки:

$$F(V - V_l(H)) = \int_{V'} \int_{V''(H)} L(V - V'(\delta_H, Q_H) - S_l(V(H) - V''(H)), \Gamma_L) \times \\ \times G_1(V'(\delta_H, Q_H) - V(\delta_H, Q_H), \Gamma_{G_1}) G_2(V(H) - V''(H), \Gamma_{G_2}) dV' dV''(H), \quad (5)$$

$$G_1(V' - V, \Gamma_{G_1}) = \frac{Am_1}{\sqrt{2\pi}\Gamma_{G_1}} \exp\left[-\frac{(V'(\delta_H, Q_H) - V(\delta_H, Q_H))^2}{2\Gamma_{G_1}^2}\right], \quad (6)$$

$$G_2(V(H) - V''(H), \Gamma_{G_2}) = \frac{Am_2}{\sqrt{2\pi}\Gamma_{G_2}} \exp\left[-\frac{(V(H) - V''(H))^2}{2\Gamma_{G_2}^2}\right]. \quad (7)$$

Здесь $L(V - V_l(H))$ — линия калибровочного Лоренца с шириной Γ_L ; функция Гаусса $G_1(V' - V, \Gamma_{G_1})$ описывает статистический набор значений сверхтонких параметров δ_H, Q_H ; функция Гаусса $G_2(V(H) - V''(H), \Gamma_{G_2})$ характеризует смещения, связанные с СТМП. Интегрирование функций Гаусса G_1 и G_2 с ширинами распределения Γ_{G_1} и Γ_{G_2} проводится на интервалах $[-3\Gamma_{G_1}, 3\Gamma_{G_1}]$, $[-3\Gamma_{G_2}, 3\Gamma_{G_2}]$, что соответствует вероятности описания распределения 99.7%.

Для решения уравнения (4) с интегральным ядром (5) используется метод регуляризации Тихонова с коррекцией параметров ядра интегрального уравнения [36, 37], разработанный для нахождения параметров сверхтонкого взаимодействия при решении обратной задачи ядерного гамма-резонанса (2) с априорными ограничениями на решение (3).

Если ввести интегральный оператор

$$A[\bar{z}]P(H) \equiv \int_{H_{\min}}^{H_{\max}} \sum_{l=1}^6 F(V - V_l(H), \bar{z})P(H)dH,$$

где $\bar{z} = \{\delta_H, Q_H, I_{(2;5)}, \Gamma_{G_1}, \Gamma_{G_2}, \dots\}$ — вектор неизвестных параметров, то метод можно описать итерационной процедурой, состоящей из двух этапов:

- 1) методом регуляризации Тихонова находится $P^k(H) = P_a[\bar{z}^k]$ как решение вариационной задачи

$$\min_{P(H)} \|A[\bar{z}^k]P^k(H) - Y[\bar{z}^k]\|^2 + \alpha \|P^k(H)\|_{W_2^1}^2 \quad (8)$$

при фиксированных значениях вектора параметров на k -той итерации и заданном значении параметра регуляризации α ;

- 2) методом Гаусса—Ньютона решается уравнение невязки относительно вектора неизвестных параметров при найденном на первом шаге решении $P^k(H)$, т.е. вычисляется $\Delta\bar{z}^k$ как решение задачи

$$\min_{\Delta\bar{z}} \left\| (A[\bar{z}^k]P^k(H) - Y[\bar{z}^k]) - \sum_{i=1}^m \frac{\partial(A[z_i^k]P^k(H) - Y[z_i^k])}{\partial z_i^k} \Delta z_i^k \right\|. \quad (9)$$

Полагая $\bar{z}^{k+1} = \bar{z}^k - \Delta\bar{z}^k$, $k = k + 1$, повторяем цикл. Начальные значения неизвестных параметров задаются исходя из априорной информации $\bar{z} = \bar{z}^0$. Итерационная процедура заканчивается при условии выполнения критерия описания экспериментальных данных модельной огибающей — критерия Пирсона $\chi^2 \approx 1$. Минимизация функционала (8) выполняется методом Эйлера—Лагранжа [37] с учетом граничных условий (3); устойчивость решения к погрешностям экспериментальных данных обеспечивается требованием гладкости искомого решения с параметром регуляризации $\alpha \sim C\sigma$ ($C = \text{const}$) [39]. Производные по параметрам в задаче (9) вычисляются в численном виде с заранее заданными шагами Δz_i для каждого параметра $z_i^k \in \bar{z}^k$, $i = 1, 2, \dots, m$, m — количество неизвестных параметров:

$$\frac{\partial(A[z_i]P(H))}{\partial z_i} \equiv \frac{A[z_i + \Delta z_i]P(H) - A[z_i]P(H)}{\Delta z_i}. \quad (10)$$

В результате формируется матрица производных Якоби размерности [число искомых параметров \times количество экспериментальных точек]. Отличие расширенной математической модели состоит в том, что ядро интегрального уравнения (5) является двойной сверткой функции Лоренца и двух функций Гаусса (6) и (7), ширину которых необходимо найти. В этом случае при вычислении матрицы Якоби имеют место производные по ширинам Γ_{G_1} и Γ_{G_2} :

$$\frac{\partial A[\bar{z}]}{\partial \Gamma_{G_1}} \equiv \int_{V'} \int_{V''(H)} L(V, \Gamma_L) \frac{\partial G_1(V' - V, \Gamma_{G_1})}{\partial \Gamma_{G_1}} G_2(V - V'', \Gamma_{G_2}) dV' dV'', \quad (11)$$

$$\frac{\partial A[\bar{z}]}{\partial \Gamma_{G_2}} \equiv \int_{V'} \int_{V''(H)} L(V, \Gamma_L) G_1(V' - V, \Gamma_{G_1}) \frac{\partial G_2(V - V'', \Gamma_{G_2})}{\partial \Gamma_{G_2}} dV' dV'', \quad (12)$$

которые вычисляются при замене уравнения (5) численным аналогом с использованием квадратурных формул интегрирования. Минимизация функционала (9) с частными производными по искомым параметрам (10)–(12) выполняется методом наименьших квадратов. Размерности сеток по переменным V' , $V''(H)$ для вычисления функций Гаусса задаются динамически, согласовано с шагом основной экспериментальной сетки по скорости V . Амплитуды функций Гаусса Am_1 и Am_2 обеспечивают площадь, равную 1. Сходимость метода Гаусса—Ньютона имеет локальный характер и обусловлена заданием начальных значений корректируемых параметров, близких к точным [29], при условии существования решения обратной задачи (4).

3. Моделирование ширины распределений Гаусса. Отдельной задачей является моделирование ширины распределений Гаусса Γ_{G_1} и Γ_{G_2} . Величина уширения спектральных линий характеризует количество различных наборов локальных атомных конфигураций и локальных искажений решетки в исследуемом материале. Если величина уширения близка к нулю, т.е. спектральные линии описываются функцией Лоренца, то твердый раствор находится в упорядоченном состоянии и количество локальных атомных конфигураций соответствует стехиометрическому соединению [40]. С другой стороны, каждая локальная атомная конфигурация характеризуется своим набором значений сверхтонких параметров и, значит, ширина функции Гаусса зависит от этих параметров. Ширина распределения Гаусса Γ_{G_1} , связанного с изомерным сдвигом δ_H и квадрупольным расщеплением Q_H , смоделирована аналогично зависимости самих параметров δ_H , Q_H [7] в виде линейной функции скорости

$$\Gamma_{G_1} = d + eV(\delta_H, Q_H), \quad (13)$$

где d и e — параметры подгонки.

Для выяснения вида функциональной зависимости уширения спектральных линий второй функцией Гаусса была рассмотрена трехкомпонентная система на основе Fe с двумя сортами атомов второго и третьего компонентов примеси V_1 и V_2 . Для этой системы были рассчитаны биномиальные вероятности возникновения различных локальных атомных конфигураций в решетке с координационным числом $Z = 8$ при соотношении компонентов 0.40/0.60, 0.20/0.80 и 0.05/0.95. Подразумевается, что вклад в смещение сверхтонкого магнитного поля от атомов сорта V_1 отличается от вклада атомов сорта V_2 . В этом случае уширение элементарной линии спектра зависит не только от количества K атомов V_1 и V_2 , но и от их распределения $P_K(V_1, V_2)$. По полученным биномиальным вероятностям [22] смоделированы зависимости уширения линий мессбауэровских спектров от распределения атомов V_1 и V_2 в первой координационной сфере $K = 0 \div 8$ при различных соотношениях концентрации атомов (рис. 3). По рисунку видно, что зависимость ширины линии от количества атомов в общем случае не является линейной. Поэтому в качестве функции, моделирующей уширение линий элементарной спектральной составляющей, была выбрана логарифмическая зависимость. Для конфигурации с чисто железным окружением $K = 0$ (атомов сортов V_1 и V_2 нет) все три зависимости имеют одно значение. Поскольку количество и распределение атомов в ближайшем окружении резонансного атома Fe формирует величину сверхтонкого магнитного поля, ширину Гауссова распределения Γ_{G_2}

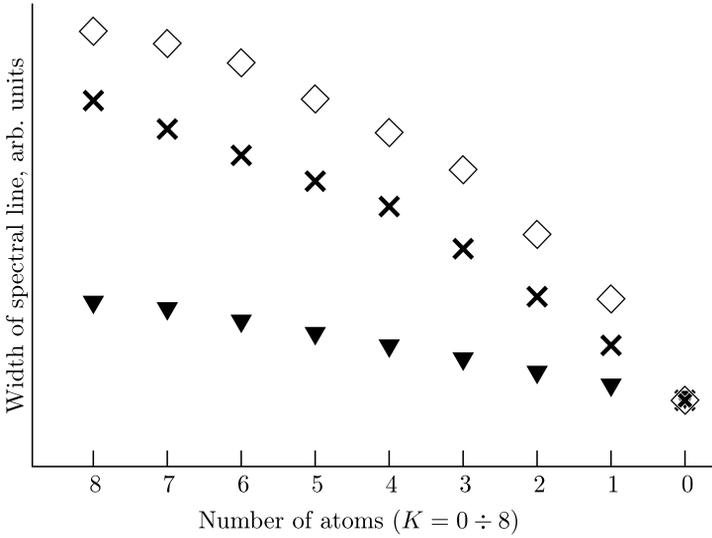


Рис. 3. Зависимости уширения линий мессбауэровских спектров от распределения атомов двух сортов B_1 и B_2 примеси в первой координационной сфере при различных соотношениях концентрации B_1/B_2 : ромбики — 0.40/0.60, крестики — 0.20/0.80, треугольники — 0.05/0.95

[Figure 3. Dependences of the line broadening of the Mössbauer spectra on the distribution of atoms of two types B_1 and B_2 in the first coordination sphere at different B_1/B_2 concentration ratios: diamonds — 0.40/0.60; crosses — 0.20/0.80; triangles — 0.05/0.95]

можно задать логарифмической функцией от $V(H)$:

$$\Gamma_{G_2} = b + c \ln(1 + V(H_0) - V(H_i)). \quad (14)$$

Здесь H_0 — значение сверхтонкого магнитного поля для конфигурации атомов с чисто железным окружением резонансного атома ($H_0 = 33$ Тл при комнатной температуре); b и c — являются подгоночными параметрами. Особенность второй функции Гаусса состоит в ее связи с коэффициентами энергетических переходов S_l , которые уширяют линии спектра попарно различно [40]: $S_1 = S_6 = 1.6$ (мм/с)/Тл, $S_2 = S_5 = 0.92$ (мм/с)/Тл, $S_3 = S_4 = 0.25$ (мм/с)/Тл.

Влияние функций Гаусса на уширение спектральных линий Лоренцевой формы продемонстрировано на рис. 4. Чтобы оценить вклад от уширения каждой функцией, были использованы формулы определения ширины свертки двух функций Гаусса и ширины функции Фойгта [41]:

$$\Gamma_G = \sqrt{\Gamma_{G_1} + \Gamma_{G_2}}, \quad \Gamma_V = \frac{\Gamma_L}{2} + \sqrt{\frac{\Gamma_L^2}{4} + \Gamma_G^2}.$$

Уширение линий калибровочного Лоренца шириной $\Gamma_L = 0.27$ мм/с функцией Гаусса с одинаковой шириной распределения $\Gamma_{G_1} = 0.20$ мм/с для всех шести линий (13) (результатирующая ширина функции Фойгта $\Gamma_V = 0.38$ мм/с) сильно уменьшает амплитуду спектральной линии — практически в 2 раза. А свертка со второй функцией Гаусса, ширина которой зависит от скорости с логарифмической зависимостью (14), и учет коэффициентов перехода приводит к существенно разному уширению центральных линий ($\Gamma_V = 0.31$ мм/с)

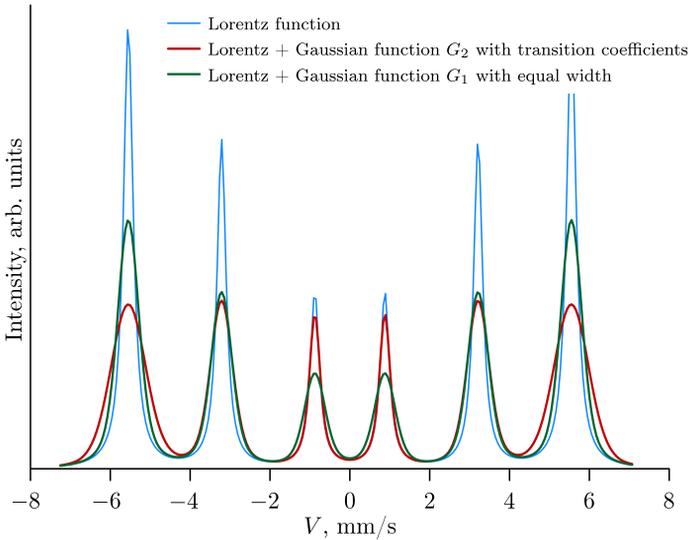


Рис. 4. Смоделированные мессбауэровские спектры с разной шириной спектральных составляющих: только функция Лоренца; свертка функций Лоренца и Гаусса с одинаковой шириной для всех линий; свертка функций Лоренца и Гаусса с коэффициентами перехода [Figure 4. Simulated Mössbauer spectra with different widths of spectral components: Lorentz function only; convolution of Lorentzian and Gaussian with the same width for all lines; convolution of Lorentzian and Gaussian functions with transition coefficients]

и крайних линий спектра ($\Gamma_V = 0.47$ мм/с). Следовательно, уширение линий, обусловленное СТМП и коэффициентами энергетических переходов, невозможно описать распределением Гаусса с одинаковой шириной для всего спектра.

Важно, что введение функциональных зависимостей в ядро интегрального уравнения обратной задачи ядерного гамма-резонанса не означает их обязательного присутствия. Метод регуляризации Тихонова с коррекцией параметров ядра интегрального уравнения выявляет наличие или отсутствие введенных зависимостей.

4. Достоверность и информативность применения расширенной модели. Для проверки достоверности предложенной расширенной математической модели обратной задачи ядерного гамма-резонанса использовались мессбауэровские спектры тестовых объектов: твердого раствора состава $\text{Fe}_{75}\text{Ge}_{25}$ в разупорядоченном и упорядоченном состоянии [5] и разупорядоченный твердый раствор трехкомпонентной системы $\text{Fe}_{75}\text{Al}_{10}\text{Si}_{15}$. Твердые растворы получены механическим измельчением в шаровой планетарной мельнице Pulverisette 7 в среде аргона в течение 40 ч, упорядоченное состояние обеспечено путем отжига в течение 4 ч в вакуумной печи при температуре 723 К. На рентгенограммах исследуемых систем наблюдаются только уширенные ОЦК рефлексы, что свидетельствует о формировании однофазного твердого раствора [5]. Мессбауэровские спектры снимались на спектрометре ЯГРС-4М при температуре жидкого азота 77 К. При выполнении исследований использовалось оборудование ЦКП «Центр физических и физико-химических методов анализа, исследования свойств и характеристик поверхности, наноструктур, материалов и изделий» УдмФИЦ УрО

РАН. Количество импульсов в отсутствие резонансного поглощения составляла $Y(\infty) \approx 10^5$, что соответствует относительной статистической погрешности измерения $\approx 0.10\%$. Калибровка спектрометра и перевод экспериментальных данных на скоростную шкалу выполнялись по спектру α -Fe, т.е. в качестве ширины функции Лоренца использовалась ширина линии калибровочного спектра $\Gamma_L(\alpha\text{-Fe}) = 0.27$ мм/с [6]. Математическая обработка экспериментальных спектров проводилась методом регуляризации Тихонова с коррекцией параметров в рамках расширенной модели (4)–(7). Размерность сетки по скорости определяется размерностью экспериментального спектра 256 каналов, $[V_{\min}, V_{\max}] = [-7.2515; 7.07185]$ мм/с. Размерность сетки в пространстве H задавалась $N = 200$ на всем интервале существования решения $[H_{\min}, H_{\max}] \in [0; 36]$ Тл. В итерационной процедуре начальные значения параметров сверхтонкого взаимодействия задавались традиционными для этих соединений [5, 42], а ширины распределений Гаусса задавались одинаковыми во избежание приоритетного выбора:

$$\Gamma_{G_1} = 0.10 + 0.01V(\delta_H, Q_H), \quad \Gamma_{G_2} = 0.10 + 0.01 \ln(1 + V(H_0) - V(H)).$$

Шаги сеток соответственно $\Delta V = 0.056$, $\Delta H = 0.022$, $\Delta V' = 0.041$, $\Delta V''(H) = 0.033$ мм/с. Шаги по производным определялись диапазоном возможных значений каждого параметра: $\Delta z_i = 0.01$ мм/с для δ_H , Q_H , $I_{(2;5)}$ и $\Delta z_i = 0.005$ мм/с для коэффициентов функций Гаусса — b , c , d , e . Для восстановления экспериментальных данных модельной огибающей в рамках критерия Пирсона требуется в среднем 8–10 шагов итерационной процедуры (8), (9). Результат обработки экспериментальных спектров и найденные значения ширин распределений Гаусса указаны на рис. 5. На функции распределения $P(H)$ для разупорядоченного твердого раствора (рис. 5, *b*) явно выделяются 8 локальных максимумов, что соответствует количеству центров распределения ОЦК решетки. Для упорядоченного твердого раствора найденные ширины распределений Гаусса оказались равными нулю (рис. 5, *a*), характер упорядоченного состояния подтвердился. Соответствие полученных результатов теоретически рассчитанным значениям и спрогнозированным физическим свойствам [5] доказывает достоверность предложенной расширенной модели обратной задачи ядерного гамма-резонанса. Для проверки функциональной зависимости ширины распределения Гаусса от количества K и распределения $P_K(V_1, V_2)$ атомов второй и третьей компоненты в ближайшем окружении атома Fe была выполнена обработка мессбауэровского спектра разупорядоченного твердого раствора трехкомпонентной системы $\text{Fe}_{75}\text{Al}_{10}\text{Si}_{15}$. В данной системе соотношение атомов сорта $V_1 = \text{Al}$ и $V_2 = \text{Si}$ равно $10/15 = 0.40/0.60$ и экспериментальные результаты сравниваются со смоделированной кривой (рис. 6). Видно, что зависимость имеет нелинейный характер и хорошо согласуется с модельными расчетами. Следовательно, введение в расширенную модель логарифмической функции (14) обосновано и может использоваться в качестве количественного критерия интерпретации результатов обработки мессбауэровских спектров.

Заключение. Расширенная математическая модель описания мессбауэровских спектров твердых растворов позволяет получать физически обоснованные и непротиворечивые результаты при обработке экспериментальных спектров сложных многокомпонентных разупорядоченных систем. Традици-

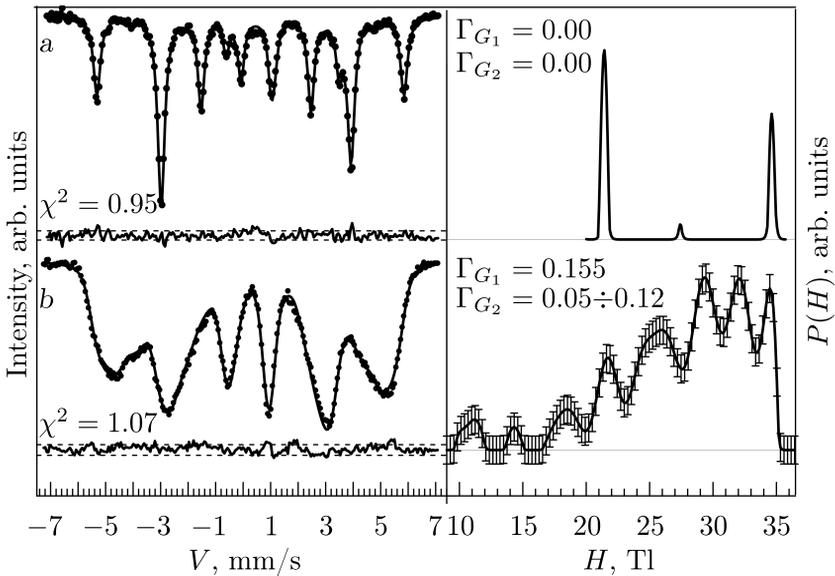


Рис. 5. Результат обработки экспериментальных спектров упорядоченного (а) и разупорядоченного (б) твердого раствора $\text{Fe}_{75}\text{Ge}_{25}$. Для разупорядоченного твердого раствора на решении $P(H)$ явно выделяются 8 локальных максимумов (коридор ошибки указан)

[Figure 5. The result of processing the experimental spectra of ordered (a) and disordered (b) solid solution $\text{Fe}_{75}\text{Ge}_{25}$. For a disordered solid solution, 8 local maxima are clearly determined on the $P(H)$ solution (decision error is shown)]

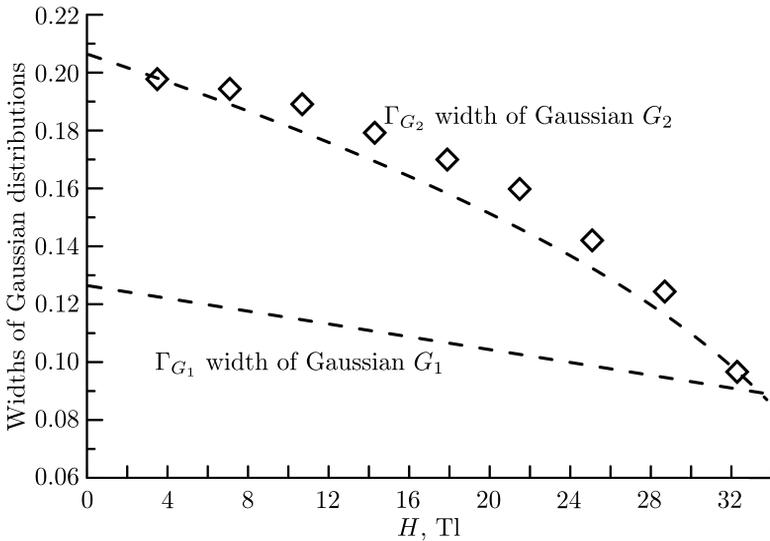


Рис. 6. Полученные из экспериментальных данных зависимости ширин распределений Гаусса Γ_{G_1} и Γ_{G_2} от величины сверхтонкого магнитного поля H . Для распределения Гаусса G_2 наблюдается хорошее согласие с модельными расчетами (ромбики)

[Figure 6. The dependences of the width of the Gaussian distribution Γ_{G_1} and Γ_{G_2} on the magnitude of the hyperfine magnetic field H are obtained from experimental data. The Gaussian distribution G_2 shows good agreement with the model calculations (diamonds)]

онная математическая модель описания мессбауэровских спектров была расширена:

- а) введением свертки функции Лоренца и двух распределений Гаусса в ядро интегрального уравнения обратной задачи ядерного гамма-резонанса;
- б) введением в уравнение функции Гаусса с коэффициентами перехода;
- в) введением в уравнение функциональной зависимости ширины распределения Гаусса от величины сверхтонкого магнитного поля.

Введение в расширенной модели обратной задачи ядерного гамма-резонанса двух распределений Гаусса не означает их обязательного присутствия. Метод регуляризации Тихонова с коррекцией параметров ядра интегрального уравнения выявляет наличие или отсутствие введенных распределений, тем самым расширяя область применения традиционной модели.

Конкурирующие интересы. Заявляем, что в отношении авторства и публикации этой статьи конфликта интересов не имеем.

Авторский вклад и ответственность. О. М. Немцова — описание расширенной математической модели и метода решения обратной задачи; работа с черновиком и переработанным вариантом рукописи. Г. Н. Кобыгин — описание физического эксперимента; обработка данных и подготовка соответствующих рисунков; работа с черновиком и переработанным вариантом рукописи. И. С. Веселков — моделирование зависимостей; расчет расширенной модели; работа с черновиком и переработанным вариантом рукописи. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

Финансирование. Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (тема № 121030100003-7).

Библиографический список

1. Hade F., Otmani A., Djekoun A., Grenèche J. M. Investigation of mechanosynthesized $\text{Fe}_{50}\text{Ni}_{40}\text{Al}_{10}$ powders // *J. Magn. Magn. Mater.*, 2013. vol. 343. pp. 214–220. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jmmm.2013.04.074>.
2. Hade F., Otmani A., Djekoun A., Grenèche J. M. Mössbauer effect study of fine atomic structure of $\text{Fe}_{50}\text{Al}_{40}\text{Ni}_{10}$ powders // *Superlattices Microst.*, 2012. vol. 51, no. 6. pp. 952–958. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.spmi.2012.03.015>.
3. Ломаева С. Ф., Маратканова А. Н., Немцова О. М. [и др.] Формирование структурно-фазового состава и магнитных свойств нанокompозитов $\text{Fe}(\text{Fe}_3\text{C}, \text{Fe}_5\text{SiC})\text{-SiO}_2$ в процессе механосинтеза // *ФММ*, 2010. Т. 109, № 5. С. 572–583. EDN: MSQBZH.
4. Ломаева С. Ф., Немцова О. М., Елсуков Е. П. [и др.] Формирование метастабильных фаз при механоактивации сплава Fe–Si в жидких органических средах // *Химия в интересах устойчивого развития*, 2005. Т. 13, № 2. С. 279–290. EDN: HRMZIF.
5. Аржников А. К., Добышева Л. В., Кобыгин Г. Н., Елсуков Е. П. Магнитные моменты и сверхтонкие магнитные поля в упорядоченных и разупорядоченных квазибинарных сплавах $\text{Fe}_{75}(\text{Si}_{1-x}\text{Ge}_x)_{25}$ // *ФТТ*, 2005. Т. 47, № 11. С. 1981–1989. EDN: RDAEPF.
6. Шпинель В. С. *Резонанс гамма-лучей в кристаллах*. М.: Наука, 1969. 407 с.
7. Литвинов В. С., Каракишев С. Д., Овчинников В. В. *Ядерная гамма-резонансная спектроскопия сплавов*. М.: Металлургия, 1982. 144 с.
8. Русаков В. С. *Мессбауэровская спектроскопия локально неоднородных систем*. Алматы: ОПНИ ИЯФ НЯЦ РК, 2000. 431 с.
9. Елсуков Е. П., Ульянов А. Л., Порсев В. Е. [и др.] Особенности механического сплав-

- ления высококонцентрированных сплавов Fe–Cr // *ФММ*, 2018. Т. 119, № 2. С. 165–170. EDN: YOVMXB. DOI: <https://doi.org/10.7868/S0015323018020079>.
10. Гладков В. П., Кащеев В. А., Кусков А. Х., Петров В. И. Математический метод учета искажений формы регистрируемых линий мессбауэровского спектра // *Журнал прикладной спектроскопии*, 2004. Т. 71, № 5. С. 668–671. EDN: HMRJNV.
 11. Русаков В. С., Покатилон В. С., Губайдулина Т. В., Мацнев М. Е. Сверхтонкие магнитные поля на ядрах ^{57}Fe в интерметаллической системе $\text{Zr}_{1-x}\text{Sc}_x\text{Fe}_2$ // *ФММ*, 2019. Т. 120, № 4. С. 366–371. EDN: ZACXZR. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0015323019040119>.
 12. Boukherroub N., Guittoun A., Laggoun A., et al. Microstructure and magnetic properties of nanostructured $(\text{Fe}_{0.8}\text{Al}_{0.2})_{100-x}\text{Si}_x$ alloy produced by mechanical alloying // *J. Magn. Magn. Mater.*, 2015. vol. 385. pp. 151–159. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jmmm.2015.03.011>.
 13. Borrego J. M., Conde A., Peña-Rodríguez V. A., Grenèche J. M. A fitting procedure to describe Mössbauer spectra of FINEMET-type nanocrystalline alloys // *Hyperfine Interact.*, 2000. vol. 131. pp. 67–82. DOI: <https://doi.org/10.1023/A:1010858927701>.
 14. Djekoun A., Otmani A., Bouzabata B., et al. Synthesis and characterization of high-energy ball milled nanostructured $\text{Fe}_{50}\text{Ni}_{50}$ // *Catal. Today*, 2006. vol. 113, no. 3–4. pp. 235–239. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cattod.2005.11.084>.
 15. Гладков В. П., Мартыненко С. С., Петров В. И. Уточнение формы регистрируемой линии мессбауэровских спектров // *Журнал прикладной спектроскопии*, 2011. Т. 78, № 2. С. 316–320. EDN: NDESKB.
 16. Чуев М. А. Эффективный метод анализа сверхтонкой структуры гамма резонансных спектров с использованием профиля Фойта // *Докл. АН*, 2011. Т. 438, № 6. С. 747–751. EDN: NXQPAR.
 17. Ida T., Ando M., Toraya H. Extended pseudo-Voigt function for approximating the Voigt profile // *J. Appl. Cryst.*, 2000. vol. 33, no. 6. pp. 1311–1316. DOI: <https://doi.org/10.1107/S0021889800010219>.
 18. Baidakova N. V., Chernykh N. I., Koloskov V. M., Subbotin Y. N. A new algorithm for analysis of experimental Mössbauer spectra // *Ural Math. J.*, 2017. vol. 3, no. 2. pp. 33–39. EDN: YMVBNR. DOI: <https://doi.org/10.15826/umj.2017.2.005>.
 19. Li Z., Ping J. Y., Jin M. Z., Liu M. L. Distribution of Fe^{2+} and Fe^{3+} and next-nearest neighbour effects in natural chromites: Comparison between results of QSD and Lorentzian doublet analysis // *Phys. Chem. Miner.*, 2002. vol. 29, no. 7. pp. 485–494. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00269-002-0258-2>.
 20. Satuła D., Szymański K., Dobrzyński L. Maximum entropy method in Mössbauer spectroscopy — A problem of magnetic texture doublet analysis // *Acta Phys. Pol. A*, 2011. vol. 119, no. 1. pp. 78–80. DOI: <https://doi.org/10.12693/APhysPolA.119.78>.
 21. Кобылин Г. Н., Немцова О. М., Порсев В. Е. Обработка мессбауэровских спектров твердых растворов с применением функции Фойта // *Журнал прикладной спектроскопии*, 2019. Т. 86, № 3. С. 374–381. EDN: ZGWZDV.
 22. Кобылин Г. Н., Немцова О. М. Использование двойной свертки функций Лоренца и Гаусса для обработки мессбауэровских спектров пересыщенных разупорядоченных твердых растворов // *Журнал прикладной спектроскопии*, 2021. Т. 88, № 6. С. 907–913. EDN: MFOYVJ. DOI: <https://doi.org/10.47612/0514-7506-2021-88-6-907-913>.
 23. Сизиков В. С., Кривых А. В. Восстановление непрерывных спектров методом регуляризации с использованием модельных спектров // *Оптика и спектроскопия*, 2014. Т. 117, № 6. С. 1040–1048. EDN: RAFMKT. DOI: <https://doi.org/10.7868/S0030403414110166>.
 24. Киселев Е. А. Системы целочисленных сдвигов, порожденные сверткой функций Гаусса и Лоренца // *Вестник ВГУ. Серия: Физика. Математика*, 2016. Т. 4. С. 43–50. EDN: WYMNUX.
 25. Vasin V. V. Irregular nonlinear operator equations: Tikhonov’s regularization and iterative approximation // *J. Inverse Ill-Posed Probl.*, 2013. vol. 21, no. 1. pp. 109–123. DOI: <https://doi.org/10.1515/jip-2012-0084>.

26. Морозов В. А. О восстановлении зашумленных сигналов методом регуляризации // *Вычислительные методы и программирование*, 2012. Т. 13, № 1. С. 247–252. EDN: PIXMDN.
27. Nemtsova O. M., Ageev A. L., Voronina E. V. The estimation of the error of the hyperfine interaction parameter distribution from Mössbauer spectra // *Nucl. Instr. Meth. Phys. Res., Sect. B.*, 2002. vol. 187, no. 1. pp. 132–136. EDN: LHCMCZ. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0168-583X\(01\)00830-8](https://doi.org/10.1016/S0168-583X(01)00830-8).
28. Xiong X., Xue X. A fractional Tikhonov regularization method for identifying a space-dependent source in the time-fractional diffusion equation // *Appl. Math. Comput.*, 2019. vol. 349. pp. 292–303. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.amc.2018.12.063>.
29. Voronina E. V., Ageev A. L., Nemtsova O. M., Yelsukov E. P. Algorithm of parameters correction for solving the inverse problem of Mössbauer spectroscopy // *Czechoslov. J. Phys.*, 1997. vol. 47, no. 5. pp. 547–552. EDN: LEEEAU. DOI: <https://doi.org/10.1023/A:1021263524297>.
30. Matsnev M. E., Rusakov V. S. SpectrRelax: An application for Mössbauer spectra modeling and fitting // *AIP Conf. Proc.*, 2012. vol. 1489, no. 1. pp. 178–185. EDN: RGGVFT. DOI: <https://doi.org/10.1063/1.4759488>.
31. Немцова О. М., Кобыгин Г. Н., Порсев В. Е. Разрешение перекрывающихся спектральных составляющих методом взвешенной регуляризации Тихонова // *Журнал прикладной спектроскопии*, 2021. Т. 88, № 2. С. 315–324. EDN: IJLWSD.
32. Edwards T. H., Stoll S. Optimal Tikhonov regularization for DEER spectroscopy // *J. Magn. Reson.*, 2018. vol. 288. pp. 58–68. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jmr.2018.01.021>.
33. Sizikov V. S., Stepanov A. V. Method of training examples in solving inverse ill-posed problems of spectroscopy // *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2015. vol. 15, no. 6. pp. 1147–1154. EDN: SVHGBQ. DOI: <https://doi.org/10.17586/2226-1494-2015-15-6-1147-1154>.
34. Васин В. В., Агеев А. Л. *Некорректные задачи с априорной информацией*. Екатеринбург: Наука, 1993. 264 с. EDN: ZQYUJZ.
35. Агеев А. Л., Антонова Т. В., Воронина Е. В. Методы уточнения параметров при решении интегральных уравнений I рода // *Матем. моделирование*, 1996. Т. 8, № 12. С. 110–124.
36. Немцова О. М., Кобыгин Г. Н. *Программа обработки мессбауэровских спектров методом регуляризации Тихонова с коррекцией параметров сверхтонкого взаимодействия*. Свид. гос. рег. ПрЭВМ № 2020667880, 2020. EDN: TJFFRR.
37. Ягола А. Г. Некорректные задачи с априорной информацией // *Сиб. электрон. матем. изв.*, 2010. Т. 7. С. С.343–С.361.
38. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. *Методы решения некорректных задач*. Москва: Наука, 1970. 288 с.
39. Язовских К. А., Ломаева С. Ф., Шаков А. А. [и др.] Влияние органической среды размола на структурно-фазовый состав и коррозионную стойкость сплавов Fe–Si // *Химическая физика и мезоскопия*, 2018. Т. 20, № 2. С. 284–296. EDN: YLSJEL.
40. Ивойлов Н. Г. *Мессбауэровская спектроскопия*. Казань, 2003. 93 с.
41. AlOmar A. S. Line width at half maximum of the Voigt profile in terms of Gaussian and Lorentzian widths: Normalization, asymptotic expansion, and chebyshev approximation // *Optik*, 2020. vol. 203, 163919. DOI: <https://doi.org/10.1016/J.IJLEO.2019.163919>.
42. Yazovskikh K. A., Lomayeva S. F., Shakov A. A., et al. Surface modification of sendust powders prepared by ball milling // *Mater. Today Proc.*, 2019. vol. 12. pp. 172–176. EDN: OTYGFK. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.matpr.2019.03.090>.

MSC: 65Z05, 35R30

Extended mathematical model of the inverse problem of nuclear gamma-resonance. Reliability and informative of application

*O. M. Nemtsova, G. N. Konygin, I. S. Veselkov*Udmurt Federal Research Center of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences,
34, T. Baramzina str., Izhevsk, 426067, Russian Federation.

Abstract

Research the properties of iron-based solid solutions by Mössbauer spectroscopy has the problem of interpreting the results of processing experimental data within the traditional mathematical model. Since the disordered solid solutions, for example, as a result of mechanical activation, are consisted of a set of the different local atomic configurations, the corresponding Mössbauer spectra contain a large number of the shifted relative to each other spectral components with close values of the hyperfine interaction parameters. The magnitude and sign of these shift are determined by many factors: the quantitative distribution of atoms of each type in the coordination spheres, the symmetry of their distribution relative to the quantization axis, the possible local shift relative to the average statistical position in the crystallographic structure, etc. In the mathematical model, as a rule, it's not possible to taken into account all these effects of the shift by analytically.

The proposed extended mathematical model for describing the Mössbauer spectra of solid solutions makes it possible to take into account the shifts in the spectral components by using Gaussian normal distribution function, as a function of statistical set of local distortions. The width of the Gaussian distribution makes it possible to estimate the degree of local distortions of the crystal lattice that arise due to differences in the sizes of atoms of the mixed components, local distortions of the structure and symmetry of the environment of the resonant atom.

The inverse problem of nuclear gamma-resonance is formulated by the Fredholm integral equation of the first kind and is an ill-posed problem

Mathematical Modeling, Numerical Methods and Software Complexes Research Article

© Authors, 2024

© Samara State Technical University, 2024 (Compilation, Design, and Layout)

 The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Please cite this article in press as:

Nemtsova O. M., Konygin G. N., Veselkov I. S. Extended mathematical model of the inverse problem of nuclear gamma-resonance. Reliability and informative of application, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2024, vol. 28, no. 1, pp. 152–170. EDN: EKWSDV. DOI: 10.14498/vsgtu2060 (In Russian).

Authors' Details:

Olga M. Nemtsova  <https://orcid.org/0000-0002-5676-9578>Cand. Phys. & Math. Sci.; Associate Professor; Senior Researcher; Lab. of Physics and Chemistry of Nanomaterials; e-mail: olganemtsova@udman.ru*Grigory N. Konygin*  <https://orcid.org/0000-0002-6202-9509>Cand. Phys. & Math. Sci.; Head of Laboratory; Lab. of Physics and Chemistry of Nanomaterials; e-mail: gkon@mail.ru*Ivan S. Veselkov*  <https://orcid.org/0009-0008-5590-6068>Postgraduate Student; Lab. of Physics and Chemistry of Nanomaterials; e-mail: nerorus97@gmail.com

with a priori constraints on the desired solution. The introduction of two Gaussian functions with a priori unknown linewidths into the kernel of the integral equation leads to the problem of solving the equation by classical methods. Algorithm for obtaining a reliable solution based on the Tikhonov regularization method with correction of the parameters of the kernel of the integral equation is proposed in this paper. On the examples of the study of real objects, the reliability and informative application of the extended mathematical model of the inverse problem of nuclear gamma-resonance is proved.

Keywords: inverse problem of nuclear gamma-resonance, solid solution, probability of atomic configuration, mathematical model, Fredholm integral equation of the first kind.

Received: 5th September, 2023 / Revised: 20th November, 2023 /

Accepted: 15th December, 2023 / First online: 16th August, 2024

Competing interests. The authors declare that they have no competing interests.

Authors' contributions and responsibilities. O. M. Nemtsova: Description of the extended mathematical model and method for solving the inverse problem; Writing — original draft and review & editing. G. N. Konygin: Description of the physical experiment; Data processing and preparation of corresponding figures; Writing — original draft and review & editing. I. S. Veselkov: Modeling dependencies; Calculation of the extended model; Writing — original draft and review & editing. The authors bear full responsibility for providing the final manuscript for publication. The final version of the manuscript was approved by all authors.

Funding. The research was carried out within the state assignment of Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (theme no. 121030100003-7).

References

1. Hadeif F., Otmani A., Djekoun A., Grenèche J. M. Investigation of mechanosynthesized Fe₅₀Ni₄₀Al₁₀ powders, *J. Magn. Magn. Mater.*, 2013, vol. 343, pp. 214–220. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jmmm.2013.04.074>.
2. Hadeif F., Otmani A., Djekoun A., Grenèche J. M. Mössbauer effect study of fine atomic structure of Fe₅₀Al₄₀Ni₁₀ powders, *Superlattices Microst.*, 2012, vol. 51, no. 6, pp. 952–958. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.spmi.2012.03.015>.
3. Lomaeva S. F., Maratkanova A. H., Nemtsova O. M., et al. Formation of the structural-phase composition and magnetic properties of nanocomposites Fe(Fe₃C, Fe₅SiC)–SiO₂ in the process of mechanosynthesis, *Phys. Met. Metallogr.*, 2010, vol. 109, no. 5, pp. 534–546. EDN: MXMLTR. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0031918X10050145>.
4. Lomaeva S. F., Nemtsova O. M., Elsukov E. P., et al. Formation of metastable phases during mechanical activation of Fe–Si alloy in liquid organic media, *Chemistry for Sustainable Development*, 2005, vol. 13, no. 2, pp. 275–286.
5. Arzhnikov A. K., Dobysheva L. V., Konygin G. N., Elsukov E. P. Magnetic moments and hyperfine magnetic fields in ordered and disordered quasi-binary Fe₇₅(Si_{1-x}Ge_x)₂₅ alloys, *Phys. Solid State*, 2005, vol. 47, no. 11, pp. 2063–2071. EDN: LJDHJF. DOI: <https://doi.org/10.1134/1.2131146>.
6. Spinel' V. S. *Resonans gamma-luchey v kristallakh* [Resonance of Gamma-rays in Crystals]. Moscow, Nauka, 1969, 407 pp. (In Russian)
7. Litvinov V. S., Karakishev S. D., Ovchinnikov V. V. *Iadernaia gamma-rezonansnaia spektroskopiiia splavov* [Nuclear Gamma-Resonance Spectroscopy of Alloys]. Moscow, Metallurgia, 1982, 144 pp. (In Russian)
8. Rusakov V. S. *Messbauerovskaia spektroskopiiia lokal'no neodnorodnykh sistem* [Mössbauer Spectroscopy of Locally Inhomogeneous Systems]. Almaty, 2000, 431 pp. (In Russian)

9. Yelsukov E. P., Ul'yanov A. L., Porsev V. E., et al. Peculiarities of mechanical alloying of high-concentration Fe–Cr alloys, *Phys. Met. Metallogr.*, 2018, vol. 119, no. 2, pp. 153–160. EDN: XXGLYT. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0031918X17120055>.
10. Gladkov V. P., Kascheev V. A., Kouskov A. X., Petrov V. I. Mathematical method of allowance for distortions of the shape of the registered Mössbauer spectrum lines, *J. Appl. Spectrosc.*, 2004, vol. 71, no. 5, pp. 731–735. EDN: LIGCHZ. DOI: <https://doi.org/10.1023/B:JAPS.0000049636.15453.0c>.
11. Rusakov V. S., Pokatilov V. S., Gubaidulina T. V., Matsnev M. E. Hyperfine Magnetic Fields at the Nuclei of ^{57}Fe in the Intermetallic System $\text{Zr}_{1-x}\text{Sc}_x\text{Fe}_2$ intermetallic system, *Phys. Met. Metallogr.*, 2019, vol. 120, no. 4, pp. 339–344. EDN: GXEJUD. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0031918X19040112>.
12. Boukherroub N., Guittoum A., Laggoun A., et al. Microstructure and magnetic properties of nanostructured $(\text{Fe}_{0.8}\text{Al}_{0.2})_{100-x}\text{Si}_x$ alloy produced by mechanical alloying, *J. Magn. Magn. Mater.*, 2015, vol. 385, pp. 151–159. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jmmm.2015.03.011>.
13. Borrego J. M., Conde A., Peña-Rodríguez V. A., Grenèche J. M. A fitting procedure to describe Mössbauer spectra of FINEMET-type nanocrystalline alloys, *Hyperfine Interact.*, 2000, vol. 131, pp. 67–82. DOI: <https://doi.org/10.1023/A:1010858927701>.
14. Djekoun A., Otmani A., Bouzabata B., et al. Synthesis and characterization of high-energy ball milled nanostructured $\text{Fe}_{50}\text{Ni}_{50}$, *Catal. Today*, 2006, vol. 113, no. 3–4, pp. 235–239. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cattod.2005.11.084>.
15. Gladkov V. P., Martynenko S. S., Petrov V. I. Refinement of the shape of the detected line in mössbauer spectra, *J. Appl. Spectrosc.*, 2011, vol. 78, no. 2, pp. 296–300. EDN: OHZFET. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10812-011-9462-5>.
16. Chuev M. A. An efficient method of analysis of the hyperfine structure of gamma-resonance spectra using the Voigt profile, *Dokl. Phys.*, 2011, vol. 56, no. 6, pp. 318–322. EDN: PDYEMB. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1028335811060097>.
17. Ida T., Ando M., Toraya H. Extended pseudo-Voigt function for approximating the Voigt profile, *J. Appl. Cryst.*, 2000, vol. 33, no. 6, pp. 1311–1316. DOI: <https://doi.org/10.1107/S0021889800010219>.
18. Baidakova N. V., Chernykh N. I., Koloskov V. M., Subbotin Y. N. A new algorithm for analysis of experimental Mössbauer spectra, *Ural Math. J.*, 2017, vol. 3, no. 2, pp. 33–39. EDN: YMVBNR. DOI: <https://doi.org/10.15826/umj.2017.2.005>.
19. Li Z., Ping J. Y., Jin M. Z., Liu M. L. Distribution of Fe^{2+} and Fe^{3+} and next-nearest neighbour effects in natural chromites: Comparison between results of QSD and Lorentzian doublet analysis, *Phys. Chem. Miner.*, 2002, vol. 29, no. 7, pp. 485–494. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00269-002-0258-2>.
20. Satuła D., Szymański K., Dobrzyński L. Maximum entropy method in Mössbauer spectroscopy — A problem of magnetic texture doublet analysis, *Acta Phys. Pol. A*, 2011, vol. 119, no. 1, pp. 78–80. DOI: <https://doi.org/10.12693/APhysPolA.119.78>.
21. Konygin G. N., Nemtsova O. M., Porsev V. E. Mössbauer spectra of solid solutions processed using the Voigt function, *J. Appl. Spectrosc.*, 2019, vol. 86, no. 3, pp. 409–415. EDN: PCQMPU. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10812-019-00834-0>.
22. Konygin G. N., Nemtsova O. M. Use of a double convolution of Lorentz and Gaussian functions for processing Mössbauer spectra of supersaturated disordered solid solutions, *J. Appl. Spectrosc.*, 2021, vol. 88, no. 6, pp. 1176–1182. EDN: VDOWSU. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10812-022-01296-7>.
23. Sizikov V. S., Krivykh A. V. Reconstruction of continuous spectra by the regularization method using model spectra, *Opt. Spectrosc.*, 2014, vol. 117, no. 6, pp. 1040–1048. EDN: UFJYAL. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0030400X14110162>.
24. Kiselev E. A. Systems of integer shifts generated by convolution of Gauss and Lorentz functions, *Proc. Voronezh State Univ., Ser. Phys. Math.*, 2016, vol. 4, pp. 43–50 (In Russian). EDN: WYMNUX.

25. Vasin V. V. Irregular nonlinear operator equations: Tikhonov's regularization and iterative approximation, *J. Inverse Ill-Posed Probl.*, 2013, vol. 21, no. 1, pp. 109–123. DOI: <https://doi.org/10.1515/jip-2012-0084>.
26. Morozov V. A. On restoration of noisy signals by a regularization method, *Numerical Methods and Programming*, 2012, vol. 13, no. 1, pp. 247–252 (In Russian). EDN: PIXMDN.
27. Nemtsova O. M., Ageev A. L., Voronina E. V. The estimation of the error of the hyperfine interaction parameter distribution from Mössbauer spectra, *Nucl. Instr. Meth. Phys. Res., Sect. B.*, 2002, vol. 187, no. 1, pp. 132–136. EDN: LHCMCZ. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0168-583X\(01\)00830-8](https://doi.org/10.1016/S0168-583X(01)00830-8).
28. Xiong X., Xue X. A fractional Tikhonov regularization method for identifying a space-dependent source in the time-fractional diffusion equation, *Appl. Math. Comput.*, 2019, vol. 349, pp. 292–303. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.amc.2018.12.063>.
29. Voronina E. V., Ageev A. L., Nemtsova O. M., Yelsukov E. P. Algorithm of parameters correction for solving the inverse problem of Mössbauer spectroscopy, *Czechoslov. J. Phys.*, 1997, vol. 47, no. 5, pp. 547–552. EDN: LEEEA V. DOI: <https://doi.org/10.1023/A:1021263524297>.
30. Matsnev M. E., Rusakov V. S. SpectrRelax: An application for Mössbauer spectra modeling and fitting, *AIP Conf. Proc.*, 2012, vol. 1489, no. 1, pp. 178–185. EDN: RGGVFT. DOI: <https://doi.org/10.1063/1.4759488>.
31. Nemtsova O. M., Konygin G. N., Porsev V. E. Separation of overlapping spectral lines using the Tikhonov regularization method, *J. Appl. Spectrosc.*, 2021, vol. 88, no. 2, pp. 373–381. EDN: BJZFXZ. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10812-021-01185-5>.
32. Edwards T. H., Stoll S. Optimal Tikhonov regularization for DEER spectroscopy, *J. Magn. Reson.*, 2018, vol. 288, pp. 58–68. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jmr.2018.01.021>.
33. Sizikov V. S., Stepanov A. V. Method of training examples in solving inverse ill-posed problems of spectroscopy, *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2015, vol. 15, no. 6, pp. 1147–1154. EDN: SVHGBQ. DOI: <https://doi.org/10.17586/2226-1494-2015-15-6-1147-1154>.
34. Vasin V. V., Ageev A. L. *Nekorrektnye zadachi s apriornoi informatsiei* [Ill-Posed Problems with A Priori Information]. Ekaterinburg, Nauka, 1993, 264 pp. (In Russian). EDN: ZQYUJZ.
35. Ageev A. L., Antonova T. V., Voronina E. V. Methods of parameter adjustment for the solution of integral equations of the first kind, *Mat. Model.*, 1996, vol. 8, no. 12, pp. 110–124.
36. Nemtsova O. M., Konygin G. N. *Program for processing Mössbauer spectra using the Tikhonov regularization method with correction of hyperfine interaction parameters*, Certificate of State Registration of Computer Program no. 2020667880, 2020 (In Russian). EDN: TJFFRR.
37. Yagola A. G. Ill-posed problems with apriori information, *Sib. Electron. Mat. Izv.*, 2010, vol. 7, pp. C.343–C.361.
38. Tikhonov A. N., Arsenin V. Ya. *Metody resheniia nekorrektnykh zadach* [Methods for Solving Ill-Posed Problems]. Moscow, Nauka, 1970, 288 pp. (In Russian)
39. Yazovskikh K. A., Lomaeva S. F., Shakov A. A., et al. Influence of organic medium of ball milling on structural-phase composition and corrosion resistance of Fe–Si alloys, *Chem. Phys. Mesoscop.*, 2018, vol. 20, no. 2, pp. 284–296 (In Russian). EDN: YLSJEL.
40. Ivoylov N. G. *Messbauerovskaia spektroskopiiia* [Mössbauer Spectroscopy]. Kazan', 2003, 93 pp. (In Russian)
41. AlOmar A. S. Line width at half maximum of the Voigt profile in terms of Gaussian and Lorentzian widths: Normalization, asymptotic expansion, and chebyshev approximation, *Optik*, 2020, vol. 203, 163919. DOI: <https://doi.org/10.1016/J.IJLEO.2019.163919>.
42. Yazovskikh K. A., Lomayeva S. F., Shakov A. A., et al. Surface modification of sendust powders prepared by ball milling, *Mater. Today Proc.*, 2019, vol. 12, pp. 172–176. EDN: OTYGFK. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.matpr.2019.03.090>.



УДК 517.951

Решение одной краевой задачи для уравнения третьего порядка с переменными коэффициентами

Ю. П. Апаков^{1,2}, Р. А. Умаров²

¹ Институт математики имени В.И. Романовского АН Республики Узбекистан, Узбекистан, 100174, Ташкент, ул. Университетская, 46.

² Наманганский инженерно-строительный институт, Узбекистан, 160100, Наманган, ул. Ислама Каримова, 12.

Аннотация

В прямоугольной области рассматривается вторая краевая задача для неоднородного дифференциального уравнения в частных производных третьего порядка с кратными характеристиками и с переменными коэффициентами. Единственность решения поставленной задачи доказана методом интегралов энергии. Для случая нарушения условий теоремы единственности построен контрпример.

Решение задачи ищется в виде произведения двух функций $X(x)$ и $Y(y)$ с использованием метода разделения переменных. Для определения $Y(y)$ получено обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка с двумя граничными условиями на границах сегмента $[0, q]$. Для этой задачи найдены собственные значения и соответствующие им собственные функции при $n = 0$ и $n \in \mathbb{N}$. Для определения $X(x)$ получено обыкновенное дифференциальное уравнение третьего порядка с тремя граничными условиями на границах сегмента $[0, p]$. Решение указанной задачи построено методом функции Грина. Отдельная функция Грина была построена для $n = 0$ и отдельная функция Грина для случая, когда n натуральное. Проверено, что найденные функции Грина удовлетворяют граничным условиям и свойствам функции Грина. Решение для $X(x)$ выписано через построенную функцию Грина.

После некоторых преобразований получено интегральное уравнение Фредгольма второго рода, решение которого выписано через резольвенту. Получены оценки резольвенты и функции Грина. Доказана равномерная сходимость решения и возможность его почленного дифференцирования при некоторых условиях на заданные функции. Сходимость

Дифференциальные уравнения и математическая физика

Краткое сообщение

© Коллектив авторов, 2024

© СамГТУ, 2024 (составление, дизайн, макет)

📄 📄 📄 Контент публикуется на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

Образец для цитирования

Апаков Ю. П., Умаров Р. А. Решение одной краевой задачи для уравнения третьего порядка с переменными коэффициентами // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2024. Т. 28, № 1. С. 171–185. EDN: DTEVGQ. DOI: 10.14498/vsgtu2030.

Сведения об авторах

Юсуфжон Пулатович Апаков ✉ <https://orcid.org/0000-0001-8805-8917>

доктор физико-математических наук, профессор; ведущий научный сотрудник; Наманганское отделение¹; профессор; каф. высшей математики²; e-mail: yusupjonapakov@gmail.com

Рахматилла Акрамович Умаров <https://orcid.org/0009-0004-4778-4444>

PhD докторант; каф. высшей математики²; e-mail: r.umarov1975@mail.ru

производной третьего порядка решения по переменной x доказывается с помощью неравенств Коши–Буняковского и Бесселя. При обосновании равномерной сходимости решения доказывается отсутствие “малого знаменателя”.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение, третий порядок, кратные характеристики, вторая краевая задача, регулярное решение, единственность, существование, функция Грина.

Получение: 7 июня 2023 г. / Исправление: 7 февраля 2024 г. /

Принятие: 4 марта 2024 г. / Публикация онлайн: 6 августа 2024 г.

По аналогии с работами [1, 2] в области $D = \{(x, y) : 0 < x < p, 0 < y < q\}$ рассмотрим уравнение третьего порядка вида

$$U_{xxx} - U_{yy} + A_1(x)U_{xx} + A_2(x)U_x + A_3(x)U + A_4U_y = g_1(x, y), \quad (1)$$

где $p, q, A_4 \in \mathbb{R}$; $A_1(x), A_2(x), A_3(x), g_1(x, y)$ – заданные достаточно гладкие функции.

Заменой

$$U(x, y) = u(x, y) \exp\left(-\frac{1}{3} \int_0^x A_1(\xi) d\xi + \frac{A_4}{2} y\right)$$

уравнение (1) можно привести к виду

$$L[u] = u_{xxx} - u_{yy} + a_1(x)u_x + a_2(x)u = g(x, y), \quad (2)$$

где

$$\begin{aligned} a_1(x) &= -A_1'(x) - \frac{1}{3}A_1^2(x) + A_2(x), \\ a_2(x) &= -\frac{1}{3}A_1''(x) + \frac{2}{27}A_1^3(x) - \frac{1}{3}A_1(x)A_2(x) + A_3(x) + \frac{A_4^2}{4}, \\ g(x, y) &= g_1(x, y) \exp\left(\frac{1}{3} \int_0^x A_1(\xi) d\xi - \frac{A_4}{2} y\right). \end{aligned}$$

ЗАДАЧА B_2 . Найти функцию $u(x, y)$ из класса $C_{x,y}^{3,2}(D) \cap C_{x,y}^{2,1}(\bar{D})$, удовлетворяющую уравнению (2) и следующим краевым условиям:

$$u_y(x, 0) = 0, \quad u_y(x, q) = 0, \quad 0 \leq x \leq p, \quad (3)$$

$$u(0, y) = \psi_1(y), \quad u_x(p, y) = \psi_2(y), \quad u_{xx}(p, y) = \psi_3(y), \quad 0 \leq y \leq q, \quad (4)$$

где $\psi_1(y), \psi_2(y), \psi_3(y), g(x, y)$ – достаточно гладкие заданные функции.

ТЕОРЕМА 1. Если задача B_2 имеет решение, то при выполнении условий $a_1(p) \geq 0, a_2(x) - \frac{1}{2}a_1'(x) \geq 0, a_1'(x), a_2(x) \in C[0, p], x \in [0, p]$, оно единственно.

Доказательство. Предположим обратное. Пусть задача B_2 имеет два решения $u_1(x, y)$ и $u_2(x, y)$. Тогда функция $u(x, y) = u_1(x, y) - u_2(x, y)$

удовлетворяет однородному уравнению (2) с однородными краевыми условиями. Докажем, что $u(x, y) \equiv 0$ в \bar{D} .

В области D справедливо тождество

$$uL[u] = uu_{xxx} - uu_{yy} + a_1(x)uu_x + a_2(x)u^2 \equiv 0.$$

Интегрируя это тождество по области D и учитывая однородные краевые условия, получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^q a_1(p)u^2(p, y)dy + \frac{1}{2} \int_0^q u_x^2(0, y)dy + \\ + \iint_D u_y^2 dx dy + \iint_D \left(a_2(x) - \frac{1}{2}a_1'(x) \right) u^2 dx dy \equiv 0. \end{aligned}$$

Если $a_2(x) - \frac{1}{2}a_1'(x) > 0$, то из четвертого слагаемого получим, что $u(x, y) \equiv 0$, $(x, y) \in \bar{D}$. Если $a_2(x) - \frac{1}{2}a_1'(x) \geq 0$, $a_1(p) > 0$, то из первого и третьего слагаемых имеем $u(p, y) = 0$, $u_y(x, y) = 0$. Отсюда следует, что $u(x, y) = f(x)$, $f(p) = 0$.

Подставив полученное в уравнение (2) и учитывая краевые условия (4), имеем задачу

$$\begin{cases} f'''(x) + a_1(x)f'(x) + a_2(x)f(x) = 0, \\ f(p) = f'(p) = f''(p) = 0. \end{cases}$$

Линейное однородное уравнение имеет общее решение в виде

$$f(x) = C_1X_1(x) + C_2X_2(x) + C_3X_3(x),$$

где $X_1(x)$, $X_2(x)$, $X_3(x)$ — линейно независимые решения. Для нахождения C_1 , C_2 , C_3 воспользуемся краевыми условиями и получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} C_1X_1(p) + C_2X_2(p) + C_3X_3(p) = 0, \\ C_1X_1'(p) + C_2X_2'(p) + C_3X_3'(p) = 0, \\ C_1X_1''(p) + C_2X_2''(p) + C_3X_3''(p) = 0. \end{cases}$$

Определитель этой системы есть определитель Вронского и поэтому отличен от нуля. Значит $C_1 = C_2 = C_3 = 0$ и отсюда $f(x) \equiv 0$, тогда $u(x, y) \equiv 0$.

При $a_1(x) \equiv 0$, $a_2(x) \equiv 0$, $x \in [0, p]$ легко можно показать, что $u(x, y) \equiv 0$. Теорема 1 доказана. \square

ЗАМЕЧАНИЕ. Отметим, что при нарушении условия теоремы 1 однородная задача B_2 для однородного уравнения (2) может иметь нетривиальные решения. Например, можно легко убедиться, что при $p = 1$, $q = \pi$, $a_1(x) = 0$, $a_2(x) = -(\mu^3 + 1) < 0$, где $\mu > 0$ — решение уравнения

$$e^{-3\mu/2} - 2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\mu - \frac{\pi}{2}\right) = 0,$$

задача

$$\begin{cases} u_{xxx}(x, y) - (\mu^3 + 1)u(x, y) - u_{yy}(x, y) = 0, \\ u_y(x, 0) = u_y(x, \pi) = 0, \quad u(0, y) = u_x(1, y) = u_{xx}(1, y) = 0 \end{cases}$$

имеет нетривиальное решение вида

$$u(x, y) = \left[e^{\mu x} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\mu - \frac{\pi}{3}\right) - e^{-\mu x/2} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\mu(1-x) - \frac{\pi}{3}\right) + e^{\mu(3-x)/2} \sin\frac{\sqrt{3}}{2}\mu x \right] \cos y.$$

Отсюда следует, что если a_2 является параметром разделения, то при $a_2 \geq 0$ задача корректно поставлена, а при $a_2 < 0$ задача поставлена некорректно, т.е. существует спектр.

ТЕОРЕМА 2. Пусть выполняются следующие условия:

- 1) $a_1(p) = 0, a_1(x), a_2(x) \in C^2[0, p]$;
- 2) $C < \min\left\{\frac{\lambda_1^2}{Kp(1+\lambda_1)}, \frac{2}{p^3+2p^2}\right\}$;
- 3) $\psi_i(y) \in C^3[0, q], \psi'_i(0) = \psi'_i(q) = 0, i = \overline{1, 3}$;
- 4) $\frac{\partial^3 g(x, y)}{\partial x \partial y^2} \in C[\overline{D}], g_y(x, 0) = g_y(x, q) = 0, 0 \leq x \leq p$.

Тогда решение задачи B_2 существует. Здесь

$$C = \max\{|a_1(x)|, |a'_1(x) - a_2(x)|, x \in [0, p]\},$$

$$\lambda_1 = \sqrt[3]{\left(\frac{\pi}{q}\right)^2}, \quad K = \frac{4}{3}\left[1 - \exp\left(-\frac{2\sqrt{3}\pi}{3}\right)\right]^{-1}.$$

Доказательство. Рассмотрим следующую задачу Штурма—Лиувилля:

$$\begin{cases} Y''(y) + \lambda^3 Y(y) = 0, \\ Y'(0) = Y'(q) = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Известно, что нетривиальное решение задачи (5) существует только при

$$\lambda^3 = \lambda_n^3 = \left(\frac{\pi n}{q}\right)^2, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Числа λ_n являются собственными значениями задачи (5), а соответствующие им собственные функции имеют вид

$$Y_0(y) = \frac{1}{\sqrt{q}}, \quad n = 0; \quad Y_n(y) = \sqrt{\frac{2}{q}} \cos \frac{\pi n y}{q}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Собственные функции $Y_n(y), n = 0, 1, 2, \dots$, образуют полную ортонормированную систему в $L_2(0, q)$, поэтому функцию $g(x, y)$ можно разложить в ряд Фурье:

$$g(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(x) Y_n(y),$$

где $g_n(x) = \int_0^q g(x, \eta) Y_n(\eta) d\eta$.

Решение задачи B_2 ищем в виде

$$u(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} X_n(x)Y_n(y). \quad (6)$$

Формально считая, что (6) удовлетворяет уравнению (2), и подставляя (6) в (2), с учетом граничных условий (4) получим задачу

$$\begin{cases} X_n''' + a_1(x)X_n' + a_2(x)X_n + \lambda_n^3 X_n = g_n(x), \\ X_n(0) = \psi_{1n}, \quad X_n'(p) = \psi_{2n}, \quad X_n''(p) = \psi_{3n}, \end{cases} \quad (7)$$

где $\psi_{in} = \int_0^q \psi_i(\eta)Y_n(\eta)d\eta$, $i = \overline{1, 3}$.

Задачу (7) решаем с помощью функции Грина, для построения которой сначала обнулим краевые условия.

Введем обозначение

$$V_n(x) = X_n(x) - \rho_n(x), \quad (8)$$

где

$$\rho_n(x) = \psi_{1n} + x\psi_{2n} + \frac{x^2 - 2xp}{2}\psi_{3n}. \quad (9)$$

Подставляя (8), (9) в (7), получим задачу

$$\begin{cases} V_n''' + \lambda_n^3 V_n = \lambda_n^3 f_n(x) - a_1 V_n' - a_2 V_n, \\ V_n(0) = V_n'(p) = V_n''(p) = 0, \end{cases} \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} f_n(x) = & -\left(\frac{a_2(x)}{\lambda_n^3} + 1\right)\psi_{1n} - \left(\frac{xa_2(x) + a_1(x)}{\lambda_n^3} + x\right)\psi_{2n} - \\ & - \left(\frac{xa_1(x) - pa_1(x) - xa_2(x)p}{\lambda_n^3} + \frac{a_2(x)}{\lambda_n^3}x^2 + \frac{1}{2}x^2 - px\right)\psi_{3n} + \frac{g_n(x)}{\lambda_n^3}. \end{aligned}$$

Задача (10) при $\lambda_0 = 0$ имеет вид

$$\begin{cases} V_0''' = f_0(x) - a_1(x)V_0' - a_2(x)V_0, \\ V_0(0) = V_0'(p) = V_0''(p) = 0, \end{cases} \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned} f_0(x) = & g_0(x) - \psi_{10}a_2(x) + (-a_1(x) - xa_2(x))\psi_{20} + \\ & + \left(-xa_1(x) + pa_1(x) - \frac{1}{2}x^2a_2(x) + pxa_2(x)\right)\psi_{20}. \end{aligned}$$

Задача (11) эквивалентна интегральному уравнению вида

$$V_0(x) = \int_0^p G_0(x, \xi) f_n(\xi) d\xi - \int_0^p a_1(\xi) G_0(x, \xi) V_0'(\xi) d\xi - \int_0^p a_2(\xi) G_0(x, \xi) V_0(\xi) d\xi. \quad (12)$$

Здесь

$$G_0(x, \xi) = \begin{cases} G_{10}(x, \xi), & 0 \leq x \leq \xi, \\ G_{20}(x, \xi), & \xi \leq x \leq p \end{cases} \quad (13)$$

— функция Грина для задачи (11); $G_{10}(x, \xi) = -\frac{1}{2}x^2 + \xi x$, $G_{20}(x, \xi) = \frac{1}{2}\xi^2$.

Интегрируя по частям второй интеграл в (12) и вводя обозначения

$$\alpha_0(x) = \int_0^p G_0(x, \xi) f_0(\xi) d\xi, \\ \bar{G}_0(x, \xi) = (a_1'(\xi) - a_2(\xi)) G_0(x, \xi) + a_1(\xi) G_{0\xi}(x, \xi),$$

получим

$$V_0(x) = \alpha_0(x) + \int_0^p \bar{G}_0(x, \xi) V_0(\xi) d\xi. \quad (14)$$

Уравнение (14) является интегральным уравнением Фредгольма второго рода, которое будем решать методом итераций:

$$V_m(x) = \alpha_0(x) + \int_0^p \bar{G}_0(x, \xi) V_{m-1}(\xi) d\xi, \quad m = 1, 2, 3, \dots; \quad V_0(x) = \alpha_0(x).$$

Первое приближение имеет вид

$$V_1(x) = \alpha_0(x) + \int_0^p \bar{G}_0(x, \xi) \alpha_0(\xi) d\xi;$$

второе приближение имеет вид

$$V_2(x) = \alpha_0(x) + \int_0^p (\bar{G}_0(x, \xi) + \bar{G}_1(x, \xi)) \alpha_0(\xi) d\xi,$$

где

$$\bar{G}_1(x, \xi) = \int_0^p \bar{G}_0(x, s) \bar{G}_0(s, \xi) ds.$$

Если продолжить процесс бесконечно, то получим

$$V_0(x) = \alpha_0(x) + \int_0^p \left(\bar{G}_0(x, \xi) + \sum_{m=1}^{\infty} \bar{G}_m(x, \xi) \right) \alpha_0(\xi) d\xi,$$

где

$$\bar{G}_m(x, \xi) = \int_0^p \bar{G}_0(x, s) \bar{G}_{m-1}(s, \xi) ds, \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

Если формально считать, что ряд

$$R_0(x, \xi) = \overline{G}_0(x, \xi) + \sum_{m=1}^{\infty} \overline{G}_m(x, \xi)$$

сходится, то решение уравнения (14) получим в виде

$$V_0(x) = \alpha_0(x) + \int_0^p R_0(x, \xi) \alpha_0(\xi) d\xi.$$

Значит решение задачи (10) имеет вид

$$u_0(x, y) = X_0(x)Y_0(y) = \frac{1}{\sqrt{q}}(V_0(x) + \rho_0(x)). \quad (15)$$

Оценим полученное решение. В дальнейшем максимальное значение всех найденных в оценках положительных известных постоянных будем обозначать одной буквой M .

Сначала найдем оценку для (13):

$$|G_0(x, \xi)| \leq \frac{1}{2}p^2, \quad |G_{0\xi}(x, \xi)| \leq p.$$

Тогда

$$|\overline{G}_0(x, \xi)| \leq C \left| \frac{1}{2}p^2 + p \right| \leq \frac{1}{p}(J_0p),$$

где $J_0 = C \left| \frac{1}{2}p^2 + p \right|$.

Для оценки резольвенты $R_0(x, \xi)$ имеем

$$|R_0(x, \xi)| \leq |\overline{G}_0(x, \xi)| + |\overline{G}_1(x, \xi)| + \dots + |\overline{G}_m(x, \xi)| + \dots$$

Найдем мажорирующий ряд:

$$|\overline{G}_m(x, \xi)| \leq \int_0^p |\overline{G}_0(x, s)| |\overline{G}_{m-1}(s, \xi)| ds \leq \frac{1}{p}(J_0p)^{m+1}, \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

В итоге мажорантный ряд имеет вид $\frac{1}{p} \sum_{m=1}^{\infty} (J_0p)^m$.

Условие 2 теоремы 2 можно записать в виде

$$C < \frac{2}{p^3 + 2p^2} \Rightarrow C \left| \frac{1}{2}p^2 + p \right| < \frac{1}{p},$$

отсюда $J_0p < 1$. Тогда мажорирующий ряд является суммой членов бесконечной убывающей геометрической прогрессии. В этом случае резольвента равномерно сходится и ее оценка имеет вид

$$|R_0(x, \xi)| \leq \frac{J_0}{1 - J_0p} \leq M.$$

Отсюда $\alpha_0(x)$ и $V_0(x)$ имеют следующие оценки:

$$|\alpha_0(x)| \leq \int_0^p |G_0(x, \xi)| |g_0(\xi)| d\xi \leq M,$$

$$|V_0(x)| \leq |\alpha_0(x)| + \int_0^p |R_0(x, \xi)| |\alpha_0(\xi)| d\xi \leq M.$$

Тогда

$$|u_0(x)| \leq M, \quad |u_0'''(x)| \leq M.$$

Решение задачи (10) при $n \in \mathbb{N}$ ищем следующим образом:

$$V_n(x) = \lambda_n^3 \int_0^p G_n(x, \xi) f_n(\xi) d\xi - \int_0^p G_n(x, \xi) a_1(\xi) V_n'(\xi) d\xi -$$

$$- \int_0^p G_n(x, \xi) a_2(\xi) V_n(\xi) d\xi, \quad (16)$$

где

$$G_n(x, \xi) = \begin{cases} G_{1n}(x, \xi), & 0 \leq x \leq \xi, \\ G_{2n}(x, \xi), & \xi \leq x \leq p \end{cases} \quad (17)$$

— функция Грина задачи (10). Здесь

$$G_{1n}(x, \xi) = \frac{1}{\sqrt{3}\lambda_n^2\Delta} \left[-e^{\lambda_n(p-x-\frac{\xi}{2})} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_n\xi + \frac{\pi}{6}\right) - e^{\lambda_n(\xi-x-\frac{p}{2})} \cos\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_np + \right.$$

$$+ e^{\lambda_n(\xi+\frac{x}{2}-\frac{p}{2})} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_n(x-p)\right) + e^{\lambda_n(p+\frac{x}{2}-\frac{\xi}{2})} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_n(\xi-x) + \frac{\pi}{6}\right) -$$

$$\left. - 2e^{-\lambda_n(\frac{\xi}{2}+\frac{p}{2}-\frac{x}{2})} \sin\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_nx \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_n(\xi-p) + \frac{\pi}{6}\right) \right],$$

$$G_{2n}(x, \xi) = \frac{1}{\sqrt{3}\lambda_n^2\Delta} \left[1 - 2e^{-\frac{3\lambda_n\xi}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_n\xi + \frac{\pi}{6}\right) \right] \times$$

$$\times \left[\frac{1}{2}e^{\lambda_n(\xi+p-x)} + e^{\lambda_n(\xi-\frac{p}{2}+\frac{x}{2})} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_n(x-p)\right) \right];$$

$$\Delta = \frac{\sqrt{3}}{2}e^{\lambda_np}\bar{\Delta}, \quad \bar{\Delta} = 1 + 2e^{-\frac{3\lambda_np}{2}} \cos\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_np.$$

Покажем, что $\Delta \neq 0$. Для этого рассмотрим следующую функцию:

$$\bar{\Delta}(t) = 1 + 2e^{-\sqrt{3}t} \cos t, \quad t = \frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_np.$$

Значения критических точек этой функции запишутся в виде

$$t_k = \frac{2\pi}{3} + \pi k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Величина $\overline{\Delta}(t)$ принимает минимальное значение только при $k = 0$. Тогда

$$\overline{\Delta} \geq 1 - \exp\left(-\frac{2\sqrt{3}\pi}{3}\right) > 0.$$

Это доказывает отсутствие «малого знаменателя», отсюда $\Delta \neq 0$.

Интегрируя по частям второй интеграл в (16) и учитывая условие 1 теоремы 2, имеем

$$V_n(x) = \lambda_n^3 \int_0^P G_n(x, \xi) f_n(\xi) d\xi + \int_0^P \left(\frac{\partial G_n(x, \xi)}{\partial \xi} a_1(\xi) + G_n(x, \xi) (a_1'(\xi) - a_2(\xi)) \right) V_n(\xi) d\xi. \quad (18)$$

Для удобства введем следующие обозначения:

$$V_{0n}(x) = \lambda_n^3 \int_0^P G_n(x, \xi) f_n(\xi) d\xi, \\ \overline{G}_n(x, \xi) = \frac{\partial G_n(x, \xi)}{\partial \xi} a_1(\xi) + G_n(x, \xi) (a_1'(\xi) - a_2(\xi)).$$

Тогда (18) примет вид

$$V_n(x) = V_{0n}(x) + \int_0^P \overline{G}_n(x, \xi) V_n(\xi) d\xi. \quad (19)$$

Уравнение (19) является интегральным уравнением Фредгольма второго рода, решение которого запишем с помощью резольвенты в виде

$$V_n(x) = V_{0n}(x) + \int_0^P R_n(x, \xi) V_{0n}(\xi) d\xi, \quad (20)$$

где резольвента имеет вид

$$R_n(x, \xi) = \overline{G}_n(x, \xi) + \sum_{m=1}^{\infty} \overline{G}_{mn}(x, \xi);$$

$$\overline{G}_{mn}(x, \xi) = \int_0^P \overline{G}_n(x, s) \overline{G}_{(m-1)n}(s, \xi) ds, \quad m = 1, 2, 3, \dots; \quad \overline{G}_{0n}(x, s) = \overline{G}_n(x, s).$$

В силу формулы (6) с учетом (8), (15) и (20) решение задачи B_2 запишется в виде

$$u(x, y) = u_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} (V_n(x) + \rho_n(x)) Y_n(y).$$

Учитывая условие 3 теоремы 2 и интегрируя по частям ψ_{in} три раза, получим оценку

$$|\psi_{in}| \leq \left(\frac{q}{\pi}\right)^3 \frac{|\Psi_{in}|}{n^3}, \quad i = \overline{1, 3}, \quad (21)$$

$$\text{где } \Psi_{in} = \sqrt{\frac{2}{q}} \int_0^q \psi_i'''(\eta) \sin \frac{\pi n}{q} \eta d\eta.$$

Интегрируя функцию $g_n(x)$ по частям два раза, учитывая условие 4 теоремы 2 и вводя обозначение $F_n(x) = \int_0^q g_{\eta\eta}(x, \eta) Y_n(\eta) d\eta$, получим

$$g_n(x) = \left(\frac{q}{\pi n}\right)^2 F_n(x).$$

Отсюда имеем оценку

$$|g_n(x)| \leq M \frac{|F_n(x)|}{n^2}. \quad (22)$$

Учитывая оценки (21), (22), получим

$$|f_n(x)| \leq \frac{M}{n^3} \left(|\Psi_{1n}| + |\Psi_{2n}| + |\Psi_{3n}| + \frac{|F_n(x)|}{n} \right).$$

Аналогично имеем

$$|f'_n(x)| \leq \frac{M}{n^3} \left(|\Psi_{1n}| + |\Psi_{2n}| + |\Psi_{3n}| + \frac{|F'_n(x)|}{n} \right). \quad (23)$$

Из (17) получим следующие оценки:

$$|G_n(x, \xi)| \leq \frac{K}{\lambda_n^2}, \quad \left| \frac{\partial G_n(x, \xi)}{\partial \xi} \right| \leq \frac{K}{\lambda_n}. \quad (24)$$

Используя оценки (24), получим оценку для $\bar{G}_n(x, \xi)$ в виде

$$|\bar{G}_n| \leq |a_1(\xi)| \left| \frac{\partial G_n(x, \xi)}{\partial \xi} \right| + |a'_1(\xi) - a_2(\xi)| |G_n| \leq \left(\frac{1}{\lambda_n} + \frac{1}{\lambda_n^2} \right) KC.$$

Оценим резольвенту:

$$|R_n(x, \xi)| \leq |\bar{G}_{0n}(x, \xi)| + |\bar{G}_{1n}(x, \xi)| + |\bar{G}_{2n}(x, \xi)| + \dots + |\bar{G}_{mn}(x, \xi)| + \dots$$

Для правой части этого неравенства составим мажорирующий ряд. Вводя обозначение

$$J_1 = \left(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_1^2} \right) KC,$$

находим

$$|\bar{G}_{1n}(x, \xi)| \leq |\bar{G}_n(x, \xi)| \leq KC \left(\frac{1}{\lambda_n} + \frac{1}{\lambda_n^2} \right) \leq J_1,$$

$$|\bar{G}_{mn}(x, \xi)| \leq \int_0^p |\bar{G}_{1n}(x, s)| |\bar{G}_{(m-1)n}(s, \xi)| ds \leq J_1^m p^{m-1}, \quad m = 2, 3, 4, \dots$$

Тогда мажорирующий ряд имеет вид $\frac{1}{p} \sum_{m=1}^{\infty} (J_1 p)^m$.

Условие 2 теоремы 2 можно записать в виде

$$C < \frac{\lambda_1^2}{Kp(1 + \lambda_1)} \Rightarrow \left(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_1^2}\right)KC < \frac{1}{p},$$

отсюда

$$J_1p < 1.$$

Тогда мажорирующий ряд является суммой членов бесконечной убывающей геометрической прогрессии. В этом случае резольвента равномерно сходится и оценка имеет вид

$$|R(x, \xi)| \leq \frac{J_1}{1 - J_1p} \leq M. \quad (25)$$

В каждом из интервалов $0 \leq \xi < x$ и $x < \xi \leq p$ функция $G_n(x, \xi) = -\frac{1}{\lambda_n^3}G_{n\xi\xi\xi}(x, \xi)$, рассматриваемая как функция от переменной ξ , является решением уравнения

$$G_{n\xi\xi\xi}(x, \xi) + \lambda_n^3 G_n(x, \xi) = 0.$$

Подставляя $G_n(x, \xi)$ в $V_{0n}(x)$, имеем

$$V_{0n}(x) = -\int_0^x G_{2n\xi\xi\xi}(x, \xi)f_n(\xi)d\xi - \int_x^p G_{1n\xi\xi\xi}(x, \xi)f_n(\xi)d\xi.$$

Интегрируя по частям $V_{0n}(x)$ один раз и учитывая равенство $G_{1n\xi\xi}(x, x) - G_{2n\xi\xi}(x, x) = 1$, находим

$$V_{0n}(x) = f_n(x) + G_{2n\xi\xi}(x, 0)f_n(0) - \int_0^p G_{n\xi\xi}(x, \xi)f'_n(\xi)d\xi.$$

Учитывая оценки

$$|G_{2n\xi\xi}(x, 0)| \leq K, \quad |G_{1n\xi\xi}(x, p)| \leq K = \text{const},$$

получаем

$$|V_{0n}(x)| \leq \frac{M}{n^3}(|\Psi_{1n}| + |\Psi_{2n}| + |\Psi_{3n}|) + \frac{1}{n^4}(|F_n(x)| + |F_n(0)| + |F'_n(x)|). \quad (26)$$

Из (25) и (26) получим оценку

$$|V_n(x)| \leq \frac{M}{n^3} \sum_{i=1}^3 |\Psi_{in}| + \frac{1}{n^4}(|F_n(x)| + |F_n(0)| + |F_n(p)| + 1).$$

Учитывая оценку

$$|\rho_n(x)| \leq \frac{M}{n^3}(|\Psi_{1n}| + |\Psi_{2n}| + |\Psi_{3n}|),$$

имеем

$$\begin{aligned}
 |u(x, y)| &\leq |u_0(x)| + \sum_{n=1}^{\infty} (|V_n(x)| + |\rho_n(x)|) \leq \\
 &\leq M + M \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^3 |\Psi_{in}| + \frac{1}{n^4} (|F_n(x)| + |F_n(0)| + |F_n(p)| + 1) < \infty.
 \end{aligned}$$

Покажем сходимость $u_{xxx}(x, y)$. После некоторых вычислений находим $V_n'''(x)$ в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 V_n'''(x) &= \lambda_n^3 f_n(x) - a_1(x) \left(V_{0n}'(x) + \int_0^p R_{nx}(x, \xi) V_{0n}(\xi) d\xi \right) - \\
 &\quad - a_2(x) \left(V_{0n}(x) + \int_0^p R_n(x, \xi) V_{0n}(\xi) d\xi \right) - \\
 &\quad - \lambda_n^3 \left(V_{0n}(x) + \int_0^p R_n(x, \xi) V_{0n}(\xi) d\xi \right).
 \end{aligned}$$

Используя оценку (23) и свойства функции Грина, находим

$$|V_{0n}'(x)| \leq \frac{M}{n^{7/3}} \left(|\Psi_{1n}| + |\Psi_{2n}| + |\Psi_{3n}| + \frac{|F_n(0)|}{n} + 1 \right), \quad |R_{nx}(x, \xi)| \leq n^{2/3} M.$$

Далее имеем

$$|V_n'''(x)| \leq \frac{M}{n} \sum_{i=1}^3 |\Psi_{in}| + \frac{M}{n^2} (|F_n(x)| + |F_n(0)| + |F_n(p)| + 1).$$

Отсюда

$$\begin{aligned}
 |u_{xxx}(x, y)| &\leq M + M \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (|\Psi_{1n}| + |\Psi_{2n}| + |\Psi_{3n}|) + \\
 &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} (|F_n(x)| + |F_n(0)| + |F_n(p)| + 1).
 \end{aligned}$$

Используя неравенства Коши–Буняковского и Бесселя, имеем

$$\begin{aligned}
 |u_{xxx}(x, y)| &\leq M + M \left(\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |\Psi_{1n}|^2} + \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |\Psi_{2n}|^2} + \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |\Psi_{3n}|^2} \right) \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}} + \\
 &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} (|F_n(x)| + |F_n(0)| + |F_n(p)| + 1) \leq \\
 &\leq M + M \sqrt{\frac{\pi^2}{6}} (\|\psi_1'''\|_{L_2(0,q)} + \|\psi_2'''\|_{L_2(0,q)} + \|\psi_3'''\|_{L_2(0,q)}) + \\
 &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} (|F_n(x)| + |F_n(0)| + |F_n(p)| + 1) < \infty.
 \end{aligned}$$

Здесь

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\Psi_{in}|^2 \leq \|\psi_i'''\|_{L_2(0,q)}^2, \quad i = \overline{1,3}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Учитывая неравенство

$$|u_{yy}(x, y)| \leq |u_{xxx}(x, y)| + |a_1| |u_x(x, y)| + |a_2| |u(x, y)|,$$

можно заключить, что и u_{yy} тоже сходится.

Решение задачи B_2 можно записать в явном виде:

$$\begin{aligned} u(x, y) = & \frac{1}{\sqrt{q}} \left(\int_0^p G_0(x, \xi) f_0(\xi) d\xi + \int_0^p R_0(x, \xi) \int_0^p G_0(x, s) f_0(s) ds d\xi + \rho_0(x) \right) + \\ & + \sqrt{\frac{2}{q}} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\lambda_n^3 \int_0^p G_n(x, \xi) f_n(\xi) d\xi + \right. \\ & \left. + \lambda_n^3 \int_0^p R_n(x, \xi) \int_0^p G_n(x, s) f_n(s) ds d\xi + \rho_n(x) \right) \cos \frac{\pi n}{q} y. \end{aligned}$$

Таким образом, теорема 2 доказана. \square

Заключение. В прямоугольной области рассмотрена начально-граничная задача для неоднородного дифференциального уравнения в частных производных третьего порядка с кратными характеристиками и с переменными коэффициентами. Единственность решения доказана методом интегралов энергии. Для случая нарушения условий теоремы единственности приведен контрпример. Решение поставленной задачи построено методом функции Грина. Доказана абсолютная и равномерная сходимость данного решения и его производных, входящих в уравнение в замыкании области рассмотрения уравнения.

Конкурирующие интересы. Заявляем, что в отношении авторства и публикации этой статьи конфликта интересов не имеем.

Авторский вклад и ответственность. Все авторы принимали участие в разработке концепции статьи и в написании рукописи. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

Финансирование. Исследование выполнялось без финансирования.

Благодарность. Выражаем глубокую благодарность академику Ш. А. Алимову за ценные советы при выполнении этого исследования.

Библиографический список

1. Апаков Ю. П., Умаров Р. А. Решение первой краевой задачи для уравнения третьего порядка с младшими членами, методом построения функции Грина // *Вестник Ошского государственного университета*, 2022. № 1. С. 73–92. DOI: https://doi.org/10.52754/16947452_2022_1_73.
2. Апаков Ю. П., Хамитов А. А. О разрешимости краевой задачи для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками в трехмерном пространстве в полуограниченной области // *Вестник Ошского государственного университета. Математика. Физика. Техника*, 2023. Т. 1, № 2. С. 13–23. DOI: https://doi.org/10.52754/16948645_2023_1_13.

MSC: 35G15

The solution to a boundary value problem for a third-order equation with variable coefficients

Yu. P. Apakov^{1,2}, R. A. Umarov²

¹ V.I. Romanovskiy Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan, 46, University st., Tashkent, 100174, Uzbekistan.

² Namangan Engineering-Construction Institute, 12, Islam Karimov st., Namangan, 160103, Uzbekistan.

Abstract

In a rectangular domain, the second boundary value problem for a non-homogeneous third-order partial differential equation with multiple characteristics and variable coefficients is considered. The uniqueness of the solution to the given problem is proved using the energy integral method. For the case where the conditions of the uniqueness theorem are violated, a counterexample is constructed.

The solution to the problem is sought in the form of a product of two functions $X(x)$ and $Y(y)$ using the separation of variables method. An ordinary differential equation of the second order with two boundary conditions on the boundaries of the segment $[0, q]$ is obtained for determining $Y(y)$. For this problem, the eigenvalues and the corresponding eigenfunctions are found for $n = 0$ and $n \in \mathbb{N}$. An ordinary differential equation of the third order with three boundary conditions on the boundaries of the segment $[0, p]$ is obtained for determining $X(x)$. The solution to this problem is constructed using the Green's function method. A separate Green's function was built for $n = 0$ and another for the case when n is a natural number. It is verified that the found Green's functions satisfy the boundary conditions and properties of the Green's function. The solution for $X(x)$ is expressed through the constructed Green's function.

After some transformations, a Fredholm integral equation of the second kind is obtained, and its solution is written in terms of the resolvent. Estimates for the resolvent and the Green's function are derived. Uniform

Differential Equations and Mathematical Physics

Short Communication

© Authors, 2024

© Samara State Technical University, 2024 (Compilation, Design, and Layout)

 The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Please cite this article in press as:

Apakov Yu. P., Umarov R. A. The solution to a boundary value problem for a third-order equation with variable coefficients, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2024, vol. 28, no. 1, pp. 171–185. EDN: DTEVGQ. DOI: 10.14498/vsgtu2030 (In Russian).

Authors' Details:

Yusufjon P. Apakov  <https://orcid.org/0000-0001-8805-8917>

Cand. Phys. & Math. Sci., Associate Professor; Leading Researcher; Namangan Branch¹; Professor; Dept. of Higher Mathematics²; e-mail: yusupjonapakov@gmail.com

Raxmatilla A. Umarov  <https://orcid.org/0009-0004-4778-4444>

PhD Doctoral Student; Dept. of Higher Mathematics²; e-mail: r.umarov1975@mail.ru

convergence of the solution is proven, along with the possibility of term-by-term differentiation under certain conditions on the given functions. The convergence of the third-order derivative of the solution with respect to the variable x is established using Cauchy–Schwarz and Bessel inequalities. In justifying the uniform convergence of the solution, the absence of a “small denominator” is proven.

Keywords: differential equation, third order, multiple characteristics, second boundary value problem, regular solution, uniqueness, existence, Green’s function.

Received: 7th June, 2023 / Revised: 7th February, 2024 /
Accepted: 4th March, 2024 / First online: 6th August, 2024

Competing interests. The authors declare that they have no competing interests.

Authors’ contributions and responsibilities. All authors participated in the development of the article’s concept and in writing the manuscript. The authors bear full responsibility for providing the final manuscript for publication. The final version of the manuscript was approved by all authors.

Funding. The research was conducted without funding.

Acknowledgments. We express our deep gratitude to Academician Sh. A. Alimov for the valuable advice provided during the course of this research.

References

1. Apakov Yu. P., Umarov R. A. Solution of the first boundary problem for a third order equation with minor terms, a method for constructing the Green’s function, *Bulletin of Osh State University*, 2022, no. 1, pp. 73–92 (In Russian). DOI: https://doi.org/10.52754/16947452_2022_1_73.
2. Apakov Yu. P., Hamitov A. A. On solvability of the boundary value problem posed for an equation with the third order multiple characteristics in a semi-bounded domain in three dimensional space, *Journal of Osh State University. Mathematics. Physics. Technical Sciences*, vol. 1, no. 2, pp. 13–23 (In Russian). DOI: https://doi.org/10.52754/16948645_2023_1_13.



УДК 519.248:004.93

Анализ двухкомпонентных композиционных покрытий при производстве элементов электроники с использованием методов компьютерного зрения

М. В. Ненашев, О. С. Рахманин, В. В. Киященко

Самарский государственный технический университет,
Россия, 443100, Самара, ул. Молодогвардейская, 244.

Аннотация

Представлен метод анализа двухкомпонентных композиционных покрытий при производстве элементов электроники, основанный на системе математически обоснованных алгоритмов обработки изображений. Метод позволяет определять удельную поверхность, общую площадь материала и границы контакта, обеспечивая высокую точность и стабильность результатов. Полученные результаты могут быть успешно внедрены в промышленные процессы для оценки качества материалов и контроля производства. В рамках работы создана информационно-измерительная система обработки изображений, минимизирующая накопление ошибок на каждом этапе и обеспечивающая высокую точность определения характеристик материалов. Представлены примеры успешного применения метода, подчеркивающие его эффективность и перспективы в различных областях, включая промышленное производство элементов электроники. Полученные результаты представляют собой основу для дальнейших исследований и усовершенствования методов анализа композиционных материалов.

Ключевые слова: композиционные покрытия, анализ изображений, удельная поверхность, контроль производства элементов электроники.

Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ
Краткое сообщение

© Коллектив авторов, 2024

© СамГТУ, 2024 (составление, дизайн, макет)

Контент публикуется на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

Образец для цитирования

Ненашев М. В., Рахманин О. С., Киященко В. В. Анализ двухкомпонентных композиционных покрытий при производстве элементов электроники с использованием методов компьютерного зрения // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2024. Т. 28, № 1. С. 186–198. EDN: GGJQTI. DOI: 10.14498/vsgtu2068.

Сведения об авторах

Максим Владимирович Ненашев <https://orcid.org/0000-0003-3918-5340>

доктор технических наук, профессор; первый проректор-проректор по научной работе; ректорат; e-mail: nenashev.mv@samgtu.ru

Олег Сергеевич Рахманин <https://orcid.org/0000-0001-7337-268X>

кандидат технических наук, доцент; начальник лаборатории; лаб. цифровых двойников материалов и технологических процессов их обработки; e-mail: rakhmanin.os@samgtu.ru

Виктория Витальевна Киященко <https://orcid.org/0000-0001-9710-2860>

аспирант; младший научный сотрудник; лаб. цифровых двойников материалов и технологических процессов их обработки; e-mail: vv.kiyashchenko@gmail.com

Получение: 15 декабря 2023 г. / Исправление: 18 января 2024 г. /
 Принятие: 29 января 2024 г. / Публикация онлайн: 18 марта 2024 г.

Введение

В последние десятилетия в условиях технологического прогресса возникает потребность в применении двухкомпонентных композиционных покрытий, состоящих из полиамидной смолы и отверждающего агента (функционального наполнителя), полученных методом распыления [1]. Такие покрытия используются в электронике для производства гибких печатных плат, для отвода тепла с экранов электрооборудования и в качестве защитных слоев, предотвращающих окисление, коррозию и воздействие влаги на электронные компоненты. При этом используемые образцы подвергаются резке тестовых пластин, последующей запрессовке в эпоксидный компаунд и шлифовке на шлифовальной машине групповой подготовки [2, 3]. Естественно, в рамках существующих технологий производства важным аспектом становится анализ получаемых покрытий [4–6], где обеспечение высокого уровня продукции становится ключевой задачей, в частности для производства электроники.

Существующие исследования посвященные анализу покрытий имеют своей целью создание объективных метрик качества. Однако многие из них сталкиваются с ограничениями в точности и надежности, особенно в условиях производства [7–9]. В этом контексте систематизация исследований и разработка методов контроля представляют собой одну из критически важных задач.

В настоящей работе предлагается новый подход для анализа двухкомпонентных композиционных покрытий, основанный на методах обработки изображений [10]. Данный подход, по мнению авторов, предоставляет дополнительный инструментарий для контроля качества двухкомпонентных композиционных покрытий.

1. Предварительная обработка изображения

Изображение представляется в виде матрицы пикселей, где каждый пиксель содержит информацию о цвете (или яркости, в случае оттенков серого). Пусть

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} I_{11} & I_{12} & \dots & I_{1N} \\ I_{21} & I_{22} & \dots & I_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ I_{M1} & I_{M2} & \dots & I_{MN} \end{bmatrix}$$

— матрица изображения размером $M \times N$, где M — количество строк, а N — количество столбцов. Каждый элемент I_{ij} матрицы представляет собой яркость (или цвет) соответствующего пикселя.

Формально, если изображение в оттенках серого, каждый элемент матрицы \mathbf{I} будет являться числом в диапазоне от 0 (черный) до 255 (белый). Если изображение цветное, то каждый пиксель может быть представлен тройкой значений интенсивности красного (R), зеленого (G) и синего (B) цветов.

После загрузки изображения в матрицу пикселей определяется его цветовой тип. Если изображение в оттенках серого, то оно монохромное, иначе —

цветное. Пусть C — цветовая информация о пикселях изображения, представляющая собой матрицу цвета размером $M \times N$, где M — количество строк, а N — количество столбцов. Если изображение цветное, то каждый элемент матрицы C_{ij} будет представлен тройкой значений, соответствующих интенсивности красного (R), зеленого (G) и синего (B) цветов:

$$C_{ij} = (R_{ij}, G_{ij}, B_{ij}),$$

где R_{ij} , G_{ij} , B_{ij} — интенсивности красного, зеленого и синего цветов соответственно для пикселя в i -той строке и j -том столбце матрицы.

Если изображение в оттенках серого, то C будет матрицей одноканально-го изображения, где каждый элемент C_{ij} представляет яркость соответствующего пикселя.

Разрешение изображения определяется величиной, которая представляет количество пикселей на единицу длины (обычно на дюйм или миллиметр). Пусть r — это разрешение изображения. Тогда разрешение изображения может быть определено с использованием формулы

$$r = \frac{M N}{h w},$$

где h и w — высота и ширина изображения в выбранных единицах длины (дюймы, миллиметры и т.д.).

Разрешение изображения представляет собой важный параметр, который описывает, насколько детализировано изображение и какое количество информации оно может содержать на единицу длины.

2. Бинаризация изображения

2.1. Применение метода Оцу для определения порога бинаризации. Метод Оцу — это алгоритм автоматического выбора порога бинаризации изображения. Он использует статистические свойства пикселей изображения для определения порога, максимизирующего разделение объектов и фона.

Первым шагом алгоритма является поиск функции распределения интенсивностей пикселей матрицы цвета $M \times N$. Функция распределения может быть задана в виде таблицы, она представляет собой закон распределения частот появления различных интенсивностей в изображении:

$$g(k) = \frac{100 n_k}{MN}, \quad (1)$$

где k принимает значения от 0 до 255 (для изображения в оттенках серого); n_k — количество пикселей с интенсивностью k .

Рассмотрим следующие величины: $v(k)$ — вес класса для пикселей с интенсивностью k ; $v_1(k)$ — вес класса фона, $v_2(k)$ — вес класса объекта:

$$v_1(k) = \sum_{q=0}^k g(q), \quad v_2(k) = \sum_{q=k+1}^{255} g(q).$$

Средние значения интенсивности для фона и объекта обозначим через $m_1(k)$ и $m_2(k)$ соответственно:

$$m_1(k) = \frac{1}{v_1(k)} \sum_{q=0}^k qg(q), \quad m_2(k) = \frac{1}{v_2(k)} \sum_{q=k+1}^{255} qg(q).$$

Межклассовая дисперсия σ_B^2 является мерой того, насколько объект и фон различаются:

$$\sigma_B^2(k) = v_1(k)v_2(k)[m_1(k) - m_2(k)]^2.$$

Порог бинаризации k_T определяется как значение k , при котором $\sigma_B^2(k)$ максимально:

$$k_T = \operatorname{argmax} \sigma_B^2(k),$$

где argmax — оператор, который возвращает максимальное значение аргумента для исследуемой функции.

Применение метода Оцу к изображениям композиционных покрытий позволяет определить порог бинаризации, максимизируя различие между объектом и фоном на изображении.

2.2. Получение бинарного изображения. После определения порога бинаризации на предыдущем шаге с использованием метода Оцу можно преобразовать изображение в бинарное, разделяя его на объекты и фон. Предположим, что порог бинаризации равен k_T . Бинарное изображение D размером $M \times N$ может быть получено попиксельно:

$$D_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } I_{ij} > k_T, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

где D_{ij} — значение пикселя в бинарном изображении в позиции (i, j) ; I_{ij} — значение интенсивности пикселя в исходном изображении в позиции (i, j) ; k_T — порог бинаризации.

Таким образом, каждый пиксель в бинарном изображении становится равным 1, если значение интенсивности в соответствующем пикселе исходного изображения превышает порог бинаризации, и равным 0 в противном случае. Этот процесс разделения изображения на два класса (фон и объект) позволяет легко выделять интересные объекты на изображении.

2.3. Выделение контуров. После получения бинарного изображения применяется алгоритм поиска контуров для выделения границ объектов на изображении. Пусть \mathcal{O} — множество контуров на изображении; контур — последовательность связанных пикселей, образующих границу объекта.

Алгоритм поиска контуров можно представить следующим образом:

- *поиск первого пикселя*: пусть P_f — первый пиксель, равный 1; через \mathcal{O}_c обозначим текущий контур;
- *следование по контуру*: начиная с пикселя P_f алгоритм следует по контуру объекта; пусть P_c — текущий пиксель в контуре, а P_n — следующий пиксель в контуре; операция продолжается до тех пор, пока не будет достигнут пиксель P_f и контур замкнется;
- *добавление контура*: когда контур замкнут, он добавляется в множество контуров \mathcal{O} , обозначим его как \mathcal{O}_d , где d — номер контура.

Математический аппарат этого процесса несколько абстрактен, поскольку алгоритм поиска контуров обычно реализуется с использованием итераций и условий на основе связности пикселей. Однако можно представить это следующим образом. Начиная с координаты первого пикселя P_f контура \mathcal{O}_d алгоритм проходит по пикселям, соседствующим с P_f , и добавляет их в контур, пока не вернется к P_f . Это можно представить следующим образом:

$$\mathcal{O}_d = \{P_1, P_2, \dots, P_n\},$$

где n — количество пикселей в контуре, P_i — координаты i -того пикселя в контуре.

Таким образом, алгоритм поиска контуров позволяет представить границы объектов на бинарном изображении в виде множества контуров.

3. Измерение параметров

3.1. Расчет общей площади. После выделения контуров на бинарном изображении можно рассчитать общую площадь объекта. Пусть \mathcal{O}_d — контур объекта, представленный множеством координат пикселей контура:

$$\mathcal{O}_d = \{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)\}.$$

Предположим, что контур \mathcal{O}_d формирует замкнутый многоугольник. Площадь многоугольника можно вычислить, используя формулу

$$A_d = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} (x_k y_{k+1} - x_{k+1} y_k) + \frac{1}{2} (x_n y_1 - x_1 y_n),$$

где A_d — площадь многоугольника, ограниченного контуром \mathcal{O}_d ; (x_k, y_k) — координаты k -той вершины контура. Эта формула основана на методе Гаусса для вычисления площади многоугольника, который использует координаты вершин. Важно отметить, что знаки учитываются таким образом, чтобы учесть направление обхода контура.

Таким образом, расчет площади объекта может быть выполнен путем суммирования площадей всех контуров:

$$A_{obj} = \sum_{d=1}^e A_d,$$

где A_{obj} — площадь объекта, представленного совокупностью контуров \mathcal{O}_d ; e — количество контуров, выделенных на бинарном изображении.

Этот шаг позволяет количественно оценить площадь объекта на изображении на основе анализа его границ.

Если же возникает необходимость оценки площади всей анализируемой поверхности материала без выделения отдельных объектов, то общая площадь материала A_{total} может быть выражена так:

$$A_{total} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M D_{ij}.$$

3.2. Расчет площади темного материала. На данном этапе рассматриваются пиксели, соответствующие темному материалу, который согласно предыдущему контексту может быть полиамидной смолой. Обозначим бинарное изображение после пороговой бинаризации, где пиксели темного материала выделены, как B_{dark} .

Представим бинарное изображение D_{dark} в виде матрицы, в которой каждый элемент B_{ij} принимает значение 1, если соответствующий пиксель является темным, и 0 — в противном случае:

$$D_{dark} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \dots & B_{1M} \\ B_{21} & B_{22} & \dots & B_{2M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{N1} & B_{N2} & \dots & B_{NM} \end{bmatrix}.$$

Тогда площадь темного материала A_{dark} может быть выражена как сумма значений всех пикселей, соответствующих темному материалу:

$$A_{dark} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M b_{ij}.$$

3.3. Расчет площади светлого материала. Аналогично предыдущему этапу рассматриваются пиксели, соответствующие светлому материалу, который в случае полиимидных покрытий может быть отверждающим агентом.

Площадь светлого материала A_{light} может быть выражена как разность значений общей площади и площади темного материала:

$$A_{light} = A_{total} - A_{dark}.$$

3.4. Расчет длины границы контакта. Для расчета длины границы контакта двух веществ представим бинарное изображение контуров в виде матрицы Z , в которой каждый элемент Z_{ij} принимает значение 1, если соответствующий пиксель является частью контура, и 0 — в противном случае:

$$Z = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & \dots & Z_{1M} \\ Z_{21} & Z_{22} & \dots & Z_{2M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Z_{N1} & Z_{N2} & \dots & Z_{NM} \end{bmatrix}.$$

Тогда длина границы контакта L_{cont} может быть определена как сумма длин всех контуров на изображении:

$$L_{cont} = \sum_{c=1}^e L_c,$$

где L_c — длина контура c , e — общее числа контуров.

С использованием полярной системы координат длина каждого контура L_c может быть вычислена с помощью формулы

$$L_c = \int_0^{2\pi} \sqrt{(dx/d\theta)^2 + (dy/d\theta)^2} d\theta,$$

где $x = r(\theta) \cos \theta$, $y = r(\theta) \sin \theta$.

В контексте нашей задачи полярные координаты (r, θ) позволяют описать форму контура с помощью углов и радиусов, что удобнее, чем использование прямоугольных координат (x, y) , особенно для криволинейных контуров. Угол θ определяет направление от начальной точки до каждой последующей точки на контуре. Параметризация по углу θ позволяет нам «идти вокруг» контура и измерять его длину относительно изменения угла.

Для дискретного представления интеграла применим метод конечных разностей:

$$L_c \approx \sum_{c=1}^Y \sqrt{\left(\frac{x(\theta_c + \Delta\theta) - x(\theta_c)}{\Delta\theta}\right)^2 + \left(\frac{y(\theta_c + \Delta\theta) - y(\theta_c)}{\Delta\theta}\right)^2} \Delta\theta,$$

где Y — количество дискретных точек на контуре, а $\Delta\theta_c$ — изменение угла и координат между соседними точками интервала с номером $c \in [1; Y]$.

Таким образом, L_{cont} представляет общую длину границы контакта между компонентами на изображении.

3.5. Расчет удельной поверхности. Удельная поверхность H_{SSA} представляет собой отношение длины границы контакта L_{cont} к общей площади материала A_{total} :

$$H_{SSA} = L_{cont} / A_{total}.$$

Таким образом, удельная поверхность H_{SSA} предоставляет метрику, оценивающую, насколько «компактно» распределены границы контакта между компонентами относительно общей площади материала.

4. Процесс масштабирования

В данном разделе рассматривается процесс масштабирования, включающий этапы распознавания и преобразования данных о масштабе.

4.1. Распознавание данных о масштабе. Первый этап процесса масштабирования связан с распознаванием текстовой информации, представляющей численное значение масштаба на изображении. В рамках этого этапа используется оптическое распознавание символов (OCR), которое преобразует изображение в текстовую строку.

Полученная текстовая строка, содержащая значение масштаба, сохраняется в отдельной переменной.

4.2. Преобразование данных о масштабе. На втором этапе процесса данные о масштабе преобразуются в числовое значение, представляющее собой длину в микронах. Для этого применяется метод извлечения численной информации из текстовой строки.

Процесс извлечения включает в себя анализ текста с использованием регулярных выражений. Этот метод преобразует текстовую строку в числовое значение s . Полученное числовое значение s представляет собой масштаб, используемый для перевода результатов измерений в микроны.

4.3. Вычисление удельной поверхности в микронах. Имея значение масштаба s , можно получить значение реальной удельной поверхности:

$$H_{RSSA} = s \cdot H_{SSA}. \quad (2)$$

Этот процесс обеспечивает эффективное масштабирование внутри системы, а именно переход от относительных измерений, выполненных в пикселях, к реальным физическим значениям в микронах. Это позволяет корректно интерпретировать результаты измерений на изображении, что существенно для точного анализа характеристик композиционных покрытий. Для остальных характеристик процесс преобразования аналогичен преобразованию (2).

5. Обсуждение результатов работы и область их применения

Разработанная информационно-измерительная система проявила высокую точность в анализе качества двухкомпонентных композиционных покрытий при производстве элементов электроники. Результаты обработки изображений подтверждают надежность разработанной системы в определении контуров и анализе структуры материалов. Для более надежной верификации работы системы было проведено тестирование на оборудовании Поволжского дизайн-центра микроэлектроники «Бином» при Самарском государственном техническом университете. Этот шаг не только подтвердил соответствие системы высоким стандартам точности, но также продемонстрировал ее применимость в реальных промышленных условиях.

Алгоритмы анализа качества двухкомпонентных композиционных покрытий в разработанной системе продемонстрировали высокую точность и устойчивость к различным артефактам в изображениях. В качестве примера на рис. 1 приведено распределение частот появления различных интенсивностей в анализируемом изображении, построенное с помощью разработанной системы. На рис. 2 приведено исходное (анализируемое) изображение, а на рис. 3 — изображение покрытия после проведения анализа.

Полученные результаты на образцах с известными дефектами и реальных материалах в условиях производства электроники свидетельствуют о перспективности внедрения системы в производственные процессы.

Табл. 1 содержит рассчитанные параметры, такие как удельная поверхность, общая площадь материала и другие.

Результаты исследования вносят значительный вклад в различные обла-

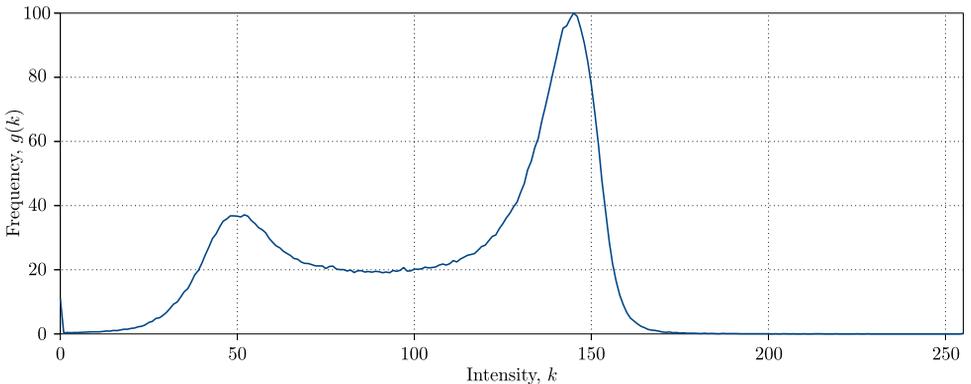


Рис. 1. Распределение частот появления различных интенсивностей (1) в анализируемом изображении

[Figure 1. Frequency distribution of the appearance of different intensities for Eq. (1) in the analyzed image]

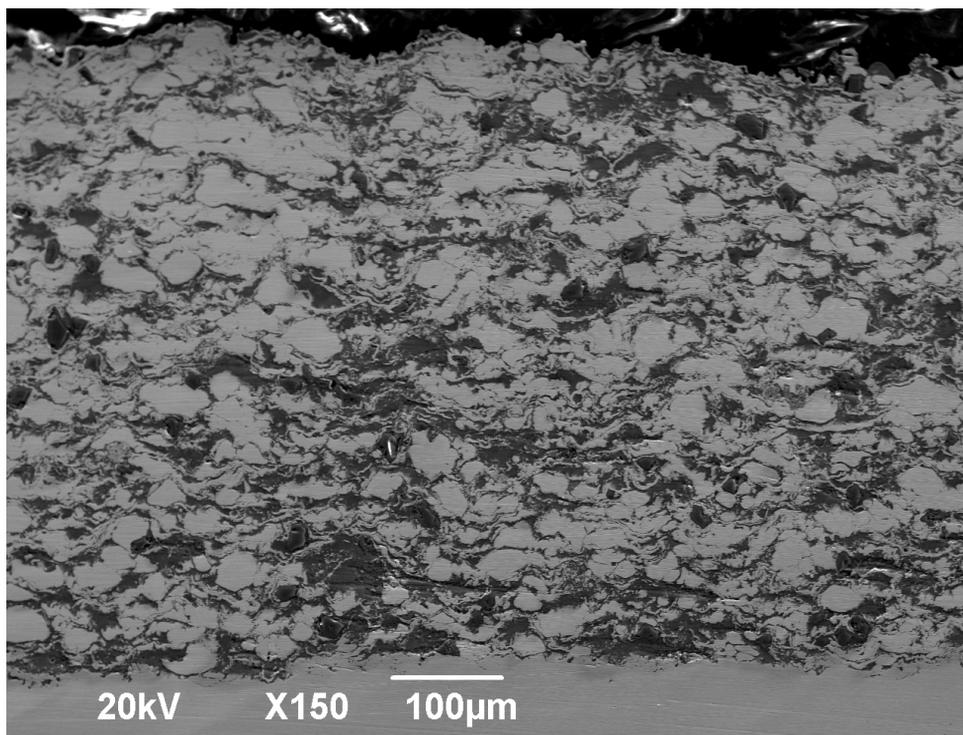


Рис. 2. Анализируемое изображение покрытия, полученное с помощью электронного микроскопа в формате .tif (1280×960 px)

[Figure 2. Analyzed image of the coating obtained by an electron microscope in the .tif format (1280×960 px)]

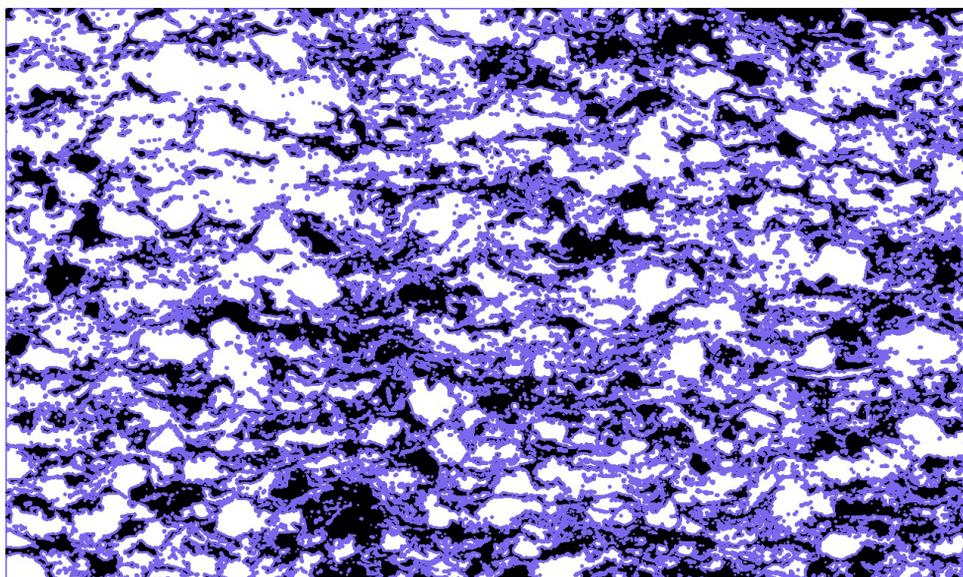


Рис. 3. Изображение покрытия после проведения анализа

[Figure 3. Image of the coating after the analysis]

Рассчитанные параметры анализа двухкомпонентных композиционных покрытий
[Calculated parameters for the analysis of two-component composite coatings]

Parameters	Values
Specific surface area, H_{SSA}	0.18 px ⁻¹
Real specific surface area, H_{RSSA}	0.27 μm ²
Total area of material, A_{total}	421034.17 μm ²
Dark material area, A_{dark}	262399.90 μm ²
Light material area, A_{light}	158634.27 μm ²
Contact boundary length, L_{cont}	114067.69 μm

сти применения:

- внедрение системы в процессы контроля качества для повышения эффективности и точности оценки материалов;
- использование системы для более глубокого анализа свойств и структуры двухкомпонентных композиционных покрытий;
- применение результатов исследования в разработке новых технологий и материалов с улучшенными характеристиками.

Заключение

В работе представлен метод анализа двухкомпонентных композиционных покрытий с использованием математически обоснованных алгоритмов обработки изображений. Полученные результаты открывают новые перспективы для совершенствования контроля качества материалов в промышленных процессах и научных исследованиях.

Предложена и реализована информационно-измерительная система обработки изображений, основанная на совокупности математических методов. Применение численных алгоритмов для анализа границ композиционных покрытий позволило добиться необходимой точности анализа.

Разработанный подход является эффективным инструментом для точного анализа материалов с выделением ключевых параметров, таких как удельная поверхность, общая площадь материала и границы контакта. Эти параметры могут быть востребованы в промышленных процессах для оценки качества и контроля производства.

В рамках исследования разработана система обработки изображений, минимизирующая накопление ошибок на каждом этапе и обеспечивающая высокую точность определения характеристик материалов.

Полученные результаты могут быть успешно внедрены в различные области промышленности, научных исследований и технологического развития. Система была успешно протестирована в Поволжском дизайн-центре микроэлектроники «Бином» при Самарском государственном техническом университете с использованием полиамидных покрытий, применяемых в производстве электроники. Это подтвердило применимость разработанной системы в реальных промышленных условиях.

Конкурирующие интересы. Конкурирующих интересов не имеем.

Авторская ответственность. Все авторы принимали участие в разработке концепции статьи и в написании рукописи. Авторы несут полную ответственность за

предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

Финансирование. Исследование выполнено при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках государственного задания (тема № АААА-А12-2110800012-0).

Библиографический список

1. Николаев В. М., Вертянов Д. В., Шишов А. М. [и др.] Обзор существующих технологий формирования микроэлектронных устройств на пластичных основаниях // *Современные тенденции в научной деятельности: VII Международная научно-практическая конференция* (Москва, 28 декабря 2015 г.). М.: Научный центр «Олимп», 2015. С. 981–989. EDN: VDXLQZ.
2. Анисович А. Г. Особенности металлографического препарирования для анализа тонких слоев и покрытий // *Литье и металлургия*, 2020. № 2. С. 59–62. EDN: MPCJQQ. DOI: <https://doi.org/10.21122/1683-6065-2020-2-59-62>.
3. Лецковник А. В., Брылева О. В., Кабанков А. И., Семичева Л. Г. Методика подготовки микрошлифов для металлографического и микрорентгеноспектрального анализов металлополимерных соединений // *Актуальные проблемы авиации и космонавтики*, 2014. Т. 1, № 10. С. 107–108. EDN: PFSCXB.
4. Падалко В. С., Зрюмова А. Г., Каредин И. С., Искуснова Н. В. Разработка композитного материала для создания гибких тензометрических датчиков // *Ползуновский альманах*, 2021. № 4. С. 144–145. EDN: RHUGSU.
5. Новиков А., Новотник М. Теплоотводное покрытие из композитного материала для высокотемпературной электроники // *Технологии в электронной промышленности*, 2017. № 4(96). С. 48–51. EDN: ZCMRHL.
6. Терешенок А., Потапов С. Новые композитные материалы для терморегуляции мощной электроники // *Электроника: Наука, технология, бизнес*, 2022. № 8(219). С. 62–67. EDN: KMUDKQ. DOI: <https://doi.org/10.22184/1992-4178.2022.219.8.62.66>.
7. Терехова Ю. С., Киселев Д. А., Солнышкин А. В. Исследование сегнетоэлектрических нанокомпозитов на основе P(VDF-TrFE) методами сканирующей зондовой микроскопии // *Известия высших учебных заведений. Материалы электронной техники*, 2021. Т. 24, № 2. С. 71–78. EDN: TGQRRK. DOI: <https://doi.org/10.17073/1609-3577-2021-2-71-78>.
8. Хмыль А. А., Ланин В. Л., Емельянов В. А. *Гальванические покрытия в изделиях электроники*. Минск: Интегралполиграф, 2017. 480 с. EDN: CHSIYS.
9. Мустафаев Г. А., Мустафаева Д. Г., Мустафаев М. Г. Получение однородных по структуре и равномерных по толщине диэлектрических покрытий при формировании приборных структур // *Нано- и микросистемная техника*, 2017. Т. 19, № 3. С. 131–136. EDN: YHXAKZ. DOI: <https://doi.org/10.17587/nmst.19.131-136>.
10. Gonzalez R. C., Woods R. E. *Digital Image Processing*. New York: Pearson Education, 2018. 1019 pp.

MSC: 68U10

Analysis for two-component composite coatings in the production of electronic components by computer vision methods

M. V. Nenashev, O. S. Rakhmanin, V. V. Kiyashchenko

Samara State Technical University,
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russian Federation.

Abstract

A method for analyzing two-component composite coatings in the production of electronic components is presented, based on a system of mathematically grounded image processing algorithms. This method allows for the determination of the specific surface area, total material area, and contact boundaries, ensuring high accuracy and result stability. The obtained results can be successfully integrated into industrial processes for material quality assessment and production control. Within the scope of the study, an information-measurement image processing system has been developed, minimizing error accumulation at each stage and ensuring high precision in determining material characteristics. Examples of successful method application are presented, highlighting its effectiveness and prospects in various areas, including industrial production of electronic components. The obtained results serve as a basis for further research and refinement of methods for analyzing composite materials.

Keywords: composite coatings, image analysis, specific surface area, verification of the electronic components production.

Received: 15th December, 2023 / Revised: 18th January, 2024 /

Accepted: 29th January, 2024 / First online: 18th March, 2024

Mathematical Modeling, Numerical Methods and Software Complexes Short Communication

© Authors, 2024

© Samara State Technical University, 2024 (Compilation, Design, and Layout)

© The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Please cite this article in press as:

Nenashev M. V., Rakhmanin O. S., Kiyashchenko V. V. Analysis for two-component composite coatings in the production of electronic components by computer vision methods, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2024, vol. 28, no. 1, pp. 186–198. EDN: GGJQTI. DOI: 10.14498/vsgtu2068 (In Russian).

Authors' Details:

Maxim V. Nenashev  <https://orcid.org/0000-0003-3918-5340>

Dr. Tech. Sci., Professor; First Vice-Rector–Vice-Rector for Scientific Work; University Administration; e-mail: nenashev.mv@samgtu.ru

Oleg S. Rakhmanin  <https://orcid.org/0000-0001-7337-268X>

Cand. Tech. Sci., Associate Professor; Head of the Laboratory; Lab. of Digital Doubles of Materials and Technological Processes of their Processing; e-mail: rakhmanin.os@samgtu.ru

Victoria V. Kiyashchenko  <https://orcid.org/0000-0001-9710-2860>

Postgraduate Student; Junior Researcher; Lab. of Digital Doubles of Materials and Technological Processes of their Processing; e-mail: vv.kiyashchenko@gmail.com

Competing interests. We have no competing interests.

Authors' contributions and responsibilities. All authors participated in developing the concept of the article and in writing the manuscript. The authors take full responsibility for providing the final manuscript for publication. The final version of the manuscript was approved by all authors.

Funding. The research was carried out with the financial support of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation within the framework of the state task (theme no. AAAA12-2110800012-0).

References

1. Nikolaev V. M., Vertianov D. V., Shishov A. M., et al. Review of existing technologies for the formation of microelectronic devices on plastic substrates, In: *Sovremennyye tendentsii v nauchnoi deiatel'nosti* [Modern Trends in Scientific Activity], VII Intern. Sci.-Pract. Conf. (Moscow; 28 December, 2015). Moscow, Sci. Center "Olimp", 2015, pp. 981–989 (In Russian). EDN: VDXLQZ.
2. Anisovich A. G. Particularities of metallographic preparation for the analysis of thin layers and coatings. foundry production and metallurgy, *Foundry Production and Metallurgy*, 2020, no. 2, pp. 59–62 (In Russian). EDN: MPCJQQ. DOI: <https://doi.org/10.21122/1683-6065-2020-2-59-62>.
3. Letckovnik A. V., Bryleva O. V., Kabankov A. I., Semicheva L. G. Methodology for preparing microsections for metallographic and micro-X-ray spectral analyzes of metal-polymer compounds, *Aktualnye Problemy Aviatsii Kosmonavтики*, 2014, vol. 1, no. 10, pp. 107–108 (In Russian). EDN: PFSCXB.
4. Padalko V. S., Zryumova A. G., Karelin I. S., Iskusnova N. V. Development of a composite material for creating flexible strain gauge sensors, *Polzunovskii Almanakh*, 2021, no. 4, pp. 144–145 (In Russian). EDN: RHUGSU.
5. Novikov A., Novotnik M. Heat-dissipating composite material coating for high temperature electronics, *Tekhnologii Elektronnoi Promyshlennosti*, 2017, no. 4(96), pp. 48–51 (In Russian). EDN: ZCMRHL.
6. Tereschenok A., Potapov S. New composite materials for thermoregulation of high-power electronics, *Electronics: Science, Technology, Business*, 2022, no. 8(219), pp. 62–67 (In Russian). EDN: KMUDKQ. DOI: <https://doi.org/10.22184/1992-4178.2022.219.8.62.66>.
7. Terekhova Yu. S., Kiselev D. A., Solnyshkin A. V. Scanning probe microscopic study of P(VDF-TrFE) based ferroelectric nanocomposites, *Modern Electronic Materials*, 2021, vol. 7, no. 1, pp. 11–16. EDN: EAVYXE. DOI: <https://doi.org/10.3897/j.moem.7.1.73283>.
8. Khmyl A. A., Lanin V. L., Emelyanov V. A. *Gal'vanicheskie pokrytiia v izdeliakh elektroniki* [Galvanic Coatings in Electronics Products]. Minsk, Integralpoligraf, 2017, 480 pp. (In Russian). EDN: CHSIYS.
9. Mustafaev G. A., Mustafaeva D. G., Mustafaev M. G. Obtaining of dielectric coatings, uniform by their structure and thickness, during formation of the instrument structures, *Nano- and Microsystems Technology*, 2017, vol. 19, no. 3, pp. 131–136 (In Russian). EDN: YHXAKZ. DOI: <https://doi.org/10.17587/nmst.19.131-136>.
10. Gonzalez R. C., Woods R. E. *Digital Image Processing*. New York, Pearson Education, 2018, 1019 pp.