ISSN 1991-8615 (print)
ISSN 2310-7081 (online)

ВЕСТНИК
САМАРСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ТЕХНИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

Серия «Физико-математические науки»

Т. 28, № 2 – 2024

Journal of Samara State Technical University
Ser. Physical and Mathematical Sciences

Вестник Самарского государственного технического университета

ISSN 1991–8615 (print)
ISSN 2310–7081 (online)
НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ
Издаётся с 1996 г.
Выходит 4 раза в год

Октябрь — 2024

Серия
«ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ» (Т. 28, № 2/75 – 2024)

НАУЧНОЕ ИЗДАНИЕ

Вестник Самарского государственного технического университета.
Серия «Физико-математические науки» (Т. 28, № 2/75 – 2024)

Учредитель — ФГБОУ ВО «Самарский государственный технический университет» 443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244

Редактор Е. С. Захарова
Выпускающий редактор Е. В. Абрамова
Компьютерная вёрстка М. Н. Саушкин, О. С. Афанасьева, Е. Ю. Арланова

Адрес редакции и издателя:
ФГБОУ ВО «СамГТУ»,
443100, г. Самара,
ул. Молодогвардейская, 244
Тел.: +7 (846) 337 04 43
Факс: +7 (846) 278 44 00
E-mail: vsgtu@samgtu.ru
URL: http://www.mathnet.ru/vsgtu

Оригинал-макет изготовлен на кафедре прикладной математики и информатики СамГТУ

Свидетельство о регистрации
ПИ № ФС 77–66685 от 27.07.2016.
Федеральная служба по надзору в сфере связи информационных технологий и массовых коммуникаций

Подписано в печать 17 октября 2024 г.
Дата выхода в свет 8 ноября 2024 г.
Формат 70 × 108 $^1/_{16}$.
Усл. печ. л. 13.00. Уч.-изд. л. 12.97.
Тираж 500 экз. Рег. № 154/24.
Заказ № 407.

Отпечатано в типографии Самарского государственного технического университета
443100, г. Самара,
ул. Молодогвардейская, 244.

Журнал индексируется в Web of Science Core Collection (Emerging Sources Citation Index), Scopus, Russian Science Citation Index, Zentralblatt MATH, DOAJ и входит в ядро Российского индекса научного цитирования.

Журнал включен в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук, по научным специальностям и соответствующим им отраслям науки:
• 1.1.2 – Дифференциальные уравнения и математическая физика (физико-математические науки);
• 1.1.8 – Механика деформируемого твердого тела (физико-математические науки);
• 1.2.2 – Математическое моделирование численные методы и комплексы программ (физико-математические науки).

Полнотекстовый доступ к статьям журнала осуществляется на Общероссийском математическом портале (http://www.mathnet.ru), портале научных журналов «Эко-Вектор» (https://journals.eco-vector.com), сайтах научных электронных библиотек eLibrary.ru (http://elibrary.ru) и КиберЛенинка (http://cyberleninka.ru).

Подписной индекс в каталоге агентства «Урал-Пресс» 18108 Цена свободная

Journal of Samara State Technical University

ISSN 1991–8615 (print)
ISSN 2310–7081 (online)
SCIENTIFIC JOURNAL
Published since 1996
4 issues per year
October — 2024

Ser. Physical & Mathematical Sciences, 2024, vol. 28, no. 2

Founder — Samara State Technical University, Samara, 443100, Russian Federation

Edited by E. S. Zakharova, E. V. Abramova
Compiled and typeset by M. N. Saushkin, O. S. Afanas'eva,
E. Yu. Arlanova

The Editorial Board Address:

Dept. of Applied Mathematics and Computer Science,
Samara State Technical University,
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russian Federation

Phone: +7 (846) 337 04 43
Phax: +7 (846) 278 44 00
E-mail: vsgtu@samgtu.ru
URL: http://www.mathnet.ru/eng/vsgtu

Printed at the Samara State Technical University Press.

The journal covered in Web of Science Core Collection (Emerging Sources Citation Index), Zentralblatt MATH, Scopus, Russian Science Citation Index, and DOAJ.

The full-text electronic version of journal is hosted by the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru (http://www.mathnet.ru), the Eco-Vector Journals Portal (https://journals.eco-vector.com), and by the web-sites of scientific electronic libraries eLibrary.ru (http://elibrary.ru) and CyberLeninka (http://cyberleninka.ru).

Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2024. Т. 28, № 2
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu/v228/i2

Содержание

Дифференциальные уравнения и математическая физика

Механика деформируемого твёрдого тела

Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

Краткие сообщения

Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2024, vol. 28, no. 2
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu/v228/i2

Contents

Differential Equations and Mathematical Physics

Mechanics of Solids

Mathematical Modeling, Numerical Methods and Software Complexes

Short Communications

Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2024, vol. 28, no. 2, pp. 207–222
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu2063

MSC: 34A08, 26A33, 34K28, 35C10

A new application of Khalouta differential transform method and convergence analysis to solve nonlinear fractional Liénard equation

L. Chetioui, A. Khalouta

Université Ferhat Abbas de Sétif 1, Sétif, 19000, Algeria.

Abstract

In this study, we propose a new hybrid numerical method called the Khalouta differential transform method to solve the nonlinear fractional Liénard equation involving the Caputo fractional derivative. The convergence theorem of the proposed method is proved under suitable conditions.

The Khalouta differential transform method is a semi-analytical technique that combines two powerful methods: the Khalouta transform method and the differential transform method. The main advantage of this approach is that it provides very fast solutions without requiring linearization, perturbation, or any other assumptions. The proposed method is described and illustrated with two numerical examples. The illustrative examples show that the numerical results obtained are in very good agreement with the exact solutions. This confirms the accuracy and effectiveness of the proposed method.

Keywords: fractional Liénard equation, Caputo fractional derivative, Khalouta transform method, differential transform method, approximate solution.

Received: 11th September, 2023 / Revised: 22nd April, 2024 /
Accepted: 13th May, 2024 / First online: 26th August, 2024

Differential Equations and Mathematical Physics
Research Article

Please cite this article in press as:
Chetioui L., Khalouta A. A new application of Khalouta differential transform method and convergence analysis to solve nonlinear fractional Liénard equation, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2024, vol. 28, no. 2, pp. 207–222. EDN: ATZKZR. DOI: 10.14498/vsgtu2063.

Authors' Details:

Lina Chetioui; Lab. of Fundamental Mathematics and Numerical; Dept. of Mathematics; Faculty of Sciences; e-mail: lina.chetioui@univ-setif.dz

Ali Khalouta https://orcid.org/0000-0003-1370-3189
Lab. of Fundamental Mathematics and Numerical; Dept. of Mathematics; Faculty of Sciences; e-mail: ali.khalouta@univ-setif.dz

1. Introduction. Since the development of the fractional calculus, many mathematicians and physicists have been interested in the theory of nonlinear fractional differential equations, where many nonlinear phenomena in engineering, physics, fluid mechanics, viscoelasticity, chemistry, biology and various fields of applied science can be described using these equations [1–9]. Consequently, considerable attention has been given to the solutions of nonlinear fractional differential equations of physical interest. Since many nonlinear fractional differential equations do not have exact analytical solutions due to the complexity of the nonlinear terms included, several numerical and analytical methods have been devloped to solve nonlinear fractional differential equations, such as: Adomian decomposition method (ADM) [10], homotopy perturbation method [11], homotopy analysis method [12], variational iteration transform method [13], natural reduced differential transform method (NRDTM) [14], general fractional residual power series method (GFRPSM) [13].

The Liénard equation is a nonlinear second order differential equation proposed by Alfred–Marie Liénard [15] and is given by

$$u''(x) + f(u)u'(x) + g(u) = h(x), \tag{1}$$

where $f(u)u'(x)$ is the damping force, $g(u)$ is the restoring force, and $h(x)$ is the external force.

The Liénard equation (1) is a generalization of the damped pendulum equation or spring-mass system. Since this equation can be applied to describe the oscillating circuits, therefore, it is used in the development of radio and vacuum-tube technology. For different choices of the variable coefficients $f(u)$, $g(u)$, and $h(x)$, the Liénard equation is used in several phenomena. For example, the choices $f(u) = \varepsilon(u^2 - 1)$, $g(u) = u$, and $h(x) = 0$, this equation becomes the Van der Pol equation as a nonlinear model of electronic oscillation, see [16, 17]

Several researchers have studied the exact solution of particular cases of Liénard equation. For example, Zhaosheng Feng [18] investigated the exact solution of

$$u''(x) + au(x) + bu^3(x) + cu^5(x) = 0. \tag{2}$$

He found that one of the solutions of equation (2), is given by

$$u(x) = \sqrt{-\frac{2a}{b}\big(1 + \tanh(\sqrt{-a}x)\big)},$$

when $b^2/4 - 4ac/3 = 0$, $b > 0$, and $a < 0$.

The objective of the present article is to propose a hybrid numerical method using Khalouta transform method and differential transform method in order to solve the nonlinear fractional Liénard equation in the form

$$D^\alpha u(x) + au(x) + bu^3(x) + cu^5(x) = 0, \quad x > 0, \tag{3}$$

with the initial conditions

$$u(0) = u_0, \quad u'(0) = u_1, \tag{4}$$

where D^α is the fractional derivative operator in the sense of the Caputo of order α with $1 < \alpha \leqslant 2$, and a, b, c, u_0, and u_1 are constants.

The organization of this article is as follows. In Sect. 2, we present the basic definitions and several properties of the theory of fractional calculus, Khalouta transform and differential transform method that will be used throughout our article. In Sect. 3, we extend the proposed method to solve the nonlinear fractional Liénard equation (3) with the initial conditions (4). In Sect. 4, we prove the convergence theorem of this method under suitable conditions. In Sect. 5, two numerical examples are proposed to illustrate the capability and effectiveness of proposed method. In Sect. 6, we discuss our obtained results presented by figures and tables. The conclusion is given in the final part, Sect. 7.

2. Basic definitions and results. This section presents the basic definitions and several properties of the fractional calculus theory, Khalouta transform and differential transform method (DTM) which will be needed in this article.

Definition 1 [3]. The Riemann–Liouville fractional integral of order $\alpha \geqslant 0$ of a function u in $C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ is defined as

$$I^{\alpha}u(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)} \displaystyle\int_0^x (x-\tau)^{\alpha-1} u(\tau)d\tau, & \alpha > 0, \\ u(x), & \alpha = 0, \end{cases} \tag{5}$$

where

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx,$$

is the Euler gamma function.

Definition 2 [3]. The Caputo fractional derivative of order $\alpha \geqslant 0$ of a function u, is defined as

$$D^{\alpha}u(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \displaystyle\int_0^x (x-\tau)^{n-\alpha-1} u^{(n)}(\tau)d\tau, & n-1 < \alpha < n, \\ u^{(n)}(x), & \alpha = n, \end{cases} \tag{6}$$

where $n = [\alpha] + 1$ with $[\alpha]$ being the integer part of α.

Now, we present our results regarding the Khalouta transform of the Riemann–Liouville fractional integral and the Caputo fractional derivative.

Definition 3 [19]. Let $u(x)$ be a integrable function defined for $x \geqslant 0$. The Khalouta transform $\mathcal{K}(s, \gamma, \eta)$ of $u(x)$ is defined by

$$\mathbb{KH}\big[u(x)\big] = \mathcal{K}(s, \gamma, \eta) = \frac{s}{\gamma\eta} \int_0^{\infty} \exp\Big(-\frac{sx}{\gamma\eta}\Big) u(x) dx,$$

where s, γ, $\eta > 0$ are the Khalouta transform variables.

Some basic properties of the Khalouta transform are given as follows [19].

Property 1. Let $\mathcal{K}_1(s, \gamma, \eta)$ and $\mathcal{K}_2(s, \gamma, \eta)$ be the Khalouta transforms of $u_1(x)$ and $u_2(x)$, respectively. For each constants of c_1 and c_2, then

$$\mathbb{KH}\big[c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x)\big] = c_1 \mathbb{KH}\big[u_1(x)\big] + c_2 \mathbb{KH}\left[u_2(x)\right] = \\ = c_1 \mathcal{K}_1(s, \gamma, \eta) + c_2 \mathcal{K}_2(s, \gamma, \eta).$$

Property 2. Let $\mathcal{K}(s,\gamma,\eta)$ be the Khalouta transform of $u(x)$. Then

$$\mathbb{KH}\left[u^{(n)}(x)\right] = \frac{s^n}{\gamma^n\eta^n}\mathcal{K}(s,\gamma,\eta) - \sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{s}{\gamma\eta}\right)^{n-k}u^{(k)}(0), \quad n \geqslant 1.$$

Property 3. Let $\mathcal{K}_1(s,\gamma,\eta)$ and $\mathcal{K}_2(s,\gamma,\eta)$ be the Khalouta transforms of $u_1(x)$ and $u_2(x)$, respectively. Then the Khalouta transform of the convolution of $u_1(x)$ and $u_2(x)$ is given by

$$\mathbb{KH}\left[(u_1 * u_2)(t)\right] = \int_0^\infty u_1(x)u_2(x-\tau)d\tau = \frac{\gamma\eta}{s}\mathcal{K}_1(s,\gamma,\eta)\mathcal{K}_2(s,\gamma,\eta).$$

Property 4. The Khalouta transforms for some basic functions:

$$\begin{aligned}\mathbb{KH}[1] &= 1,\\ \mathbb{KH}[x] &= \frac{\gamma\eta}{s},\\ \mathbb{KH}\left[\frac{x^n}{n!}\right] &= \frac{\gamma^n\eta^n}{s^n}, \quad n = 0,1,2,\ldots,\\ \mathbb{KH}\left[\frac{x^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\right] &= \frac{\gamma^\alpha\eta^\alpha}{s^\alpha}, \quad \alpha > -1,\end{aligned}$$

Theorem 1. *If $\mathcal{K}(s,\gamma,\eta)$ is the Khalouta transform of the function $u(x)$, then the Khalouta transform of Riemann–Liouville fractional integral of order $\alpha > 0$, is given by*

$$\mathbb{KH}\left[I^\alpha u(x)\right] = \frac{\gamma^\alpha\eta^\alpha}{s^\alpha}\mathcal{K}(s,\gamma,\eta).$$

Proof. Applying the Khalouta transform to both sides of the equation (5), we get

$$\mathbb{KH}\left[I^\alpha u(x)\right] = \mathbb{KH}\left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x (x-\tau)^{\alpha-1}u(\tau)d\tau\right] = \mathbb{KH}\left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1} * u(x)\right].$$

Then, using Properties 3 and 4, we get

$$\mathbb{KH}\left[I^\alpha u(x)\right] = \frac{\gamma\eta}{s}\mathbb{KH}\left[\frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right]\mathbb{KH}\left[u(x)\right] =$$

$$= \frac{\gamma\eta}{s}\frac{\gamma^{\alpha-1}\eta^{\alpha-1}}{s^{\alpha-1}}\mathcal{K}(s,\gamma,\eta) = \frac{\gamma^\alpha\eta^\alpha}{s^\alpha}\mathcal{K}(s,\gamma,\eta).$$

The theorem is proved. □

Theorem 2. *If $\mathcal{K}(s,\gamma,\eta)$ is the Khalouta transform of the function $u(x)$, then the Khalouta transform of the Caputo fractional derivative of order $n-1 < \alpha \leqslant n$, $n \in \mathbb{Z}^+$, is given by*

$$\mathbb{KH}[D^\alpha u(x)] = \frac{s^\alpha}{\gamma^\alpha\eta^\alpha}\mathcal{K}(s,\gamma,\eta) - \sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{s}{\gamma\eta}\right)^{\alpha-k}u^{(k)}(0).$$

P r o o f. First, we take

$$v(x)=u^{(n)}(x). \tag{7}$$

Thus, equation (6), can be written as follows

$$D^{\alpha}u(x)=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_0^x (x-\tau)^{n-\alpha-1}u^{(n)}(\tau)d\tau =$$
$$=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_0^x (x-\tau)^{n-\alpha-1}v(\tau)d\tau = I^{n-\alpha}v(x). \tag{8}$$

Applying the Khalouta transform on both sides of equation (8) and using Theorem 1, we get

$$\mathbb{KH}\big[D^{\alpha}u(x)\big]=\mathbb{KH}\big[I^{n-\alpha}v(x)\big]=\frac{\gamma^{n-\alpha}\eta^{n-\alpha}}{s^{n-\alpha}}\mathcal{V}(s,\gamma,\eta), \tag{9}$$

where $\mathcal{V}(s,\gamma,\eta)$ is the Khalouta transform of the function $v(x)$.

Applying the Khalouta transform on both sides of equation (7) and using Property 2, we get

$$\mathbb{KH}\big[v(x)\big]=\mathbb{KH}\big[u^{(n)}(x)\big],$$
$$\mathcal{V}(s,\gamma,\eta)=\frac{s^n}{\gamma^n\eta^n}\mathcal{K}(s,\gamma,\eta)-\sum_{k=0}^{n-1}\Big(\frac{s}{\gamma\eta}\Big)^{n-k}u^{(k)}(0). \tag{10}$$

Substituting equation (10) into equation (9), we get

$$\mathbb{KH}\big[D^{\alpha}u(x)\big]=\frac{\gamma^{n-\alpha}\eta^{n-\alpha}}{s^{n-\alpha}}\left(\frac{s^n}{\gamma^n\eta^n}\mathcal{K}(s,\gamma,\eta)-\sum_{k=0}^{n-1}\Big(\frac{s}{\gamma\eta}\Big)^{n-k}u^{(k)}(0)\right)=$$
$$=\frac{s^{\alpha}}{\gamma^{\alpha}\eta^{\alpha}}\mathcal{K}(s,\gamma,\eta)-\sum_{k=0}^{n-1}\Big(\frac{s}{\gamma\eta}\Big)^{\alpha-k}u^{(k)}(0).$$

The theorem is proved. □

Now, we consider a function $u(x)$ which is analytic in a domain T and let $x=x_0$ represent any point in T. The function $u(x)$ is then represented by a power series whose centre is located at x_0 [20, 21].

Definition 4. The differential transform of the function $u(x)$ is defined as

$$U(k)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\Big[\frac{d^k}{dx^k}u(x)\Big]_{x=x_0}, \tag{11}$$

where $u(x)$ is the original function and $U(k)$ the transformed function.

Definition 5. The inverse differential transform of $U(k)$ is defined as

$$u(x)=\sum_{k=0}^{\infty}U(k)(x-x_0)^k. \tag{12}$$

Combining equations (11) and (12), we get

$$u(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left[\frac{d^k}{dx^k}u(x)\right]_{x=x_0}(x-x_0)^k. \tag{13}$$

In particular, for $x_0=0$, equation (13) becomes

$$u(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left[\frac{d^k}{dx^k}u(x)\right]_{x=0}x^k.$$

From the above definitions, the fundamental operations of the DTM are given by the following theorem.

THEOREM 3. *Let $U(k)$, $V(k)$ and $W(k)$ be the differential transforms of the functions $u(x)$, $v(x)$ and $w(x)$ respectively, then*

(1) *if*

$$w(x)=\lambda u(x)+\mu v(x),$$

then

$$W(k)=\lambda U(k)+\mu V(k),\quad \lambda,\ \mu\in\mathbb{R};$$

(2) *if*

$$w(x)=u(x)v(x),$$

then

$$W(k)=\sum_{r=0}^{k}U(r)V(k-r);$$

(3) *if*

$$w(x)=u_1(x)u_2(x)\cdots u_{n-1}(x)u_n(x),$$

then

$$W(k)=\sum_{k_{n-1}=0}^{k}\sum_{k_{n-2}=0}^{k_{n-1}}\cdots\sum_{k_2=0}^{k_3}\sum_{k_1=0}^{k_2}U_1(k_1)U_2(k_2-k_1)\times\cdots\times$$
$$\times U_{n-1}(k_{n-1}-k_{n-2})U_n(k-k_{n-1}).$$

3. Analysis of the Khalouta differential transform method (KHDTM).

THEOREM 4. *Consider the following nonlinear fractional Liénard equation* (3) *with the initial conditions* (4). *The KHDTM gives the solution of* (3) *and* (4) *in the form of infinite series that rapidly converge to the exact solution as follows*

$$u(x)=\sum_{r=0}^{\infty}U(r),$$

where $U(r)$ is the differential transformed function of $u(x)$.

Proof. Consider the nonlinear fractional Liénard equation (3) with the initial conditions (4).

Computing the Khalouta transform to equation (1) and the use of the linearity property of Khalouta transform, we get

$$\mathbb{KH}\big[D^{\alpha}u(x)\big]+a\mathbb{KH}\big[u(x)\big]+b\mathbb{KH}\big[u^{3}(x)\big]+c\mathbb{KH}\big[u^{5}(x)\big]=0.$$

Using Theorem 2, this gives

$$\mathbb{KH}\big[u(x)\big]=u(0)+\frac{\gamma\eta}{s}u'(0)-\frac{\gamma^{\alpha}\eta^{\alpha}}{s^{\alpha}}\mathbb{KH}\big[au(x)+bu^{3}(x)+cu^{5}(x)\big]. \tag{14}$$

Substituting the initial conditions of equation (4) into equation (14), we get

$$\mathbb{KH}\big[u(x)\big]=u_0+\frac{\gamma\eta}{s}u_1-\frac{\gamma^{\alpha}\eta^{\alpha}}{s^{\alpha}}\mathbb{KH}\big[au(x)+bu^{3}(x)+cu^{5}(x)\big]. \tag{15}$$

By inverting equation (15), we obtain

$$u(x)=u_0+u_1x-\mathbb{KH}^{-1}\Big(\frac{\gamma^{\alpha}\eta^{\alpha}}{s^{\alpha}}\mathbb{KH}\big[au(x)+bu^{3}(x)+cu^{5}(x)\big]\Big). \tag{16}$$

Now, by applying the differential transforms method to equation (16), we get

$$\begin{aligned} U(0)&=u_0,\\ U(1)&=u_1x,\\ U(k+2)&=-\mathbb{KH}^{-1}\Big(\frac{\gamma^{\alpha}\eta^{\alpha}}{s^{\alpha}}\mathbb{KH}\big[aU(k)+bA(k)+cB(k)\big]\Big),\quad k\geqslant 0, \end{aligned} \tag{17}$$

where $A(k)$ and $B(k)$ are the differential transform of the nonlinear terms $u^3(x)$ and $u^5(x)$, respectively.

The first few nonlinear terms are given by

$$\begin{aligned} A(0)&=U^{3}(0),\\ A(1)&=3U^{2}(0)U(1),\\ A(2)&=3U^{2}(0)U(2)+3U(0)U^{2}(1), \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} B(0)&=U^{5}(0),\\ B(1)&=5U^{4}(0)U(1),\\ B(2)&=5U^{4}(0)U(2)+10U^{3}(0)U^{2}(1). \end{aligned}$$

Note that the recurrence formula (17) to the iterative terms of equations (3) and (4) is denoted KHDTM, and the k^{th} order solution for equations (3) and (4) is given as

$$S_k=\sum_{r=0}^{k}U(r). \tag{18}$$

Thus, in the following theorem, we prove that the series solution (18) which is obtained by KHDTM converges to the exact solution if $k\to\infty$, that is,

$$u(x)=\lim_{k\to\infty}S_k=\sum_{r=0}^{\infty}U(r). \tag{19}$$

□

4. Convergence of the KHDTM. The main objective of this section is to study the convergence of the KHDTM, when it is used in equations (3) and (4).

Suppose that $\mathcal{B} = (C(\mathbb{R}^+), \| \, . \, \|)$ is the Banach space of all continuous functions on $\mathbb{R}^+$ with the norm

$$\|u(x)\|_{\mathcal{B}} = \sup_{x \in \mathbb{R}^+} |u(x)|.$$

THEOREM 5. *Let $U(r)$ and $u(x)$ be defined in Banach space $\mathcal{B}$, then the series solution $\sum\limits_{r=0}^{+\infty} U(r)$ stated in equation (19) converges uniquely to the exact solution $u(x)$ of the nonlinear fractional Liénard equation (3), if there exists $0 < \theta < 1$ such that $\|U(r)\| \leqslant \theta \|U(r-1)\|$, $\forall r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.*

Proof. Let S_k be the sequence of partial sums of the series given by the recurrence formula (17), as

$$S_k = \sum_{r=0}^{k} U(r).$$

We need to show that $\{S_k\}_{k=0}^{\infty}$ is a Cauchy sequence in Banach space $\mathcal{B}$.

For this purpose, we consider

$$\|S_{k+1} - S_k\| \leqslant \|U(r+1)\| \leqslant \theta \|U(r)\| \leqslant \theta^2 \|U(r-1)\| \leqslant \cdots \leqslant \theta^{n+1} \|U(0)\|. \quad (20)$$

For every, $n, m \in \mathbb{N}$, $n \geqslant m$, by using (20) and triangle inequality successively, we have

$$\begin{aligned} \|S_n - S_m\| &= \|S_n - S_{n-1} + S_{n-1} - S_{n-2} + \cdots + S_{m+1} - S_m\| \leqslant \\ &\leqslant \|S_n - S_{n-1}\| + \|S_{n-1} - S_{n-2}\| + \cdots + \|S_{m+1} - S_m\| \leqslant \\ &\leqslant \theta^n \|U(0)\| + \theta^{n-1} \|U(0)\| + \cdots + \theta^{m+1} \|U(0)\| = \\ &= \theta^{m+1} \big(1 + \theta + \cdots + \theta^{n-m-1}\big) \|U(0)\| \leqslant \\ &\leqslant \theta^{m+1} \Big(\frac{1 - \theta^{n-m}}{1 - \theta}\Big) \|U(0)\|. \end{aligned}$$

Since $0 < \theta < 1$, we have $1 - \theta^{n-m} < 1$, then

$$\|S_n - S_m\| \leqslant \frac{\theta^{m+1}}{1 - \theta} \|U(0)\|. \quad (21)$$

So $\|S_n - S_m\| \to 0$ as $n, m \to \infty$ as $U(0)$ is bounded.

Thus $\{S_k\}_{k=0}^{\infty}$ is a Cauchy sequence in Banach space and consequently it is converges to $u(x) \in \mathcal{B}$ such that

$$\lim_{k \to \infty} S_k = \sum_{r=0}^{\infty} U(r) = u(x).$$

Now, suppose that the sequence $\{S_k\}_{k \geqslant 0}$ converges to two functions of $u_1(x)$, $u_2(x) \in \mathcal{B}$, that is,

$$\lim_{k \to \infty} S_k = u_1(x) \quad \text{and} \quad \lim_{k \to \infty} S_k = u_2(x). \quad (22)$$

Using the triangle inequality with (22), we get

$$\|u_1(x)-u_2(x)\| \leqslant \|u_1(x)-S_k\| + \|S_k-u_2(x)\| = 0 \text{ as } k\to\infty.$$

Hence we conclude that $u_1(x)=u_2(x)$.
The theorem is proved. □

THEOREM 6. *The maximum absolute truncation error of the series solution given by the recurrence formula* (17) *is estimated to be*

$$\left\| u(x) - \sum_{l=0}^{N} U(l) \right\| \leqslant \frac{\theta^{N+1}}{1-\theta}\|U(0)\|.$$

Proof. From Theorem 5 and (21), we have

$$\|S_k - S_N\| \leqslant \frac{\theta^{N+1}}{1-\theta}\|U(0)\|. \tag{23}$$

But we assume that $S_k = \sum\limits_{l=0}^{k} U(l)$ and since $k\to+\infty$, we obtain $S_k \to u(x)$, so (23) can be rewritten as

$$\|u(x)-S_N\| = \left\| u(x) - \sum_{l=0}^{N} U(l) \right\| \leqslant \frac{\theta^{N+1}}{1-\theta}\|U(0)\|.$$

The theorem is proved. □

COROLLARY 1. *If the series* $\sum\limits_{r=0}^{\infty} U(r)$ *converges then it is an exact solution of the nonlinear fractional Liénard equation* (3) *with the initial conditions* (4).

5. Illustrative examples. This section provides two numerical examples of nonlinear fractional Liénard equations to assess the applicability, accuracy and efficiency of the KHDTM. `MATLAB R2016a` is utilized to generate the numerical results.

EXAMPLE 1. Consider the nonlinear fractional Liénard equation

$$D^{\alpha}u(x) - u(x) + 4u^3(x) - 3u^5(x) = 0, \quad 1<\alpha\leqslant 2, \quad x>0, \tag{24}$$

with the initial conditions

$$u(0) = 1/\sqrt{2}, \quad u'(0) = 1/\sqrt{8}. \tag{25}$$

If $\alpha = 2$, equation (24) becomes the classical Liénard equation and its exact solution is of the form

$$u(x) = \sqrt{\frac{1+\tanh(x)}{2}}.$$

According the description of the KHDTM presented in Sect. 3, we have

$$u(x) = \sum_{r=0}^{\infty} U(r),$$

and

$$U(0) = \frac{1}{\sqrt{2}},$$
$$U(1) = \frac{1}{\sqrt{8}} x,$$
$$U(2) = -\frac{1}{4\sqrt{2}} \frac{x^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)},$$
$$U(3) = -\frac{5}{4\sqrt{8}} \frac{x^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+2)}, \quad \ldots$$

and so on.

Hence, the approximate series solution of equations (24) and (25), is given as

$$u(x) = U(0) + U(1) + U(2) + U(3) + \cdots = \\ = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\frac{x^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} - \frac{5}{8}\frac{x^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+2)} + \cdots\right). \tag{26}$$

When $\alpha = 2$, the equation (26) becomes

$$u(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 - \frac{5}{48}x^3 + \cdots\right) = \sqrt{\frac{1+\tanh(x)}{2}},$$

which is the same exact solution as obtained using MFTSM [22].

Example 2. Consider the nonlinear fractional Liénard equation

$$D^{\alpha}u(x) - u(x) + 4u^3(x) + 3u^5(x) = 0, \quad 1 < \alpha \leqslant 2, \quad x > 0, \tag{27}$$

with the initial conditions

$$u(0) = \frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{2}}}, \quad u'(0) = 0. \tag{28}$$

If $\alpha = 2$, equation (27) becomes the classical Liénard equation and its exact solution is of the form

$$u(x) = \sqrt{\frac{\operatorname{sech}^2(x)}{2\sqrt{2} + (1-\sqrt{2})\operatorname{sech}^2(x)}}.$$

According the description of the KHDTM presented in Sect. 3, we have

$$u(x) = \sum_{r=0}^{\infty} U(r),$$

and

$$U(0) = \frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{2}}},$$

$$U(1) = 0,$$
$$U(2) = -\Big(\frac{4+2\sqrt{2}}{(3+2\sqrt{2})\sqrt{1+\sqrt{2}}}\Big)\frac{x^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)},$$
$$U(3) = 0, \quad \dots$$

and so on.

Hence, the approximate series solution of equations (27) and (28) is given as

$$u(x) = U(0) + U(1) + U(2) + U(3) + \dots = \\ = \frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{2}}}\Big(1 - \frac{4+2\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}}\frac{x^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} + \cdots\Big). \quad (29)$$

When $\alpha = 2$, the equation (29) becomes

$$u(x) = \frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{2}}}\Big(1 - \frac{2+\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}}x^2 + \cdots\Big) = \sqrt{\frac{\operatorname{sech}^2(x)}{2\sqrt{2}+(1-\sqrt{2})\operatorname{sech}^2(x)}},$$

which is the same exact solution as obtained using MFTSM [22].

6. Numerical results and discussion. Figures 1 and 2 presents the graphs of the exact solutions and approximate solutions obtained by the KHDTM with different values of α ($\alpha = 1.7, 1.8, 1.9, 2$) for Examples 1 and 2, respectively. From these figures, we see that when α approaches to 1, the solutions obtained by the proposed method approaches to the exact solutions. Therefore, the KHDTM produces a convergent series with few terms. If we increase the number of terms, we will get more accurate solutions. Tables 1 and 2 presents the numerical values of the approximate solutions by the KHDTM at $\alpha = 1$ and exact solutions for Examples 1 and 2, respectively. From these tables, it can be seen that the solutions obtained by the proposed method are nearly identical to the exact solutions.

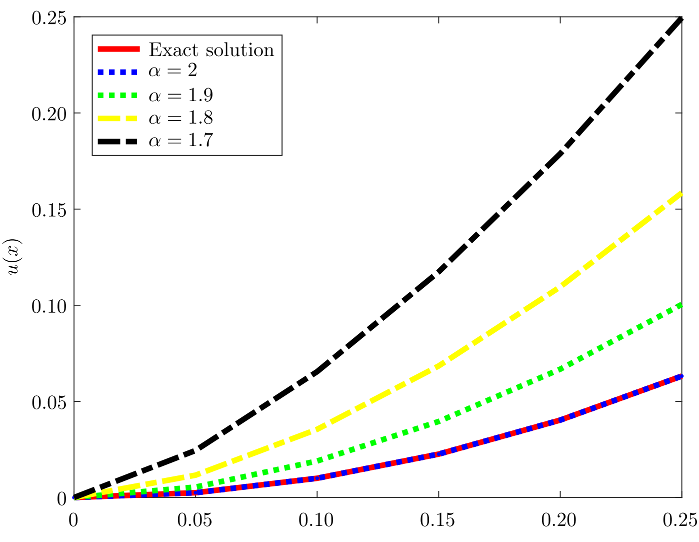


Figure 1. The graph of the exact solution and approximate solutions for Example 1

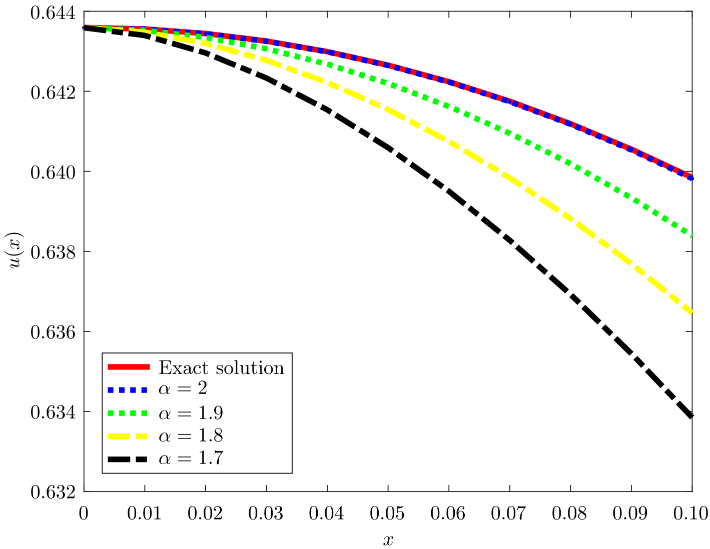


Figure 2. The graph of the exact solution and approximate solutions for Example 2

Table 1

Numerical values of the approximate solution and exact solution for Example 1

x	$\alpha = 2$ u_{KHDTM}	u_{exact}	Absolute error $\lvert u_{\text{exact}} - u_{\text{KHDTM}} \rvert$
0.00	0.70711	0.70711	0
0.02	0.71414	0.71414	$5.0793 \cdot 10^{-9}$
0.04	0.72110	0.72110	$8.2374 \cdot 10^{-8}$
0.06	0.72799	0.72799	$4.2249 \cdot 10^{-7}$
0.08	0.73479	0.73479	$1.3522 \cdot 10^{-6}$
0.1	0.74151	0.74151	$3.3415 \cdot 10^{-6}$

Table 2

Numerical values of the approximate solution and exact solution for Example 2

x	$\alpha = 2$ u_{KHDTM}	u_{exact}	Absolute error $\lvert u_{\text{exact}} - u_{\text{KHDTM}} \rvert$
0.00	0.64359	0.64359	0
0.02	0.64344	0.64344	$3.2888 \cdot 10^{-8}$
0.04	0.64299	0.64299	$5.2585 \cdot 10^{-7}$
0.06	0.64224	0.64224	$2.6590 \cdot 10^{-6}$
0.08	0.64118	0.64119	$8.3902 \cdot 10^{-6}$
0.1	0.63982	0.63984	$2.0441 \cdot 10^{-5}$

7. Conclusions. In this article, a new hybrid method called Khalouta differential transform method (KHDTM) has been proposed to find the solution of the nonlinear fractional Liénard equation involving the Caputo fractional derivative. The method is described and illustrated by two numerical examples. The results were compared with those available in the literature. The obtained results reveal that the proposed method is a very effective and simple tool to solve this type of equations. Therefore, we can conclude that this method can be used to obtain fast convergent series solutions for the different types of nonlinear fractional differential equations.

Competing interests. We declare that there are no conflicts of interest regarding authorship and publication of this article.

Authors' contributions and responsibilities. All authors participated in the development of the article's concept and in writing the manuscript. The authors bear full responsibility for submitting the final manuscript for publication. The final version of the manuscript was approved by all authors.

Funding. The research was conducted without financial support.

References

1. Iyiola O. S, Zaman F. D. A fractional diffusion equation model for cancer tumor, *AIP Advances*, 2014, vol. 4, no. 10, 107121. DOI: https://doi.org/10.1063/1.4898331.
2. Khan H., Tunç C., Khan R.A., et al. Approximate analytical solutions of space-fractional telegraph equations by Sumudu Adomian decomposition method, *Appl. Appl. Math*, 2018, vol. 3, no. 2, pp. 781–802. https://digitalcommons.pvamu.edu/aam/vol13/iss2/12.
3. Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J. *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, North Holland Mathematics Studies, vol. 204. Amsterdam, Elsevier, 2006, xv+523 pp. DOI: https://doi.org/10.1016/s0304-0208(06)x8001-5. EDN: YZECAT.
4. Monje C. A., Chen Y. Q., Vinagre B. M., et al. *Fractional-order Systems and Controls: Fundamentals and Applications*, Advances in Industrial Control. London, Springer, 2010, xxvi+414 pp. DOI: https://doi.org/10.1007/978-1-84996-335-0.
5. Podlubny I. *Fractional Differential Equations. An introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications*, Mathematics in Science and Engineering, vol. 198. San Diego, CA, Academic Press, 1999, xxiv+340 pp.
6. Pu Y. F. Fractional differential analysis for texture of digital image, *J. Algorithms Comput. Technol.*, 2007, vol. 1, no. 3, pp. 357–380. DOI: https://doi.org/10.1260/174830107782424075.
7. Sun H. G., Zhang Y., Baleanu D., et al. A new collection of real world applications of fractional calculus in science and engineering, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, 2018, vol. 64, pp. 213–231. DOI: https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2018.04.019.
8. Tarasov V. E., Tarasova V. V. Time-dependent fractional dynamics with memory in quantum and economic physics, *Ann. Phys.*, 2017, vol. 383, pp. 579–599. DOI: https://doi.org/10.1016/j.aop.2017.05.017.
9. Zhou Y., Peng L. Weak solution of the time-fractional Navier–Stokes equations and optimal control, *Comput. Math. Appl.*, 2017, vol. 73, no. 6, pp. 1016–1027. DOI: https://doi.org/10.1016/j.camwa.2016.07.007.
10. Guo P. The Adomian decomposition method for a type of fractional differential equations, *J. Appl. Math. Phys.*, 2019, vol. 7, no. 10, pp. 2459–2466. DOI: https://doi.org/10.4236/jamp.2019.710166.
11. El-Said A., Hammad D. A reliable treatment of homotopy perturbation method for the sine-Gordon equation of arbitrary (fractional) order, *J. Fract. Calc. Appl.*, 2012, vol. 2, 1.
12. Al-Zou'bi H., Zurigat H. Solving nonlinear fractional differential equations using multi-step homotopy analysis method, *An. Univ. Craiova, Ser. Mat. Inf.*, 2014, vol. 41, no. 2, pp. 190–199.
13. Khalouta A. On the solutions of nonlinear Caputo–Fabrizio fractional partial differential equations arising in applied mathematics, *J. Prime Res. Math.*, 2022, vol. 18, no. 2, pp. 42–54.

14. Khalouta A. A novel representation of numerical solution for fractional Bratu-type equation, *Adv. Stud.: Euro-Tbil. Math. J.*, 2022, vol. 15, no. 1, pp. 93–109. DOI: https://doi.org/10.32513/asetmj/19322008207.
15. Liénard A. Étude des oscillations entreténues, *Revue Générale De L'Electricité*, 1928, vol. 23, pp. 946–954.
16. Guckenheimer J. Dynamics of the van der Pol equation, *IEEE Trans. Circuits Syst.*, 1980, vol. 27, pp. 983–989. DOI: https://doi.org/10.1109/TCS.1980.1084738.
17. Zhang Z. F., Ding T., Huang H. W., Dong Z. X. *Qualitative Theory of Differential Equations*. Peking, China, Science Press, 1985.
18. Feng Z. On explicit exact solutions for the Liénard equation and its applications, *Phys. Lett. A*, 2002, vol. 293, no. 1–2, pp. 50–56. DOI: https://doi.org/10.1016/S0375-9601(01)00823-4.
19. Khalouta A. A new exponential type kernel integral transform: Khalouta transform and its applications, *Math. Montisnigri*, 2023, vol. 57, pp. 5–23. DOI: https://doi.org/10.20948/mathmontis-2023-57-1.
20. Cîrnu M., Frumosu F. Initial value problems for nonlinear differential equations solved by differential transform method, *J. Inf. Syst. Oper. Manag.*, 2009, vol. 3, no. 2, pp. 102–107.
21. Moon S., Bhosale A., Gajbhiye P., Lonare G. Solution of non-linear equations by using differential transform method, *Int. J. Math. Stat. Inv.*, 2014, vol. 2, no. 3, pp. 78–82.
22. Khalouta A. A new analytical series solution with convergence for non-linear fractional Liénard's equations with Caputo fractional derivative, *Kyungpook Math. J.*, 2022, vol. 62, pp. 583–593. DOI: https://doi.org/10.5666/KMJ.2022.62.3.583.

Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2024. Т. 28, № 2. С. 207–222
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu2063
EDN: ATZKZR

УДК 519.642.2

Новое применение метода дифференциального преобразования Халуты и анализ сходимости для решения нелинейного дробного уравнения Льенара

L. Chetioui, A. Khalouta

Université Ferhat Abbas de Sétif 1, Sétif, 19000, Algeria.

Аннотация

Предлагается новый гибридный численный метод с использованием производной Капуто для решения нелинейного дробного уравнения Льенара — метод дифференциального преобразования Халуты. Доказана теорема сходимости данного метода при определенных условиях.

Метод дифференциального преобразования Халуты представляет собой полуаналитическую технику, объединяющую два мощных подхода: метод преобразования Халуты и метод дифференциального преобразования. Основное преимущество этого метода заключается в том, что он позволяет очень быстро находить решения и не требует линеаризации, возмущения или каких-либо других предположений. Предложенный метод подробно описан, а его эффективность продемонстрирована на двух числовых примерах. Результаты вычислений хорошо согласуются с точными решениями, что подтверждает надежность и эффективность предложенного подхода.

Ключевые слова: дробное уравнение Льенара, дробная производная Капуто, метод преобразования Халуты, метод дифференциального преобразования, приближенное решение.

Получение: 11 сентября 2023 г. / Исправление: 22 апреля 2024 г. / Принятие: 13 мая 2024 г. / Публикация онлайн: 26 августа 2024 г.

Дифференциальные уравнения и математическая физика
Научная статья

Образец для цитирования
Chetioui L., Khalouta A. A new application of Khalouta differential transform method and convergence analysis to solve nonlinear fractional Liénard equation, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2024, vol. 28, no. 2, pp. 207–222. EDN: ATZKZR. DOI: 10.14498/vsgtu2063.

Сведения об авторах

Lina Chetioui; Lab. of Fundamental Mathematics and Numerical; Dept. of Mathematics; Faculty of Sciences; e-mail: lina.chetioui@univ-setif.dz

Ali Khalouta https://orcid.org/0000-0003-1370-3189
Lab. of Fundamental Mathematics and Numerical; Dept. of Mathematics; Faculty of Sciences; e-mail: ali.khalouta@univ-setif.dz

Конкурирующие интересы. Заявляем, что в отношении авторства и публикации этой статьи конфликта интересов не имеем.

Авторская ответственность. Все авторы принимали участие в разработке концепции статьи и в написании рукописи. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

Финансирование. Исследование выполнено без финансовой поддержки.

Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2024, vol. 28, no. 2, pp. 223–246
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu2055

MSC: 35R11, 35Q91

Approximate analytical solutions of the nonlinear fractional order financial model by two efficient methods with a comparison study

***M. I. Liaqat*[1,2], *A. Khan*[2], *A. Irshad*[2], *A. Akgül*[3,4,5], *E. Prosviryakov*[6,7]**

[1] Government College University, Lahore, 54600, Pakistan.
[2] National College of Business Administration & Economics, Lahore, 54660, Pakistan.
[3] Lebanese American University, Beirut, 1102 2801, Lebanon.
[4] Siirt University, Siirt, 56100, Turkey.
[5] Near East University, Nicosia, 99138, Turkey.
[6] Ural Federal University, Ekaterinburg, 620137, Russian Federation.
[7] Institute of Engineering Science, RAS (Ural Branch), Ekaterinburg, 620049, Russian Federation.

Abstract

The financial system has become prominent and important in global economics, because the key to stabilizing the economy is to secure or control the financial system or market.

The goal of this study is to determine whether or not the approximate analytical series solutions obtained by the residual power series method and Elzaki transform decomposition method of the fractional nonlinear financial model satisfy economic theory. The fractional derivative is used in the sense of the Caputo derivative.

The results are depicted numerically and in figures that show the behavior of the approximate solutions of the interest rate, investment demand, and price index. Both methods yielded results in accordance with economic theory, which established that researchers could apply these two methods to solve various types of fractional nonlinear problems that arise in financial systems.

Differential Equations and Mathematical Physics
Research Article

Please cite this article in press as:
Liaqat M. I., Khan A., Irshad A., Akgül A., Prosviryakov E. Approximate analytical solutions of the nonlinear fractional order financial model by two efficient methods with a comparison study, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2024, vol. 28, no. 2, pp. 223–246. EDN: BOLMJW. DOI: 10.14498/vsgtu2055.

Authors' Details:

Muhammad Imran Liaqat https://orcid.org/0000-0002-5732-9689
PhD Student, Abdus Salam School of Mathematical Sciences[1]; Lecturer, Dept. of Mathematics[2]; e-mail: imranliaqat50@yahoo.com

Adnan Khan https://orcid.org/0000-0002-1490-8576
Full Professor, Dept. of Mathematics[2]; e-mail: adnankhantariq@ncbae.edu.pk

Alia Irshad https://orcid.org/0009-0002-2282-0627
Lecturer, Dept. of Mathematics[2]; e-mail: aaliairshad15@gmail.com

Keywords: approximate solutions, fractional nonlinear financial model, residual power series method, Elzaki transform decomposition method.

Received: 10th August, 2023 / Revised: 27th March, 2024 /
Accepted: 26th May, 2024 / First online: 11th September, 2024

1. Introduction. Fractional calculus deals with fractional or even complex-order derivatives and integrations. Fractional calculus was founded by two mathematicians, Leibniz and L'Hospital, and its official birthday is September 30, 1695. Due to its broad use in disciplines like image processing, biology, engineering, entropy theory, physics, biochemistry, fluid mechanics, and economic systems, fractional calculus has attracted the attention of several scientists and researchers in recent years [1–4]. Despite the numerous approaches to defining fractional derivatives, not all of them are routinely applied. Atangana–Baleanu, Riemann–Liouville, Caputo–Fabrizio, and Caputo are the most commonly used operators [5–8]. The Caputo derivative is the most appropriate fractional operator to be used in modeling real-world problems. The Caputo derivative is useful for modeling phenomena that take account of interactions within the past and also problems with non-local properties. One of the main advantages of the Caputo operator over the Riemann–Liouville fractional operator is that the Caputo definition of fractional derivatives is bounded, which means that the derivative of a constant is equal to zero. The definition also offers initial conditions with a clear physical interpretation [9–11].

With the help of mathematical models, a wide range of phenomena and processes can be described. There are occurrences across economic disciplines that, when modeled mathematically, are found to be differential equations. Fractional differential equations can model and analyze complex structures with complex non-linear processes and higher-order behaviors, making them sometimes a better choice for modeling than integer-order differential equations. There are primarily two reasons for this. First, we can choose any order for the fractional derivative rather than being restricted to an integer order, and secondly, when the mechanism has long-term memory, fractional differential equations are advantageous based on both past and present circumstances.

Several studies of the financial system have been conducted using ordinary and fractional-order derivatives. Baskonus *et al.* [12] considered a fractional-order macroeconomic system with variable household, and foreign capital inflows. For numerical simulations, the modified Adams–Bashforth algorithm is used. E. Bonyah *et al.* [13] considered the IS-LM macroeconomic system with Caputo and Atangana–Baleanu fractional-order derivatives. For the numerical solution, a modified Asams–Bashforth method has been used. S. David *et al.* [14] proposed a

Ali Akgül https://orcid.org/0000-0001-9832-1424
PhD in Math, Full Professor; Dept. of Computer Science and Mathematics[3]; Dept. of Mathematics, Art and Science Faculty[4]; Dept. of Mathematics, Mathematics Research Center[5]; e-mail: aliakgul00727@gmail.com

Evgenii Yu. Prosviryakov https://orcid.org/0000-0002-2349-7801
Dr. Phys. & Math. Sci.; Dept. of Information Technologies and Control Systems[6]; Sect. of Nonlinear Vortex Hydrodynamics[7]; e-mail: evgen_pros@mail.ru

model involving a fractional order system containing the public sector deficit, interest rate, private investment, and price index. In this study, the Adams scheme has been used for the numerical solution. K. Owolabi *et al.* [15] discussed a financial system and found approximate solutions using the Chebyshev spectral method. B. Xin and Y. Li [16] investigated a fractional-order financial system and studied the numerical solution with the Adams–Bashforth–Moulton predictor-corrector scheme under the Caputo fractional derivative.

The fractional differential equations provide solutions that are important and practical. As a result, the solutions of the fractional differential equations have received a lot of attention. Since the majority of nonlinear fractional differential equations lack exact solutions, approximate analytical techniques have been developed to locate approximate solutions. In the last few years, several methods have been developed to establish approximate solutions to fractional differential equations [17–23]. The residual power series method is a very powerful method in terms of constructing power series solutions to partial and ordinary fractional differential equations. The Elzaki transform decomposition method is a combination of the Adomian decomposition method and the Elzaki transform. The Elzaki transform decomposition methodalso provides the solution in a series form that converges to the exact solution. Many fractional differential equations have been successfully solved by residual power series method and Elzaki transform decomposition method [24–27].

We consider the following nonlinear financial model [28]:

$$\begin{aligned} D_t^\alpha L(t) &= N(t) + L(t)M(t) - aL(t), \\ D_t^\alpha M(t) &= 1 - bM(t) - L(t)L(t), \\ D_t^\alpha N(t) &= d - L(t) - cN(t), \end{aligned} \tag{1}$$

with the following initial conditions:

$$L(0) = L_0, \quad M(0) = M_0, \quad N(0) = N_0, \tag{2}$$

where time-dependent variables $L(t)$, $M(t)$, and $N(t)$ represent interest rate, investment demand, and price index, respectively. Furthermore, the saving coefficient is represented by a, b stands for the cost per investment, c indicates the elasticity of market demand or the elasticity of demand with respect to the rate of change in demand, and d represents the critical minimum interest rate.

The two different systematic methods, residual power series method and Elzaki transform decomposition method, in the sense of Caputo fractional derivative, are applied to the above system to discuss and analyze the different behaviors of the said parameters. The obtained simulated results show the behavior of the interest rate, investment demand, price index, and inflation rate. The results obtained by both methods are consistent with economic theory. It is demonstrated that the proposed methods are reliable, efficient, and simple to apply to all types of fractional nonlinear problems encountered in science, technology, and economic systems.

The rest of the paper is organized in such a manner. In Sect. 2, we provided some fundamental definitions and properties. We used residual power series method to approximate the solution of the fractional-order nonlinear financial model in Sect. 3. Furthermore, the graphical and numerical results are studied in the same section. In Sect. 4, the same model is solved by Elzaki transform decomposition method, with graphical and numerical simulations of the results discussed. The approximate solutions obtained by both methods are compared in the same section. The last section presented the conclusion of the whole work.

2. Preliminaries. In this section, we go over some basic concepts, definitions, and theorems of Caputo fractional derivative and Elzaki transform that will be useful in this paper.

Definition 1. The Caputo fractional derivative of order $\alpha > 0$ is given by [29]:

$$D_t^\alpha \vartheta(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \displaystyle\int_w^t (t-w)^{n-\alpha-1} \frac{d^n}{dw^n}\vartheta(w)dw, & n-1 < \alpha < n, \\ \dfrac{d^n}{dt^n}\vartheta(t), & \alpha = n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

The following properties of Caputo fractional derivative are also considered:

(i) $D_t^\alpha C = 0$, $C \in \mathbb{R}$;

(ii) $D_t^\alpha t^q = \dfrac{\Gamma(q+1)}{\Gamma(q+1-\alpha)} t^{q-\alpha}$, $n-1 < \alpha \leqslant n$, $q > n-1$, $n \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbb{R}$;

(iii) $D_t^\alpha (C_1\vartheta_1(t) + C_2\vartheta_2(t)) = C_1 D_t^\alpha \vartheta_1(t) + C_2 D_t^\alpha \vartheta_2(t)$.

Definition 2. A power series representation of the form [30]:

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n (t-t_0)^{n\alpha} = C_0 + C_1(t-t_0)^\alpha + C_2(t-t_0)^{2\alpha} + \cdots ,$$

is called a fractional power series about t_0, where t is a variable and C_n are the coefficients of the series.

Theorem 1. *If $\vartheta(t)$ has an fractional power series representation, then the coefficients C_n will have the following form* [31]:

$$C_n = \frac{D^{n\alpha}\vartheta(t)\mid_{t=t_0}}{\Gamma(n\alpha+1)}.$$

Definition 3 [32]. The Elzaki transform over the set of functions

$$H = \left\{ \vartheta(t) : \exists\, M,\ h_1,\ h_2 > 0,\ |\vartheta(t)| < Me^{|t|/h_j}, \quad t \in (-1)^j, \quad X \in [0,\ \infty) \right\}$$

is define as

$$T(s) = E[\vartheta(t)] = s\int_s^\infty e^{-t/s}\vartheta(t)dt, \quad t \geqslant 0, \quad h_1 \leqslant s \leqslant h_2.$$

Theorem 2. *The Elzaki transform in the context of Caputo fractional derivative is defined as follows* [33]:

$$E[D_t^\alpha \vartheta(t)] = \frac{T(s)}{s^\alpha} - \sum_{i=0}^{n-1} s^{2-\alpha+i}\vartheta^i(0), \quad n-1 < \alpha \leqslant n.$$

The primary advantages of Elzaki transform are listed below [34, 35].

(i) The initial value problems can be easily solved with Elzaki transform with minimal computational effort.
(ii) The Elzaki transform can be used to solve problems without resorting to the frequency domain because it possesses unit-preserving features.
(iii) It can be used to solve a large number of nonlinear differential equations with variable coefficients, specifically the time-fractional wavelike equations.
(iv) It may be used to solve a wide range of challenging issues in engineering, physics, fluid mechanics, chemistry, and dynamics, including issues with Maxwell's equations and fluid flow.

The Elzaki transform of several functions can be seen in the Table 1 [36].

Table 1

Elzaki Transform of Some Functions

$\vartheta(t)$	$E[\vartheta(t)] = T(s)$
1	s^2
t	s^3
t^q	$q!s^{q+2}$
$\frac{t^{q-1}}{\Gamma(q)},\ q > 0$	s^{q+1}

3. Residual power series method for the solution of the nonlinear financial model. This section provides the algorithms for the suggested method to solve the nonlinear financial model. First of all, consider the series solutions of Eq. (1), which have the following form:

$$
\begin{aligned}
L(t) &= L_0 + \sum_{n=1}^{\infty} L_n \frac{t^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha+1)},\\
M(t) &= M_0 + \sum_{n=1}^{\infty} M_n \frac{t^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha+1)},\\
N(t) &= N_0 + \sum_{n=1}^{\infty} N_n \frac{t^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha+1)}.
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Using the initial conditions, which are given in Eq. (2), we have the first coefficients of the series solutions:

$$L_0 = L(0), \quad M_0 = M(0), \quad N_0 = N(0).$$

As a result, Eq. (3) can be rewritten as follows

$$
\begin{aligned}
L(t) &= L(0) + \sum_{n=1}^{\infty} L_n \frac{t^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha+1)},\\
M(t) &= M(0) \sum_{n=1}^{\infty} M_n \frac{t^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha+1)},\\
N(t) &= N(0) + \sum_{n=1}^{\infty} N_n \frac{t^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha+1)}.
\end{aligned}
$$

The kth truncated series for $L(t)$, $M(t)$, and $N(t)$ are introduced as follows:

$$L_k(t) = L(0) + \sum_{n=1}^{k} L_n \frac{t^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha+1)},$$
$$M_k(t) = M(0) \sum_{n=1}^{k} M_n \frac{t^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha+1)},$$
$$N_k(t) = N(0) + \sum_{n=1}^{k} N_n \frac{t^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha+1)}.$$

The following are the residual functions for $L(t)$, $M(t)$, and $N(t)$:

$$\begin{aligned}\operatorname{Res} L(t) &= D_t^{\alpha} L(t) - N(t) - L(t)M(t) + aL(t),\\ \operatorname{Res} M(t) &= D_t^{\alpha} M(t) - 1 + bM(t) + L(t)L(t),\\ \operatorname{Res} N(t) &= D_t^{\alpha} N(t) - d + L(t) + cN(t).\end{aligned}$$

Now we define the kth residual function for $L(t)$, $M(t)$, and $N(t)$ in the following form:

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}_k L(t) &= D_t^{\alpha} L_k(t) - N_k(t) - L_k(t)M_k(t) + aL_k(t),\\ \operatorname{Res}_k M(t) &= D_t^{\alpha} M_k(t) - 1 + bM_k(t) + L_k(t)L_k(t),\\ \operatorname{Res}_k N(t) &= D_t^{\alpha} N_k(t) - d + L_k(t) + cN_k(t).\end{aligned}$$

By using the basic features of the residual power series method, we have the following results [29–31]:

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty} \operatorname{Res}_k L(t) &= \operatorname{Res} L(t),\\ \lim_{k\to\infty} \operatorname{Res}_k M(t) &= \operatorname{Res} M(t),\\ \lim_{k\to\infty} \operatorname{Res}_k N(t) &= \operatorname{Res} N(t).\end{aligned}$$

and

$$D_t^{(k-1)\alpha} \operatorname{Res}_k L(t) = 0, \quad D_t^{(k-1)\alpha} \operatorname{Res}_k M(t) = 0, \quad D_t^{(k-1)\alpha} \operatorname{Res}_k N(t) = 0. \quad (4)$$

The kth truncated series of $L(t)$, $M(t)$, and $N(t)$ are substituted into Eq. (4), and the resulting algebraic systems are solved to get the coefficients of the series solutions, which are defined in Eq. (3).

By using the procedure for $k = 1$, we get the following results:

$$\begin{aligned}L_1 &= L(0) + L(0)M(0) - aL(0),\\ M_1 &= 1 - bM(0) - L(0)L(0),\\ N_1 &= d - L(0) - cN(0).\end{aligned}$$

When $k = 2$, the values of the coefficients L_2, M_2, and N_2 are obtained as follows:

$$L_2 = N_1 + M(0)L_1 + M_1 L(0) - aL_1,$$

$$\begin{aligned} M_2 = & -bM_1 - L(0)L_1 - L_1L(0), \\ N_2 = & -L_1 - cN_1. \end{aligned}$$

Likewise, for $k = 3$, we have

$$\begin{aligned} L_3 &= N_2 + \Big(L(0)M_2 + L_1M_1\frac{\Gamma(2\alpha+1)}{(\Gamma(2\alpha+1))^2} + L_2M(0)\Big) - aL_2, \\ M_3 &= -bM_2 - \Big(L(0)L_2 + \frac{\Gamma(2\alpha+1)}{(\Gamma(2\alpha+1))^2}L_1L_1 + L(0)L_2\Big), \\ N_3 &= -L_2 - cN_2, \end{aligned}$$

By using the same steps, the values of the coefficients of L_4, M_4, and N_4 for $k = 4$ are as follows:

$$\begin{aligned} L_4 = N_3 &+ \Big(L(0)M_3 + L_1M_2\frac{\Gamma(3\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(2\alpha+1)} + \\ &+ L_2M_1\frac{\Gamma(3\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(2\alpha+1)} + L_3M(0)\Big) - aL_3, \\ M_4 = & -bM_3 - \Big(L(0)L_3 + L_1L_2\frac{\Gamma(3\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(2\alpha+1)} + \\ &+ L_2L_1\frac{\Gamma(3\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(2\alpha+1)} + L_3L(0)\Big), \\ N_4 = & -L_3 - cN_3. \end{aligned}$$

The 4-step approximate solution of $L(t)$ established by using the residual power series method is given below:

$$\begin{aligned} L^{(4)}(t) = L(0) &+ \big(L(0) + L(0)M(0) - aL(0)\big)\frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \\ &+ \big(N_1 + M(0)L_1 + M_1L(0) - aL_1\big)\frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} + \\ &+ \Big(N_2 + L(0)M_2 + L_1M_1\frac{\Gamma(2\alpha+1)}{(\Gamma(2\alpha+1))^2} + L_2M(0) - aL_2\Big)\frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha+1)} + \\ &+ \Big(N_3 + L(0)M_3 + L_1M_2\frac{\Gamma(3\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(2\alpha+1)} + \\ &+ L_2M_1\frac{\Gamma(3\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(2\alpha+1)} + L_3M(0) - aL_3\Big)\frac{t^{4\alpha}}{\Gamma(4\alpha+1)}. \end{aligned} \tag{5}$$

The 4-step approximate solution of $M(t)$ obtained by using the residual power series method is shown below:

$$\begin{aligned} M^{(4)}(t) = M(0) &+ \big(1 - bM(0) - L(0)L(0)\big)\frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \\ &+ \big(-bM_1 - L(0)L_1 - L_1L(0)\big)\frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} + \end{aligned}$$

$$+\Big(-bM_2-\Big(L(0)L_2+\frac{\Gamma(2\alpha+1)}{(\Gamma(2\alpha+1))^2}L_1L_1+L(0)L_2\Big)\Big)\frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha+1)}+$$
$$+\Big(-bM_3-\Big(L(0)L_3+L_1L_2\frac{\Gamma(3\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(2\alpha+1)}+$$
$$+L_2L_1\frac{\Gamma(3\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(2\alpha+1)}+L_3L(0)\Big)\Big)\frac{t^{4\alpha}}{\Gamma(4\alpha+1)}. \quad (6)$$

The residual power series method yielded the following 4-step approximate solution to $N(t)$:

$$N^{(4)}(t)=N(0)+\big(d-L(0)-cN(0)\big)\frac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}+\big(-L_1-cN_1\big)\frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)}+$$
$$+\big(-L_2-cN_2\big)\frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha+1)}+\big(-L_3-cN_3\big)\frac{t^{4\alpha}}{\Gamma(4\alpha+1)}. \quad (7)$$

THEOREM 3. *Let ϖ be a Banach space, then the series solution of the system given in Eqs.* (1) *and* (2) *converges, if there exists $\hbar>0$ such that*

$$\|L_n\|\leqslant\hbar\|L_{n-1}\|,\quad \forall\, n\in\mathbb{N}.$$

Proof. Consider the following series

$$U_n=L_0(t)+L_1(t)+L_2(t)+\cdots+L_n(t).$$

We must demonstrate that a series of nth partial sums U_n are Cauchy sequences in the Banach space ϖ.

For this, we have to consider

$$\|U_{n+1}-U_n\|\leqslant\|L_{n+1}\|\leqslant\hbar\|L_n\|\leqslant\hbar^2\|L_{n-1}\|\cdots\leqslant\hbar^{n+1}\|L_0\|,\ n=0,1,2,3,\ldots.$$

For each n, $m\in\mathbb{N}$ and $n\geqslant m$ by using triangle inequality, we get

$$\|U_n-U_m\|=\|U_{m+1}-U_m+U_{m+2}-U_{m+1}+\cdots+U_n-U_{n-1}\|\leqslant$$
$$\leqslant\|U_{m+1}-U_m\|+\|U_m-U_{m-1}\|+\cdots+\|U_n-U_{n-1}\|\leqslant$$
$$\leqslant\hbar^{m+1}\|L_0\|+\hbar^{m+2}\|L_0\|+\cdots+\hbar^{n}\|L_0\|=$$
$$=\hbar^{m+1}(1+\hbar+\hbar^2+\cdots+\hbar^{n-m-1})\|L_0\|=$$
$$=\hbar^{m+1}\Big(\frac{1-\hbar^{n-m}}{1-\hbar}\Big)\|L_0\|.$$

Since, we have $0<\hbar<1$, and hence, $1-\hbar^{n-m}\leqslant 1$. Therefore, we can obtain the following result:

$$\|U_n-U_m\|\leqslant\frac{\hbar^{m+1}}{1-\hbar}\|L_0\|.$$

Because L_0 is bound, we get the following result:

$$\lim_{m,n\to\infty}\|U_n-U_m\|=0.$$

As a result, the sequence U_n is a Cauchy series in the Banach space ϖ, implying that the series solutions defined in Eq. (3) are convergent. $\square$

In the following subsection, the approximate solutions derived by residual power series method to the model are analyzed and evaluated based on their graphical and numerical results.

3.1. Graphical and numerical results of approximate solutions attained by residual power series method. To illustrate the effectiveness and efficiency of the residual power series method in handling such fractional-order financial models, we provide graphical and numerical results for the solution of the model in Eqs. (1) and (2) in this section. By using the following values of the parameter variables: $a = 3$, $b = 0.1$, $c = 1$, and $d = 0.9$ and the initial conditions $L(0) = 0.1$, $M(0) = 4.0$, and $N(0) = 0.5$ [28] in Eqs. (5), (6), and (7) we obtained the 4th step approximate solutions for the model at various fractional derivative values, such as $\alpha = 0.5$, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, and 1.0. Fig. 1 depicts two-dimensional graphs of the approximate solutions obtained from four residual power series method iterations at $\alpha = 0.5$, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, and 1.0 for t in the interval $[0, 2.0]$. Fig. 2 shows two-dimensional graphs of the approximate solutions extracted from four residual power series method iterations at different $d = 0.6$, 0.7, 0.8, and 0.9 values for t in the interval $[0, 2.0]$. Tables 2–4 show how the 4th step approximate solutions of $L(t)$, $M(t)$, and $N(t)$ obtained by residual power series method behave at different $\alpha = 0.5$, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, and 1.0 fractional derivative values for t in the interval $[0, 2.0]$.

The interest rate plays a vital role in the economy, and the value of an investment depends on it. Usually, a higher interest rate causes a reduction in investment because it increases the cost of borrowing. For this reason, the required investment must have a higher rate of return to be profitable. Borrowing money from a source becomes more expensive as interest rates rise. Inflation and investment rates are typically inversely related. In general, if the interest rate is lower, more people are able to borrow more money as compared to when interest rates are high. The result is that consumers have to spend more money, which causes the economy to grow and inflation to increase. In the opposite case, when interest rates increase, the inflation rate decreases. The approximate solutions produced by the residual power series method, as seen in the graphs and numerical data, are consistent with the financial system's actual macroeconomic behavior, and it is proved that the suggested method is suitable for solving the fractional-order financial models.

The following is the 4th step approximate solutions produced by residual power series method in terms of interest rate $L(t)$, investment demand $M(t)$, and price index $N(t)$ at $\alpha = 0.5$, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1.0, obtained by using the parametric values in the in Eqs. (5), (6), and (7).

At $\alpha = 0.5$, the 4th step approximate solutions are as follows:

$$L^{(4)}(t) = 0.1 + 0.677027t^{0.5} + 0.959000t^{1.0} + 0.144302t^{1.5} + 0.874657t^{2.0},$$

$$M^{(4)}(t) = 4 + 0.66574t^{0.5} - 0.179t^{1.0} - 0.475624t^{1.5} - 0.505441t^{2.0},$$

$$N^{(4)}(t) = 0.5 + 0.338513t^{0.5} - 1.2t^{1.0} + 0.181293t^{1.5} - 0.216413399t^{2.0}.$$

At $\alpha = 0.6$, the 4th step approximate solutions are as follows:

$$L^{(4)}(t) = 0.1 + 0.671505t^{0.6} + 0.870392t^{1.2} + 0.136979t^{1.8} + 0.660786t^{2.4},$$

Table 2

$L(t)$ behavior in the range $t \in [0, 2.0]$ at $\alpha = 0.5$, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, and 1.0

t	$\alpha = 0.5$	$\alpha = 0.6$	$\alpha = 0.7$	$\alpha = 0.8$	$\alpha = 0.9$	$\alpha = 1.0$
0.2	0.642469	0.503275	0.404638	0.320780	0.272708	0.240003
0.4	1.088240	0.876979	0.716518	0.552406	0.471411	0.425095
0.6	1.581770	1.314300	1.095890	0.832336	0.716589	0.666932
0.8	2.135790	1.831740	1.562476	1.179275	1.024950	0.982555
1.0	2.754990	2.439660	2.132830	1.611846	1.416110	1.394364
1.2	3.441640	3.146090	2.822345	2.149423	1.912660	1.930140
1.4	4.197040	3.957830	3.645670	2.812123	2.539980	2.623050
1.6	5.021950	4.880850	4.617010	3.620740	3.326040	3.511652
1.8	5.916900	5.920600	5.750156	4.596730	4.301320	4.639834
2.0	6.882240	7.082080	7.058590	5.762100	5.498620	6.056895

Table 3

$M(t)$ behavior in the range $t \in [0, 2.0]$ at $\alpha = 0.5$, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, and 1.0

t	$\alpha = 0.5$	$\alpha = 0.6$	$\alpha = 0.7$	$\alpha = 0.8$	$\alpha = 0.9$	$\alpha = 1.0$
0.2	4.199172	4.1973646	4.180894	4.159291	4.135451	4.113063
0.4	4.148263	4.205674	4.231117	4.240574	4.228614	4.209446
0.6	4.005274	4.121344	4.199727	4.265453	4.280462	4.275915
0.8	3.788453	3.951234	4.083883	4.227631	4.279665	4.295183
1.0	3.505683	3.697482	3.876436	4.117493	4.212061	4.245892
1.2	3.161434	3.358947	3.569064	3.924327	4.061647	4.102654
1.4	2.758584	2.934037	3.153134	3.636665	3.810885	3.836344
1.6	2.299184	2.420867	2.619922	3.242647	3.440891	3.412422
1.8	1.784755	1.817436	1.960761	2.730062	2.931544	2.794341
2.0	1.216475	1.121750	1.167086	2.086464	2.261528	1.940130

Table 4

$N(t)$ behavior in the range $t \in [0, 2.0]$ at $\alpha = 0.5$, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, and 1.0

t	$\alpha = 0.5$	$\alpha = 0.6$	$\alpha = 0.7$	$\alpha = 0.8$	$\alpha = 0.9$	$\alpha = 1.0$
0.2	0.418947	0.474573	0.508046	0.468397	0.486152	0.536275
0.4	0.245333	0.341173	0.413584	0.370349	0.415209	0.525835
0.6	0.048560	0.168099	0.269677	0.229862	0.299468	0.468949
0.8	−0.166006	−0.035799	0.085504	0.053346	0.143062	0.364788
1.0	−0.396607	−0.267489	−0.135871	−0.156992	−0.052677	0.211413
1.2	−0.642496	−0.525861	−0.393721	−0.400998	−0.288163	0.005783
1.4	−0.903323	−0.810637	−0.688464	−0.679756	−0.565099	−0.256245
1.6	−1.178922	−1.121975	−1.021174	−0.995194	−0.886241	−0.579921
1.8	−1.469254	−1.460225	−1.393291	−1.349865	−1.255240	−0.971598
2.0	−1.774152	−1.825914	−1.806562	−1.746792	−1.676565	−1.438723

$$M^{(4)}(t) = 4 + 0.660313t^{0.6} - 0.162461t^{1.2} - 0.400076t^{1.8} - 0.400294t^{2.4},$$
$$N^{(4)[}(t) = 0.5 + 0.335752t^{0.6} - 1.089124t^{1.2} + 0.143753t^{1.8} - 0.157870t^{2.4}.$$

At $\alpha = 0.7$, the 4th step approximate solutions are as follows:

$$L^{(4)}(t) = 0.1 + 0.660328t^{0.7} + 0.772036t^{1.4} + 0.124544t^{2.1} + 0.475926t^{2.8},$$
$$M^{(4)}(t) = 4 + 0.649323t^{0.7} - 0.144103t^{1.4} - 0.325592t^{2.1} - 0.303201t^{2.8},$$
$$N^{(4)}(t) = 0.5 + 0.330164t^{0.7} - 0.966052t^{1.4} + 0.109664t^{2.1} - 0.109647t^{2.8}.$$

At $\alpha = 0.8$, the 4th step approximate solutions are as follows:

$$L^{(4)}(t) = 0.1 + 0.644203t^{0.8} + 0.530909t^{1.6} + 0.0417623t^{2.4} + 0.294969t^{3.2},$$
$$M^{(4)}(t) = 4 + 0.633466t^{0.8} - 0.125208t^{1.6} - 0.243925t^{2.4} - 0.146847t^{3.2},$$

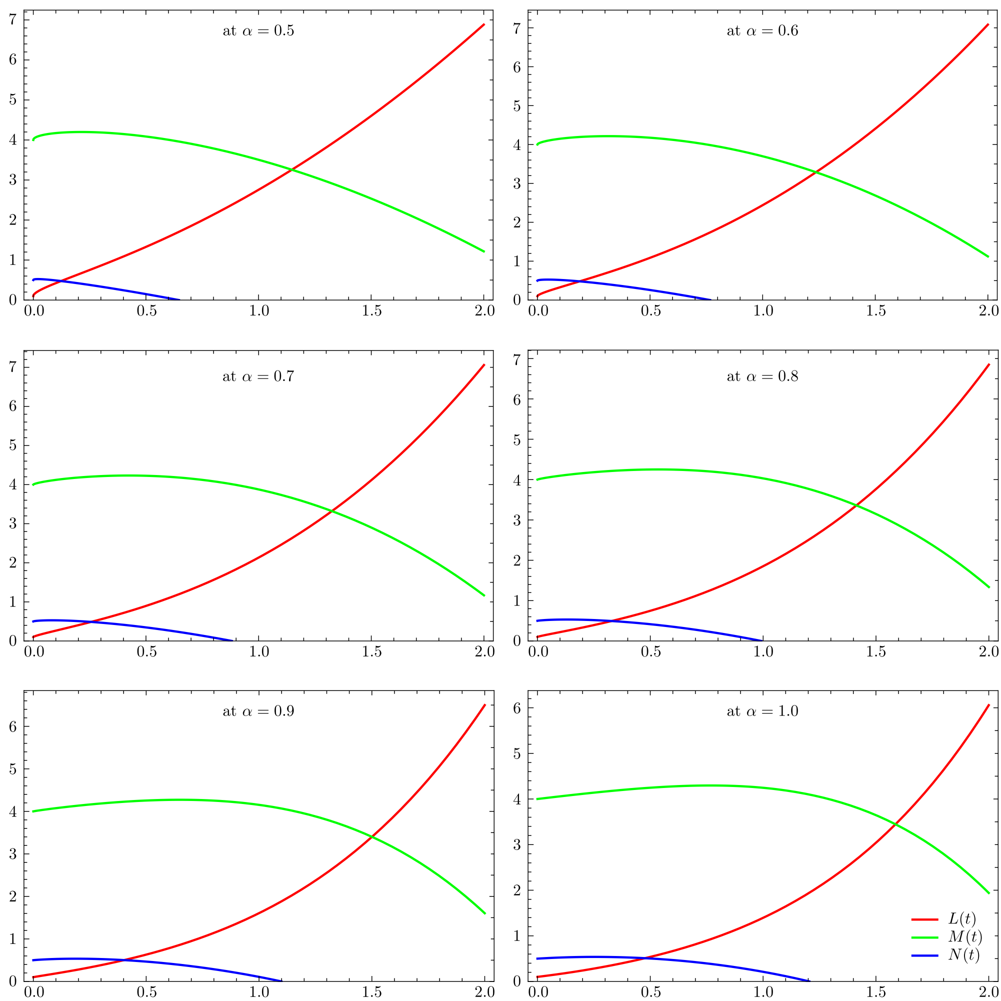
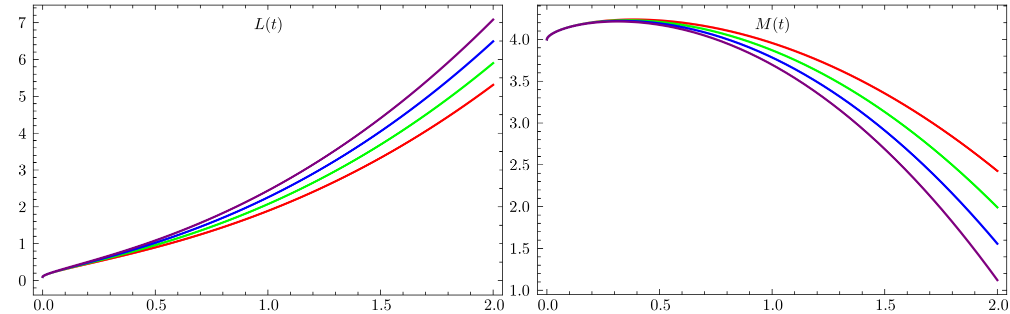


Figure 1. The graphic behavior of the 4th step approximate solutions obtained by residual power series method of $L(t)$, $M(t)$, and $N(t)$ at $\alpha = 0.5$, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, and 1.0



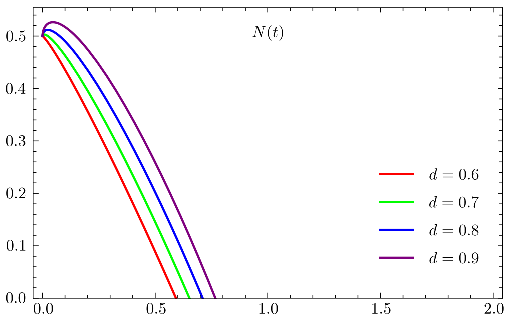


Figure 2. The graphic behavior of the 4th step approximate solutions obtained by residual power series method of $L(t)$, $M(t)$, and $N(t)$ for $d = 0.6$, 0.7, 0.8, and 0.9

$$N^{(4)}(t) = 0.5 + 0.107367t^{0.8} - 0.839381t^{1.6} + 0.147927t^{2.4} - 0.0729051t^{3.2}.$$

At $\alpha = 0.9$, the 4th step approximate solutions is are follows:

$$L^{(4)}(t) = 0.1 + 0.623852t^{0.9} + 0.452731t^{1.8} + 0.0438066t^{2.7} + 0.195725t^{3.6},$$
$$M^{(4)}(t) = 4 + 0.613455t^{0.9} - 0.106771t^{1.8} - 0.18855t^{2.7} - 0.106074t^{3.6},$$
$$N^{(4)}(t) = 0.5 + 0.103975t^{0.9} - 0.715781t^{1.8} + 0.105739t^{2.7} - 0.04661t^{3.6}.$$

At $\alpha = 1.0$, the 4th step approximate solutions are as follows:

$$L^{(4)}(t) = 0.1 + 0.6t + 0.4795t^2 + 0.07485t^3 + 0.140006t^4,$$
$$M^{(4)}(t) = 4 + 0.59t - 0.0895t^2 - 0.148983t^3 - 0.105625t^4,$$
$$N^{(4)}(t) = 0.5 + 0.300001t - 0.6t^2 + 0.040167t^3 - 0.0287555t^4.$$

Following are the two-dimensional graphs of 4th step approximate solutions obtained by residual power series method for the $L^{(4)}(t)$, $M^{(4)}(t)$, and $N^{(4)}(t)$ at $\alpha = 0.5$, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, and 1.0

In the following section, we solved the nonlinear financial model by using the Elzaki transform and Adomian decomposition method.

4. Elzaki transform decomposition method for the solution of the nonlinear financial model. The primary goal of this section is to provide series solutions for the nonlinear financial model using Elzaki transform decomposition method. The main algorithms of Elzaki transform decomposition method are as follows:

– to do so, first apply the Elzaki transform to both sides of the Eq. (1) to convert the given model into algebraic expressions, and then use the inverse Elzaki transform to convert the obtained algebraic expression into the model's real domain;

– in the next step, we provided the series solutions of the model by using the Adomian decomposition method on the algebraic expressions that were attained with the help of Elzaki transform and inverse Elzaki transform.

Following the first step yields the following:

$$\begin{aligned} E[D_t^\alpha L(t)] &= E\big[N(t) + L(t)M(t) - aL(t)\big], \\ E[D_t^\alpha M(t)] &= E\big[1 - bM(t) - L(t)L(t)\big], \\ E[D_t^\alpha N(t]) &= E\big[d - L(t) - cN(t)\big], \end{aligned} \tag{8}$$

Eq. (8) can be represented as follows by using Theorem 2 and the initial conditions:

$$\begin{aligned} E[L(t)] &= 0.1 + u^\alpha E\big[N(t) + L(t)M(t) - aL(t)\big], \\ E[M(t)] &= 4.0 + u^\alpha E\big[1 - bM(t) - L(t)L(t)\big], \\ E[N(t)] &= 0.5 + u^\alpha E\big[d - L(t) - cN(t)\big]. \end{aligned} \tag{9}$$

After performing the inverse Elzaki transform on the Eq. (9) and making some simple calculations, the final results are given below:

$$\begin{aligned} L(t) &= 0.1 + E^{-1}\big[u^\alpha E\big[N(t) + L(t)L(t) - aL(t)\big]\big], \\ M(t) &= 4.0 + E^{-1}\big[u^\alpha E\big[1 - bM(t) - L(t)L(t)\big]\big], \\ N(t) &= 0.5 + E^{-1}\big[u^\alpha E\big[d - L(t) - cN(t)\big]\big]. \end{aligned} \tag{10}$$

Then, using the expansion form shown below, we can obtain solutions of $L(t)$, $M(t)$, and $N(t)$ according to Adomian decomposition method:

$$L(t) = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(t), \quad M(t) = \sum_{n=0}^{\infty} M_n(t), \quad N(t) = \sum_{n=0}^{\infty} N_n(t). \tag{11}$$

By putting Eq. (11) into Eq. (10), we attained the following result:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} L_n(t) &= 0.1 + E^{-1}\left[u^\alpha E\left[\sum_{n=0}^{\infty} N_n(t) + \sum_{n=0}^{\infty} L_n(t) \sum_{n=0}^{\infty} M_n(t) - a \sum_{n=0}^{\infty} L_n(t)\right]\right], \\ \sum_{n=0}^{\infty} M_n(t) &= 4.0 + E^{-1}\left[u^\alpha E\left[1 - b\sum_{n=0}^{\infty} M_n(t) - \sum_{n=0}^{\infty} L_n(t) \sum_{n=0}^{\infty} L_n(t)\right]\right], \\ \sum_{n=0}^{\infty} N_n(t) &= 0.5 + E^{-1}\left[u^\alpha E\left[d - \sum_{n=0}^{\infty} L_n(t) - c\sum_{n=0}^{\infty} N_n(t)\right]\right]. \end{aligned} \tag{12}$$

The model's nonlinear terms are as follows:

$$\sum_{n=0}^{\infty} M_n(t) \sum_{n=0}^{\infty} L_n(t) \quad \text{and} \quad \sum_{n=0}^{\infty} L_n(t) \sum_{n=0}^{\infty} L_n(t),$$

which can be represented by using Adomian decomposition method as follows:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} X_n(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} L_n(t) \sum_{n=0}^{\infty} M_n(t), \\ \sum_{n=0}^{\infty} Y_n(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} L_n(t) \sum_{n=0}^{\infty} L_n(t), \end{aligned} \tag{13}$$

where $\sum\limits_{n=0}^{\infty} X_n(t)$ and $\sum\limits_{n=0}^{\infty} Y_n(t)$ are the nonlinear Adomian polynomials. By the substitution of Eq. (13) into Eq. (12), we have

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} L_n(t) &= 0.1 + E^{-1}\left[u^\alpha E\left[\sum_{n=0}^{\infty} N_n(t) + \sum_{n=0}^{\infty} X_n(t) - a\sum_{n=0}^{\infty} L_n(t)\right]\right],\\
\sum_{n=0}^{\infty} M_n(t) &= 4.0 + E^{-1}\left[u^\alpha E\left[1 - b\sum_{n=0}^{\infty} M_n(t) - \sum_{n=0}^{\infty} Y_n(t)\right]\right],\\
\sum_{n=0}^{\infty} N_n(t) &= 0.5 + E^{-1}\left[u^\alpha E\left[d - \sum_{n=0}^{\infty} L_n(t) - c\sum_{n=0}^{\infty} N_n(t)\right]\right].
\end{aligned} \tag{14}$$

The Adomian polynomial can be determined with the help of the following formulaes:

$$X_n = \frac{1}{\Gamma(n+1)}\frac{d^n}{d\lambda^n}\left[\sum_{i=0}^{n}\lambda^i L_i \sum_{i=0}^{n}\lambda^i M_i\right]_{\lambda=0}, \text{ where } i = 0, 1, 2, \ldots, \tag{15}$$

$$Y_n = \frac{1}{\Gamma(n+1)}\frac{d^n}{d\lambda^n}\left[\sum_{i=0}^{n}\lambda^i L_i \sum_{i=0}^{n}\lambda^i L_i\right]_{\lambda=0}, \text{ where } i = 0, 1, 2, \ldots. \tag{16}$$

Eq. (15) is used to calculate a few terms of the decomposed first nonlinear terms, and these are as follows:

$$\begin{aligned}
X_0 &= L_0 M_0,\\
X_1 &= L_0 M_1(t) + L_1 M_0,\\
X_2 &= L_0 M_2(t) + L_1(t) M_1(t) + L_2(t) M_0.
\end{aligned}$$

Eq. (16) is used to calculate a few terms of the decomposed second nonlinear term, and these are as follows:

$$\begin{aligned}
Y_0 &= L_0 L_0,\\
Y_1 &= L_0 L_1(t) + L_1(t) L_0,\\
Y_2 &= L_0 L_2(t) + L_1(t) L_1(t) + L_2(t) L_0.
\end{aligned}$$

The following approximations are obtained by equating Eq. (14) and using the same parametric values that are used in the previous section.

By corresponding at both ends of Eq. (14), we were able to extract the first term of the expansion solution to Eq. (11):

$$L_1 = \frac{0.6t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}, \quad M_1 = \frac{0.59t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}, \quad N_1 = \frac{0.3t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}.$$

By corresponding at both ends of Eq. (14), we were able to extract the second term of the expansion solution to Eq. (11):

$$L_2 = \frac{0.959t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)}, \quad M_2 = \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} - \frac{0.179t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)},$$

$$N_2 = \frac{0.9t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} - \frac{0.9t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)}.$$

In the same way, we determined the values of L_3, M_3 and N_3 as follows:

$$L_3 = \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} + \frac{0.0411t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha+1)} + \frac{0.354t^{3\alpha}\Gamma(2\alpha+1)}{\Gamma(3\alpha+1)\Gamma(\alpha+1)^2},$$

$$M_3 = \frac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} - \frac{0.1t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} - \frac{0.1739t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha+1)} - \frac{0.36t^{3\alpha}\Gamma(2\alpha+1)}{\Gamma(3\alpha+1)\Gamma(\alpha+1)^2},$$

$$N_3 = \frac{0.9t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} - \frac{0.9t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} - \frac{0.059t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha+1)}.$$

In the same way, the following four terms of the series solution to Eq. (1) were established:

$$L_4 = \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} - \frac{0.09t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha+1)} - \frac{0.167599t^{4\alpha}}{\Gamma(4\alpha+1)} + \frac{0.6t^{3\alpha}\Gamma(2\alpha+1)}{\Gamma(3\alpha+1)\Gamma(\alpha+1)^2} + \\ + \frac{0.318t^{4\alpha}\Gamma(2\alpha+1)}{\Gamma(4\alpha+1)\Gamma(\alpha+1)^2} + \frac{0.45841t^{4\alpha}\Gamma(3\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(2\alpha+1)\Gamma(4\alpha+1)},$$

$$M_4 = \frac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} - \frac{0.3t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} + \frac{0.03t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha+1)} + \frac{0.05217t^{4\alpha}}{\Gamma(4\alpha+1)} + \\ + \frac{0.108t^{4\alpha}\Gamma(2\alpha+1)}{\Gamma(4\alpha+1)\Gamma(\alpha+1)^2} - \frac{1.1508t^{4\alpha}\Gamma(3\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(2\alpha+1)\Gamma(4\alpha+1)},$$

$$N_4 = \frac{0.9t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} - \frac{0.9t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} - \frac{0.1t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha+1)} + \frac{0.0179t^{4\alpha}}{\Gamma(4\alpha+1)} - \\ - \frac{0.354t^{4\alpha}\Gamma(2\alpha+1)}{\Gamma(4\alpha+1)\Gamma(\alpha+1)^2}.$$

Finally, the 4th step approximate solutions obtained by employing the Elzaki transform decomposition method of the $L(t)$, $M(t)$, and $N(t)$ are as follows.

The 4th step approximate solution of $L(t)$ is as below:

$$L^4(t) = 0.1 + \Big(\frac{0.6t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\Big) + \Big(\frac{0.959t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)}\Big) + \\ + \Big(\frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} - \frac{0.09t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha+1)} - \frac{0.167599t^{4\alpha}}{\Gamma(4\alpha+1)} + \frac{0.6t^{3\alpha}\Gamma(2\alpha+1)}{\Gamma(3\alpha+1)\Gamma(\alpha+1)^2} + \\ + \frac{0.318t^{4\alpha}\Gamma(2\alpha+1)}{\Gamma(4\alpha+1)\Gamma(\alpha+1)^2} + \frac{0.45841t^{4\alpha}\Gamma(3\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(2\alpha+1)\Gamma(4\alpha+1)}\Big). \quad (17)$$

The 4th step approximate solution of $M(t)$ is as below:

$$M^4(t) = 4.0 + \Big(\frac{0.59t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\Big) + \Big(\frac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} - \frac{0.179t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)}\Big) + \\ + \Big(\frac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} - \frac{0.1t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} - \frac{0.1739t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha+1)} - \frac{0.36t^{3\alpha}\Gamma(2\alpha+1)}{\Gamma(3\alpha+1)\Gamma(\alpha+1)^2}\Big) +$$

$$+\Big(\frac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}-\frac{0.3t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)}+\frac{0.03t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha+1)}+\frac{0.05217t^{4\alpha}}{\Gamma(4\alpha+1)}+ \\ +\frac{0.108t^{4\alpha}\Gamma(2\alpha+1)}{\Gamma(4\alpha+1)\Gamma(\alpha+1)^2}-\frac{1.1508t^{4\alpha}\Gamma(3\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(2\alpha+1)\Gamma(4\alpha+1)}\Big). \quad (18)$$

The 4th step approximate solution of $N(t)$ is as below:

$$N^4(t)=0.5\Big(\frac{0.3t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\Big)+\Big(\frac{0.9t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}-\frac{0.9t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)}-\frac{0.059t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha+1)}\Big)+ \\ +\Big(\frac{0.9t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}-\frac{0.9t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)}-\frac{0.1t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha+1)}+ \\ +\frac{0.0179t^{4\alpha}}{\Gamma(4\alpha+1)}-\frac{0.354t^{4\alpha}\Gamma(2\alpha+1)}{\Gamma(4\alpha+1)\Gamma(\alpha+1)^2}\Big). \quad (19)$$

Based on their graphical and numerical outcomes, the approximations established by Elzaki transform decomposition method for the nonlinear financial model are reviewed and evaluated in the next subsection.

4.1. Graphical and numerical results of approximate solutions attained by Elzaki transform decomposition method. In this subsection, we give graphical and numerical results for the approximate solutions of the system of fractional differential equations presented in Eqs. (1) and (2) to demonstrate the usefulness and efficiency of the Elzaki transform decomposition method in handling nonlinear models. By using the following values of the parameter variables: $a=3$, $b=0.1$, $c=1$, and $d=0.9$ and the initial conditions $L(0)=0.1$, $M(0)=4.0$, and $N(0)=0.5$ [28] we derived the 4th step approximate solutions for the model at various fractional derivative values: $\alpha=0.5$, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, and 1.0.

Fig. 3 shows two-dimensional graphs of the 4th step approximate solutions obtained by Elzaki transform decomposition method at $\alpha=0.5$, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, and 1.0 for t in the interval $[0,2.0]$.

Fig. 4 shows a comparison of the two-dimensional graphs of the 4th step approximate solutions obtained by residual power series method and Elzaki transform decomposition method at $\alpha=0.5$, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, and 1.0 for t in the interval $[0,2.0]$.

Tables 5–7 show how the 4th step approximate solutions of $L(t)$, $M(t)$, and $N(t)$ obtained by Elzaki transform decomposition method behave at different $\alpha=0.5$, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, and 1.0 fractional derivative values for t in the interval $[0,2.0]$.

We concluded from a graphical and numerical analysis of $L^{(4)}(t)$, $M^{(4)}(t)$, and $N^{(4)}(t)$ that these variables exhibit the same behavior as described in macroeconomic theory. Generally, a lower interest rate makes an investment relatively more attractive. If the interest rate is six percent, firms will need an expected rate of return on investment of at least six percent to justify the investment. If the marginal efficiency of capital is lower than the interest rate, the firm will be better off not investing but saving money. A cut in interest rates from six percent to two percent will increase investment demand. Thus, the result indicates that they satisfy the actual behavior of macroeconomic theory.

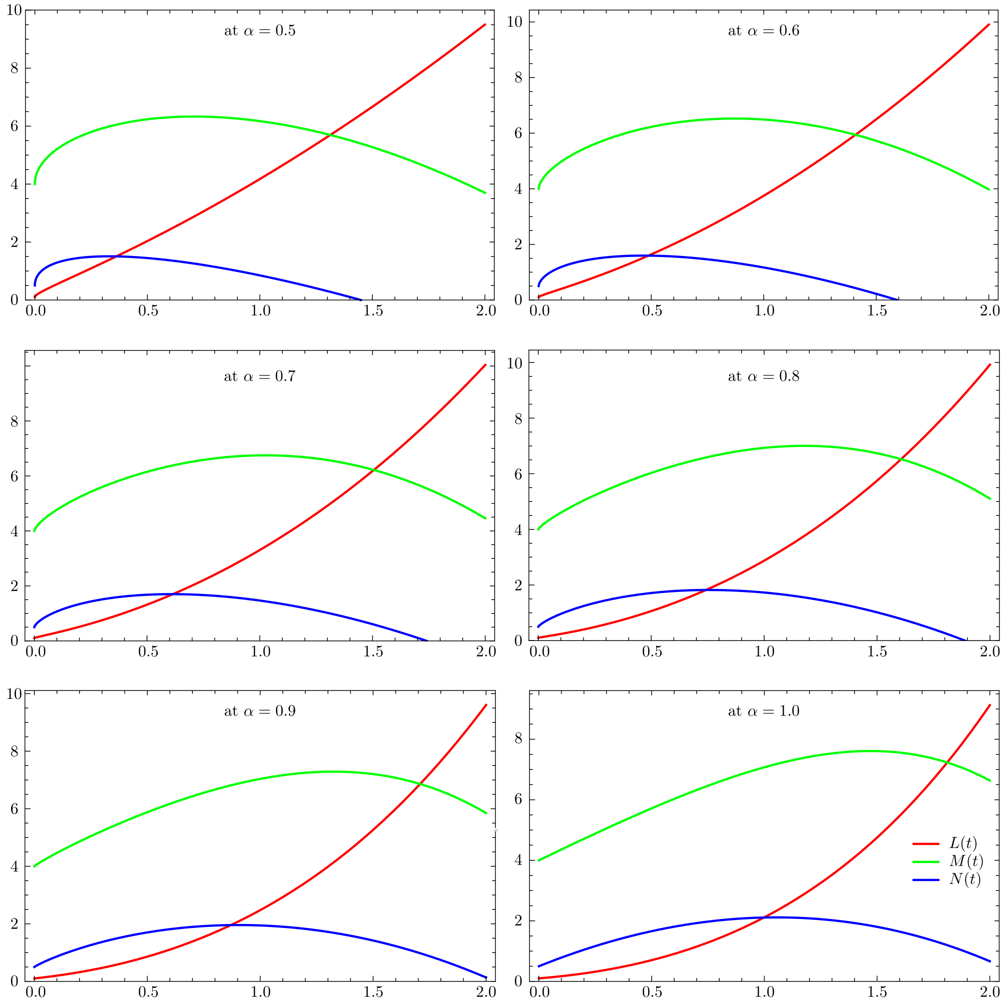


Figure 3. The graphic behavior of the 4th step approximate solutions obtained by Elzaki transform decomposition method of $L(t)$, $M(t)$, and $N(t)$ at $\alpha = 0.5$, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, and 1.0

The Elzaki transform decomposition method produced the following 4th step approximate solutions by using the Eqs. (17), (18), and (19) in terms of interest rate $L(t)$, investment demand $M(t)$, and price index $N(t)$ at $\alpha = 0.5$, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1.0.

At $\alpha = 0.5$, the 4th step approximate solutions are as follows:

$$L^{(4)}(t) = 0.1 + 0.677028t^{0.5} + 2.059t^{1.0} + 0.876954t^{1.5} + 0.462453t^{2.0},$$
$$M^{(4)}(t) = 4 + 4.05088t^{0.5} - 0.379t^{1.0} - 0.618552t^{1.5} - 0.880404t^{2.0},$$
$$N^{(4)}(t) = 0.5 + 3.38514t^{0.5} - 2.7t^{1.0} - 0.119608t^{1.5} - 0.216413t^{2.0}.$$

At $\alpha = 0.6$, the 4th step approximate solutions are as follows:

$$L^{(4)}(t) = 0.1 + 0.671505t^{0.6} + 1.86876t^{1.2} + 0.756152t^{1.8} + 0.352844t^{2.4},$$
$$M^{(4)}(t) = 4 + 4.01784t^{0.6} - 0.343982t^{1.2} - 0.513408t^{1.8} - 0.670216t^{2.4},$$

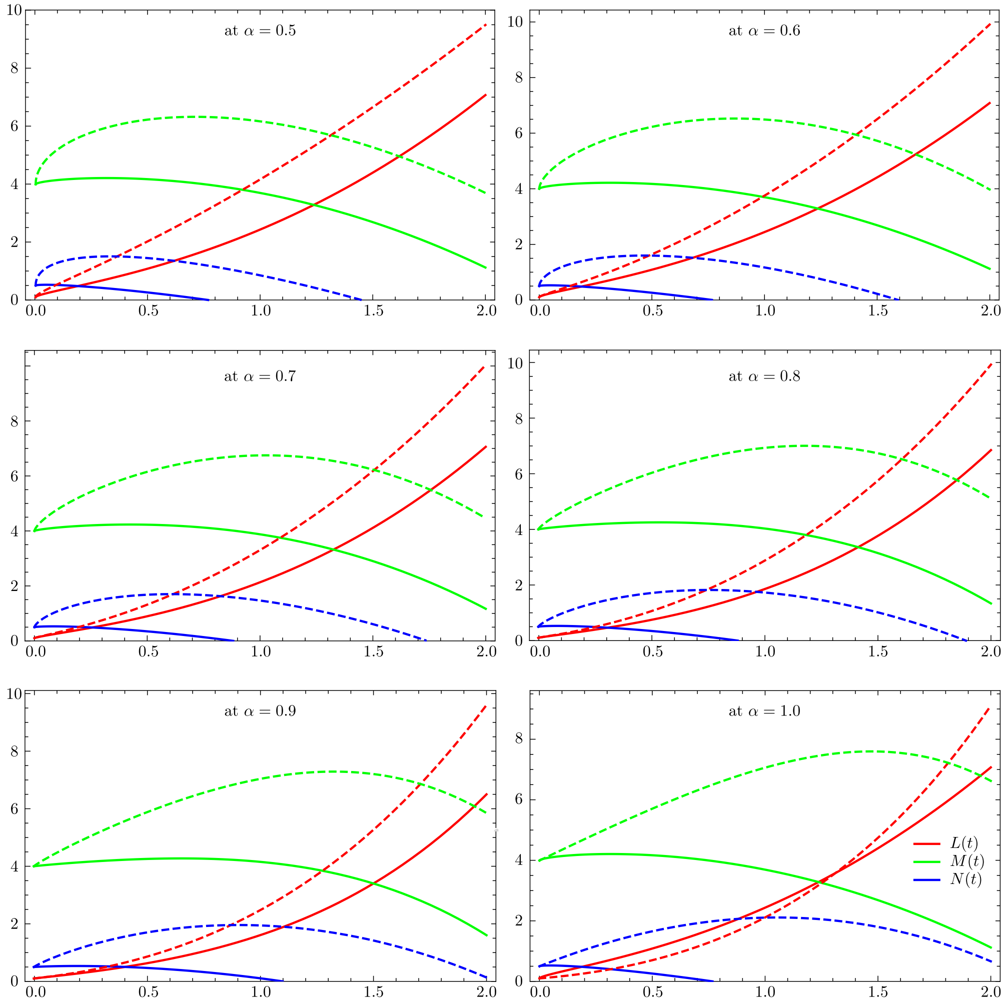


Figure 4. Dashed graphs of $L^{(4)}(t)$, $M^{(4)}(t)$, and $N^{(4)}(t)$ that were achieved by using Elzaki transform decomposition method, and non-dashed graphs were achieved by residual power series method at $\alpha = 0.5$, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, and 1.0

$$N^{(4)}(t) = 0.5 + 3.35752t^{0.6} - 2.45053t^{1.2} - 0.094841t^{1.8} - 0.142729t^{2.4}.$$

At $\alpha = 0.7$, the 4th step approximate solutions are as follows:

$$L^{(4)}(t) = 0.1 + 0.660328t^{0.7} + 1.65758t^{1.4} + 0.63087t^{2.1} + 0.256359t^{2.8},$$
$$M^{(4)}(t) = 4 + 3.95097t^{0.7} - 0.305111t^{1.4} - 0.412049t^{2.1} - 0.48642t^{2.8},$$
$$N^{(4)}(t) = 0.5 + 3.30164t^{0.7} - 2.17362t^{1.4} - 0.072351t^{2.1} - 0.0875269t^{2.8}.$$

At $\alpha = 0.8$, the 4th step approximate solutions are as follows:

$$L^{(4)}(t) = 0.1 + 0.644203t^{0.8} + 1.44024t^{1.6} + 0.510974t^{2.4} + 0.178275t^{3.2},$$
$$M^{(4)}(t) = 4 + 3.85448t^{0.8} - 0.265105t^{1.6} - 0.321075t^{2.4} - 0.338317t^{3.2},$$

Table 5

$L(t)$ behavior in the range $t \in [0, 2.0]$ at $\alpha = 0.5$, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, and 1.0

t	$\alpha = 0.5$	$\alpha = 0.6$	$\alpha = 0.7$	$\alpha = 0.8$	$\alpha = 0.9$	$\alpha = 1.0$
0.2	0.911511	0.675695	0.512493	0.399204	0.319925	0.263782
0.4	1.647647	1.294323	1.019084	0.808128	0.647855	0.526517
0.6	2.433889	2.011651	1.649691	1.348859	1.104736	0.907503
0.8	3.276222	2.829670	2.409768	2.033095	1.706159	1.428990
1.0	4.175437	3.749264	3.305140	2.873690	2.474020	2.116176
1.2	5.131171	4.771320	4.342097	3.884412	3.884413	2.997190
1.4	6.142759	5.896912	5.527124	5.079623	4.594440	4.103157
1.6	7.209498	7.127167	6.866855	6.474257	5.994522	5.468198
1.8	8.330680	8.463277	8.367948	8.083407	7.655154	7.129036
2.0	9.505671	9.906486	10.037112	9.922820	9.603488	9.125898

Table 6

$M(t)$ behavior in the range $t \in [0, 2.0]$ at $\alpha = 0.5$, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, and 1.0

t	$\alpha = 0.5$	$\alpha = 0.6$	$\alpha = 0.7$	$\alpha = 0.8$	$\alpha = 0.9$	$\alpha = 1.0$
0.2	5.645279	5.437448	5.229187	5.034739	4.860584	4.708748
0.4	6.113050	6.031069	5.898250	5.737050	5.564026	5.390375
0.6	6.305984	6.369486	6.356636	6.284186	6.169529	6.027792
0.8	6.313966	6.515323	6.638068	6.685215	6.667450	6.598287
1.0	6.172924	6.490237	6.747398	6.929980	7.036521	7.073512
1.2	5.901833	6.303248	6.680274	7.001256	7.249243	7.419496
1.4	5.512247	5.957896	6.428452	6.877977	7.273794	7.596670
1.6	5.011917	5.455127	5.981812	6.537229	7.074769	7.559851
1.8	4.406343	4.794429	5.329239	5.954370	6.613620	7.258192
2.0	3.699669	3.974430	4.459067	5.103751	5.848991	6.635270

Table 7

$N(t)$ behavior in the range $t \in [0, 2.0]$ at $\alpha = 0.5$, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, and 1.0

t	$\alpha = 0.5$	$\alpha = 0.6$	$\alpha = 0.7$	$\alpha = 0.8$	$\alpha = 0.9$	$\alpha = 1.0$
0.2	1.454524	1.414861	1.338370	1.243656	1.143330	1.045771
0.4	1.496060	1.587433	1.618546	1.602990	1.553771	1.481951
0.6	1.368620	1.563990	1.700226	1.780992	1.813560	1.806460
0.8	1.143678	1.414922	1.641633	1.817568	1.940878	2.016709
1.0	0.849116	1.169439	1.468147	1.728768	1.943360	2.109501
1.2	0.499368	0.843055	1.193479	1.525727	1.824471	2.081172
1.4	0.103047	0.445222	0.825814	1.213167	1.585199	1.927490
1.6	−0.334190	−0.017914	0.370298	0.793907	1.225764	1.643681
1.8	−0.808389	−0.542117	−0.169802	0.269198	0.742221	1.224441
2.0	−1.316651	−1.124370	−0.792436	−0.360849	0.134321	0.663933

$$N^{(4)}(t) = 0.5 + 3.22101t^{0.8} - 1.88861t^{1.6} - 0.0533341t^{2.4} - 0.0503025t^{3.2}.$$

At $\alpha = 0.9$, the 4th step approximate solutions are as follows:

$$L^{(4)}(t) = 0.1 + 0.623852t^{0.9} + 1.22816t^{1.8} + 0.402854t^{2.7} + 0.119158t^{3.6},$$
$$M^{(4)}(t) = 4 + 3.73272t^{0.9} - 0.226067t^{1.8} - 0.243697t^{2.7} - 0.22644t^{3.6},$$
$$N^{(4)}(t) = 0.5 + 3.11926t^{0.9} - 1.61051t^{1.8} - 0.0381235t^{2.7} - 0.0272624t^{3.6}.$$

At $\alpha = 1.0$, the 4th step approximate solutions are as follows:

$$L^{(4)}(t) = 0.1 + 0.6t + 1.0295t^2 + 0.30985t^3 + 0.076818t^4,$$
$$M^{(4)}(t) = 4 + 3.59t - 0.1895t^2 - 0.18065t^3 - 0.146346t^4,$$
$$N^{(4)}(t) = 0.5 + 3t - 1.35t^2 - 0.0265t^3 - 0.0140042t^4.$$

5. Conclusions. In this study, we investigate a fractional-order financial model using two capable approximate analytical methods. From the figures and tables, we observed that the solutions obtained by the residual power series method and Elzaki transform decomposition method agree with the actual macroeconomic behavior of the financial system, and both methods are compatible and useful for solving the fractional order nonlinear financial model. It demonstrated that researchers may use these two techniques to solve the fractional nonlinear problem that occurs in financial systems. The impact of the critical minimum interest rate has been observed graphically, which shows different results with different values of the critical minimum interest rate but exhibits the same behavior. The results show that interest rates are rising at the same time that investment demand is falling because borrowing money for investment purposes becomes more expensive as interest rates rise. It is also guaranteed that the relationship between investment demand and the price level is inverse, with lower investment demand leading to deflation. As a result, the obtained results are consistent with economic theory and are extremely useful in understanding the macroeconomic behavior of the financial system.

Competing interests. The authors declare that they have no competing interests.

Authors' contributions and responsibilities. The authors declare that the study was realized in collaboration with equal responsibility. All authors read and approved the final manuscript.

Availability of Data and Materials. No data were generated or analyzed during the current study.

Funding. No funds were received.

References

1. Sun H., Zhang Y., Baleanu D., et al. A new collection of real world applications of fractional calculus in science and engineering, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, 2018, vol. 64, pp. 213–231. DOI: https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2018.04.019.
2. Ramani P., Khan A. M., Suthar D. L., Kumar D. Approximate analytical solution for nonlinear Fitzhugh–Nagumo equation of time fractional order through fractional reduced differential transform method, *Int. J. Appl. Comput. Math.*, 2022, vol. 8, no. 2, 61. DOI: https://doi.org/10.1007/s40819-022-01254-z.

3. Yadav L. K., Agarwal G., Suthar D. L., Purohit S. D. Time-fractional partial differential equations: a novel technique for analytical and numerical solutions, *Arab J. Basic Appl. Sci.*, 2022, vol. 29, no. 1, pp. 86–98. DOI: https://doi.org/10.1080/25765299.2022.2064075.
4. Tenreiro Machado J. A., Silva M. F., Barbosa R. S., et al. Some applications of fractional calculus in engineering, *Math. Probl. Eng.*, 2010, vol. 2010, 639801. DOI: https://doi.org/10.1155/2010/639801.
5. Yasmin H. Application of aboodh homotopy perturbation transform method for fractional-order convection-reaction-diffusion equation within Caputo and Atangana–Baleanu operators, *Symmetry*, 2023, vol. 15, no. 2, 453. DOI: https://doi.org/10.3390/sym15020453.
6. Chanchlani L., Agrawal M., Pandey R. M., et al. Applications of Elzaki decomposition method to fractional relaxation-oscillation and fractional biological population equations, *Appl. Math. Sci. Eng.*, 2023, vol. 31, no. 1, 2154766. DOI: https://doi.org/10.1080/27690911.2022.2154766.
7. Pareek N., Gupta A., Agarwal G., Suthar D. L. Natural transform along with HPM technique for solving fractional ADE, *Adv. Math. Phys.*, 2021, vol. 2021, 9915183. DOI: https://doi.org/10.1155/2021/9915183.
8. Yasmin H. Numerical analysis of time-fractional Whitham–Broer–Kaup equations with exponential-decay kernel, *Fractal Fract.*, 2022, vol. 6, no. 3, 142. DOI: https://doi.org/10.3390/fractalfract6030142.
9. Naeem M., Yasmin H., Shah N. A., et al. Analytical approaches for approximate solution of the time-fractional coupled Schrödinger–KdV equation, *Symmetry*, 2022, vol. 14, no. 12, 2602. DOI: https://doi.org/10.3390/sym14122602.
10. Naeem M., Yasmin H., Shah R., et al. A comparative study of fractional partial differential equations with the help of Yang transform, *Symmetry*, 2023, vol. 15, no. 1, 146. DOI: https://doi.org/10.3390/sym15010146.
11. Naeem M., Yasmin H., Shah R., et al. Investigation of fractional nonlinear regularized long-wave models via Novel techniques, *Symmetry*, 2023, vol. 15, no. 1, 220. DOI: https://doi.org/10.3390/sym15010220.
12. Baskonus H. M., Mekkaoui T., Hammouch Z., Bulut H. Active control of a chaotic fractional order economic system, *Entropy*, 2015, vol. 17, no. 8, pp. 5771–5783. DOI: https://doi.org/10.3390/e17085771.
13. Bonyah E., Atangana A., Chand M. Analysis of 3D IS-LM macroeconomic system model within the scope of fractional calculus, *Chaos, Solitons & Fractals: X*, 2019, vol. 2, 100007. DOI: https://doi.org/10.1016/j.csfx.2019.100007.
14. David S. A., Fischer C., Machado J. T. Fractional electronic circuit simulation of a nonlinear macroeconomic model, *AEU – Int. J. Electron. Comm.*, 2018, vol. 84, pp. 210–220. DOI: https://doi.org/10.1016/j.aeue.2017.11.019.
15. Owolabi K. M., Gómez–Aguilar J. F., Fernndez–Anaya, et al. Modelling of chaotic processes with caputo fractional order derivative, *Entropy*, 2020, vol. 22, no. 9, 1027. DOI: https://doi.org/10.3390/e22091027.
16. Xin B., Li Y. 0-1 test for chaos in a fractional order financial system with investment incentive, *Abstr. Appl. Anal*, 2013, vol. 2013, 876298. DOI: https://doi.org/10.1155/2013/876298.
17. El-Ajou A., Arqub O. A., Momani S., et al. A novel expansion iterative method for solving linear partial differential equations of fractional order, *Appl. Math. Comput.*, 2015, vol. 257, pp. 119–133. DOI: https://doi.org/10.1016/j.amc.2014.12.121.
18. Xiaobing P., Yang X., Skandari M. H. N., et al. A new high accurate approximate approach to solve optimal control problems of fractional order via efficient basis functions, *Alexandria Eng. J.*, 2022, vol. 61, no. 8, pp. 5805–5818. DOI: https://doi.org/10.1016/j.aej.2021.11.007.
19. Liaqat M. I., Akgül A. A novel approach for solving linear and nonlinear time-fractional Schrödinger equations, *Chaos Solitons Fractals*, 2022, vol. 162. DOI: https://doi.org/10.1016/j.chaos.2022.112487.

20. Liaqat M. I., Khan A., Alam M. A., et al. Approximate and closed-form solutions of Newell–Whitehead–Segel equations via modified conformable Shehu transform decomposition method, *Math. Probl. Eng.*, 2022, vol. 2022, 6752455. DOI: https://doi.org/10.1155/2022/6752455.
21. Rezapour S., Liaqat M. I., Etemad S. An effective new iterative method to solve conformable Cauchy reaction-diffusion equation via the Shehu transform, *J. Math.*, 2022, vol. 2022, 4172218. DOI: https://doi.org/10.1155/2022/4172218.
22. Liaqat M. I., Etemad S., Rezapour S., Park, C. A novel analytical Aboodh residual power series method for solving linear and nonlinear time-fractional partial differential equations with variable coefficients, *AIMS Math.*, 2022, vol. 7, no. 9, pp. 16917–16948. DOI: https://doi.org/10.3934/math.2022929.
23. Liaqat M. I., Akgül A., Abu-Zinadah H. Analytical investigation of some time-fractional Black–Scholes models by the Aboodh residual power series method, *Mathematics*, 2023, vol. 11, no. 2, 276. DOI: https://doi.org/10.3390/math11020276.
24. Alquran M. Analytical solutions of fractional foam drainage equation by residual power series method, *Math. Sci.*, 2014, vol. 8, no. 4, pp. 153–160. DOI: https://doi.org/10.1007/s40096-015-0141-1.
25. Prakasha D. G., Veeresha P., Baskonus H. M. Residual power series method for fractional Swift–Hohenberg equation, *Fractal Fract.*, 2019, vol. 3, no. 1, 9. DOI: https://doi.org/10.3390/fractalfract3010009.
26. Shah N. A., Chung J. D. The analytical solution of fractional-order Whitham–Broer–Kaup equations by an Elzaki decomposition method, *Numer. Methods Partial Differential Eq.*, 2024, vol. 40, e22748. DOI: https://doi.org/10.1002/num.22748.
27. Varsoliwala A. C., Singh T. R. Mathematical modeling of atmospheric internal waves phenomenon and its solution by Elzaki Adomian decomposition method, *J. Ocean Eng. Sci.*, 2022, vol. 7, no. 3, pp. 203–212. DOI: https://doi.org/10.1016/j.joes.2021.07.010.
28. Farman M., Akgül A., Baleanu D., et al. Analysis of fractional order chaotic financial model with minimum interest rate impact, *Fractal Fract.*, 2020, vol. 4, no. 3, 43. DOI: https://doi.org/10.3390/fractalfract4030043.
29. Kumar A., Kumar S. Residual power series method for fractional Burger types equations, *Nonlinear Eng.*, 2016, vol. 5, no. 4, pp. 235–244. DOI: https://doi.org/10.1515/nleng-2016-0028.
30. Alquran M., Jaradat H. M., Syam M. I. Analytical solution of the time-fractional Phi-4 equation by using modified residual power series method., *Nonlinear Dyn.*, 2017, vol. 90, no. 4, pp. 2525–2529. DOI: https://doi.org/10.1007/s11071-017-3820-7.
31. Moaddy K., Al-Smadi M., Hashim I. A novel representation of the exact solution for differential algebraic equations system using residual power-series method, *Discrete Dyn. Nat. Soc.*, 2015, vol. 2015, 205207. DOI: https://doi.org/10.1155/2015/205207.
32. Rashid S., Hammouch Z., Aydi H., et al. Novel computations of the time-fractional Fisher's model via generalized fractional integral operators by means of the Elzaki transform, *Fractal Fract.*, 2021, vol. 5, no. 3, 94. DOI: https://doi.org/10.3390/fractalfract5030094.
33. Khan A., Liaqat M. I., Younis M., Alam A. Approximate and exact solutions to fractional order Cauchy reaction-diffusion equations by new combine techniques, *J. Math.*, 2021, vol. 2021, 5337255. DOI: https://doi.org/10.1155/2021/5337255.
34. Liaqat M. I., Khan A., Akgül A., Ali M. S. A novel numerical technique for fractional ordinary differential equations with proportional delay, *J. Funct. Spaces*, 2022, vol. 2022, 6333084. DOI: https://doi.org/10.1155/2022/6333084.
35. Jena R. M., Chakraverty S. Solving time-fractional Navier–Stokes equations using homotopy perturbation Elzaki transform, *SN Appl. Sci.*, 2019, vol. 1, 16. DOI: https://doi.org/10.1007/s42452-018-0016-9.
36. Hajira, Khan H., Khan A., et al. An approximate analytical solution of the Navier–Stokes equations within Caputo operator and Elzaki transform decomposition method, *Adv. Differ. Equ.*, 2020, vol. 2020, 622. DOI: https://doi.org/10.1186/s13662-020-03058-1.

Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2024. Т. 28, № 2. С. 223–246
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu2055
EDN: BOLMJW

УДК 517.968.7

Приближенные аналитические решения нелинейной финансовой модели дробного порядка двумя эффективными методами со сравнительным исследованием

M. I. Liaqat[1,2]***, A. Khan***[2]***, A. Irshad***[2]***,***
A. Akgül[3,4,5]***, E. Prosviryakov***[6,7]

[1] Правительственный колледж Университета, Лахор, 54600, Пакистан.
[2] Национальный колледж делового администрирования и экономики, Лахор, 54660, Пакистан.
[3] Ливанский Американский университет, Бейрут, 1102 2801, Ливан.
[4] Университет Сиирта, Сиирт, 56100, Турция.
[5] Ближневосточный университет, Никосия, 99138, Турция.
[6] Уральский федеральный университет, Екатеринбург, 620137, Россия.
[7] Институт машиноведения УрО РАН, Екатеринбург, 620049, Россия.

Аннотация

Финансовая система является важной составляющей в регулировании глобальных экономических процессов, поскольку обеспечение безопасности или контроль финансовой системы или рынка является ключом к стабилизации экономики.

Целью данного исследования является выяснение, насколько приближенные аналитические решения, полученные с помощью метода остаточного степенного ряда и метода разложения Эльзаки для дробной нелинейной финансовой модели, соответствуют экономической теории. Здесь понятие дробной производной используется в смысле производной Капуто.

Полученные численные результаты показывают, как приближенные решения реагируют на изменения процентной ставки, инвестиционного

Дифференциальные уравнения и математическая физика
Научная статья

Образец для цитирования
Liaqat M. I., Khan A., Irshad A., Akgül A., Prosviryakov E. Approximate analytical solutions of the nonlinear fractional order financial model by two efficient methods with a comparison study, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2024, vol. 28, no. 2, pp. 223–246. EDN: BOLMJW. DOI: 10.14498/vsgtu2055.

Сведения об авторах

Muhammad Imran Liaqat https://orcid.org/0000-0002-5732-9689
PhD Student, Abdus Salam School of Mathematical Sciences[1]; Lecturer, Dept. of Mathematics[2]; e-mail: imranliaqat50@yahoo.com

Adnan Khan https://orcid.org/0000-0002-1490-8576
Full Professor, Dept. of Mathematics[2]; e-mail: adnankhantariq@ncbae.edu.pk

Alia Irshad https://orcid.org/0009-0002-2282-0627
Lecturer, Dept. of Mathematics[2]; e-mail: aaliairshad15@gmail.com

спроса и индекса цен. Оба метода показали результаты, согласующиеся с экономической теорией. Это означает, что исследователи могут использовать эти два метода для решения различных задач, связанных с дробными нелинейными моделями в финансовых системах.

Ключевые слова: приближенные решения, дробно-нелинейная финансовая модель, метод остаточного степенного ряда, метод разложения преобразования Эльзаки.

Получение: 10 августа 2023 г. / Исправление: 27 марта 2024 г. / Принятие: 26 мая 2024 г. / Публикация онлайн: 11 сентября 2024 г.

Конкурирующие интересы. Авторы заявляют, что у них нет конфликтов интересов.

Авторский вклад и ответственность. Авторы заявляют, что исследование было проведено в сотрудничестве с равной ответственностью. Все авторы прочитали и одобрили окончательную версию рукописи.

Доступность данных и материалов. В ходе текущего исследования данные не были сгенерированы и не анализировались.

Финансирование. Финансирование не получено.

Ali Akgül https://orcid.org/0000-0001-9832-1424
PhD in Math, Full Professor; Dept. of Computer Science and Mathematics[3]; Dept. of Mathematics, Art and Science Faculty[4]; Dept. of Mathematics, Mathematics Research Center[5]; e-mail: aliakgul00727@gmail.com

Evgenii Yu. Prosviryakov https://orcid.org/0000-0002-2349-7801
Dr. Phys. & Math. Sci.; Dept. of Information Technologies and Control Systems[6]; Sect. of Nonlinear Vortex Hydrodynamics[7]; e-mail: evgen_pros@mail.ru

Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2024. Т. 28, № 2. С. 247–266
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu2078
EDN: CXTSHY

УДК 517.958

К расчету приближенных симметрий дробно-дифференциальных уравнений

В. О. Лукащук, С. Ю. Лукащук

Уфимский университет науки и технологий,
Россия, 450076, Уфа, ул. Заки Валиди, 32.

Аннотация

Предлагается новый алгоритм нахождения приближенных симметрий для дробно-дифференциальных уравнений с производными типа Римана–Лиувилля и Герасимова–Капуто, порядок которых близок к целому. Алгоритм основан на разложении дробной производной в ряд по малому параметру, выделяемому из порядка дробного дифференцирования. В линейном приближении такое разложение содержит нелокальный интегро-дифференциальный оператор с логарифмическим ядром.

В результате исходное дробно-дифференциальное уравнение приближается интегро-дифференциальным уравнением с малым параметром, для которого могут быть найдены приближенные симметрии. Доказывается теорема о виде продолжения однопараметрической группы точечных преобразований на новую переменную, порождаемую нелокальным оператором, входящим в разложение дробной производной. Знание такого продолжения позволяет применить к рассматриваемому уравнению приближенный критерий инвариантности.

Предлагаемый алгоритм иллюстрируется на задаче нахождения приближенных симметрий для нелинейного дробно-дифференциального уравнения фильтрации субдиффузионного типа. Показано, что размерность алгебры приближенных симметрий такого уравнения оказывается существенно больше размерности алгебры точных симметрий, что открывает возможность построения большого числа приближенно инвариантных решений. Также на примере линейного дробно-дифференциального уравнения субдиффузии показывается, что алгоритм дает принципиальную возможность находить нелокальные приближенные симметрии определенного вида.

Дифференциальные уравнения и математическая физика
Научная статья

Образец для цитирования

Лукащук В. О., Лукащук С. Ю. К расчету приближенных симметрий дробно-дифференциальных уравнений // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2024. Т. 28, № 2. С. 247–266. EDN: CXTSHY. DOI: 10.14498/vsgtu2078.

Сведения об авторах

Вероника Олеговна Лукащук https://orcid.org/0000-0002-3082-1446
кандидат физико-математических наук; доцент; каф. высокопроизводительных вычислительных технологий и систем; e-mail: voluks@gmail.com

Станислав Юрьевич Лукащук https://orcid.org/0000-0001-9209-5155
доктор физико-математических наук, доцент; профессор; каф. высокопроизводительных вычислительных технологий и систем; e-mail: lsu@ugatu.su

Ключевые слова: дробно-дифференциальное уравнение, малый параметр, приближенная группа преобразований, приближенная формула продолжения, приближенная симметрия, нелокальная симметрия.

Получение: 23 ноября 2023 г. / Исправление: 11 февраля 2024 г. / Принятие: 26 апреля 2024 г. / Публикация онлайн: 8 октября 2024 г.

Введение. Групповой анализ дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений [1–3] является эффективным математическим инструментом исследования их симметрийных свойств, построения законов сохранения и нахождения точных решений. Одним из современных направлений его развития является симметрийный анализ дифференциальных уравнений с производными дробных порядков различных типов [4, 5], называемых также дробно-дифференциальными уравнениями [6]. В течение последних 15 лет для таких уравнений активно развивались как методы классического группового анализа (см. [7–9] и цитируемую там литературу), так и некоторые методы современного группового анализа, направленные на нахождение приближенных [10] и высших [11] симметрий.

Построение приближенных симметрий для дробно-дифференциального уравнения возможно в тех случаях, когда в нем имеется малый параметр либо когда такое уравнение может быть приближено в некотором смысле уравнением с малым параметром. Если порядок входящей в уравнение дробной производной близок к целому числу, то из такого порядка возможно выделение малого параметра с последующим разложением по нему в ряд соответствующей дробной производной. Например, для левосторонней дробной производной Римана—Лиувилля

$$({}_{t_0}D_t^{\alpha} f)(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_{t_0}^{t} \frac{f(s)ds}{(t-s)^{\alpha-n+1}}, \quad n = [\alpha]+1,$$

для случая $\alpha = n - \varepsilon$, где $\varepsilon \in (0, 0.5]$, в работе [10] получено следующее разложение по ε:

$$({}_{t_0}D_t^{n-\varepsilon} f)(t) = f^{(n)}(t) - \varepsilon \Bigg\{ [\psi(n+1) - \ln(t-t_0)] f^{(n)}(t) - \\ - \sum_{\substack{k=0 \\ k\neq n}}^{\infty} \frac{(-1)^{k-n}}{k-n} \frac{n!}{k!} (t-t_0)^{k-n} f^{(k)}(t) \Bigg\} + o(\varepsilon). \quad (1)$$

Данное разложение справедливо для всех $t > t_0$ при $\varepsilon \to 0$ в случае, когда функция $f(t)$ бесконечно дифференцируема при $t > t_0$. Если ε — малый параметр ($0 < \varepsilon \ll 1$), то в (1) можно ограничиться приведенным линейным разложением, отбросив малые порядка $o(\varepsilon)$. Если дробно-дифференциальное уравнение содержит только дробные производные вида ${}_{t_0}D_t^{m-\varepsilon} f$ ($m = 1, 2, \ldots, M$), то, заменяя их на соответствующие линейные по ε разложения вида (1), получим уравнение с малым параметром. В нулевом порядке по ε такое уравнение будет дифференциальным уравнением целого порядка M.

Необходимо, однако, отметить, что линейное разложение (1) не является равномерным, оно справедливо с точностью $o(\varepsilon \ln(t - t_0))$. Поэтому для любого фиксированного ε замена дробно-дифференциального уравнения соответствующим уравнением с малым параметром будет справедлива лишь для $t \in [c, d]$, где $c = c(\varepsilon)$ и $d = d(\varepsilon)$ согласованы с условием малости отбрасываемой части разложения.

Замена, пусть и в ограниченной области, дробно-дифференциального уравнения уравнением с малым параметром, получаемым с использованием разложения вида (1), дает возможность применять к его исследованию методы теории приближенных групп преобразований [12–14]. На основе данного подхода в работах [15, 16] были успешно решены задачи групповой классификации по допускаемым приближенным группам преобразований для нелинейного уравнения субдиффузии и дробно-дифференциального обобщения уравнения Бюргерса, а в работах [17–19] для ряда дробно-дифференциальных уравнений найдены приближенные симметрии, приближенно инвариантные решения и приближенные законы сохранения.

Важно отметить, что допускаемая дробно-дифференциальным уравнением группа преобразований практически всегда оказывается более «бедной», чем группа соответствующего ему дифференциального уравнения целого порядка. Это обусловлено в первую очередь требованием неподвижности постоянного предела интегрирования дробно-дифференциального оператора при преобразовании. Переход к приближенным преобразованиям существенно расширяет группу симметрий, что дает возможность строить новые приближенно инвариантные решения и законы сохранения, которые не могут быть получены на основе точных симметрий.

Тем не менее разложение (1) обладает рядом существенных недостатков. Во-первых, оно требует бесконечной дифференцируемости функции $f(t)$ при $t > t_0$, что для дробно-дифференциальных уравнений справедливо далеко не всегда. Во-вторых, практическое использование (1) для нахождения допускаемой соответствующим уравнением приближенной группы преобразований требует построения продолжений группы, допускаемой уравнением в нулевом порядке по ε, на все производные $f^{(k)}(t)$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Решение определяющего уравнения для приближенной группы в этом случае требует аккуратной работы с бесконечными рядами, сходимость которых необходимо дополнительно контролировать. В-третьих, разложение (1) неприменимо при бесконечном нижнем пределе интегрирования в операторе дробного дифференцирования. Однако уравнения с такими операторами возникают при описании процессов с полной степенной памятью или степенной пространственной нелокальностью в $\mathbb{R}^n$.

Преодолеть указанные недостатки позволяет переход к другому виду разложений дробных производных, которые могут быть построены на основе известной [4] формулы для дробного интеграла порядка ε при $\varepsilon \to 0$:

$$({}_{t_0}I_t^{\varepsilon} f)(t) = f(t) + \varepsilon\left[\gamma f(t) + \frac{d}{dt}\int_{t_0}^{t} \ln(t-s) f(s)\,ds\right] + o(\varepsilon), \tag{2}$$

где

$$({}_{t_0}I_t^{\varepsilon} f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\varepsilon)}\int_{t_0}^{t} \frac{f(s)\,ds}{(t-s)^{1-\varepsilon}}, \quad \varepsilon \in (0, 1)$$

— левосторонний интеграл дробного порядка ε, $\gamma \approx 0.57721566$ — постоянная Эйлера. С использованием (2) могут быть получены соответствующие разложения для левосторонних дробных производных Римана—Лиувилля и Капуто, порядок которых близок к целому. В работах [20–22] разложение (2) было использовано для нахождения приближенных решений дробно-дифференциальных уравнений.

В результате применения разложения (2) дробно-дифференциальное уравнение приближается уравнением с малым параметром ε, содержащим в ε-порядке интегро-дифференциальный оператор с логарифмическим ядром. Разработка алгоритма нахождения приближенных симметрий таких уравнений и является целью данной работы.

1. Формулы продолжения. Рассмотрим функцию $u = u(t, x)$, где $x = (x^1, \dots, x^m)$, определенную в области $Q_T = \{(t, x) : -\infty \leqslant t_0 < t < T \leqslant \infty, x \in \Omega \subset \mathbb{R}^m\}$, суммируемую по переменной t на интервале (t_0, T). Тогда существует дробный интеграл $({}_{t_0}I_t^\varepsilon u)(t, x)$ $(0 < \varepsilon \ll 1)$ и почти всюду справедливо разложение вида (2) (см. [4, замечание 2.5]):

$$({}_{t_0}I_t^\varepsilon u)(t, x) = u(t, x) + \varepsilon\Big[\gamma u(t, x) + \frac{\partial}{\partial t}(Lu)(t, x)\Big] + o(\varepsilon), \tag{3}$$

$$(Lu)(t, x) = \int_{t_0}^{t} \ln(t - s)u(s, x)ds. \tag{4}$$

Для построения конструктивного алгоритма нахождения приближенных симметрий уравнений с малым параметром, получаемых из дробно-дифференциальных уравнений с использованием разложения (3), необходимо знать продолжение группы преобразований на интеграл $(Lu)(t, x)$.

Рассмотрим однопараметрическую группу G точечных преобразований

$$\begin{array}{lll} \bar{t} = \varphi(t, x, u, a), & \bar{x}^i = \psi^i(t, x, u, a) \quad (i = 1, \dots, m), & \bar{u} = \theta(t, x, u, a), \\ \varphi|_{a=0} = t, & \psi^i|_{a=0} = x^i \quad (i = 1, \dots, m), & \theta|_{a=0} = u, \end{array} \tag{5}$$

где $a \in \Delta$ — параметр группы и $\Delta \in \mathbb{R}$ — симметричный относительно нуля интервал. Как обычно в групповом анализе (см., например, [1]), функции φ, ψ^i и θ предполагаются бесконечно дифференцируемыми по всем своим аргументам при $(t, x) \in \overline{Q}_T$ и $a \in \Delta$.

Пусть соответствующие инфинитезимальные преобразования группы G имеют вид

$$\begin{array}{l} \bar{t} = t + a\tau(t, x, u) + o(a), \\ \bar{x}^i = x + a\xi^i(t, x, u) + o(a) \quad (i = 1, \dots, m), \\ \bar{u} = u + a\eta(t, x, u) + o(a). \end{array} \tag{6}$$

Тогда оператор

$$X = \tau\frac{\partial}{\partial t} + \xi^i\frac{\partial}{\partial x^i} + \eta\frac{\partial}{\partial u} \tag{7}$$

является инфинитезимальным оператором (генератором) группы G. Здесь и далее используется правило суммирования по повторяющимся индексам.

В дальнейшем для сокращенной записи сложных функций от $u(t, x)$, ее производных и интегралов будем использовать обозначение

$$f(t, x, u(t, x), u_t(t, x), \dots) = f[t, x].$$

Через D_t и D_i будем обозначать операторы полного дифференцирования по переменным t и x^i $(i = 1, \ldots, m)$ соответственно, а через u_i — частную производную функции u по x^i.

Теорема. *Пусть $u(t,x) \in C^1(Q_T) \cap L_1(t_0, T)$ и выполнено условие*

$$\tau[t,x]|_{t=t_0} = 0, \quad t_0 > -\infty. \tag{8}$$

Тогда инфинитезимальное преобразование интеграла $(Lu)(t,x)$ под действием группы G с оператором (7) имеет вид

$$(L\bar{u})(\bar{t},\bar{x}) = (Lu)(t,x) + a\zeta_{Lu}[t,x] + o(a), \tag{9}$$

где $\zeta_{Lu}[t,x]$ определяется формулой продолжения

$$\zeta_{Lu}[t,x] = L(\eta - \tau u_t - \xi^i u_i)(t,x) + \tau D_t(Lu)(t,x) + \xi^i D_i(Lu)(t,x). \tag{10}$$

Доказательство. Используя обратное для (6) инфинитезимальное преобразование

$$\begin{aligned} &t = \bar{t} - a\tau[\bar{t},\bar{x}] + o(a),\\ &x^i = \bar{x}^i - a\xi^i[\bar{t},\bar{x}] + o(a) \quad (i = 1, \ldots, m),\\ &u = \bar{u} - a\eta[\bar{t},\bar{x}] + o(a), \end{aligned}$$

запишем

$$\bar{u}(\bar{t},\bar{x}) = u(\bar{t} - a\tau[\bar{t},\bar{x}], \bar{x} - a\xi[\bar{t},\bar{x}]) + a\eta[\bar{t},\bar{x}] + o(a),$$

где $\xi = (\xi^1, \ldots, \xi^m)$. С учетом этого представления изменение интеграла $(L\bar{u})(\bar{t},\bar{x})$ под действием инфинитезимального преобразования (6) можно представить в виде

$$(L\bar{u})(\bar{t},\bar{x}) = \int_{t_0}^{t+a\tau[t,x]} \ln(t + a\tau[t,x] - \bar{s}) \times \\ \times \{u(\bar{s} - a\tau[\bar{s},x], x + a\xi[t,x] - a\xi[\bar{s},x]) + a\eta[\bar{s},x]\}\, d\bar{s} + o(a).$$

Выполним замену переменных по правилу $\bar{s} = s + a\tau[s,x]$. Заметим, что в силу условия (8) нижний предел интегрирования t_0 при такой замене остается неизменным. Имеем

$$(L\bar{u})(\bar{t},\bar{x}) = \int_{t_0}^{t} \ln(t - s + a\tau[t,x] - a\tau[s,x]) \times \\ \times \big\{u(s, x + a\xi[t,x] - a\xi[s,x]) + a\eta[s,x]\big\}(1 + aD_s\tau[s,x])ds + o(a).$$

Используя разложения

$$\ln(t - s + a\tau[t,x] - a\tau[s,x]) = \ln(t-s) + a\frac{\tau[t,x] - \tau[s,x]}{t-s} + o(a)$$

и

$$u(s, x + a\xi[t,x] - a\xi[s,x]) = u(s,x) + a(\xi^i[t,x] - \xi^i[s,x])u_i(s,x) + o(a),$$

получаем

$$(L\bar{u})(\bar{t},\bar{x}) = \int_{t_0}^{t} \ln(t-s)u(s,x)ds + a\int_{t_0}^{t}\Big\{\frac{\tau[t,x]-\tau[s,x]}{t-s}u(s,x) +$$
$$+\ln(t-s)\big[\eta[s,x] + (D_s\tau[s,x])u(s,x) + (\xi^i[t,x]-\xi^i[s,x])u_i(s,x)\big]\Big\}ds + o(a).$$

Так как $u(t,x)\in C^1(Q_T)\cap L_1(t_0,T)$, справедливы соотношения

$$(D_s\tau[s,x])u(s,x) = D_s(\tau[s,x]u(s,x)) - \tau[s,x]u_s(s,x),$$

$$\int_{t_0}^{t}\ln(t-s)\xi^i[t,x]u_i(s,x)ds = \xi^i[t,x]D_i(Lu)(t,x).$$

В результате получаем

$$(L\bar{u})(\bar{t},\bar{x}) = (Lu)(t,x) + a[L(\eta-\tau u_t-\xi^i u_i)(t,x) + \xi^i(t,x)D_i(Lu)(t,x)] +$$
$$+a\int_{t_0}^{t}\Big\{\frac{\tau[t,x]-\tau[s,x]}{t-s}u(s,x) + \ln(t-s)D_s(\tau[s,x]u(s,x))\Big\}ds + o(a).$$

Для преобразования последнего интеграла в этом выражении воспользуемся формулой

$$D_t\int_{t_0}^{t}\ln(t-s)u(s,x)ds = \ln(t-t_0)u(t,x) + \int_{t_0}^{t}\frac{u(s,x)-u(t,x)}{t-s}ds,$$

справедливость которой вытекает из дифференцируемости $u(s,x)$ по s при $s>t_0$. Имеем

$$\int_{t_0}^{t}\Big\{\frac{\tau[t,x]-\tau[s,x]}{t-s}u(s,x) + \ln(t-s)D_s(\tau[s,x]u(s,x))\Big\}ds =$$
$$=\int_{t_0}^{t}\Big\{\frac{\tau[t,x]u(t,x)-\tau[s,x]u(s,x)}{t-s} + \ln(t-s)D_s(\tau[s,x]u(s,x))\Big\}ds +$$
$$+\tau[t,x]\int_{t_0}^{t}\frac{u(s,x)-u(t,x)}{t-s}ds =$$
$$=\int_{t_0}^{t}D_s\left(\ln(t-s)[\tau[s,x]u(s,x)-\tau[t,x]u(t,x)]\right)ds +$$
$$+\tau[t,x]\left(D_t\int_{t_0}^{t}\ln(t-s)u(s,x)ds - \ln(t-t_0)u(t,x)\right) =$$
$$=\lim_{s\to t-0}\big\{\ln(t-s)[\tau[s,x]u(s,x)-\tau[t,x]u(t,x)]\big\} -$$
$$-\ln(t-t_0)\lim_{s\to t_0+0}\tau[s,x]u(s,x) + \tau[t,x]D_t(Lu)(t,x).$$

В полученном выражении первый предел обращается в нуль в силу дифференцируемости функций $\tau[s,x]$ и $u(s,x)$ по s при $s>t_0$, а второй — в силу дифференцируемости функции $\tau[t,x]$ в точке $t = t_0$, условия (8) и суммируемости $u(t,x)$ по переменной t. В результате получаем

$$(L\bar{u})(\bar{t},\bar{x}) = (Lu)(t,x) + \\ + a[L(\eta - \tau u_t - \xi^u u_i)(t,x) + \xi^i(t,x)D_i(Lu)(t,x)] + \\ + a\tau[t,x]D_t(Lu)(t,x) + o(a).$$

Таким образом, справедливость инфинитезимального преобразования (9), (10) доказана. □

Замечание. В предельном случае $t_0 \to -\infty$ условие (8) не требуется.

На основе формулы продолжения (9) получаются формулы продолжения для интегро-дифференциальных переменных $D_t^k(Lu)$:

$$D_{\bar{t}}^k(L\bar{u})(\bar{t},\bar{x}) = D_t^k(Lu)(t,x) + a\zeta_{D^k(Lu)}[t,x] + o(a),$$

где

$$\zeta_{D_t^k(Lu)}[t,x] = D_t^k L(\eta - \tau u_t - \xi^i u_i)(t,x) + \\ + \tau D_t^{k+1}(Lu)(t,x) + \xi^i D_i D_t^k(Lu)(t,x) \quad (11)$$

(функция Lu в этом случае предполагается дифференцируемой $k+1$ раз по переменной t).

2. Приближение дробно-дифференциальных уравнений уравнениями с малым параметром. Рассмотрим дробно-дифференциальное уравнение

$$_{t_0}D_t^\alpha u = F(t,x,u,u_{(1)},\ldots,u_{(r)}), \quad n-1 < \alpha < n, \quad n,\ r \in \mathbb{N}, \qquad (12)$$

где $_{t_0}D_t^\alpha u = D_t^n({}_{t_0}I_t^{n-\alpha}u)$ — дробная производная Римана—Лиувилля и

$$u_{(1)} = u_{i_1}, \quad \ldots, \quad u_{(r)} = u_{i_1\ldots i_r},$$

$$u_{i_1} = D_{i_1}u, \quad \ldots, \quad u_{i_1\ldots i_r} = D_{i_r}\ldots D_{i_1}u, \quad i_1,\ldots,i_r = 1,\ldots,m.$$

Пусть $\alpha = n - \varepsilon$, $0 < \varepsilon \ll 1$. Тогда с учетом разложения (3) уравнение (12) с точностью до $o(\varepsilon)$ приближается уравнением с малым параметром ε:

$$(1+\varepsilon\gamma)\frac{\partial^n u}{\partial t^n} + \varepsilon\frac{\partial^{n+1}}{\partial t^{n+1}}(Lu) \approx F(t,x,u,u_{(1)},\ldots,u_{(r)}), \quad n,r \in \mathbb{N}. \qquad (13)$$

Здесь и далее приближенное равенство $f \approx g$ означает $f = g + o(\varepsilon)$.

Аналогично, дробно-дифференциальное уравнение

$$^C_{t_0}D_t^\alpha u = F(t,x,u,u_{(1)},\ldots,u_{(r)}), \quad n-1 < \alpha < n, \quad n,\ r \in \mathbb{N}, \qquad (14)$$

с дробной производной Герасимова—Капуто $^C_{t_0}D_t^\alpha u = {}_{t_0}I_t^{n-\alpha}(D_t^n u)$, при $\alpha = n - \varepsilon$, $0 < \varepsilon \ll 1$, с точностью до $o(\varepsilon)$ приближается уравнением

$$(1+\varepsilon\gamma)\frac{\partial^n u}{\partial t^n} + \varepsilon\frac{\partial}{\partial t}L(D_t^n u) \approx F(t,x,u,u_{(1)},\ldots,u_{(r)}), \quad n,\ r \in \mathbb{N}. \qquad (15)$$

Отметим, что в силу наличия в уравнениях (13) и (15) интегрального оператора L, определенного в (4), данные уравнения являются интегро-дифференциальными. Однако в нулевом порядке по ε эти уравнения являются дифференциальными уравнениями целого порядка n по t и порядка r по x. Поэтому данные уравнения могут рассматриваться как дифференциальные уравнения с малыми нелокальными возмущениями. Наличие таких возмущений сохраняет в уравнениях (13) и (15) нелокальную природу исходных дробно-дифференциальных уравнений (12) и (14) соответственно.

Однако в некоторых простейших случаях нелокальность в уравнениях с малым параметром может быть исключена.

Пример. Рассмотрим простейшее обыкновенное дробно-дифференциальное уравнение

$$ {}_0D_t^{\alpha} u = 0, \quad \alpha \in (1,2), \quad t > 0. $$

Его решение хорошо известно [4]:

$$ u(t) = C_1 t^{\alpha-1} + C_2 t^{\alpha-2}, \tag{16} $$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

Пусть $\alpha = 2 - \varepsilon$. Тогда соответствующее приближенное уравнение (13) примет вид

$$ (1+\varepsilon\gamma)\frac{d^2u}{dt^2} + \varepsilon \frac{d^3}{dt^3}\int_0^t \ln(t-s)u(s)ds \approx 0. \tag{17} $$

Это уравнение дважды интегрируется:

$$ (1+\varepsilon\gamma)u(t) + \varepsilon \frac{d}{dt}\int_0^t \ln(t-s)u(s)ds \approx At + B, $$

где A, B — постоянные интегрирования. С точностью $o(\varepsilon)$ отсюда имеем

$$ \varepsilon u(t) \approx \varepsilon(At+B). $$

После подстановки этого представления в интеграл и его вычисления находим

$$ (1+\varepsilon\gamma)u(t) + \varepsilon[At(\ln t - 1) + B\ln t] \approx At + B. $$

С точностью до $o(\varepsilon)$ получаем

$$ u(t) \approx At(1+\varepsilon-\varepsilon\gamma-\varepsilon\ln t) + B(1-\varepsilon\gamma-\ln t) $$

или, обозначая $C_1 = (1+\varepsilon-\varepsilon\gamma)A$, $C_2 = (1-\varepsilon\gamma)B$, находим

$$ u(t) \approx (C_1 t + C_2)(1-\varepsilon\ln t), $$

что соответствует разложению решения (16) при $\alpha = 2-\varepsilon$ в ряд по ε с точностью до $o(\varepsilon)$.

Теперь заметим, что второе слагаемое в уравнении (17) можно упростить с учетом приближенного равенства $\varepsilon u'' \approx 0$:

$$\varepsilon\frac{d^3}{dt^3}\int_0^t \ln(t-s)u(s)ds = \varepsilon\frac{d^3}{dt^3}\int_0^t \ln(s)u(t-s)ds =$$
$$= \varepsilon\frac{d^2}{dt^2}\Big[u(0)\ln t + \int_0^t \ln(s)u'(t-s)ds\Big] =$$
$$= \varepsilon\frac{d}{dt}\Big[\frac{u(0)}{t} + u'(0)\ln t\Big] + \frac{d}{dt}\int_0^t \ln(s)\varepsilon u''(t-s)ds \approx \varepsilon\Big[\frac{u'(0)}{t} - \frac{u(0)}{t^2}\Big].$$

В силу уравнения $\varepsilon u'' \approx 0$ справедливы равенства $\varepsilon u'(0) \approx \varepsilon u'(t)$, $\varepsilon u(0) = \varepsilon u(t) - \varepsilon u'(t)$. В результате уравнение (17) приводится к виду

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \varepsilon\Big(\frac{2}{t}\frac{du}{dt} - \frac{u(t)}{t^2}\Big) \approx 0,$$

то есть становится обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка с малым параметром. Его исследование может быть выполнено классическими методами теории возмущений для дифференциальных уравнений с малым параметром.

Тем не менее подавляющее большинство получающихся в результате описанной выше процедуры приближенных нелокальных уравнений, особенно нелинейных, не может быть приведено к локальным. В этой связи при их симметрийном анализе возникает ряд важных особенностей, которые будут рассмотрены далее.

3. Приближенные точечные симметрии. Приближенные преобразования получаются в результате введения в функции φ, ψ^i и θ из (5) дополнительной переменной — малого параметра ε с последующим разложением по нему этих функций в ряд Тейлора с удержанием нескольких (обычно двух) первых членов разложения. Теория групп таких приближенных преобразований применительно к дифференциальным уравнениям с малым параметром была развита в работах [12, 13] (см. также [14]). С точностью $o(\varepsilon)$ инфинитезимальный оператор такой группы имеет вид

$$X \equiv X_{(0)} + \varepsilon X_{(1)} = (\tau_{(0)} + \varepsilon\tau_{(1)})\frac{\partial}{\partial t} + (\xi^i_{(0)} + \varepsilon\xi^i_{(1)})\frac{\partial}{\partial x^i} + (\eta_{(0)} + \varepsilon\eta_{(1)})\frac{\partial}{\partial u}. \quad (18)$$

Здесь $\tau_{(0)}$, $\tau_{(1)}$, $\xi^i_{(0)}$, $\xi^i_{(1)}$, $\eta_{(0)}$, $\eta_{(1)}$ являются функциями переменных t, x, u.

Определение. *Приближенной точечной симметрией* дифференциального или интегро-дифференциального уравнения с малым параметром называется оператор вида (18), соответствующий группе приближенных преобразований, допускаемых этим уравнением с точностью $o(\varepsilon)$.

Рассмотрим алгоритм нахождения приближенных симметрий на примере уравнений (13) и (15). Он сводится к следующим основным шагам.

1. Методами классического группового анализа находится группа точечных симметрий (все операторы $X_{(0)}$) невозмущенного уравнения

$$\frac{\partial^n u}{\partial t^n} = F(t, x, u, u_{(1)}, \ldots, u_{(r)}), \quad n,\ r \in \mathbb{N}.$$

2. С использованием приведенных в разделе 1 формул продолжения, найденная невозмущенная группа продолжается на интегро-дифференциальные переменные $D_t^{n+1}(Lu)$ или $D_t L(D_t^n u)$, а также на все дифференциальные переменные, входящие в соответствующее уравнение.
3. На основе критерия приближенной инвариантности, имеющего вид

$$\Big\{(\tilde{X}_{(0)} + \varepsilon \tilde{X}_{(1)})\Big[\frac{\partial^n u}{\partial t^n} - F(t, x, u, u_{(1)}, \ldots, u_{(r)})\Big] + \\ + \varepsilon \tilde{X}_{(0)}\Big[\gamma \frac{\partial^n u}{\partial t^n} + \frac{\partial^{n+1}}{\partial t^{n+1}}(Lu)\Big]\Big\}\Big|_{(13)} \approx 0$$

для уравнения (13), и

$$\Big\{(\tilde{X}_{(0)} + \varepsilon \tilde{X}_{(1)})\Big[\frac{\partial^n u}{\partial t^n} - F(t, x, u, u_{(1)}, \ldots, u_{(r)})\Big] + \\ + \varepsilon \tilde{X}_{(0)}\Big[\gamma \frac{\partial^n u}{\partial t^n} + \frac{\partial}{\partial t} L(D_t^n u)\Big]\Big\}\Big|_{(15)} \approx 0$$

для уравнения (15), строится определяющее уравнение, решением которого являются координаты оператора $X_{(1)}$. Здесь $\tilde{X}_{(0)}$ и $\tilde{X}_{(1)}$ — соответствующие продолженные операторы.

В результате решения определяющего уравнения находятся приближенные точечные симметрии вида (18).

Важно отметить, что определяющее уравнение, возникающее из критерия приближенной инвариантности, является относительно координат искомого оператора $X_{(1)}$ линейным дифференциальным уравнением в частных производных целого порядка, а не интегро-дифференциальным уравнением.

Пример. Рассмотрим в качестве примера нелинейное дробно-дифференциальное уравнение фильтрации субдиффузионного типа:

$$ {}_0D_t^{\alpha} u = e^{u_x} u_{xx}, \quad t > 0 \quad \alpha \in (0, 1). \tag{19}$$

В предельном случае $\alpha = 1$ это уравнение переходит в классическое уравнение фильтрации с производной первого порядка по времени, допускающее пятимерную алгебру точечных симметрий (см. [26]) с базисом

$$\begin{aligned} &X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = 2t\frac{\partial}{\partial t} + x\frac{\partial}{\partial x} + u\frac{\partial}{\partial u}, \\ &X_3 = \frac{\partial}{\partial u}, \quad X_4 = t\frac{\partial}{\partial t} - x\frac{\partial}{\partial u}, \quad X_5 = \frac{\partial}{\partial t}. \end{aligned} \tag{20}$$

Симметрии дробно-дифференциального уравнения (19) находятся по алгоритму, приведенному в [8]. В этом случае алгебра точечных симметрий оказывается двумерной с базисом

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = 2t\frac{\partial}{\partial t} + \alpha x\frac{\partial}{\partial x} + \alpha u\frac{\partial}{\partial u}.$$

Таким образом, алгебра симметрий дробно-дифференциального уравнения оказывается существенно беднее алгебры симметрий соответствующего уравнения с производными целого порядка.

Теперь рассмотрим уравнение (19) в приближении $\alpha = 1 - \varepsilon$, $0 < \varepsilon \ll 1$. Тогда оно с точностью $o(\varepsilon)$ приближается уравнением

$$(1 + \varepsilon\gamma)u_t + \varepsilon D_t^2(Lu) = e^{u_x} u_{xx}, \tag{21}$$

где оператор L определяется (4) с $t_0 = 0$. Найдем приближенные симметрии данного уравнения, используя представленный выше алгоритм.

При $\varepsilon = 0$ уравнение (21) совпадает с (19) и поэтому допускает пятипараметрическую группу преобразований с операторами (20). Общий оператор такой группы может быть записан в виде

$$X_{(0)} \equiv \sum_{i=1}^{5} A_i X_i = (A_5 + (2A_2 - A_4)t)\frac{\partial}{\partial t} + (A_1 + A_2 x)\frac{\partial}{\partial x} + \\ + (A_2 u + A_3 + A_4 x)\frac{\partial}{\partial u}, \tag{22}$$

где A_i — произвольные постоянные. Таким образом, п. 1 приведенного выше алгоритма выполнен.

Далее в соответствии с п. 2 алгоритма найдем продолжение инфинитезимального оператора (22) пятипараметрической группы преобразований на нелокальную переменную $D_t^2(Lu)$. Формула продолжения (11) после элементарных преобразований дает

$$\zeta_{D_t^2(Lu)} = \frac{A_3 + A_4 x}{t} + A_2 D_t^2(Lu) - A_5 D_t^2(Lu_t) - (2A_2 - A_4) D_t^2 L(tu_t) + \\ + (A_5 + (2A_2 - A_4)t) D_t^3(Lu).$$

Воспользуемся тождествами

$$D_t L(tu_t) = t D_t^2(Lu) - u, \quad L(u_t) - D_t(Lu) = u(0, x) \ln t,$$

справедливость которых легко проверяется непосредственными вычислениями. Тогда

$$\zeta_{D_t^2(Lu)} = \frac{A_5}{t} u(0, x) + \frac{A_3 + A_4 x}{t} + (2A_2 - A_4)u_t + (A_4 - A_2) D_t^2(Lu).$$

Продолжения оператора (22) на переменные u_t, u_x и u_{xx} находятся по классическим формулам (см., например, [1, 2]) и имеют, соответственно, вид

$$\zeta_{(0)t} = (A_4 - A_2)u_t, \quad \zeta_{(0)x} = A_4, \quad \zeta_{(0)xx} = -A_2 u_{xx}.$$

В результате продолженный оператор нулевого приближения имеет вид

$$\tilde{X}_{(0)} = [A_5 + (2A_2 - A_4)t]\frac{\partial}{\partial t} + [A_1 + A_2 x]\frac{\partial}{\partial x} + [A_2 u + A_3 + A_4 x]\frac{\partial}{\partial u} + \\ + [(A_4 - A_2)u_t]\frac{\partial}{\partial u_t} + A_4 \frac{\partial}{\partial u_x} - A_2 u_{xx}\frac{\partial}{\partial u_{xx}} +$$

$$+\Big[\frac{A_5}{t}u(0,x)+\frac{A_3+A_4x}{t}+(2A_2-A_4)u_t+(A_4-A_2)D_t^2(Lu)\Big]\frac{\partial}{\partial D_t^2(Lu)}.$$

Продолженный оператор первого приближения записывается в виде

$$\tilde{X}_{(1)}=\tau_{(1)}\frac{\partial}{\partial t}+\xi_{(1)}\frac{\partial}{\partial x}+\eta_{(1)}\frac{\partial}{\partial u}+\zeta_{(1)t}\frac{\partial}{\partial u_t}+\zeta_{(1)x}\frac{\partial}{\partial u_x}+\zeta_{(1)xx}\frac{\partial}{\partial u_{xx}},$$

где $\tau_{(1)}$, $\xi_{(1)}$ и $\eta_{(1)}$ — функции переменных t, x, u, а $\zeta_{(1)t}$, $\zeta_{(1)x}$ и $\zeta_{(1)xx}$ определяются классическими формулами продолжения [1, 2]

$$\begin{aligned}
&\zeta_{(1)t}=D_t(\eta_{(1)})-D_t(\tau_{(1)})u_t-D_t(\xi_{(1)})u_x,\\
&\zeta_{(1)x}=D_x(\eta_{(1)})-D_x(\tau_{(1)})u_t-D_x(\xi_{(1)})u_x,\\
&\zeta_{(1)xx}=D_x^2(\eta_{(1)})-D_x^2(\tau_{(1)})u_t-D_x^2(\xi_{(1)})u_x-2D_x(\tau_{(1)})u_{tx}-2D_x(\xi_{(1)})u_{xx}.
\end{aligned}$$

В результате определяющее уравнение из п. 3 алгоритма после несложных преобразований приобретает вид

$$\zeta_{(1)t}-\zeta_{(1)x}e^{u_x}u_{xx}-\zeta_{(1)xx}e^{u_x}=-\frac{A_5}{t}u(0,x)-\frac{A_3+A_4x}{t}+(A_4-2A_2)u_t. \quad (23)$$

Это уравнение соответствует первому порядку разложения по ε, поэтому должно выполняться в силу невозмущенного уравнения $u_t=e^{u_x}u_{xx}$.

В (23) функция начального условия $u(0,x)$ должна рассматриваться как самостоятельная независимая переменная, т.к. уравнение должно быть выполнено при любых таких функциях. Поэтому расщепление по этой переменной дает $A_1=0$, т.е. группа переносов по времени, соответствующая оператору X_1, не наследуется возмущенным уравнением (21). Частное решение оставшейся части определяющего уравнения, соответствующее правой части уравнения (23), имеет вид

$$\tau_{(1)}=[2A_2-A_4(2-\ln t)]t,\quad \xi_{(1)}=0,\quad \eta_{(1)}=-(A_3+A_4x)\ln t.$$

В результате получено, что возмущенное уравнение (21) наследует первые четыре из пяти точечных симметрий (20) невозмущенного уравнения. Соответствующие приближенные точечные симметрии имеют вид

$$X_1=\frac{\partial}{\partial x},\quad X_2=2(1+\varepsilon)t\frac{\partial}{\partial t}+x\frac{\partial}{\partial x}+u\frac{\partial}{\partial u},$$
$$X_3=(1-\varepsilon\ln t)\frac{\partial}{\partial u},\quad X_4=[1+\varepsilon(2-\ln t)]t\frac{\partial}{\partial t}-(1-\varepsilon\ln t)x\frac{\partial}{\partial u}.$$

При этом, как обычно [12–14], возмущенное уравнение (21) будет также обладать приближенными симметриями, полученными из симметрий (20) невозмущенного уравнения умножением на малый параметр ε:

$$X_5=\varepsilon\frac{\partial}{\partial t},\quad X_6=\varepsilon X_1,\quad X_7=\varepsilon X_2,\quad X_8=\varepsilon X_3,\quad X_9=\varepsilon X_4.$$

Таким образом, возмущенное уравнение (21) обладает 9-мерной алгеброй приближенных точечных симметрий с базисом X_i $(i=1,\dots,9)$. Видно, что размерность алгебры приближенных симметрий дробно-дифференциального уравнения оказывается существенно больше размерности соответствующей алгебры точных симметрий, что дает возможность строить новые приближенно инвариантные решения такого уравнения, которые не могут быть получены из соответствующих точных инвариантных решений.

В заключение примера сделаем два замечания.

Во-первых, если в исходном уравнении (19) вместо дробной производной Римана—Лиувилля будет использована дробная производная Капуто, то алгебра симметрий такого уравнения оказывается трехмерной, так как в этом случае дополнительно будет допускаться оператор X_3 из (20). Операторы X_4 и X_5 по-прежнему не наследуются. Алгебра приближенных симметрий соответствующего возмущенного уравнения при этом останется 9-мерной.

Во-вторых, если в уравнении (19) используются дробные производные с $t_0 = -\infty$ (случай полной памяти системы) с дополнительным естественным физическим ограничением $\lim_{t\to-\infty} u(t,x) = 0$, то такое уравнение будет допускать группу переносов по времени, соответствующую оператору X_5. Данная симметрия будет без изменений наследоваться соответствующим возмущенным уравнением, в результате чего алгебра приближенных точечных симметрий такого уравнения станет 10-мерной.

4. Нелокальные приближенные симметрии. Важным преимуществом предлагаемого в данной работе подхода является возможность нахождения в ряде случаев не только точечных, но и нелокальных симметрий. Такие симметрии для дифференциальных уравнений целого порядка известны достаточно давно [23–25] и к их построению развит целый ряд подходов [26–28]. Для дробно-дифференциальных уравнений нелокальные симметрии представляются естественными в силу нелокальности самих дробно-дифференциальных операторов. Однако в настоящее время известны лишь отдельные примеры построения таких симметрий [11, 29, 30].

Для рассматриваемых в работе нелокальных уравнений с малым параметром процедура нахождения определенного вида нелокальных симметрий оказывается несколько проще, чем для исходных дробно-дифференциальных уравнений. Это связано с тем, что рассматриваемые уравнения являются нелокальными только в первом порядке по ε и нелокальная переменная определена явно в виде интегро-дифференциального слагаемого $D_t^n(Lu)$. В результате нелокальные симметрии могут быть найдены аналогично высшим симметриям при условии, что координаты инфинитезимального оператора в ε-порядке будут дополнительно зависеть от нелокальных переменных.

Известно [2], что инфинитезимальный оператор (18) может быть записан в каноническом виде в форме оператора Ли—Беклунда:

$$Y = (\omega_{(0)} + \varepsilon\omega_{(1)})\frac{\partial}{\partial u}, \quad \omega_{(j)} = \eta_{(j)} - \tau_{(j)}u_t - \xi^i_{(j)}u_i, \quad j = 0, 1.$$

Если дополнительно предположить зависимость координаты $\omega_{(1)}$ от нелокальной переменной Lu и ее производных, то такая координата может быть найдена из ε-части определяющего уравнения. Алгоритм нахождения приближенных симметрий при этом не изменяется, происходит только увеличение размерности пространства независимых переменных. При этом продолжение оператора Y на любую переменную вида Mu, где M — линейный оператор (дифференциальный, интегральный или интегро-дифференциальный) имеет вид

$$\tilde{Y} = Y + \zeta_{Mu}\frac{\partial}{\partial(Mu)}, \quad \zeta_{Mu} = M(\omega_{(0)} + \varepsilon\omega_{(1)}).$$

Проиллюстрируем описанный подход простым примером.

Пример. Рассмотрим линейное уравнение субдиффузии с полной памятью

$${}_{-\infty}D_t^{\alpha}u = u_{xx}, \quad \alpha \in (0,1).$$

При $\alpha = 1-\varepsilon$ с точностью $o(\varepsilon)$ оно приближается уравнением

$$(1+\varepsilon\gamma)u_t + \varepsilon\frac{\partial^2}{\partial t^2}Lu = u_{xx}. \tag{24}$$

Хорошо известно [1], что невозмущенное уравнение $u_t = u_{xx}$ обладает симметрией

$$X_{(0)} = -2t\frac{\partial}{\partial x} + xu\frac{\partial}{\partial u}. \tag{25}$$

С помощью алгоритма, описанного в предыдущем разделе, можно показать, что данная симметрия не наследуется уравнением (24) в виде приближенной точечной симметрии.

В канонической форме оператор $X_{(0)}$ имеет вид

$$Y_{(0)} = (xu + 2tu_x)\frac{\partial}{\partial u},$$

а координата его продолжения на нелокальную переменную $D_t^2(Lu)$ есть

$$\zeta_{D_t^2(Lu)} = D_t^2[xLu + 2L(tu_x)].$$

Определяющее уравнение в нулевом приближении в силу уравнения (24) обращается в нуль, а в ε-приближении принимает вид

$$D_t(\omega_{(1)}) - D_x^2(\omega_{(1)}) = -2\gamma u_x + 2tD_t^2(Lu_x) - 2D_t^2L(tu_x).$$

Так как нижний передел интегрирования в операторе L равен $-\infty$, справедливо представление

$$D_t^2L(tu_x) = D_t(Lu_x) + tD_t^2(Lu_x) - u_x.$$

В результате приходим к уравнению

$$D_t(\omega_{(1)}) - D_x^2(\omega_{(1)}) = 2(1-\gamma)u_x - 2D_t(Lu_x),$$

которое должно выполняться в силу уравнения $u_t = u_{xx}$. В результате находим

$$\omega_{(1)} = 2(1-\gamma)tu_x - 2tD_t(Lu_x).$$

Таким образом, для уравнения (24) найдена приближенная нелокальная симметрия

$$Y = \{xu + 2tu_x + \varepsilon[2(1-\gamma)tu_x - 2tD_t(Lu_x)]\}\frac{\partial}{\partial u}.$$

Данная симметрия может быть представлена и в классическом виде как

$$X = -2[1 + (1-\gamma)\varepsilon]t\frac{\partial}{\partial x} + [xu - 2\varepsilon t D_t(Lu_x)]\frac{\partial}{\partial u}.$$

Тем самым показано, что точечная симметрия (25) классического уравнения диффузии (или теплопроводности) $u_t = u_{xx}$ нелокально наследуется возмущенным уравнением (24).

Заключение. Предложен новый алгоритм нахождения приближенных симметрий для дробно-дифференциальных уравнений, основанный на разложении дробных производных в ряд по малому параметру, выделяемому из порядка дробного дифференцирования. Принципиальным его отличием от алгоритма, использованного ранее в работах [10, 15], является применение разложения на основе интегро-дифференциального оператора с логарифмическим ядром. Преимущества нового алгоритма заключаются в более низких требованиях к гладкости решения дробно-дифференциального уравнения, в возможности расчета приближенных симметрий для уравнений с дробными производными с бесконечными пределами интегрирования, а также в возможности построения нелокальных симметрий определенного вида. Эффективность алгоритма проиллюстрирована на нелинейном дробно-дифференциальном уравнении фильтрации субдиффузионного типа. Знание приближенной алгебры симметрий дробно-дифференциальных уравнений открывает возможность построения для них новых приближенно инвариантных решений и приближенных законов сохранения.

Конкурирующие интересы. Авторы заявляют об отсутствии конкурирующих интересов.

Авторский вклад и ответственность. Все авторы принимали участие в получении основных результатов статьи и в написании рукописи. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

Финансирование. Исследование выполнялось без финансирования.

Библиографический список

1. Овсянников Л. В. *Групповой анализ дифференциальных уравнений.* М.: Наука, 1978. 400 с.
2. Ибрагимов Н.Х. *Группы преобразований в математической физике.* М.: Наука, 1983. 280 с.
3. Grigoriev Yu. N., Ibragimov N. H., Kovalev V. F., Meleshko S. V. *Symmetries of Integro-Differential Equations. With Applications in Mechanics and Plasma Physics* / Lecture Notes in Physics. vol. 806. Dordrecht: Springer, 2010. xiii+305 pp. DOI: https://doi.org/10.1007/978-90-481-3797-8.
4. Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения.* Минск: Наука и техника, 1987. 688 с.
5. Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J. *Theory and Applications of Fractional Differential Equations* / North-Holland Mathematics Studies. vol. 204. Amsterdam: Elsevier, 2006. xv+523 pp. DOI: https://doi.org/10.1016/s0304-0208(06)x8001-5.
6. Учайкин В. В. *Метод дробных производных.* Ульяновск: Артишок, 2008. 512 с.
7. Gazizov R. K., Kasatkin A. A., Lukashchuk S. Yu. Symmetries and group invariant solutions of fractional ordinary differential equations / *Handbook of Fractional Calculus with*

Applications. vol. 2, Fractional Differential Equations; eds. A. Kochubei, Yu. Luchko. Berlin: De Gruyter, 2019. pp. 65–90. DOI: https://doi.org/10.1515/9783110571660-004.

8. Lukashchuk S. Yu. On the property of linear autonomy for symmetries of fractional differential equations and systems // *Mathematics*, 2022. vol. 10, no. 13, 2319. EDN: WBYZVC. DOI: https://doi.org/10.3390/math10132319.
9. Hashemi M. S., Baleanu D. *Lie Symmetry Analysis of Fractional Differential Equation*. Boca Raton: CRC Press, 2020. xiii+208 pp. DOI: https://doi.org/10.1201/9781003008552.
10. Gazizov R. K., Lukashchuk S. Yu. Approximations of fractional differential equations and approximate symmetries // *IFAC-PapersOnLine*, 2017. vol. 50, no. 1. pp. 14022–14027. EDN: XYGJKP. DOI: https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2017.08.2426.
11. Gazizov R. K., Lukashchuk S. Yu. Higher-order symmetries of a time-fractional anomalous diffusion equation // *Mathematics*, 2021. vol. 9, no. 3, 216. EDN: VEHQHB. DOI: https://doi.org/10.3390/math9030216.
12. Байков В. А., Газизов Р. К., Ибрагимов Н. Х. Приближенные симметрии // *Матем. сб.*, 1988. Т. 136(178), № 4(8). С. 435–450.
13. Байков В. А., Газизов Р. К., Ибрагимов Н. Х. Методы возмущений в групповом анализе / Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Нов. достиж., Т. 34. М.: ВИНИТИ, 1989. С. 85–147.
14. Ibragimov N. H. *Transformation groups and Lie algebras*. Hackensack: World Scientific, 2013. x+185 pp. DOI: https://doi.org/10.1142/8763.
15. Лукащук С. Ю. Групповая классификация одного нелинейного приближенного уравнения субдиффузии // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2016. Т. 20, № 4. С. 603–619. EDN: YHPUVH. DOI: https://doi.org/10.14498/vsgtu1520.
16. Лукащук В. О., Гаврюшина Л. О. Приближенные симметрии и законы сохранения дробно-дифференциального обобщения уравнения Бюргерса // *Математика и математическое моделирование*, 2019. № 5. С. 1–14. EDN: LCDIJL. DOI: https://doi.org/10.24108/mathm.0519.0000197.
17. Lashkarian E., Motamednezhad A., Hejazi S. R. Invariance properties and conservation laws of perturbed fractional wave equation // *Eur. Phys. J. Plus*, 2021. vol. 136, 615. DOI: https://doi.org/10.1140/epjp/s13360-021-01595-6.
18. Lashkarian E., Motamednezhad A., Hejazi S. R. Group analysis, invariance results, exact solutions and conservation laws of the perturbed fractional Boussinesq equation // *Int. J. Geom. Methods Mod. Phys.*, 2023. vol. 20, no. 1, 2350013. DOI: https://doi.org/10.1142/S0219887823500135.
19. Nadjafikhah M., Mirala M., Chaichi M. Approximate symmetries and conservation laws of forced fractional oscillator // *Int. J. Nonlinear Anal. Appl.*, 2023. vol. 14, no. 2. pp. 195–205. DOI: https://doi.org/10.22075/ijnaa.2022.25979.3178.
20. Tarasov V. E., Zaslavsky G. M. Dynamics with low-level fractionality // *Physica A*, 2006. vol. 368, no. 2. pp. 399–415. DOI: https://doi.org/10.1016/j.physa.2005.12.015.
21. Tofighi A., Golestani A. A perturbative study of fractional relaxation phenomena // *Physica A*, 2008. vol. 387, no. 8–9. pp. 1807–1817. DOI: https://doi.org/10.1016/j.physa.2007.11.046.
22. Tofighi A. An especial fractional oscillator // *Int. J. Stat. Mech.*, 2013. vol. 2013, 175273. DOI: https://doi.org/10.1155/2013/175273.
23. Виноградов А. М., Красильщик И. С. Один метод вычисления высших симметрий нелинейных эволюционных уравнений и нелокальные симметрии // *Докл. АН СССР*, 1980. Т. 253, № 6. С. 1289–1293.
24. Bluman G. W., Reid G. J., Kumei S. New classes of symmetries of partial differential equations // *J. Math. Phys.*, 1988. vol. 29, no. 4. pp. 806–811. DOI: https://doi.org/10.1063/1.527974.
25. Leach P.G.L., Andriopoulos K. Nonlocal symmetries past, present and future // *Appl. Anal. Discrete Math.*, 2007. vol. 1, no. 1. pp. 150–171.

26. Ахатов И. Ш., Газизов Р. К., Ибрагимов Н. Х. Нелокальные симметрии. Эвристический подход / Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Нов. достиж., Т. 34. М.: ВИНИТИ, 1989. С. 3–83.
27. Bluman G. W., Cheviakov A. F., Anco S. C. *Applications of Symmetry Methods to Partial Differential Equations* / Applied Mathematical Sciences. New York: Springer, 2010. xix+398 pp. DOI: https://doi.org/10.1007/978-0-387-68028-6.
28. *Симметрии и законы сохранения уравнений математической физики* / ред. А. М. Виноградов, И. С. Красильщик. М.: Факториал, 1997. 464 с.
29. Газизов Р. К., Касаткин А. А., Лукащук С. Ю. Уравнения с производными дробного порядка: замены переменных и нелокальные симметрии // *Уфимск. матем. журн.*, 2012. Т. 4, № 4. С. 54–68. EDN: OILYOP.
30. Ludu A. Nonlocal symmetries for time-dependent order differential equations // *Symmetry*, 2018. vol. 10, no. 12, 771. DOI: https://doi.org/10.3390/sym10120771.

Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2024, vol. 28, no. 2, pp. 247–266
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu2078

MSC: 35R11, 35B20, 70G65

On the calculation of approximate symmetries of fractional differential equations

V. O. Lukashchuk, S. Yu. Lukashchuk

Ufa University of Science and Technology,
32, Zaki Validi st., Ufa, 450076, Russian Federation.

Abstract

A new algorithm for finding approximate symmetries for fractional differential equations with the Riemann–Liouville and Gerasimov–Caputo fractional derivatives, the order of which is close to an integer, is proposed. The algorithm is based on the expansion of the fractional derivative into a series with respect to a small parameter isolated from the order of fractional differentiation. In the first-order, such an expansion contains a nonlocal integro-differential operator with a logarithmic kernel.

As a result, the original fractional differential equation is approximated by an integro-differential equation with a small parameter for which approximate symmetries can be found. A theorem is proved about the form of prolongation of one-parameter point transformations group to a new variable represented by a nonlocal operator included in the expansion of the fractional derivative. Knowing such a prolongation allows us to apply an approximate invariance criterion to the equation under consideration.

The proposed algorithm is illustrated by the problem of finding approximate symmetries for a nonlinear fractional filtration equation of subdiffusion type. It is shown that the dimension of approximate symmetries algebra for such an equation is significantly larger than the dimension of the algebra of exact symmetries. This fact opens the possibility of constructing a large number of approximately invariant solutions. Also, it is shown that the algorithm makes it possible to find nonlocal approximate symmetries of a certain type. This possibility is illustrated on a linear fractional differential subdiffusion equation.

Differential Equations and Mathematical Physics
Research Article

Please cite this article in press as:
Lukashchuk V. O., Lukashchuk S. Yu. On the calculation of approximate symmetries of fractional differential equations, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2024, vol. 28, no. 2, pp. 247–266. EDN: CXTSHY. DOI: 10.14498/vsgtu2078 (In Russian).

Authors' Details:

Veronika O. Lukashchuk https://orcid.org/0000-0002-3082-1446
Cand. Phys. & Math. Sci.; Associate Professor; Dept. of High Performance Computing Technologies and Systems; e-mail: voluks@gmail.com

Stanislav Yu. Lukashchuk https://orcid.org/0000-0001-9209-5155
Dr. Phys. & Math. Sci., Associate Professor; Professor; Dept. of High Performance Computing Technologies and Systems; e-mail: lsu@ugatu.su

Keywords: fractional differential equation, small parameter, approximate transformation group, approximate prolonfation formula, approximate symmetry, nonlocal symmetry.

Received: 23rd November, 2023 / Revised: 11th February, 2024 / Accepted: 26th April, 2024 / First online: 8th October, 2024

Competing interests. The authors declare that there are no competing interests.

Authors' contributions and responsibilities. All authors contributed to obtaining the main results of the article and to writing the manuscript. The authors bear full responsibility for submitting the final manuscript for publication. The final version of the manuscript has been approved by all authors.

Funding. The study was conducted without funding.

References

1. Ovsyannikov L. V. *Group analysis of differential equations.* New York, Academic Press, 1982, xvi+416 pp.
2. Ibragimov N. H. *Transformation Groups Applied to Mathematical Physics*, Mathematics and Its Applications (Soviet Series), vol. 3. Dordrecht, D. Reidel Publ., 1985, xv+394 pp.
3. Grigoriev Yu. N., Ibragimov N. H., Kovalev V. F., Meleshko S. V. *Symmetries of Integro-Differential Equations. With Applications in Mechanics and Plasma Physics*, Lecture Notes in Physics, vol. 806. Dordrecht, Springer, 2010, xiii+305 pp. DOI: https://doi.org/10.1007/978-90-481-3797-8.
4. Samko S. G., Kilbas A. A., Marichev O. I. *Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications.* New York, Gordon & Breach Sci. Publishers, 1993, xxxvi+976 pp.
5. Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J. *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, North-Holland Mathematics Studies, vol. 204. Amsterdam, Elsevier, 2006, xv+523 pp. DOI: https://doi.org/10.1016/s0304-0208(06)x8001-5.
6. Uchaikin V. V. *Metod drobnykh proizvodnykh* [Method of Fractional Derivatives]. Ulyanovsk, Artishok, 2008, 512 pp. (In Russian)
7. Gazizov R. K., Kasatkin A. A., Lukashchuk S. Yu. Symmetries and group invariant solutions of fractional ordinary differential equations, In: *Handbook of Fractional Calculus with Applications*, vol. 2, Fractional Differential Equations; eds. A. Kochubei, Yu. Luchko. Berlin, De Gruyter, 2019, pp. 65–90. DOI: https://doi.org/10.1515/9783110571660-004.
8. Lukashchuk S. Yu. On the property of linear autonomy for symmetries of fractional differential equations and systems, *Mathematics*, 2022, vol. 10, no. 13, 2319. EDN: WBYZVC. DOI: https://doi.org/10.3390/math10132319.
9. Hashemi M. S., Baleanu D. *Lie Symmetry Analysis of Fractional Differential Equation.* Boca Raton, CRC Press, 2020, xiii+208 pp. DOI: https://doi.org/10.1201/9781003008552.
10. Gazizov R. K., Lukashchuk S. Yu. Approximations of fractional differential equations and approximate symmetries, *IFAC-PapersOnLine*, 2017, vol. 50, no. 1, pp. 14022–14027. EDN: XYGJKP. DOI: https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2017.08.2426.
11. Gazizov R. K., Lukashchuk S. Yu. Higher-order symmetries of a time-fractional anomalous diffusion equation, *Mathematics*, 2021, vol. 9, no. 3, 216. EDN: VEHQHB. DOI: https://doi.org/10.3390/math9030216.
12. Baikov V. A., Gazizov R. K., Ibragimov N. Kh. Approximate symmetries, *Math. USSR-Sb.*, 1989, vol. 64, no. 2, pp. 427–441. DOI: https://doi.org/10.1070/sm1989v064n02abeh003318.
13. Baikov V. A., Gazizov R. K., Ibragimov N. H. Perturbation methods in group analysis, *J. Soviet Math.*, 1991, vol. 55, no. 1, pp. 1450–1490. DOI: https://doi.org/10.1007/BF01097534.
14. Ibragimov N. H. *Transformation groups and Lie algebras.* Hackensack, World Scientific, 2013, x+185 pp. DOI: https://doi.org/10.1142/8763.

15. Lukashchuk S. Yu An approximate group classification of a perturbed subdiffusion equation, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2016, vol. 20, no. 4, pp. 603–619 (In Russian). EDN: YHPUVH. DOI: https://doi.org/10.14498/vsgtu1520.
16. Lukashchuk V. O., Gavryushina L. O. Approximate Symmetries and Conservation Laws of Fractional Differential Generalization of the Burgers Equation, *Math. Math. Model.*, 2019, no. 5, pp. 1–14 (In Russian). EDN: LCDIJL. DOI: https://doi.org/10.24108/mathm.0519.0000197.
17. Lashkarian E., Motamednezhad A., Hejazi S. R. Invariance properties and conservation laws of perturbed fractional wave equation, *Eur. Phys. J. Plus*, 2021, vol. 136, 615. DOI: https://doi.org/10.1140/epjp/s13360-021-01595-6.
18. Lashkarian E., Motamednezhad A., Hejazi S. R. Group analysis, invariance results, exact solutions and conservation laws of the perturbed fractional Boussinesq equation, *Int. J. Geom. Methods Mod. Phys.*, 2023, vol. 20, no. 1, 2350013. DOI: https://doi.org/10.1142/S0219887823500135.
19. Nadjafikhah M., Mirala M., Chaichi M. Approximate symmetries and conservation laws of forced fractional oscillator, *Int. J. Nonlinear Anal. Appl.*, 2023, vol. 14, no. 2, pp. 195–205. DOI: https://doi.org/10.22075/ijnaa.2022.25979.3178.
20. Tarasov V. E., Zaslavsky G. M. Dynamics with low-level fractionality, *Physica A*, 2006, vol. 368, no. 2, pp. 399–415. DOI: https://doi.org/10.1016/j.physa.2005.12.015.
21. Tofighi A., Golestani A. A perturbative study of fractional relaxation phenomena, *Physica A*, 2008, vol. 387, no. 8–9, pp. 1807–1817. DOI: https://doi.org/10.1016/j.physa.2007.11.046.
22. Tofighi A. An especial fractional oscillator, *Int. J. Stat. Mech.*, 2013, vol. 2013, 175273. DOI: https://doi.org/10.1155/2013/175273.
23. Vinogradov A. M., Krasil'shchik I. S. A method of computing higher symmetries of nonlinear evolution equations, and nonlocal symmetries, *Soviet Math. Dokl.*, 1980, vol. 22, no. 1, pp. 235–239.
24. Bluman G. W., Reid G. J., Kumei S. New classes of symmetries of partial differential equations, *J. Math. Phys.*, 1988, vol. 29, no. 4, pp. 806–811. DOI: https://doi.org/10.1063/1.527974.
25. Leach P.G.L., Andriopoulos K. Nonlocal symmetries past, present and future, *Appl. Anal. Discrete Math.*, 2007, vol. 1, no. 1, pp. 150–171.
26. Akhatov I. Sh., Gazizov R. K., Ibragimov N. Kh. Nonlocal symmetries. Heuristic approach, *J. Soviet Math.*, 1991, vol. 55, no. 1, pp. 1401–1450. DOI: https://doi.org/10.1007/BF01097533.
27. Bluman G. W., Cheviakov A. F., Anco S. C. *Applications of Symmetry Methods to Partial Differential Equations*, Applied Mathematical Sciences. New York, Springer, 2010, xix+398 pp. DOI: https://doi.org/10.1007/978-0-387-68028-6.
28. *Simmetrii i zakony sokhraneniia uravnenii matematicheskoi fiziki* [Symmetries and Conservation Laws of Equations of Mathematical Physics], eds. A. M. Vinogradov, I. S. Krasil'shchik. Moscow, Factorial, 1997, 464 pp. (In Russian)
29. Gazizov R. K., Kasatkin A. A., Lukashchuk S. Yu. Fractional differential equations: Change of variables and nonlocal symmetries, *Ufa Math. J.*, 2012, vol. 4, no. 4, pp. 54–67.
30. Ludu A. Nonlocal symmetries for time-dependent order differential equations, *Symmetry*, 2018, vol. 10, no. 12, 771. DOI: https://doi.org/10.3390/sym10120771.

Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2024. Т. 28, № 2. С. 267–285
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu2070
EDN: HALOGN

УДК 539.43:621.787

Численный метод расчета полей остаточных напряжений в поверхностно упрочненном призматическом образце с несквозной поперечной трещиной V-образного профиля в упругопластической постановке

***В. П. Радченко*[1], *М. Н. Саушкин*[1], *Д. М. Шишкин*[2]**

[1] Самарский государственный технический университет,
Россия, 443100, Самара, ул. Молодогвардейская, 244.
[2] Сызранский филиал Самарского государственного технического университета,
Россия, 446001, Самарская обл., Сызрань, ул. Советская, 45.

Аннотация

Представлен численный метод расчета полей остаточных напряжений в поверхностно упрочненном призматическом образце с несквозной V-образной трещиной, базирующийся на упругопластическом решении задачи. По полученным результатам проведен подробный анализ распределений остаточных напряжений вблизи дефекта по нескольким контурам. Определено, что при глубине трещины 0.3 мм практически все изучаемые компоненты остаточных напряжений сжатия имеют бóльшие (по модулю) значения, чем при глубине 0.1 мм, либо равные значения.

Ключевые слова: призматический образец, опережающее поверхностное пластическое деформирование, несквозная трещина, остаточные напряжения, численное решение, метод конечных элементов.

Получение: 20 декабря 2023 г. / Исправление: 15 февраля 2024 г. /
Принятие: 4 марта 2024 г. / Публикация онлайн: 15 октября 2024 г.

Механика деформируемого твердого тела
Научная статья

Образец для цитирования
Радченко В. П., Саушкин М. Н., Шишкин Д. М. Численный метод расчета полей остаточных напряжений в поверхностно упрочненном призматическом образце с несквозной поперечной трещиной V-образного профиля в упругопластической постановке // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2024. Т. 28, № 2. С. 267–285. EDN: HALOGN. DOI: 10.14498/vsgtu2070.

Сведения об авторах

Владимир Павлович Радченко https://orcid.org/0000-0003-4168-9660
доктор физико-математических наук, профессор; заведующий кафедрой; каф. прикладной математики и информатики; e-mail: radchenko.vp@samgtu.ru

Михаил Николаевич Саушкин https://orcid.org/0000-0002-8260-2069
кандидат физико-математических наук, доцент; доцент; каф. прикладной математики и информатики; e-mail: saushkin.mn@samgtu.ru

Дмитрий Михайлович Шишкин https://orcid.org/0000-0003-3205-2262
кандидат технических наук; доцент; каф. общетеоретических дисциплин;
e-mail: shishkin.dim@yandex.ru

Введение. Процессы постепенного износа и нарушения целостности наружных поверхностей деталей являются неотъемлемой частью эксплуатационного цикла задействованных металлических элементов конструкций и механизмов. Контроль степени их фактического повреждения позволяет выявить наиболее уязвимые к разрушению участки для проведения ремонтно-восстановительных работ либо, если в этом имеется необходимость, процедуры прогнозирования дальнейшей работоспособности из условий нагружения, действия внешней среды и иных эксплуатационных факторов. При этом осуществить непрерывный мониторинг состояния даже для ответственных конструктивных элементов зачастую бывает проблематично или практически невозможно, что не позволяет оценить опасность преждевременного выхода из строя как поврежденной детали, так и всего изделия в целом.

В настоящее время в области инженерного проектирования широкое распространение получил подход, когда посредством цифрового моделирования проводится имитация работы деталей с образованными в ходе эксплуатации несплошностями (сколы, царапины, вмятины и т. д.). С целью определения критического состояния таких тел выполняется численный конечно-элементный анализ напряженно-деформированного состояния (НДС) [1, 2] или количества циклов усталостного нагружения [3–5, 20]. Полученные результаты позволяют корректировать технические решения на стадии изготовления элементов конструкций с учетом возможных последствий, сведя риск внезапного отказа к минимуму. Наибольший научно-практический интерес при этом уделяется разработке численных методов расчета по оценке усталостной прочности деталей с поверхностными трещиноподобными дефектами, численные результаты которых часто сопоставляют с данными проведенных по аналогии экспериментальных исследований согласно критериям механики разрушения на примере специально изготовленных образцов [3, 4, 20]. Несмотря на кажущуюся основательность подобных методов, их реализация в инженерной практике весьма трудоемка, полученные в ходе проведенных испытаний результаты не всегда однозначны ввиду стохастичности процесса развития трещин, а сформулированные рекомендации по повышению стойкости тел к трещинообразованию, как правило, справедливы лишь в рамках конкретно рассматриваемого случая.

Иной подход к увеличению прочности изделий базируется на применении технологических операций поверхностного пластического деформирования (ППД) деталей, подверженных температурно-силовому эксплуатационному воздействию. Использование данной технологии широко распространено в авиадвигателестроении и энергетическом машиностроении по причине относительно простого, но эффективного способа повышения надежности металлоизделий с сохранением массогабаритных характеристик, что подтверждается основополагающими работами [6–11]. Увеличение прочностного ресурса достигается за счет формирования в приповерхностном слое обработанных методом ППД деталей тонкого слоя (от 100–200 мкм [15, 17] до 1 мм [18] в зависимости от применяемого метода упрочнения) сжимающих остаточных напряжений (ОН), компенсирующих образующиеся при эксплуатации опасные напряжения растяжения. Помимо очевидного преимущества методов ППД для деталей с гладкой «бездефектной» структурой поверхности [15, 17] неоднократно доказана эффективность применения методов упрочнения по технологии опережающего поверхностного пластического деформирования (ОППД) для деталей с предусмотренными конструкцией различного рода концентраторами напряжений в виде канавок, надрезов технологического характера либо приобретенными эксплуатационными дефектами поверхностно упрочненных деталей от соударения с инородными предметами (например, в авиадвигателестроении) типа царапин, трещин, вмятин (в том числе работающих в условиях усталостного нагружения) [8,12–14,16,19]. Следует отметить, что для упрочненных деталей с концентраторами напряжений в условиях многоциклового нагружения наблюдается увеличение предела выносливости на 30–70 % по сравнению с неупрочненными [12,13].

Наличие упрочненного поверхностного слоя с наведенными ОН сжатия ППД благоприятно влияет и на увеличение циклической трещиностойкости. Согласно работам [20,21] доказано, что технологическая операция, например, дробеструйной обработки позволяет достигнуть увеличения пороговых значений критериальных параметров механики разрушения материалов, вследствие чего увеличивается срок службы подверженных разрушению стальных образцов. При этом автор работы [21] отмечает, что среди обширного количества опубликованных экспериментальных работ, посвященных влиянию сжимающих ОН на увеличение сопротивляемости материалов усталостному растрескиванию, большинство исследователей не уделяет должного внимания эффекту улучшения параметров трещиностойкости. Из всего этого следует, что положительное влияние образованных после ППД сжимающих ОН в области трещин недооценено. В этой связи настоящая работа посвящена разработке численного метода расчета полей ОН для поверхностно упрочненного призматического образца с несквозной V-образной трещиной в упругопластической постановке с целью изучения НДС в области действия остаточных сжимающих напряжений.

1. Постановка задачи. Так как численный метод расчета на основе метода конечных элементов (МКЭ) можно реализовать только для конкретного элемента конструкции, в настоящей работе влияние несквозной трещины V-образного профиля на НДС рассмотрено на примере поверхностно упрочненного призматического образца из сплава ЭП742 с размерами 100×10×10 мм. Трещина расположена в центре образца (рис. 1). В качестве параметров, описывающих геометрию дефекта, рассмотрены следующие: длина трещины $l = 3$ мм, глубина $b = \{0.1; 0.3\}$ мм, начальный угол раскрытия берегов трещины $\varphi = 15^\circ$ и радиус скругления фронта трещины $r = b$. Процедура упрочнения верхней грани образца осуществлялась ультразвуковой механической обработкой, методика проведения которой подробно изложена в работе [15], в соответствии с технологией опережающего поверхностного пластического деформирования (ОППД) [14,16,19].

Численное решение поставленной задачи основано на методе начальных деформаций, сводящей исходную задачу к фиктивной задаче термоупругопластичности [13–19], когда на первом этапе определяются поля остаточных напряжений и пластических деформаций после упрочнения гладкой (бездефектной) детали, а затем остаточные пластические деформации приравниваются к температурным деформациям в фиктивно заданном температурном поле по объему детали. На втором этапе на упрочненный образец наносится V-образная трещина, т. е. удаляется часть материала образца, и для осталь-

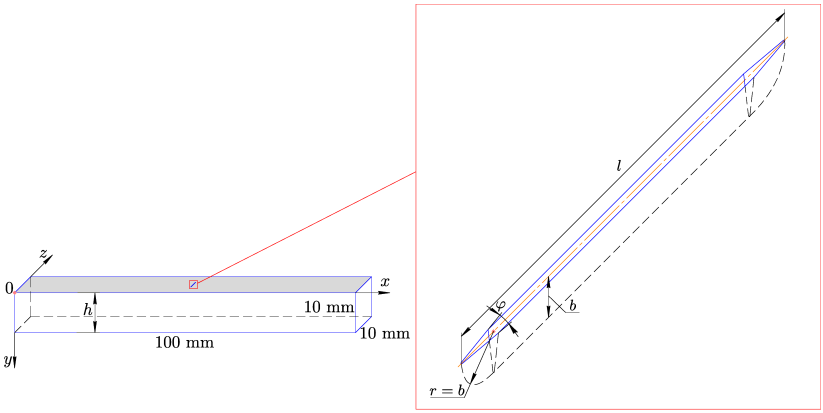


Рис. 1. Схематическое изображение поверхностно упрочненного призматического образца с несквозной V-образной трещиной

[Figure 1. Schematic representation of a surface-hardened prismatic sample with a non-through V-shaped crack]

ной области решается задача термоупругопластичности о перераспределении остаточных напряжений. Именно в такой последовательности представлен далее материал статьи.

2. Метод расчета остаточных напряжений и пластических деформаций в поверхностно упрочненном гладком образце. Начальный (первый) этап описанного в настоящей работе подхода основан на методе определения полей ОН и пластических деформаций (ПД) в поверхностно упрочненном гладком «бездефектном» образце призматической формы, подверженном виброударному ультразвуковому упрочнению (УЗУ) верхней грани [15]. Несмотря на то, что этот метод хорошо известен, для лучшего дальнейшего понимания материала статьи изложим его подробно в соответствии с [15]. Математическое описание процесса поверхностного упрочнения сводится к расчету компонент тензоров ОН и ПД в декартовой системе координат (см. рис. 1), зависящих только от координаты y: $\sigma_x = \sigma_x(y)$, $\sigma_z = \sigma_z(y)$, $\sigma_y = \sigma_y(y) = 0$, а значения всех оставшихся недиагональных компонент ОН и ПД полагаются равными нулю, что теоретически доказано в [15]. Ненулевыми компонентами являются упругие $e_i = e_i(y)$, пластические $q_i = q_i(y)$ и полные $\varepsilon_i = \varepsilon_i(y)$ деформации, соответственно, $i = x, y, z$. В соответствии с гипотезой плоских сечений для компонент $\varepsilon_i = \varepsilon_i(y)$ выполняется условие

$$\varepsilon_x(y) = \varepsilon_z(y) = 0.$$

Для рассматриваемого случая изотропного поверхностного упрочнения в направлении осей x и y с учетом пластической несжимаемости материала $q_x + q_y + q_z = 0$ и гипотезы $q_x = q_z$ расчетные формулы принимают вид [15]

$$\sigma_z(y) = \sigma_x(y), \quad q_x(y) = q_z(y) = -\frac{1-v}{E}\sigma_x(y), \quad q_y(y) = \frac{2(1-v)}{E}\sigma_x(y), \qquad (1)$$

где v — коэффициент Пуассона, E — модуль Юнга.

Как следует из зависимостей (1), все компоненты тензоров ОН и ПД выражаются через компоненту $\sigma_x = \sigma_x(y)$, поэтому при наличии известной экспериментальной зависимости $\sigma_x = \sigma_x(y)$ (рис. 2) оставшиеся компоненты тензоров ОН и ПД определяются соотношениями (1).

Однако экспериментальное определение этой зависимости возможно лишь в тонком упрочненном слое, поэтому необходимо построить аппроксимацию этой зависимости и экстраполировать ее на все значения $0 \leqslant y \leqslant H$ в пределах высоты упрочненного образца $H = 10$ мм с учетом условия самоуравновешенности ОН вида $\int_0^H \sigma_x(y)dy = 0$. Для этого использовалась зависимость, предложенная в [15]:

$$\sigma_x(y) = \sigma_0 - \sigma_1 \exp\left[-\left(\frac{y-y^*}{b}\right)^2\right], \tag{2}$$

где σ_0, σ_1, b, y^* — параметры аппроксимации экспериментальной эпюры $\sigma_x = \sigma_x(y)$, методика идентификации которых приведена в работе [15]. Дальнейшее использование зависимостей (1) и (2) в качестве исходной информации о начальном напряженно-деформированном состоянии поверхностно упрочненного образца необходимо для реализации метода расчета ОН и ПД в этом же образце, но уже с учетом несквозной V-образной трещины.

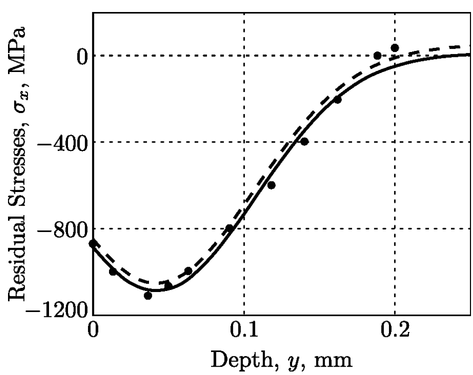


Рис. 2. Данные для компоненты $\sigma_x = \sigma_x(y)$ после ультразвукового упрочнения поверхности образца из сплава ЭП742: экспериментальные (маркеры), расчетные (сплошная линия) по аппроксимации (2) и расчетные (штриховая линия) для термоупругой задачи (воспроизведено по [27])

[Figure 2. Data for the component $\sigma_x = \sigma_x(y)$ after ultrasonic hardening of the surface of a sample made of EP742 alloy: experimental (markers), calculated (solid line) by approximation (2) and designed (dashed line) for the thermoelastic problem (reproduced by [27])]

3. Численный метод расчета остаточных напряжений в образце с V-образной трещиной в упругопластической постановке. В работе [14] показано, что решения задач о перераспределении ОН в области сквозного V-образного надреза, расположенного перпендикулярно оси x, в упругой и упругопластической постановках в области, прилегающей к концентратору напряжений, в среднеквадратичной норме отличаются на 100–200 % и более. При этом компонента $\sigma_x = \sigma_x(y)$ в упругом решении превышает по модулю временной предел сопротивления материала более чем в 3–5 раз, что говорит о нефизичности этих результатов. Основной причиной этого с позиций линейной механики разрушения является наличие сингулярности в вершине трещины для упругого материала. Это, в свою очередь, при численной реализации задачи приводит к большим значениям напряжений в конечных элементах геометрической сетки в слоях, непосредственно примыкающих к границе трещины, что отмечается во многих работах [23–26]. Например, при использовании J-интеграла в качестве критерия раскрытия трещины его значения в слоях КЭ, примыкающих к трещине, существенно отличаются от его стабильных значений в КЭ вдали от трещины. По этой причине мы рассматриваем задачу распределения остаточных напряжений в поверхностно упрочненном призматическом образце с V-образной несквозной трещиной исключительно в упругопластической постановке.

Реализация численного метода расчета ввиду повышенной сложности методики решения задачи возможна лишь с применением современных программных комплексов на основе метода конечных элементов (МКЭ). Поэтому в качестве компьютеризированной вычислительной среды был выбран программный комплекс инженерного анализа `ANSYS Mechanical APDL`. Аналогично [19] алгоритм численного метода решения задачи сводился к следующим этапам.

1. Начальный этап численного расчета заключался в аппроксимации известной экспериментальной зависимости для компоненты $\sigma_x = \sigma_x(y)$ по формуле (2) (сплошная кривая на рис. 2 с параметрами аппроксимации: $y^* = 0.034$ мм, $\sigma_0 = 13.38$ МПа, $\sigma_1 = 1100.98$ МПа, $b = 0.0928$ мм [14–17, 19, 27]) и расчете полей ОН и ПД для гладкого образца по формулам (1).
2. На втором этапе расчета в предварительно построенной модели гладкого «бездефектного» призматического образца задавалось неоднородное фиктивное распределение для температуры $T = T(y)$, закон изменения которой не влияет на последующее решение термоупругопластической задачи [14–17, 19].

   Компоненты остаточных ПД $q_i = q_i(y)$, рассчитанные предварительно по зависимостям (1), моделировались температурными деформациями с использованием соотношений

$$q_i(y) = \beta_i(T(y))[T(y) - T_0], \quad i = x, y, z,\ 0 \leqslant y \leqslant H, \tag{3}$$

   где $\beta_i(T(y))$ — коэффициенты температурного расширения, $H = 10$ мм — высота образца, $T = T(y)$ — неоднородное температурное поле с малым градиентом температур, не зависящее от закона распределения, $T_0 = T(H) = 20\,^\circ\mathrm{C}$ — фиксированное значение температуры на нижней грани образца (рис. 1), $T_1 = T(0) = 400\,^\circ\mathrm{C}$ — значение температуры на противоположной упрочненной грани.

   По известным значениям $q_i(y)$ и при заданном распределении температуры $T = T(y)$ по формуле (3) вычислялись коэффициенты температурного расширения $\beta_i = \beta_i(T(y))$.

   Далее с этими значениями численно МКЭ решалась термоупругая задача для гладкого образца для проверки адекватности метода сведения исходной задачи к фиктивной термоупругой.

   На рис. 2 штриховой линией представлены результаты расчета задачи фиктивной термоупругости методом КЭ для компоненты $\sigma_x = \sigma_x(y)$, которые практически совпадают с данными расчета по аппроксимации (2). Эти данные служили исходной информацией при осуществлении следующего расчетного этапа.
3. На третьем этапе в соответствии с технологией ОППД на верхней грани предварительно упрочненного образца осуществлялась имитация его

повреждения с образованием несквозной V-образной трещины с ненулевым углом раскрытия $\varphi = 15°$.

На программном уровне этот процесс реализовывался удалением из модели гладкого поверхностно упрочненного образца части материала, представляющего объем дефекта с наведенными упрочнением ОН и ПД, что приводило поле полных деформаций к неуравновешенному состоянию.

Состояние равновесия упрочненного образца с трещиной достигалось посредством перераспределения полей ОН и ПД в области трещины из численного решения задачи термоупругопластичности с сохранением температурного поля и вычисленных значений $\beta_i = \beta_i(T(y))$ в оставшейся после удаления части материала области.

Учет пластичности материала образца в модельных расчетах в программе `ANSYS` осуществлялся заданием диаграммы упругопластического деформирования в координатах «истинное напряжение – полная деформация» $(\sigma - \varepsilon)$. При этом предполагалось, что диаграммы «растяжение – сжатие» для рассматриваемого в работе сплава упрочненного образца ЭП742 идентичны (с учетом знака), а уровень образующихся ОН в области сжатия выше предела текучести (пропорциональности) σ_T вблизи основания концентратора напряжений для случая образца с дефектом, что приводит к появлению здесь вторичных пластических деформаций. Поскольку исходная экспериментальная диаграмма для сплава ЭП742 представляется в виде «номинальное напряжение – полная деформация» $(\sigma_0 - \varepsilon)$ с ниспадающим участком деформирования на закритической стадии деформирования, для пересчета номинальных σ_0 напряжений в истинные σ с учетом теории реологического деформирования и накопления поврежденности использовались зависимости [22]

$$\sigma = \sigma_0(1 + \omega), \quad \dot{\omega} = \alpha\sigma\dot{q}, \tag{4}$$

где ω — параметр поврежденности; q — пластичная деформация; $\alpha = \mathrm{const}$ — феноменологический параметр; σ_0, σ — номинальное и истинное напряжения, соответствующие одному и тому же уровню пластической деформации q.

Для жесткого режима одноосного нагружения образца ($\dot{\varepsilon} = \mathrm{const}$) использовалась неявно заданная зависимость $\sigma_0 = \sigma_0(q)$ [22]:

$$q = c\left[\sigma_0 \exp\left(\int_0^a \alpha\sigma_0(\xi)d\xi\right) - \sigma_T\right]^n, \tag{5}$$

где σ_T — предел текучести материала; c и n — параметры аппроксимации начального участка диаграммы упругопластического деформирования степенной зависимостью при $\omega \approx 0$ и $\sigma \cong \sigma_0$:

$$q = c(\sigma_0 - \sigma_{\mathrm{T}})^n. \tag{6}$$

Типовые кривые «мгновенного» упругопластического деформирования для сплава ЭП742 при температуре 20 °C представлены на рис. 3. Здесь кривой *1* изображена экспериментальная диаграмма, кривыми *2* и *3* — диаграммы, рассчитанные в координатах $\sigma_0 - \varepsilon$ (с ниспадающим участком) и координатах $\sigma - \varepsilon$ (монотонно возрастающая функция) по формулам (4)–(6) соответственно. Для построения кривой *3* использовались следующие параметры [22]: $\sigma_T = 863.3$ МПа, $c = 1.356 \cdot 10^{-6}$ МПа$^{-n}$, $n = 1.776$, $\alpha = 1.916 \cdot 10^{-3}$ МПа$^{-1}$.

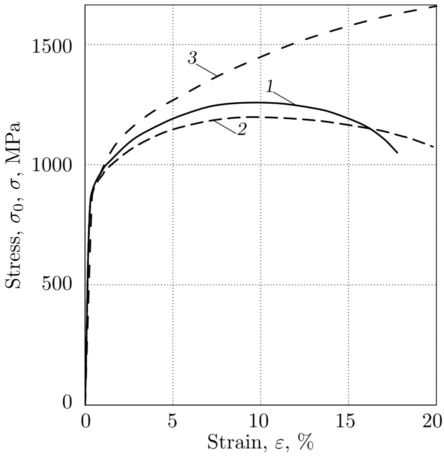


Рис. 3. Кривые упругопластического деформирования сплава ЭП742 при температуре 20 °C: *1* — экспериментальные данные [22], *2* — расчет в координатах $\sigma_0 - \varepsilon$, 3 — расчет в координатах $\sigma - \varepsilon$

[Figure 3. The stress-strain curves of the EP742 alloy under elastic-plastic deformation at a temperature of 20 °C: *1* — experimental data [22], *2* — calculation in coordinates $\sigma_0 - \varepsilon$, *3* — calculation in coordinates $\sigma - \varepsilon$]

Необходимость в расчетной кривой *3* на рис. 3 для сплава ЭП742 диктуется требованиями конечно-элементного пакета `ANSYS`, согласно которым учет упругопластических свойств возможен только при условии задания строго возрастающей зависимости между напряжением и деформацией. Для этого в истинных координатах $\sigma - \varepsilon$ использовалась полилинейная модель материала, задаваемая в виде кусочно-линейной функции в координатах «напряжение – полная деформация» по точкам $(\sigma_i, \varepsilon_i)$, $i = 1, 2, 3, \ldots, 100$.

Процесс конечно-элементного моделирования для рассматриваемого случая задачи поверхностно упрочненного образца с несквозной V-образной трещиной по сравнению с ранними работами [14,16,19] в этом направлении, в которых использовались образцы со сквозными надрезами, имеет следующую особенность.

Здесь построение модели образца начиналось с моделирования центрального объема, содержащего V-образную трещину, после чего выполнялось «наращивание» этой модели до достижения объемом призматической формы с размерами 100×10×10 мм. Для этого в горизонтальной плоскости xz (см. рис. 1) по исходным геометрическим параметрам трещины выполнялось построение малой поверхности с V-образным вырезом, после чего на ней осуществлялась генерация плоской сетки из фиктивных поверхностных четырехузловых элементов типа `MESH200`. Далее методом экструзии вдоль предварительно построенной кривой вытягивания (будущей линии фронта трещины) формировался объем с трещиной, представленный восьмиузловыми элементами `SOLID185`. В завершение полученная часть модели с дефектом достраивалась также методом экструзии до формирования полноценной конечно-элементной модели призматического образца, состоящей также из элементов `SOLID185`. Однородность сетки построенной конечно-элементной модели при этом достигалась посредством правильного соответствия всеми элементами своим узловым точкам, что исключило вероятность появления программных ошибок при проведении расчетов. Процедура моделирования тонкого упрочненного слоя толщиной до 200 мкм, необходимая для правильной реализации расчета ОН на всех расчетных этапах модели поверхностно упрочненного образца (как при имитации процедуры упрочнения гладкого, так и при инициации концентратора напряжений), реализовывалась выбором конечных элементов с линейным размером ребер не более 7 мкм.

Важно отметить, что выбор типа конечных элементов SOLID185 обоснован необходимостью проведения структурного анализа построенной модели с учетом свойств пластичности и больших деформаций, а также решения температурной задачи за счет встроенной в программу ANSYS функции замены на элементы SOLID70 и обратно без необходимости перестроения сетки элементов расчетной математической модели.

4. Апробация метода и анализ полученных результатов. Анализ разработанного метода расчета ОН в области V-образной трещины поверхностно упрочненного призматического образца выполнялся на примере двух расчетных случаев модели с глубиной дефекта $b = 0.1$ мм и $b = 0.3$ мм соответственно.

Детальное исследование распределения ОН выполнялось по полученным значениям напряжений в узлах конечно-элементной модели, распределенных вдоль четырех основных направлений (рис. 4):

– по глубине h от начала трещины вдоль оси y от точки A (контур I);
– по глубине h от дна трещины в центральном сечении вдоль оси y от точки B (контур II);
– вдоль линии фронта трещины от точки A в направлении точки B (контур III);
– вдоль левой кромки берега раскрытия трещины от точки A в направлении точки C (контур IV).

Важно отметить, что в зависимости от выбранной схемы исследования оценка характера распределения ОН производилась по глубине h от упрочненной поверхности для контура I и по глубине h от дна трещины для контура II, а ввиду симметрии модели относительно продольного центрального сечения — по полудлине фронта трещины l_1 (контур III) и полудлине левой кромки берега трещины l_2 (контур IV).

На рис. 5–8 приведены распределения компонент ОН σ_i, $i = x, y, z$, по вышеобозначенным контурам несквозной V-образной трещины в поверхностно упрочненном призматическом образце для случаев глубины дефекта 0.1

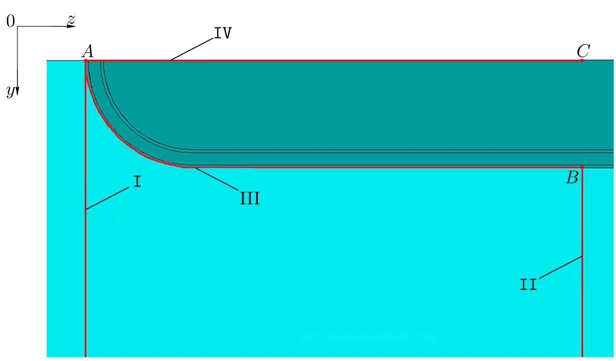


Рис. 4. Схематическое изображение основных контуров для визуализации распределения остаточных напряжений: I — по глубине от начала трещины, II — по глубине от центра трещины, III — вдоль фронта трещины, IV — вдоль левой кромки берега трещины

[Figure 4. Schematic representation of the main contours for visualizing the distribution of residual stresses: I — with depth from the crack origin, II — with depth from the crack center, III — along the crack front, IV — along the left edge of the crack bank] и 0.3 мм. Отметим, что на рис. 7, 8 приведены значения ОН в области вершины несквозной трещины, так как за пределами вершины трещины они выходят на постоянные значения (происходит их стабилизация).

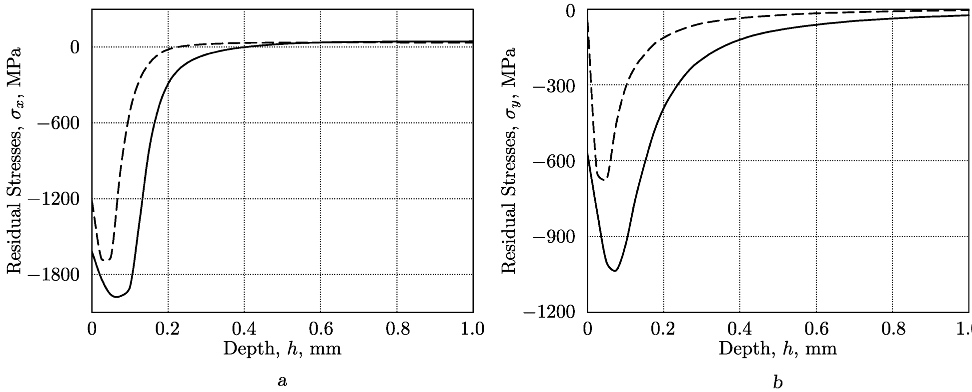
Анализ результатов для случаев распределения ОН по контуру I (рис. 5), контуру III (рис. 7) и контуру IV (рис. 8) показал, что практически для всех компонент σ_i, $i = x, y, z$, при глубине дефекта 0.3 мм наблюдаются бо́льшие (по модулю) значения остаточных сжимающих напряжений, чем при глубине дефекта 0.1 мм. Это явление обусловлено дополнительным изменением ОН напряжений вследствие появления изгибающего момента от эффекта закрытия трещины, причем по мере увеличения глубины дефекта интенсивность напряжений возрастает. Поэтому сжимающие ОН для всех компонент тензора (за исключением компоненты σ_z на рис. $7, c$ и рис. $8, c$) при глубине дефекта 0.1 мм в упрочненном слое приобретают меньшие значения в пределах от 0.008 мм для компоненты σ_x (рис. $8, a$) до 1 мм для компоненты ОН σ_y (рис. $5, b$), после чего наблюдается стабилизация численных значений ОН по для обоих расчетных случаев в зависимости от глубины трещины.

При анализе распределения ОН по высоте h от дна трещины в центральном сечении (рис. 6) полученные результаты для соответствующих компонент при глубинах дефекта 0.1 и 0.3 мм дают близкие результаты.

Частичная адекватность разработанного метода расчета полей ОН в зоне дефекта оценивалась исходя из характера распределений напряжений σ_x и σ_y, рассчитанных вдоль кромки одного из берегов трещины по полудлине l_2 и практически равных нулю (рис. $8, a, b$), за исключением области, непосредственно примыкающей к вершине трещины. Согласно теории механики разрушения, напряжения в местах разрыва материала, где наблюдается расхождение берегов трещины, равны нулю, поскольку материал конструкции в этом месте не оказывает сопротивления. При этом компонента σ_z, распределенная вдоль берегов трещины, для рассматриваемого случая отлична от нуля (рис. $8, c$). Важно отметить, что экстремальные значения ОН для всех исследуемых компонент принимают в области вблизи дна концентратора (линии фронта трещины).

Еще один аспект частичной проверки адекватности численного метода состоит в том, что, как это следует из рис. 5 и 6, компоненты σ_x и σ_z с удалением от упрочненной поверхности стремятся к значению $\sigma_0 = 13.38$ МПа в аппроксимации (2) для гладкого образца. Это связано с тем, что трещина влияет на напряженно-деформированное состояние только в непосредственной близости от себя, в то время как на большем расстоянии ОН практически совпадают с соответствующими значениями для гладкого образца. Компонента же σ_y с удалением от упрочненной поверхности приближается к нулю, что не противоречит условию $\sigma_y(y) = 0$ $(0 \leqslant y \leqslant H)$ для гладкого образца.

Помимо нормальных компонент ОН исследовались и касательные напряжения. Оценка уровня и характера их распределения в упрочненных деталях и элементах конструкций также вызывает интерес, поскольку при эксплуатации изделий такие напряжения чаще всего приводят к мгновенному разрушению по наиболее ослабленному сечению. Исследование касательных напряжений проводилось по тем же контурам I–IV (см. рис. 4), что и для нормальных компонент ОН.



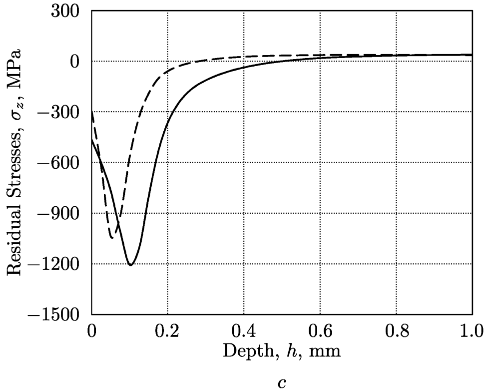
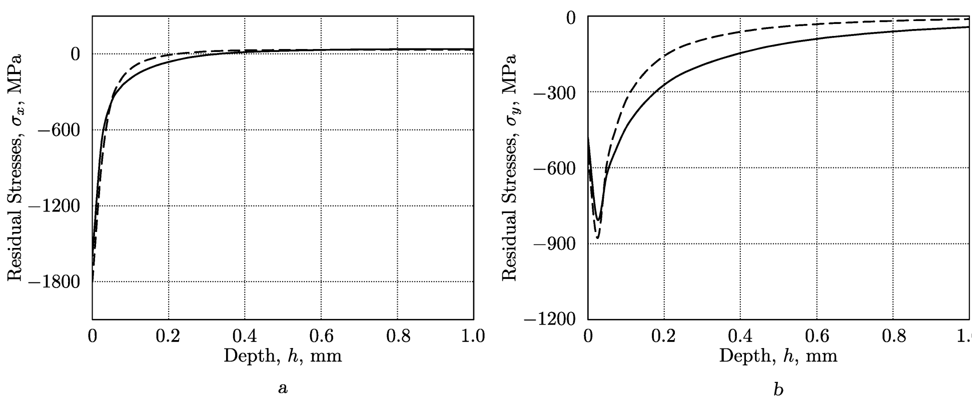


Рис. 5. Распределение компонент остаточных напряжений σ_x (a), σ_y (b) и σ_z (c) по контуру I для случаев глубины дефекта 0.1 мм (сплошные линии) и 0.3 мм (штриховые линии)

[Figure 5. The distribution of residual stress components σ_x (a), σ_y (b), and σ_z (c) along contour I for defect depths of 0.1 mm (solid lines) and 0.3 mm (dashed lines)]



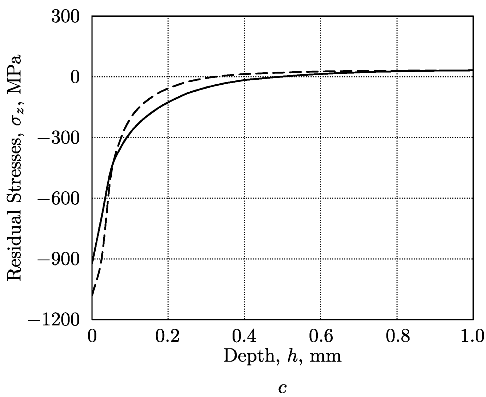
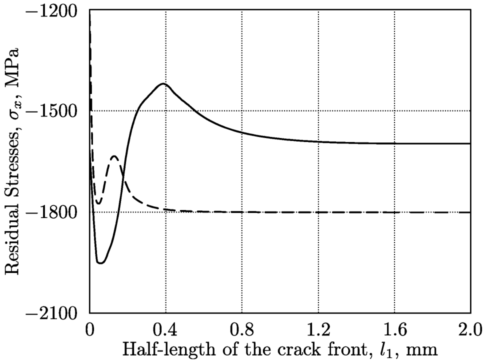
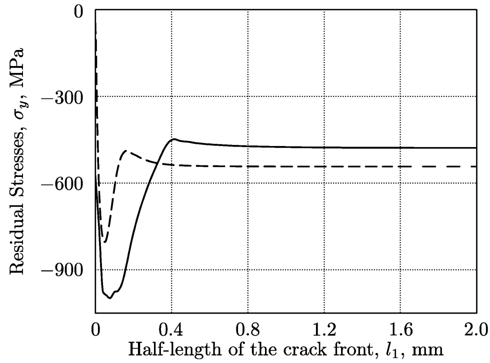


Рис. 6. Распределение компонент остаточных напряжений σ_x (a), σ_y (b) и σ_z (c) по контуру II для случаев глубины дефекта 0.1 мм (сплошные линии) и 0.3 мм (штриховые линии)

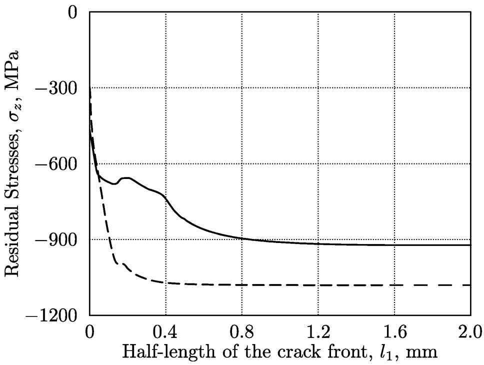
[Figure 6. The distribution of residual stress components σ_x (a), σ_y (b), and σ_z (c) along contour II for defect depths of 0.1 mm (solid lines) and 0.3 mm (dashed lines)]



a



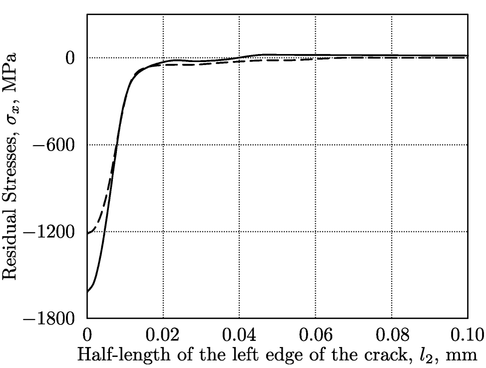
b



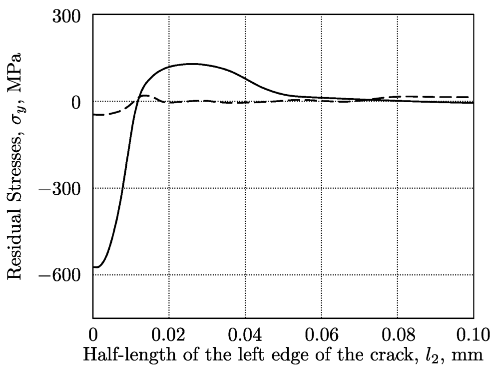
c

Рис. 7. Распределение компонент остаточных напряжений σ_x (*a*), σ_y (*b*) и σ_z (*c*) по контуру III для случаев глубины дефекта 0.1 мм (сплошные линии) и 0.3 мм (штриховые линии)

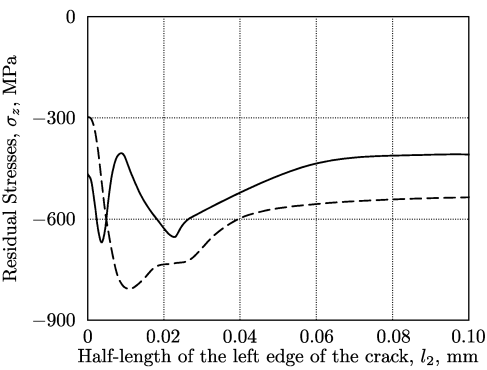
[Figure 7. The distribution of residual stress components σ_x (*a*), σ_y (*b*), and σ_z (*c*) along contour III for defect depths of 0.1 mm (solid lines) and 0.3 mm (dashed lines)]



a



b



c

Рис. 8. Распределение компонент остаточных напряжений σ_x (*a*), σ_y (*b*) и σ_z (*c*) по контуру IV для случаев глубины дефекта 0.1 мм (сплошные линии) и 0.3 мм (штриховые линии)

[Figure 8. The distribution of residual stress components σ_x (*a*), σ_y (*b*), and σ_z (*c*) along contour IV for defect depths of 0.1 mm (solid lines) and 0.3 mm (dashed lines)]

Наглядная иллюстрация распределения компонент тензора напряжений σ_{xy}, σ_{xz} и σ_{yz} в области несквозной трещины по контурам I, III и IV для дефектов глубиной 0.1 и 0.3 мм приведена на рис. 9, 10. Необходимо отметить, что графическое представление по всем трем компонентам касательных напряжений приведено лишь при изучении распределения ОН по глубине h от точки A наружной поверхности трещины (контур I), поскольку полученные значения отличны от нуля, а их уровень соизмерим с уровнем нормальных компонент тензора ОН σ_i, $i = x, y, z$. Для других контуров (за исключением контура II) ненулевые значения присутствуют только у компоненты σ_{yz}. При анализе касательных напряжений по контуру II установлено, что все значения этих напряжений в центральном сечении трещины пренебрежимо малы и практически равны нулю.

Из рисунков видно, что касательные напряжения принимают максимальные (по модулю) значения при их распределении по кромке берега трещины на расстоянии около 5–10 мкм от фронта дефекта для компонент σ_{xz} при обоих случаях глубины дефекта b и для σ_{yz} при глубине дефекта, равной 0.3 мм, после чего наблюдается асимптотическое приближение их значений к нулю. Также установлено, что для всех рассматриваемых компонент значения касательных напряжений при глубине дефекта 0.3 мм принимают бо́льшие значения, чем при глубине дефекта 0.1 мм (см. рис. 9, *a*, 10, *a*, 10, *c*), либо равные значения, а в некоторых случаях их значения близки для случаев глубины дефекта $b = 0.1$ мм и $b = 0.3$ мм (рис. 9, *b*, 10, *b*).

Отдельно рассмотрим данные на рис. 5, *a*, 6, *a*, 7, *a* и 8, *a*. Здесь зафиксированы очень высокие расчетные значения компоненты σ_x. Численное решение в упругопластической области было получено для истинных напряжений (см. рис. 3). Если сравнить расчетные зависимости истинных напряжений $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ и номинальных $\sigma_0 = \sigma_0(\varepsilon)$ на рис. 3, то номинальные значения ОН окажутся значительно меньшими по модулю. Для этого, учитывая скалярный параметр поврежденности ω согласно (4)), достаточно в первом приближении вычислить коэффициент отношения σ/σ_0 при одинаковом значении пластической деформации q, используя графики на рис. 3. Например, для

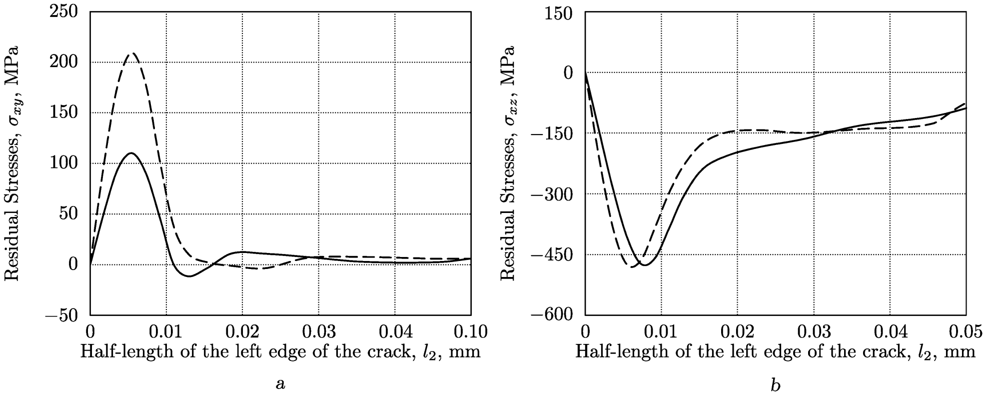
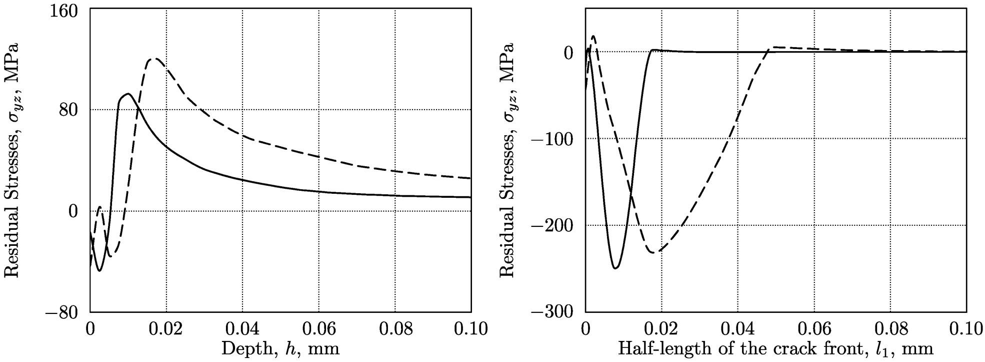
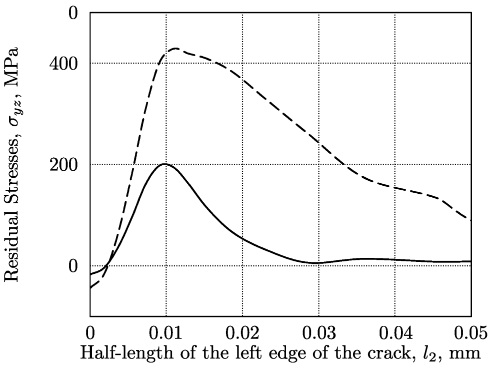


Рис. 9. Распределение компонент остаточных напряжений σ_{xy} (*a*), σ_{xz} (*b*) по контуру IV для случаев глубины дефекта 0.1 мм (сплошные линии) и 0.3 мм (штриховые линии)

[Figure 9. The distribution of residual stress components σ_{xy} (*a*) and σ_{xz} (*b*) along contour IV for defect depths of 0.1 mm (solid lines) and 0.3 mm (dashed lines)]



a *b*



c

Рис. 10. Распределение компоненты остаточных напряжений σ_{yz} по контурам I (a), III (b) и IV (c) для случаев глубины дефекта 0.1 мм (сплошные линии) и 0.3 мм (штриховые линии)

[Figure 10. The distribution of residual stress component σ_{yz} along contour I (a), III (b), and IV (c) for defect depths of 0.1 mm (solid lines) and 0.3 mm (dashed lines)]

номинальных напряжений σ_0 их максимальные (по модулю) значения составят 1000÷1100 МПа, и согласно графикам для $\sigma_0 = \sigma_0(\varepsilon)$ следует, что это соответствует закритической стадии деформирования, поэтому в этой области возможно наличие пластического разупрочнения материала.

5. Выводы. На основе представленных результатов можно сформулировать следующие выводы.

1. Разработан метод расчета ОН и ПД в поверхностно упрочненном призматическом образце с несквозной поверхностной V-образной трещиной после применения технологии ОППД в упругопластической постановке, базирующийся на конечно-элементном моделировании и известном начальном напряженно-деформированном состоянии для гладкого упрочненного призматического образца.
2. Для рассмотренных в работе случаев решения задачи с концентратором напряжений в виде несквозной поперечной трещины полученные результаты распределения ОН для всех исследуемых контуров демонстрируют целесообразность использования упругопластической постановки задачи.
3. Наличие значительного уровня сжимающих ОН вдоль всех рассматриваемых контуров в области дефекта (в частности, вдоль линии фронта трещины) показывает возможное влияние не только на остановку развития трещины, но и на ее закрытие, что доказывает эффективность поверхностного упрочнения по технологии ОППД.

Конкурирующие интересы. У нас нет конфликта интересов в отношении авторства и публикации этой статьи.

Авторский вклад и ответственность. Все авторы принимали участие в разработке концепции статьи и в написании рукописи. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

Финансирование. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23–29–00434, `https://rscf.ru/project/23-29-00434/`.

Библиографический список

1. Van Dake J., Nganbe M. Numerical assessment of blade deflection and elongation for improved monitoring of blade and TBC damage // *Eng. Res. Express*, 2021. vol. 3, 015001. DOI: https://doi.org/10.1088/2631-8695/abd5a6.
2. Xu Y., Cheng L., Shu Ch., et al. Foreign object damage performance and constitutive modeling of titanium alloy blade // *Int. J. Aerospace Eng.*, 2020. vol. 2020. pp. 1–10. DOI: https://doi.org/10.1155/2020/2739131.
3. Eriksson E., Moverare J., Chen Z., Simonsson K. The effect of notches on the fatigue life of a nickel-base gas turbine disk material // *Acta Polytech. CTU Proc.*, 2018. vol. 20. pp. 34–42. DOI: https://doi.org/10.14311/APP.2018.20.0034.
4. Liu B., Yan X. An extension research on the theory of critical distances for multiaxial notch fatigue finite life prediction // *Int. J. Fatigue*, 2018. vol. 117. pp. 217–229. DOI: https://doi.org/10.1016/j.ijfatigue.2018.08.017.
5. Macek W. Fracture surface formation of notched 2017A-T4 aluminium alloy under bending fatigue // *Int. J. Fatigue*, 2022. vol. 234. pp. 141–157. DOI: https://doi.org/10.1007/s10704-021-00579-y.
6. Биргер И. А. *Остаточные напряжения.* М.: Машгиз, 1963. 232 с.
7. Гринченко И. Г. *Упрочнение деталей из жаропрочных и титановых сплавов.* М.: Машиностроение, 1971. 120 с.
8. Иванов С. И., Шатунов М. П., Павлов В. Ф. Влияние остаточных напряжений на выносливость образцов с надрезом / *Вопросы прочности элементов авиационных конструкций*, Т. 1. Куйбышев: КуАИ, 1974. С. 88–95.
9. Кудрявцев И. В. *Поверхностный наклеп для повышения прочности и долговечности деталей машин поверхностным пластическим деформированием.* М.: Машиностроение, 1969. 100 с.
10. Ножницкий Ю. А., Фишгойт А. В., Ткаченко Р. И., Теплова С. В. Разработка и применение новых методов упрочнение деталей ГТД, основанных на пластическом деформировании поверхностных слоев // *Вестник двигателестроения*, 2006. № 2. С. 8–16.
11. Сулима А. М., Шувалов В. А., Ягодкин Ю. Д. *Поверхностный слой и эксплуатационные свойства деталей машин.* М.: Машиностроение, 1988. 240 с.
12. Павлов В. Ф., Букатый А. С., Семенова О. Ю. Прогнозирование предела выносливости поверхностно упрочненных деталей с концентраторами напряжений // *Вестн. машиностроения*, 2019. № 1. С. 3–7. EDN: VTAEPK.
13. Павлов В. Ф., Кирпичев В. А., Вакулюк В. С. *Прогнозирование сопротивления усталости поверхностно упрочненных деталей по остаточным напряжениям.* Самара: Самар. науч. центр РАН, 2012. 125 с.
14. Радченко В. П., Шишкин Д. М., Саушкин М. Н. Численное решение задачи о напряженно-деформированном состоянии поверхностно упрочненного призматического образца с надрезом V-образного профиля в упругой и упругопластической постановках // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2023. Т. 27, № 3. С. 491–508. EDN: CDEJKC. DOI: https://doi.org/10.14498/vsgtu2017.
15. Радченко В. П., Саушкин М. Н., Бочкова Т. И. Математическое моделирование и экспериментальное исследование формирования и релаксации остаточных напряжений

в плоских образцах из сплава ЭП742 после ультразвукового упрочнения в условиях высокотемпературной ползучести // *Вестн. Перм. нац. иссл. политехн. ун-та. Механика*, 2016. №1. С. 93–112. EDN: VQTAHL. DOI: https://doi.org/10.15593/perm.mech/2016.1.07.

16. Радченко В. П., Шишкин Д. М. Метод реконструкции остаточных напряжений в призматическом образце с надрезом полукруглого профиля после опережающего поверхностного пластического деформирования // *Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика*, 2020. Т. 20, №4. С. 478–492. EDN: ZPKSUN. DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-4-478-492.
17. Радченко В. П., Афанасьева О. С., Глебов В. Е. Влияние технологии поверхностного пластического упрочнения, остаточных напряжений и граничных условий на выпучивание балки // *Вестн. Перм. нац. иссл. политехн. ун-та. Механика*, 2020. №1. С. 87–98. EDN: IJMTQN. DOI: https://doi.org/10.15593/perm.mech/2020.1.07.
18. Радченко В. П., Павлов В. Ф., Саушкин М. Н. Исследование влияния анизотропии поверхностного пластического упрочнения на распределение остаточных напряжений в полых и сплошных цилиндрических образцах // *Вестн. Перм. нац. иссл. политехн. ун-та. Механика*, 2015. №1. С. 130–147. EDN: TVSBYV. DOI: https://doi.org/10.15593/perm.mech/2015.1.09.
19. Радченко В. П., Шишкин Д. М. Численный метод расчета напряженно-деформированного состояния в призматическом поверхностно упрочненном образце с надрезом в упругой и упругопластической постановках // *Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика*, 2021. Т. 21, №4. С. 503–519. EDN: KNHHLG. DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-4-503-519.
20. Сазанов В. П. Исследование закономерностей остановки усталостной трещины в цилиндрическом образце с надрезом // *Вестник Самарского университета. Аэрокосмическая техника, технологии и машиностроение*, 2018. Т. 17, №1. С. 160–169. EDN: UPOWMG. DOI: https://doi.org/10.18287/2541-7533-2018-17-1-160-169.
21. Nag Chaudhury J. Effect of heat treatment, pre-stress and surface hardening on fracture toughness of micro-alloyed steel // *J. Mater. Eng.Perform.*, 2013. vol. 23, no. 1. pp. 152–168. DOI: https://doi.org/10.1007/s11665-013-0709-6.
22. Радченко В. П., Еремин Ю. А. *Реологическое деформирование и разрушение материалов и элементов конструкций.* М.: Машиностроение-1, 2004. 265 с. EDN: QNATSX.
23. Морозов Е. М., Никишков Г. П. *Метод конечных элементов в механике разрушения.* М.: ЛКИ, 2008. 256 с.
24. Партон В. З., Морозов Е. М. *Механика упругопластического разрушения: основы механики разрушения.* М.: ЛКИ, 2008. 352 с.
25. Shiratori M., Miyoshi T., Matsushita H. *Computational Fracture Mechanics.* Tokyo: Jitsukyo Publ., 1980 (In Japanese).
26. Скворцов Ю. В., Глушков С. В. Моделирование несквозных поверхностных трещин в тонкостенных конструкциях // *Вест. Самар. гос. аэрокосм. ун-та*, 2011. №3. С. 187–191. EDN: OWYQXP.
27. Радченко В. П., Шишкин Д. М. Влияние размеров области поверхностного упрочнения на напряженно-деформированное состояние балки с надрезом полукруглого профиля // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2020. Т. 24, №4. С. 663–676. EDN: GQGTTH. DOI: https://doi.org/10.14498/vsgtu1828.

Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2024, vol. 28, no. 2, pp. 267–285
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu2070

MSC: 74A10, 74D10

A numerical method for calculating the fields of residual stresses in a surface-hardened prismatic sample with a non-through transversal crack of V-shaped profile in an elastic-plastic formulation

***V. P. Radchenko*[1], *M. N. Saushkin*[1], *D. M. Shishkin*[2]**

[1] Samara State Technical University,
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russian Federation.
[2] Syzran' Branch of Samara State Technical University,
45, Sovetskaya str., Syzran', Samara region, 446001, Russian Federation.

Abstract

The article presents a numerical method for calculating the residual stress fields in a surface-hardened prismatic specimen with a non-through V-shaped crack, based on an elastic-plastic solution to the problem. A detailed analysis of the distributions of residual stresses near the defect will be conducted based on the obtained results across several contours. It is determined that at a crack depth of 0.3 mm, almost all studied components of compressive residual stresses have greater (in absolute value) values than at a depth of 0.1 mm or are equal.

Keywords: prismatic sample, advanced surface plastic deformation, non-through crack, residual stresses, numerical solution, finite element method.

Received: 20th December, 2023 / Revised: 15th February, 2024 /
Accepted: 4th March, 2024 / First online: 15th October, 2024

Mechanics of Solids
Research Article

Please cite this article in press as:
Radchenko V. P., Saushkin M. N., Shishkin D. M. A numerical method for calculating the fields of residual stresses in a surface-hardened prismatic sample with a non-through transversal crack of V-shaped profile in an elastic-plastic formulation, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2024, vol. 28, no. 2, pp. 267–285. EDN: HALOGN. DOI: 10.14498/vsgtu2070 (In Russian).

Authors' Details:

Vladimir P. Radchenko https://orcid.org/0000-0003-4168-9660
Dr. Phys. & Math. Sci., Professor; Head of Department; Dept. of Applied Mathematics & Computer Science; e-mail: radchenko.vp@samgtu.ru

Mikhail N. Saushkin https://orcid.org/0000-0002-8260-2069
Cand. Phys. & Math. Sci.; Associate Professor; Dept. of Applied Mathematics & Computer Science; e-mail: saushkin.mn@samgtu.ru

Dmitry M. Shishkin https://orcid.org/0000-0003-3205-2262
Cand. Techn. Sci.; Associate Professor; Dept. of General Theoretical Disciplines; e-mail: shishkin.dim@yandex.ru

Competing interests. We have no conflict of interest regarding the authorship and publication of this article.

Authors' contributions and responsibilities. All authors participated in the development of the article's concept and in writing the manuscript. The authors bear full responsibility for submitting the final manuscript for publication. The final version of the manuscript was approved by all authors.

Funding. The research was funded by the Russian Science Foundation (project no. 23–29–00434), `https://rscf.ru/en/project/23-29-00434/`.

References

1. Van Dake J., Nganbe M. Numerical assessment of blade deflection and elongation for improved monitoring of blade and TBC damage, *Eng. Res. Express*, 2021, vol. 3, 015001. DOI: https://doi.org/10.1088/2631-8695/abd5a6.
2. Xu Y., Cheng L., Shu Ch., et al. Foreign object damage performance and constitutive modeling of titanium alloy blade, *Int. J. Aerospace Eng.*, 2020, vol. 2020, pp. 1–10. DOI: https://doi.org/10.1155/2020/2739131.
3. Eriksson E., Moverare J., Chen Z., Simonsson K. The effect of notches on the fatigue life of a nickel-base gas turbine disk material, *Acta Polytech. CTU Proc.*, 2018, vol. 20, pp. 34–42. DOI: https://doi.org/10.14311/APP.2018.20.0034.
4. Liu B., Yan X. An extension research on the theory of critical distances for multiaxial notch fatigue finite life prediction, *Int. J. Fatigue*, 2018, vol. 117, pp. 217–229. DOI: https://doi.org/10.1016/j.ijfatigue.2018.08.017.
5. Macek W. Fracture surface formation of notched 2017A-T4 aluminium alloy under bending fatigue, *Int. J. Fatigue*, 2022, vol. 234, pp. 141–157. DOI: https://doi.org/10.1007/s10704-021-00579-y.
6. Birger I. A. *Ostatochnye napriazheniia* [Residual Stresses]. Moscow, Mashgiz, 1963, 232 pp. (In Russian)
7. Grinchenko I. G. *Uprochnenie detalei iz zharoprochnykh i titanovykh splavov* [The Hardening of Parts of Heat-Resistant and Titanium Alloys]. Moscow, Mashinostroenie, 1971, 120 pp.
8. Ivanov S. I., Shatunov M. P., Pavlov V. F. Influence of residual stresses on notched specimen endurance, In: *Problems of Strength of Aircraft Structure Elements*, 1. Kuibyshev, Kuibyshev Aviation Inst., 1974, pp. 88–95 (In Russian).
9. Kudryavtsev I. V. *Poverkhnostnyi naklep dlia povysheniia prochnosti i dolgovechnosti detalei mashin poverkhnostnym plasticheskim deformirovaniem* [Surface Strain Hardening to Increase the Strength and Durability of Machine Parts]. Moscow, Mashinostroenie, 1969, 100 pp. (In Russian)
10. Nozhnitskii Yu. A., Fishgoit A. V., Tkachenko R. I., Teplova S. V. Development and application of new GTE parts hardening methods based on the plastic deformation of the surface layers, *Vestn. Dvigatel.*, 2006, no. 2, pp. 8–16 (In Russian).
11. Sulima G. N., Shuvalov V. A., Yagodkin Yu. D. *Poverkhnostnyi sloi i ekspluatatsionnye svoistva detalei mashin* [Surface Layer and Performance Properties of Machine Parts]. Moscow, Mashinostroenie, 1988, 240 pp. (In Russian)
12. Pavlov V. F., Bukaty A. S., Semenova O. Yu. Forecasting of the endurance limit of surface-hardened parts with stress concentrators, *Vestn. Mashinost.*, 2019, no. 1, pp. 3–7 (In Russian).
13. Pavlov V. F., Kirpichev V. A., Vakulyuk V. S. *Prognozirovanie soprotivlenija ustalosti poverhnostno uprochnjonnyh detalej po ostatochnym naprjazhenijam* [Prediction of Fatigue Resistance of Surface Reinforced Parts by Residual Stresses]. Samara, Samar. Nauch. Tsentr RAN, 2012, 125 pp. (In Russian)
14. Radchenko V. P., Shishkin D. M., Saushkin M. N. Numerical solution of the problem of stress-strain state of a surface-hardened prismatic V-notched specimen in elastic and elastoplastic formulations, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara

State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2023, vol. 27, no. 3, pp. 491–508 (In Russian). EDN: CDEJKC. DOI: https://doi.org/10.14498/vsgtu2017.

15. Radchenko V. P., Saushkin M. N., Bochkova T. I. Mathematical modeling and experimental study of forming and relaxation of the residual stresses in plane samples made of EP742 alloy after the ultrasonic hardening under the hightemperature creep conditions, *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2016, no. 1, pp. 93–112 (In Russian). EDN: VQTAHL. DOI: https://doi.org/10.15593/perm.mech/2016.1.07.
16. Radchenko V. P., Shishkin D. M. The method of reconstruction of residual stresses in a prismatic specimen with a notch of a semicircular profile after advanced surface plastic deformation, *Izv. Saratov Univ. Math. Mech. Inform.*, 2020, vol. 20, no. 4, pp. 478–492 (In Russian). EDN: ZPKSUN. DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-4-478-492.
17. Radchenko V. P., Afanaseva O. S., Glebov V. E. The effect of surface plastic hardening technology, residual stresses and boundary conditions on the buckling of a beam, *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2020, no. 1, pp. 87–98 (In Russian). EDN: IJMTQN. DOI: https://doi.org/10.15593/perm.mech/2020.1.07.
18. Radchenko V. P., Pavlov V. Ph., Saushkin M. N. Investigation of surface plastic hardening anisotropy influence on residual stresses distribution in hollow and solid cylindrical specimens, *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2015, no. 1, pp. 130–147 (In Russian). EDN: TVSBYV. DOI: https://doi.org/10.15593/perm.mech/2015.1.09.
19. Radchenko V. P., Shishkin D. M. Numerical method for calculating the stress-strain state in a prismatic surface-hardened spacemen with a notch in elastic and elastoplastic formulations, *Izv. Saratov Univ. Math. Mech. Inform.*, 2021, vol. 21, no. 4, pp. 503–519 (In Russian). EDN: KNHHLG. DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-4-503-519.
20. Sazanov V. P. Analysis of the mechanism of fatigue crack arrest in a cylindrical notched specimen, *Vestnik of Samara University. Aerospace and Mechanical Engineering*, 2018, vol. 17, no. 1, pp. 160–169 (In Russian). EDN: UPOWMG. DOI: https://doi.org/10.18287/2541-7533-2018-17-1-160-169.
21. Nag Chaudhury J. Effect of heat treatment, pre-stress and surface hardening on fracture toughness of micro-alloyed steel, *J. Mater. Eng.Perform.*, 2013, vol. 23, no. 1, pp. 152–168. DOI: https://doi.org/10.1007/s11665-013-0709-6.
22. Radchenko V. P., Eremin Yu. A. *Reologicheskoe deformirovanie i razrushenie materialov i elementov konstruktsii* [Rheological Deformation and Fracture of Materials and Structural Elements]. Moscow, Mashinostroenie-1, 2004, 264 pp. (In Russian). EDN: QNATSX.
23. Morozov E. M., Nikishkov G. P. *Metod konechnykh elementov v mekhanike razrusheniia* [The Finite Element Method in Fracture Mechanics]. Moscow, LKI, 2008, 256 pp. (In Russian)
24. Parton V. Z., Morozov E. M. *Mechanics of Elastic-Plastic Fracture*. Washington, DC, Hemisphere Publ., 1989, xvii+522 pp.
25. Shiratori M., Miyoshi T., Matsushita H. *Computational Fracture Mechanics*. Tokyo, Jitsukyo Publ., 1980 (In Japanese).
26. Skvortsov Yu. V., Glushkov S. V. Modeling non-through surface cracks in the thin-walled structures, *Vest. Samar. Gos. Aerokosm. Univ.*, 2011, no. 3, pp. 187–191 (In Russian). EDN: OWYQXP.
27. Radchenko V. P., Shishkin D. M. The influence of the dimensions of the surface hardening region on the stress-strain state of a beam with a notch of a semicircular profile, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2020, vol. 24, no. 4, pp. 663–676 (In Russian). EDN: GQGTTH. DOI: https://doi.org/10.14498/vsgtu1828.

Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2024. Т. 28, № 2. С. 286–301
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu2081
EDN: IBMBBN

УДК 517.977.5:681.5.015

Параметрическая идентификация сосредоточенных воздействий в многомерных обратных задачах теплопроводности

А. Н. Дилигенская, И. С. Бочкарева

Самарский государственный технический университет,
Россия, 443100, Самара, ул. Молодогвардейская, 244.

Аннотация

Работа посвящена дальнейшему исследованию и построению конструктивных методов последовательной параметрической оптимизации неизвестных характеристик нестационарных процессов технологической теплофизики на компактном множестве непрерывных и непрерывно-дифференцируемых функций. Предложенная методика распространяет разработанный алгоритмически точный метод решения на многомерную постановку обратных задач технологической теплофизики и позволяет отыскать физически обоснованную идентифицируемую характеристику на последовательно сходящихся компактных множествах.

В качестве объекта исследования рассматривается двумерное осесимметричное тело канонической формы, где искомой функцией является сосредоточенная величина мощности внутренних теплоисточников. Задача сформулирована в равномерной метрике оценивания температурного отклонения расчетного состояния от экспериментального. В качестве математической модели рассматриваемого объекта используется его модальное описание, на основе которого проведена редукция исходной обратной задачи теплопроводности, сформулированной в экстремальной постановке, к задаче оптимального управления.

Использование предварительной параметризации искомой характеристики процесса приводит к ее представлению в форме кусочно-параболических функций, конкретизируемых в рамках выбранной структуры с помощью вектора параметров. Количество учитываемых параметров определяет точное представление идентифицируемой величины, а

Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ
Научная статья

Образец для цитирования
Дилигенская А. Н., Бочкарева И. С. Параметрическая идентификация сосредоточенных воздействий в многомерных обратных задачах теплопроводности // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2024. Т. 28, № 2. С. 286–301. EDN: IBMBBN. DOI: 10.14498/vsgtu2081.

Сведения об авторах
Анна Николаевна Дилигенская https://orcid.org/0000-0002-9867-9781
доктор технических наук, доцент; профессор; каф. автоматики и управления в технических системах; e-mail: adiligenskaya@mail.ru

Ирина Сергеевна Бочкарева https://orcid.org/0009-0005-3282-7680
аспирант; каф. автоматики и управления в технических системах;
e-mail: bo4karewa.i99@yandex.ru

их значения отыскиваются в результате решения полученной задачи параметрической оптимизации. Для решения полученной задачи математического программирования относительно оптимальных значений вектора параметров используются, аналогично одномерному случаю, альтернансные свойства искомых экстремалей, в результате чего задача сводится к замкнутой системе соотношений.

Полученные результаты демонстрируют эффективность распространения конструктивного метода последовательной параметрической оптимизации, опробованного на одномерных обратных задачах теплопроводности, на решение двумерных задач с использованием их модального представления. Увеличение числа параметров решений, образующих кусочно-параболическую форму искомой зависимости, приводит к уменьшению погрешности восстановления как искомой сосредоточенной функции, так и пространственно-временного температурного поля во всей двумерной области определения пространственных переменных.

Ключевые слова: двумерная обратная задача теплопроводности, параметрическая оптимизация, метод последовательных приближений.

Получение: 2 февраля 2024 г. / Исправление: 19 марта 2024 г. / Принятие: 29 апреля 2024 г. / Публикация онлайн: 17 ноября 2024 г.

Введение. Общая проблема увеличения эффективности функционирования технологического оборудования при реализации производственных процессов приводит к необходимости поиска скрытых резервов технического, методического и алгоритмического обеспечения на всем производственном цикле: начиная от проектирования технологических установок и заканчивая оптимизацией режимных параметров при их функционировании.

Одним из возможных путей достижения заданной цели является построение и дальнейшее использование в расчетах точных математических моделей оптимизируемых процессов, учитывающих как существенные закономерности исследуемого явления, так и специфику реализации производственных процессов или режимов работы оборудования в каждом отдельном случае. Нестационарность исследуемых явлений, неучтенные взаимодействия приводят к отклонению основных характеристик от своих проектных значений, что вызывает необходимость их оценивания в реальных условиях. Построение моделей, содержащих не подлежащие непосредственному контролю факторы, невозможно без использования доступной экспериментальной информации. На основе экспериментальных данных, полученных в ограниченной области (отдельных точках контроля) исследуемого объекта, с помощью теории обратных задач математической физики возможно восстановить не подлежащие непосредственному измерению характеристики процесса [1, 2].

В сфере технологической теплофизики актуален ряд задач, предусматривающих идентификацию ненаблюдаемых в силу используемых технологий внутренних или граничных управляющих воздействий по экспериментальной информации о температуре, полученной в некоторых точках термометрирования, расположенных по объему нагреваемого тела. Данный класс задач относится к обратным задачам теплопроводности (ОЗТ), и для их решения создано и продолжает разрабатываться большое число различных методов:

численных и аналитических, методов подбора, на основе различных способов регуляризации и других [3–8].

Для получения математического описания с точностью, необходимой для решения реальных производственных задач управления процессами технологической теплофизики, математическая модель должна максимально полно воссоздавать процессы нагрева во всей пространственной области. Для этого нужно использовать многомерные модели (трехмерные или двумерные в случае осесимметричного нагрева) [9, 10].

В работах [11,12] восстановление неизвестных пространственно-временных внутренних или внешних воздействий в результате решения одномерной и двумерной ОЗТ осуществлено с помощью модального описания температурного поля и искомых характеристик в форме разложения в ряды по собственным функциям тепловой задачи. Однозначная зависимость между числом точек контроля температуры и количеством модальных составляющих, используемых для модального описания объекта, ограничивает возможности применения данного метода. Необходимость повышения точности решения задачи за счет увеличения количества учитываемых мод вступает в противоречие с требованиями минимизации числа размещаемых датчиков, нарушающих целостность конструкции и вносящих искажения в результаты измерений.

Поэтому разработка методов решения многомерных обратных задач теплопроводности по экспериментальной информации, полученной в точках контроля температуры, число которых будет минимальным, на сегодняшний день остается актуальной научно-технической проблемой. В статье метод последовательной параметрической оптимизации идентифицируемых воздействий [13–15], показавший свою эффективность при решении одномерных задач, распространен на случай многомерных ОЗТ. Решена обратная задача теплопроводности по идентификации сосредоточенного закона распределения внутренних источников тепла на примере процесса индукционного нагрева двумерного осесимметричного тела прямоугольной формы.

1. Модальное описание линейных моделей процесса теплопроводности. Поведение температурного поля $\theta(x, y, \varphi)$ в процессе индукционного нагрева осесимметричной бесконечной прямоугольной призмы [20] описывается линейным неоднородным уравнением Фурье в относительных декартовых координатах (x, y) на заданном временном интервале $\varphi \in [0, \varphi^*]$:

$$\frac{\partial\theta(x,y,\varphi)}{\partial\varphi} = \frac{\partial^2\theta(x,y,\varphi)}{\partial x^2} + \beta^2\frac{\partial^2\theta(x,y,\varphi)}{\partial y^2} + \Psi(x,y,\varphi), \tag{1}$$

$$0 < x < 1, \quad 0 < y < 1, \quad 0 < \varphi < \varphi^*$$

и дополняется начальными (в данном случае нулевыми)

$$\theta(x, y, 0) = 0, \quad x \in [0, 1], \quad y \in [0, 1]$$

и граничными условиями (здесь – однородными граничными условиями второго рода)

$$\frac{\partial\theta(0,y,\varphi)}{\partial x} = \frac{\partial\theta(1,y,\varphi)}{\partial x} = \beta\frac{\partial\theta(x,0,\varphi)}{\partial y} = \beta\frac{\partial\theta(x,1,\varphi)}{\partial y} = 0, \quad \varphi \in (0, \varphi^*]. \tag{2}$$

Здесь $\Psi(x,y,\varphi)$ — функция внутренних теплоисточников, которая, как правило, в реальных промышленных условиях может быть представлена в виде $\Psi(x,y,\varphi) = F(x,y)u(\varphi)$, где $F(x,y)$ и $u(\varphi)$ — закон пространственного распределения электромагнитных источников тепла и их мощность соответственно, коэффициент $\beta = X/Y$ определяет отношение геометрических размеров тела, где X и Y — половина большей и меньшей сторон сечения призмы соответственно.

Применение метода конечных интегральных преобразований [16] приводит к представлению температурного поля

$$\theta(x,y,\varphi) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} C_m^2 C_k^2 \bar{\theta}_{mk}(\mu_m,\eta_k,\varphi)\cos(\pi m x)\cos(\pi k y) \tag{3}$$

в форме его разложения в бесконечный сходящийся в среднем ряд [16] по собственным функциям $\cos(\pi m x)$ и $\cos(\pi k y)$ задачи (1), (2), определяемым собственными числами $\mu_m^2 = \pi^2 m^2$ и $\eta_k^2 = \pi^2 k^2$; C_m^2 и C_k^2 — нормирующие множители, которые равны 1 при $m = 0$, $k = 0$ или равны 2 при $m \geqslant 1$, $k \geqslant 1$. Модальные составляющие (временные моды) температурного поля также получены в результате применения конечных интегральных преобразований по пространственным координатам:

$$\bar{\theta}_{mk}(\mu_m,\eta_k,\varphi) = \int_0^1\int_0^1 \theta(x,y,\varphi)\cos(\pi m x)\cos(\pi k y)\,dxdy, \tag{4}$$

а их поведение задано бесконечной системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{\bar{\theta}_{mk}}{d\varphi} = -(\mu_m^2 + \beta^2\eta_k^2)\bar{\theta}_{mk}(\mu_m,\eta_k,\varphi) + \bar{F}_{mk}(\mu_m,\eta_k)u(\varphi), \tag{5}$$

$$m,k = 0,1,\ldots,\quad \varphi \in (0,\varphi^*],$$

где модальные переменные функции внутренних теплоисточников могут быть определены аналогично (4):

$$\bar{F}_{mk}(\mu_m,\eta_k) = \int_0^1\int_0^1 F(x,y)\cos(\pi m x)\cos(\pi k y)\,dxdy \tag{6}$$

и позволяют получить ее соответствующее представление:

$$F(x,y) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} C_m^2 C_k^2 \bar{F}_{mk}(\mu_m,\eta_k)\cos(\pi m x)\cos(\pi k y).$$

Для однозначного описания процесса индукционного нагрева система дифференциальных уравнений (5) дополняется нулевыми начальными условиями для модальных переменных

$$\bar{\theta}_{mk}(\mu_m,\eta_k,0) = 0,\quad m,k = 0,1,\ldots \tag{7}$$

и соответствующими граничными условиями (2).

2. Постановка и решение обратной задачи теплопроводности. Таким образом, модальное представление процесса индукционного нагрева задано математической моделью (2), (3), (5), (7). На основе этого математического описания рассматривается ОЗТ, в которой функция $u(\varphi)$ является неизвестной и подлежащей идентификации на основе дополнительной информации о температурном распределении $\theta^*(\varphi) = \theta^*(x^*, y^*, \varphi)$, полученном в одной фиксированной точке с координатами (x^*, y^*): $x^* \in [0,1]$, $y^* \in [0,1]$ на интервале идентификации $\varphi \in (0, \varphi^*]$. В качестве точки контроля может быть выбрана любая точка из пространственной области, занимаемой объектом, это окажет влияние лишь на точность решения задачи, но все основные свойства предлагаемого метода останутся без изменений, что обусловлено его универсальным характером. Подобно ОЗТ в одномерном случае [13–15], формулируется минимаксная постановка задачи, в которой по экспериментальным данным $\theta^*(\varphi)$ требуется определить функцию $u(\varphi)$, минимизирующую функционал

$$I_0(u) = \max_{\varphi \in (0,\varphi^*)} |\theta_M(x^*, y^*, \varphi) - \theta^*(\varphi)| \to \min_{u(\varphi)}, \qquad (8)$$

где $\theta_M(x^*, y^*, \varphi)$ — рассчитанная на основе модели процесса (2), (3), (5), (7) температура в той же точке (x^*, y^*) на заданном интервале идентификации.

Аналогично [13–15] осуществляется сужение множества решений до физически реализуемых функций. Так, переход к классу функций, непрерывных вместе со своей производной, производится на основе соотношений

$$\frac{du(\varphi)}{d\varphi} = v(\varphi), \quad \frac{dv(\varphi)}{d\varphi} = w(\varphi); \quad u(0) = u_0; \quad v(0) = u'(0) = v_0 \qquad (9)$$

и выполнения ограничений на максимально допустимое значение $w_{\max}$ нового управления

$$|u''_\varphi| = |w(\varphi)| \leqslant |w_{\max}|, \quad \varphi \in (0, \varphi^*). \qquad (10)$$

В таком случае осуществляется переход от задачи (8) к минимаксной задаче

$$I_1(w) = \max_{\varphi \in (0,\varphi^*)} |\theta_M(x^*, y^*, \varphi) - \theta^*(\varphi)| \to \min_{w(\varphi)} \qquad (11)$$

с условным управляющим воздействием $w(\varphi)$, которая дополняется соотношениями (9), (10), что в совокупности соответствует поиску решения исходной задачи в заданном классе функций.

Решение задачи далее осуществляется по схеме аналитического метода параметрической оптимизации, представленного в [13–15], и сводится к переходу от задачи оптимального управления с минимаксным критерием (11) к задаче с интегральным функционалом

$$I_2(w, \alpha) = \frac{1}{\varphi^*} \int_0^{\varphi^*} \alpha \, d\varphi = \alpha \to \min_{w,\alpha} \qquad (12)$$

при учете дополнительного фазового ограничения

$$|\theta_M(x^*, y^*, \varphi) - \theta^*(\varphi)| - \alpha \leqslant 0, \quad \varphi \in (0, \varphi^*). \qquad (13)$$

В [13] обосновывается, что фазовое ограничение (13) не нарушается на всем интервале идентификации, следовательно, решение полученной задачи (12) осуществляется без его учета на основе принципа максимума Понтрягина. Процедура принципа максимума и последующее интегрирование соотношений (9) позволяют получить параметрическое представление искомой характеристики в виде кусочно-параболической функции времени:

$$u^*(\varphi,\Delta)=\begin{cases} u_0+v_0\varphi+\dfrac{(\pm1)w_{\max}}{2}\varphi^2, \quad \varphi\in[0,\tilde\Delta_1], \quad N\geqslant 1;\\ u_0+v_0\varphi+\dfrac{(\pm1)w_{\max}}{2}\varphi^2+\\ \qquad +(\pm1)w_{\max}\displaystyle\sum_{q=2}^{j}(-1)^{q+1}\left(\varphi-\sum_{i=1}^{q-1}\tilde\Delta_i\right)^2,\\ \qquad \displaystyle\sum_{i=1}^{j-1}\tilde\Delta_i\leqslant\varphi\leqslant\sum_{i=1}^{j}\tilde\Delta_i, \quad j=\overline{2,N}, \quad N\geqslant 2.\end{cases} \tag{14}$$

Здесь число N соответствует количеству интервалов постоянства имеющего релейный характер оптимального условного управления $w^*(\varphi,\Delta)$, $\tilde\Delta=(\tilde\Delta_i)$, $i=\overline{1,N}$ — вектор длительностей интервалов постоянства $w^*(\varphi,\Delta)$, а вектор $\Delta=(\tilde\Delta^i, w_{\max}, u_0, v_0)$ коэффициентов параметрического представления $u^*(\varphi)$ дополнен соответствующими параметрами.

Далее с использованием полученного параметрического представления (14) на базе общего решения уравнения теплопроводности (1) с соответствующими нулевыми начальными и граничными условиями (2) вида

$$\theta(x,y,\varphi)=\int_0^{\varphi}\frac{\partial\Lambda(x,y,\varphi-\tau)}{\partial\varphi}u(\tau)\,d\tau, \tag{15}$$

где $\partial\Lambda(x,y,\varphi)/\partial\varphi$ является импульсной переходной функцией (функцией Грина краевой задачи), осуществляется переход к параметризованной форме температурного поля:

$$\theta(x,y,\varphi,\Delta)=\begin{cases} \Lambda(x,y,\varphi,u_0,v_0,w_{\max}), \quad \varphi\in[0,\tilde\Delta_1], \quad N\geqslant 1;\\ \Lambda(x,y,\varphi,u_0,v_0,w_{\max})+\\ \qquad +2\displaystyle\sum_{q=2}^{j}(-1)^{q+1}\Lambda\left(x,y,\varphi-\sum_{i=1}^{q-1}\tilde\Delta_i,w_{\max}\right)^2,\\ \qquad \displaystyle\sum_{i=1}^{j-1}\tilde\Delta_i\leqslant\varphi\leqslant\sum_{i=1}^{j}\tilde\Delta_i, \quad j=\overline{2,N}, \quad N\geqslant 2.\end{cases} \tag{16}$$

Найденное параметрическое представление (16) $\theta(x,y,\varphi,\Delta)$ позволяет рассчитать модельную температурную зависимость $\theta_M(x^*,y^*,\varphi,\Delta)$ в точке с заданными координатами (x^*,y^*) на временном интервале идентификации $\varphi\in(0,\varphi^*]$, что в дальнейшем используется для перехода от задачи (11) к задаче параметрической оптимизации

$$I_2(\Delta)=\max_{\varphi\in(0,\varphi^*)}|\theta_M(x^*,y^*,\varphi,\Delta)-\theta^*(\varphi)|\to\min_{\Delta}. \tag{17}$$

Дальнейшее решение полученной специальной задачи математического программирования (17) осуществляется с помощью альтернансных условий экстремума [17], соответствует оцениванию температурной невязки между модельной $\theta_M(x^*, y^*, \varphi, \Delta)$ и экспериментальной $\theta^*(\varphi)$ кривыми в равномерной (чебышевской) метрике и реализуется аналогично одномерному случаю [13–15].

Альтернансные свойства распределения невязки $\theta_M(x^*, y^*, \varphi, \Delta) - \theta^*(\varphi)$ проявляются при оптимальном решении Δ^0 и выражаются в достижении в определенных точках, количество которых, как правило, на единицу превышает число искомых параметров, знакочередующихся максимальных по абсолютной величине отклонений $I_2(\Delta^0)$. Данные условия совместно с условиями существования экстремума температурной невязки во внутренних точках альтернанса на интервале идентификации приводят к замкнутой относительно всех неизвестных параметров системе уравнений. Решение сформированной таким образом системы уравнений и определяет оптимальные значения Δ^0 вектора параметров.

3. Вычислительный эксперимент и решение двумерной внутренней обратной задачи теплопроводности. На базе представленной методики была решена серия обратных задач теплопроводности, позволяющая восстановить неизвестное сосредоточенное воздействие по мощности внутренних источников тепла $u(\varphi)$.

Для задачи (2), (3), (5), (7) общее решение (15) принимает вид

$$\begin{aligned}\theta(x,y,\varphi) = U_{\max}\Bigg(\int_0^{\varphi} \bar{F}_{00}u(\tau)d\tau &+ \\ + 2\sum_{m=1}^{\infty} \bar{F}_{m0}\cos(\pi m x)\int_0^{\varphi} e^{-\pi^2 m^2(\varphi-\tau)}u(\tau)d\tau &+ \\ + 2\sum_{k=1}^{\infty} \bar{F}_{0k}\cos(\pi k y)\int_0^{\varphi} e^{-\beta^2\pi^2 k^2(\varphi-\tau)}u(\tau)d\tau &+ \\ + 4\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} \bar{F}_{mk}\cos(\pi m x)\cos(\pi k y)\int_0^{\varphi} e^{-(\pi^2 m^2+\beta^2\pi^2k^2)(\varphi-\tau)}u(\tau)d\tau\Bigg)&, \end{aligned} \quad (18)$$

где необходимые коэффициенты $\bar{F}_{00}$, $\bar{F}_{m0}$, $\bar{F}_{0k}$, $\bar{F}_{mk}$ определяются по соотношениям (6).

В задачах индукционного нагрева под действием электромагнитного поля индуктора активируются внутренние источники, и нахождение функции $F(x, y)$ связано с определенными трудностями решения сложной электромагнитной двумерной задачи [18, 19]. В большинстве типовых процессов индукционного нагрева глубина проникновения электромагнитного воздействия, зависящая от частоты тока индуктора, настолько мала, что в первом приближении полагают, что все тепловыделение происходит в поверхностном слое металла. В таком случае приближенная аналитическая зависимость

$$F(x, y) = \delta(x - 1) + \beta\delta(y - 1), \quad (19)$$

которая отражает действие точечных источников тепла в виде дельта-функции, сосредоточенных в точках на внешних границах тела, достаточно адекватно описывает распределение данной функции [18, 19].

При вычислительном эксперименте по сбору экспериментальных данных $\theta^*(\varphi)$ характер изменения мощности тепловыделения соответствовал плавному нагреву

$$u^0(\varphi) = k(1 - e^{-\sigma\varphi}). \tag{20}$$

Вычислительный эксперимент был проведен на основе математической модели (18) температурного поля в процессе индукционного нагрева при принятых распределениях $F(x, y)$ и $u(\varphi)$ согласно (19) и (20). Далее, полагая функцию $u(\varphi)$ неизвестной и подлежащей идентификации на основе температурной кривой $\theta^*(\varphi)$, полученной в фиксированной точке ($x^* = 0.9, y^* = 0.9$) на интервале $\varphi \in (0, \varphi]$, была решена обратная задача теплопроводности (8) согласно (11), (14), (16), (17).

4. Результаты решения обратной задачи теплопроводности. На рис. 1–4 и в табл. 1 и 2 представлены некоторые полученные результаты решения серии внутренних ОЗТ в зависимости от числа $N = 1, 2, 3$ интервалов постоянства условного управляющего воздействия $w(\varphi)$.

На рис. 1 показана конфигурация

$$\varepsilon_\theta = \theta_M(x^*, y^*, \varphi, \Delta) - \theta^*(\varphi)$$

погрешности приближения экспериментальной зависимости в классе кусочно-параболических функций (16) при $N = 1, 2, 3$ на интервале идентификации в точке контроля (x^*, y^*).

На рис. 2 продемонстрирована разность

$$\varepsilon_u = u^*(\varphi, \Delta) - u^0(\varphi)$$

между восстановленной и идентифицируемой зависимостью сосредоточенной мощности тепловыделения в том же классе функций при $\varphi \in (0, \varphi^*]$.

Табл. 1 отражает минимаксную погрешность для восстанавливаемой температуры $\bar{\varepsilon}_\theta = \max_{\varphi \in (0,\varphi^*)} |\theta_M(x^*, y^*, \varphi, \Delta) - \theta^*(\varphi)|$ и мощности тепловыделения $\bar{\varepsilon}_u = \max_{\varphi \in (0,\varphi^*)} |u^*(\varphi, \Delta) - u^0(\varphi)|$ на интервале $\varphi \in (0, \varphi^*]$ в точке с заданными координатами.

Особый интерес при решении двумерных задач представляет анализ погрешности восстановления результирующего температурного поля и идентифицируемой характеристики не только в точке контроля температуры, но и во всей пространственной области, занимаемой объектом. Рис. 3, 4 и табл. 2 демонстрируют некоторые результаты подобного анализа.

Так, на рис. 3 представлена температурная погрешность

$$\theta_M(x, y, \varphi^*, \Delta) - \theta^*(x, y, \varphi^*, u^0(\varphi^*))$$

во всей области изменения пространственных координат $0 < x < 1$, $0 < y < 1$ в конечный момент времени при $N = 3$. Максимальное отклонение восстановленного температурного поля от полученного с использованием точного выражения идентифицируемой характеристики (20) достигается в точке $x = 1$, $y = 1$. Аналогичная ситуация наблюдается и при $N = 1, 2$.

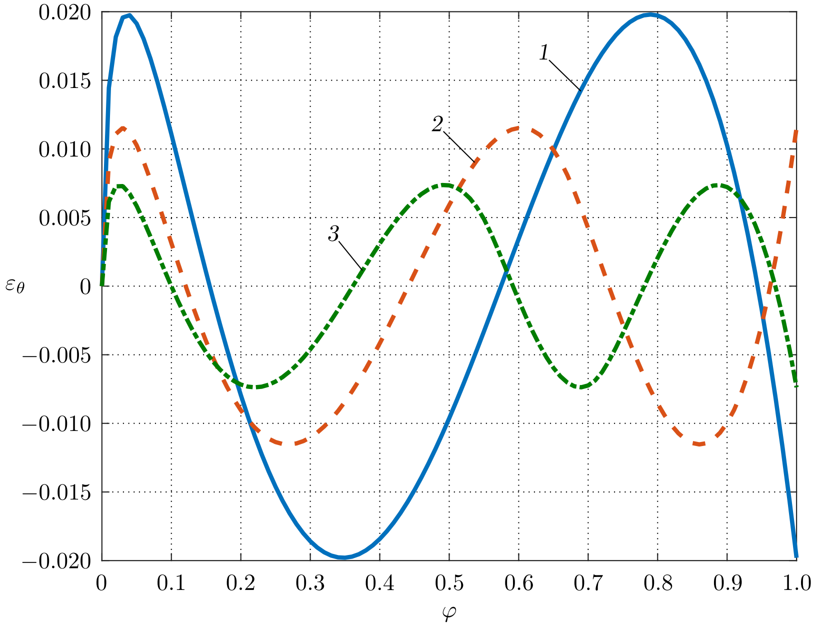


Рис. 1. Ошибка приближения заданного температурного распределения: *1* — $N = 1$; *2* — $N = 2$; *3* — $N = 3$

[Figure 1. Error in approximating of the given temperature distribution: *1* — $N = 1$; *2* — $N = 2$; *3* — $N = 3$]

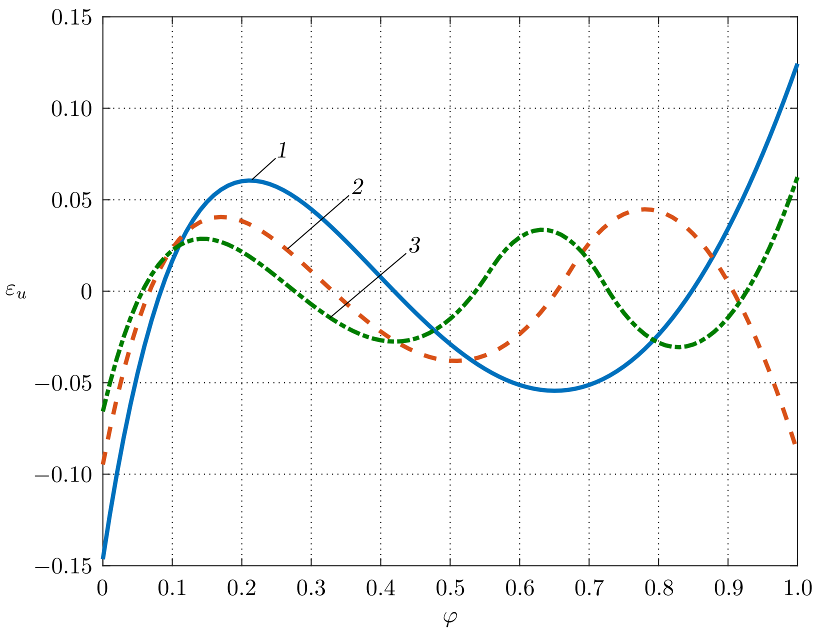


Рис. 2. Погрешность аппроксимации идентифицируемой функции: *1* — $N = 1$; *2* — $N = 2$; *3* — $N = 3$

[Figure 2. Approximation error of the identified function: *1* — $N = 1$; *2* — $N = 2$; *3* — $N = 3$]

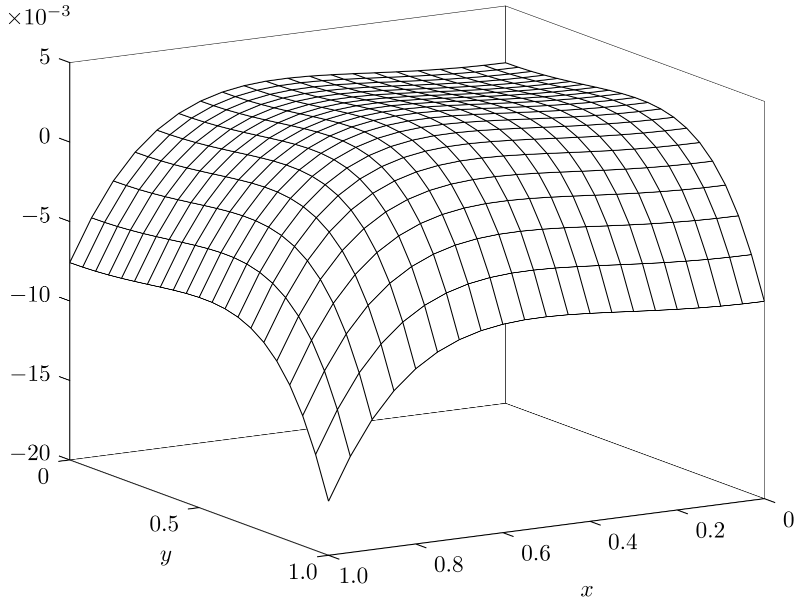


Рис. 3. Температурное отклонение расчетного значения от принятого во всей пространственной области в конечный момент времени

[Figure 3. The temperature deviation of the calculated value from the one taken in the entire spatial region at the final moment of time]

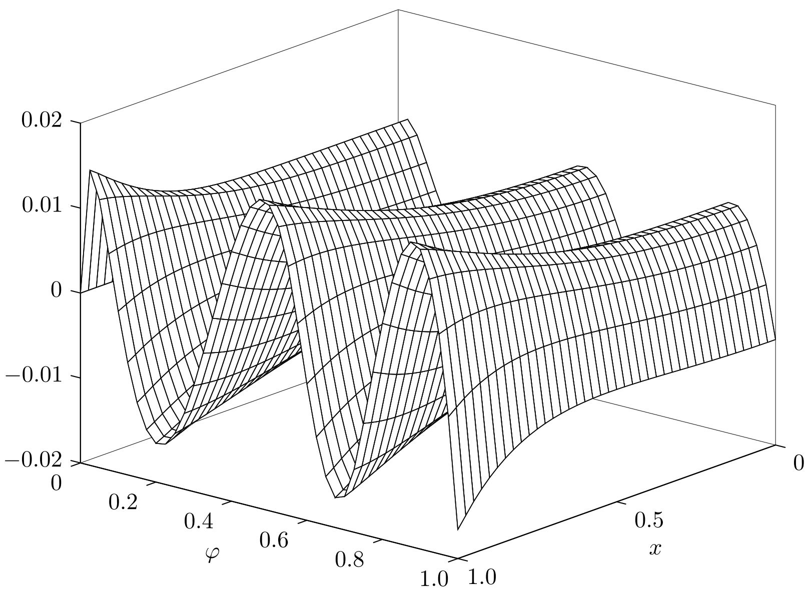


Рис. 4. Температурная невязка на границе $y = 1$ в процессе идентификации

[Figure 4. Temperature discrepancy at the boundary of $y = 1$ in the identification process]

Таблица 1

Погрешность восстановления температуры и идентифицируемой функции в точке контроля в зависимости от числа $N+3$ учитываемых параметров

[The error in restoring the temperature and the identified function at the control point, depending on the number of $N+3$ parameters taken into account]

N	1	2	3
$\bar{\varepsilon}_\theta$	0.0198	0.0115	0.0074
$\bar{\varepsilon}_u$	0.1465	0.0947	0.0657

Таблица 2

Погрешность восстановления температуры во всей пространственной области в зависимости от числа $N+3$ учитываемых параметров

[The error of temperature recovery in the entire spatial domain, depending on the number of $N+3$ parameters taken into account]

N	1	2	3
$\tilde{\varepsilon}_\theta$	0.0503	0.0268	0.0166

Рис. 4 отражает погрешность температурного распределения

$$\theta_M(x,1,\varphi,\Delta) - \theta^*(x,1,\varphi,u^0(\varphi))$$

на границе $0 < x < 1$, $y = 1$ на протяжении интервала идентификации $\varphi \in (0,\varphi^*]$ при $N = 3$. Вследствие симметричного характера нагрева температурное отклонение вдоль оси $x = 1$, $0 < y < 1$ будет иметь аналогичное поведение.

В табл. 2 приведено максимальное абсолютное отклонение

$$\tilde{\varepsilon}_0 = \max\bigl|\theta_M(x,y,\varphi^*,\Delta) - \theta^*(x,y,\varphi^*,u^0(\varphi^*))\bigr|$$

рассчитанного температурного поля от экспериментального во всей пространственной области $0 < x < 1$, $0 < y < 1$ для $N = 1, 2, 3$.

Как видно из данных, представленных в табл. 1 и 2, с ростом числа N, задающего количество используемых параметров в модельном описании температуры (16), (18), ошибка приближения истинного температурного состояния уменьшается как в точке контроля (x^*, y^*) на всем интервале идентификации, так и во всей пространственной области, занимаемой объектом. Аналогично, с увеличением значения N снижается погрешность восстановления идентифицируемого воздействия — сосредоточенной мощности внутренних источников тепла. Зависимость точности идентификации искомой характеристики и аппроксимации температурного состояния от координат точки контроля температуры имеет сложный неоднозначный характер и требует дополнительного исследования.

Заключение. Проведенное исследование показывает возможность решения многомерных ОЗТ по восстановлению неизвестных характеристик процессов технологической теплофизики на основе экспериментальной информации о температуре, полученной в одной точке контроля. Представленные результаты демонстрируют эффективность предложенной методики как для определения неизвестной сосредоточенной мощности теплоисточников, так и для восстановления температуры по всей пространственной области, занимаемой объектом, в любой момент времени.

Предложенный подход на основе модального описания объекта с распределенными параметрами в процессе нестационарной теплопроводности может быть распространен с необходимыми изменениями и дополнениями на идентификацию другого класса характеристик — пространственно распределенных или пространственно-временных внутренних и внешних воздействий.

Конкурирующие интересы. У нас нет конфликта интересов в отношении авторства и публикации этой статьи.

Авторский вклад и ответственность. Все авторы принимали участие в разработке концепции статьи и в написании рукописи. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

Финансирование. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23–29–00521, `https://rscf.ru/project/23-29-00521/`.

Библиографический список

1. Алифанов О. М. *Обратные задачи теплообмена.* М.: Машиностроение, 1988. 280 с.
2. Özişik M. N., Orlande H. R. B. *Inverse Heat Transfer: Fundamentals and Applications.* New York: Routledge, 2000. xx+330 pp. DOI: https://doi.org/10.1201/9781003155157.
3. Самарский А. А, Вабищевич П. Н. *Численные методы решения обратных задач математической физики.* М.: ЛКИ, 2009. 480 с.
4. Алифанов О. М., Артюхин Е. А., Румянцев С. В. *Экстремальные методы решения некорректных задач и их приложения к задачам теплообмена.* М.: Наука, 1988. 288 с.
5. Данилаев П. Г. Сравнение двух регуляризующих алгоритмов решения одной коэффициентной обратной задачи // *Изв. вузов. Матем.*, 2003. № 5. С. 3–8. EDN: HQUEQB.
6. Пилипенко Н. В., Гладских Д. А. Решение прямых и обратных задач теплопроводности на основе дифференциально-разностных моделей теплопереноса // *Изв. вузов. Приборостр.*, 2007. Т. 50, № 3. С. 69–74. EDN: HEJTCV.
7. Grysa K. Inverse heat conduction problems / *V. S. Vikhrenko (ed.) Heat Conduction — Basic Research.* IntechOpen, 2011. pp. 3–36. DOI: https://doi.org/10.5772/26575.
8. Япарова Н. М. О различных подходах к решению обратных граничных задач тепловой диагностики // *Вестн. Южно-Уральск. гос. ун-та. Сер. Математика. Механика. Физика*, 2012. № 34. С. 60–67. EDN: NRJZKZ.
9. Алифанов О. М., Ненарокомов А. В. Трехмерная граничная обратная задача теплопроводности // *ТВТ*, 1999. Т. 37, № 2. С. 231–238.
10. Guerrier B., Benard C. Two-dimensional linear transient inverse heat conduction problem — Boundary condition identification // *J. Thermophys. Heat Transfer*, 1993. vol. 7, no. 3. pp. 472-478. DOI: https://doi.org/10.2514/3.442.
11. Рапопорт Э. Я., Дилигенская А. Н. Модальная идентификация граничного воздействия в двумерной обратной задаче теплопроводности // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2018. Т. 22, № 2. С. 380–394. EDN: XWXSNN. DOI: https://doi.org/10.14498/vsgtu1627.
12. Дилигенская А. Н. Аналитическая идентификация пространственно-временного управления в обратных задачах теплопроводности на основе модального представления // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Техн. науки*, 2012. № 4. С. 31–38. EDN: QBUTFD.
13. Дилигенская А. Н., Рапопорт Э. Я. Аналитические условия оптимальности в обратных задачах теплопроводности // *ТВТ*, 2021. Т. 59, № 3. С. 401–410. EDN: WBKMPI. DOI: https://doi.org/10.31857/S0040364421030030.

14. Дилигенская А. Н. Решение ретроспективной обратной задачи теплопроводности на основе параметрической оптимизации // *ТВТ*, 2018. Т. 56, № 3. С. 399–406. EDN: RSXXBR. DOI: https://doi.org/10.7868/S0040364418030110.
15. Дилигенская А. Н., Рапопорт Э. Я. Аналитические методы параметрической оптимизации в обратных задачах теплопроводности с внутренним тепловыделением // *Инж.-физ. ж.*, 2014. Т. 87, № 5. С. 1082–1089. EDN: SNHAHJ.
16. Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М. *Уравнения в частных производных математической физики.* М.: Высш. шк., 1970. 336 с.
17. Рапопорт Э. Я. *Альтернансный метод в прикладных задачах оптимизации.* М.: Наука, 2000. 336 с. EDN: TTRVMB.
18. Немков В. С., Демидович В. Б. *Теория и расчет устройств индукционного нагрева.* Л.: Энергоатомиздат, 1988. 280 с. EDN: SCTRML.
19. Rudnev V. I., Loveless D., Cook R. L. *Handbook of Induction Heating.* Boca Raton: CRC Press, 2017. 772 pp. DOI: https://doi.org/10.1201/9781315117485.
20. Рапопорт Э. Я., Плешивцева Ю. Э. *Оптимальное управление температурными режимами индукционного нагрева.* М.: Наука, 2012. 309 с. EDN: QNDGWJ.

Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2024, vol. 28, no. 2, pp. 286–301
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu2081

MSC: 80A23, 35K05, 93C20

Parametric identification of concentrated effects in multidimensional inverse heat conduction problems

A. N. Diligenskaya, I. S. Bochkareva

Samara State Technical University,
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russian Federation.

Abstract

The study is dedicated to further research and development of constructive methods for sequential parametric optimization of unknown characteristics of nonstationary processes in technological heat physics on a compact set of continuous and continuously differentiable functions. The proposed methodology extends the algorithmically accurate method developed for solving inverse problems in technological heat physics to the multidimensional case of the inverse heat conduction problem, allowing the identification of a physically justified characteristic on sequentially converging compact sets.

The research focuses on a two-dimensional axisymmetric body of canonical shape. The problem is formulated in a uniform metric for assessing the temperature deviation of the calculated state from the experimental one. The mathematical model of the studied object is based on its modal description, which led to the reduction of the original inverse heat conduction problem, formulated in an extremal setting, to an optimal control problem.

The use of preliminary parameterization of the sought-after characteristic of the process results in its representation in the form of piecewise-parabolic functions defined by a parameter vector. The number of considered parameters determines the specific type of approximating function, and their values are found by solving the obtained parametric optimization problem. To solve the mathematical programming problem for optimal parameter vector values, alternating properties of the sought extremals are used, similar to the one-dimensional case, leading to the formulation of a closed system of relationships.

Mathematical Modeling, Numerical Methods and Software Complexes
Research Article

Please cite this article in press as:
Diligenskaya A. N., Bochkareva I. S. Parametric identification of concentrated effects in multidimensional inverse heat conduction problems, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2024, vol. 28, no. 2, pp. 286–301. EDN: IBMBBN. DOI: 10.14498/vsgtu2081 (In Russian).

Authors' Details:

Anna N. Diligenskaya https://orcid.org/0000-0002-9867-9781
Dr. Eng. Sci., Associate Professor; Professor; Dept. of Automation and Control in Technical Systems; e-mail: adiligenskaya@mail.ru

Irina S. Bochkareva https://orcid.org/0009-0005-3282-7680
Postgraduate Student; Dept. of Automation and Control in Technical Systems;
e-mail: bo4karewa.i99@yandex.ru

The obtained results demonstrate the effectiveness of extending the constructive method of sequential parametric optimization, tested on one-dimensional inverse heat conduction problems, to solving two-dimensional problems using their modal representation. Increasing the number of parameters of solutions forming the piecewise-parabolic form of the sought dependence leads to a reduction in the reconstruction error of both the sought concentrated function and the spatial-temporal temperature field throughout the domain of spatial variables.

Keywords: two-dimensional inverse heat conduction problem, parametric optimization, method of successive approximations.

Received: 2nd February, 2024 / Revised: 19th March, 2024 /
Accepted: 29th April, 2024 / First online: 17th November, 2024

Competing interests. We have no conflict of interest regarding the authorship and publication of this article.

Authors' contributions and responsibilities. All authors participated in the development of the article's concept and in writing the manuscript. The authors bear full responsibility for submitting the final manuscript for publication. The final version of the manuscript was approved by all authors.

Funding. The research was funded by the Russian Science Foundation (project no. 23–29–00521), https://rscf.ru/en/project/23-29-00521/.

References

1. Alifanov O. M. *Obratnye zadachi teploobmena* [Inverse Heat Transfer Problems]. Moscow, Mashinostroenie, 1988, 280 pp. (In Russian)
2. Özişik M. N., Orlande H. R. B. *Inverse Heat Transfer: Fundamentals and Applications.* New York, Routledge, 2000, xx+330 pp. DOI: https://doi.org/10.1201/9781003155157.
3. Samarskii A. A, Vabishchevich P. N. *Numerical Methods for Solving Inverse Problems of Mathematical Physics*, Inverse and Ill-Posed Problems Series. Berlin, New York, de Gruyter, 2007, xiv+438 pp. DOI: https://doi.org/10.1515/9783110205794.
4. Alifanov O. M., Artyukhin E. A., Rumyantsev S. V. *Extreme Methods for Solving Ill-Posed Problems with Applications to Inverse Heat Transfer Problems.* New York, Begell House, 1995, xii+306 pp.
5. Danilaev P. G. Comparison of two regularizing algorithms for the solution of a coefficient inverse problem, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2003, vol. 47, no. 5, pp. 1–6.
6. Pilipenko N. V., Gladskikh D. A. Solving direct and inverse problems of thermal conductivity based on differential-difference models of heat transfer, *Izv. Vuzov. Priborostr.*, 2007, vol. 50, no. 3, pp. 69–74 (In Russian). EDN: HEJTCV.
7. Grysa K. Inverse heat conduction problems, In: *V. S. Vikhrenko (ed.) Heat Conduction — Basic Research.* IntechOpen, 2011, pp. 3–36. DOI: https://doi.org/10.5772/26575.
8. Yaparova N. M. On various approaches to solving inverse boundary value problems of thermal diagnostics, *Vestn. Yuzhno-Uralsk. Gosud. Univ. Ser. Matematika. Mekhanika. Fizika*, 2012, no. 34, pp. 60–67 (In Russian). EDN: NRJZKZ.
9. Alifanov O. M., Nenarokomov A. V. Three-dimensional boundary-value inverse heat-conduction problem, *High Temperature*, 1999, vol. 37, no. 2, pp. 209–216.
10. Guerrier B., Benard C. Two-dimensional linear transient inverse heat conduction problem — Boundary condition identification, *J. Thermophys. Heat Transfer*, 1993, vol. 7, no. 3, pp. 472-478. DOI: https://doi.org/10.2514/3.442.
11. Rapoport E. Ya., Diligenskaya A. N. Modal identification of a boundary input in the two-dimensional inverse heat conduction problem, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-*

Mat. Nauki [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2018, vol. 22, no. 2, pp. 380–394 (In Russian). EDN: XWXSNN. DOI: https://doi.org/10.14498/vsgtu1627.

12. Diligenskaya A. N. Analytical identification of spatiotemporal control in inverse problems of thermal conductivity based on modal representation, *Vestn. Samar. Gosud. Tekhn. Univ. Ser. Tekhn. Nauki*, 2012, no. 4, pp. 31–38 (In Russian). EDN: QBUTFD.
13. Diligenskaya A. N., Rapoport E. Ya. Analytical conditions for optimality in inverse problems of heat conduction, *High Temp.*, 2021, vol. 59, no. 3, pp. 292–301. EDN: GIRKEM. DOI: https://doi.org/10.1134/S0018151X21030032.
14. Diligenskaya A. N. Solution of the retrospective inverse heat conduction problem with parametric optimization, *High Temp.*, 2018, vol. 56, no. 3, pp. 382–388. EDN: YBTJWH. DOI: https://doi.org/10.1134/S0018151X18020050.
15. Diligenskaya A. N., Rapoport E. Ya. Analytical methods of parametric optimization in inverse heat-conduction problems with internal heat release, *J. Eng. Phys. Thermophys.*, 2014, vol. 87, no. 5, pp. 1126–1134. EDN: UFURCF. DOI: https://doi.org/10.1007/s10891-014-1114-1.
16. Koshlyakov N. S., Gliner E. B., Smirnov M. M. *Uravneniia v chastnykh proizvodnykh matematicheskoi fiziki* [Partial Differential Equations of Mathematical Physics]. Moscow, Vyssh. Shk., 1970, 336 pp. (In Russian)
17. Rapoport E. Ya. *Al'ternansnyy metod v prikladnykh zadachakh optimizatsii* [Alternance Method in Applied Optimization Problems]. Moscow, Nauka, 2000, 336 pp. (In Russian). EDN: TTRVMB.
18. Nemkov V. S., Demidovich V. B. *Teoriia i raschet ustroistv induktsionnogo nagreva* [Theory and Calculation of Induction Heating Devices]. Leningrad, Energoatomizdat, 1988, 280 pp. (In Russian). EDN: SCTRML.
19. Rudnev V. I., Loveless D., Cook R. L. *Handbook of Induction Heating*. Boca Raton, CRC Press, 2017, 772 pp. DOI: https://doi.org/10.1201/9781315117485.
20. Rapoport E. Ya., Pleshivtseva Yu. E. *Optimal Control of Induction Heating Processes*. Boca Raton, CRC Press, 2007, 349 pp. EDN: UIEQHJ. DOI: https://doi.org/10.1201/9781420019490.

Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2024. Т. 28, № 2. С. 302–323
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu2085
EDN: KJCSIV

УДК 550.831.015.072

Гравитационное поле однородного куба. Классический и релятивистский случай

***В. Н. Макаров*[1], *Л. А. Шлейгер*[2], *А. А. Карасев*[3,4]**

[1] Оренбургский государственный университет,
Россия, 460018, Оренбург, просп. Победы, 13.
[2] Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе РАН,
Россия, 194021, Санкт-Петербург, ул. Политехническая, 26.
[3] Институт промышленной экологии УрО РАН,
Россия, 620108, Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 20.
[4] Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б.Н. Ельцина,
Россия, 620075, Екатеринбург, просп. Ленина, 51.

Аннотация

Вопрос исследования гравитационного поля тел сложной формы (не относящийся к шарообразной) представляет большой интерес для геофизики, астрофизики, математической физики и других областей. Статья состоит из двух частей. В первой части представлен краткий литературный обзор различных методов расчета потенциала гравитационного поля однородного куба в рамках классической механики: получение аналитического решения; как частный случай задачи нахождения гравитационного поля полиэдра; методом конечных элементов; методом мультипольного разложения. Более подробно проанализирован метод расчета потенциала гравитационного поля однородного куба с помощью аналитического решения и мультипольного разложения. Во второй части статьи описан релятивистский случай гравитационного поля однородного куба в рамках постньютоновского формализма в первом и втором приближении. Данный метод расчета выбран по причине чрезвычайной сложности получение решения с помощью уравнений Эйнштейна. Ранее подобные задачи для тел с формой куба не рассматривались. Для решения задачи выбрана физическая модель — координатный равновесный

Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ
Научная статья

Образец для цитирования
Макаров В. Н., Шлейгер Л. А., Карасев А. А. Гравитационное поле однородного куба. Классический и релятивистский случай // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2024. Т. 28, № 2. С. 302–323. EDN: KJCSIV. DOI: 10.14498/vsgtu2085.

Сведения об авторах

Валерий Николаевич Макаров https://orcid.org/0000-0001-5749-1427
кандидат физико-математических наук; доцент; каф. физики и методики преподавания физики[1]; e-mail: makarsvet13@gmail.com

Леонид Александрович Шлейгер https://orcid.org/0009-0007-9648-3172
младший научный сотрудник; сектор теоретической астрофизики[2];
e-mail: lslejger@gmail.com

Александр Александрович Карасев https://orcid.org/0000-0001-7394-7375
младший научный сотрудник; лаб. эколого-климатических проблем Арктики[3]; ассистент; каф. прикладной математики и механики[4]; e-mail: karaseval@ecko.uran.ru

куб, заполненный несжимаемой жидкостью с нулевой скоростью и постоянной плотностью. Получены релятивистские поправки для временной и пространственной координаты. Получен точный аналитический вид этих поправок для области вне куба, а также компоненты метрического тензора. Дано краткое сравнение полученных результатов для релятивистского случая с результатами классического ньютоновского случая. Для области внутри куба решение получено с помощью численных методов. Полученные результаты с достаточной точностью определяют параметры гравитационного поля для однородного куба, рассмотренного в рамках релятивистского подхода. Основное приложение этой задачи в рамках релятивистской физики относится к области математической физики (или, шире, математики).

Ключевые слова: однородный куб, гравитационное поле, потенциал гравитационного поля, ньютоновская механика, постньютоновский формализм.

Получение: 26 февраля 2024 г. / Исправление: 12 марта 2024 г. /
Принятие: 26 апреля 2024 г. / Публикация онлайн: 13 сентября 2024 г.

Введение

Вопрос исследования гравитационного поля тел сложной формы представляет большой интерес для геофизики, астрофизики, математической физики и других областей. В настоящей работе рассматривается гравитационное поле однородного куба для классического и релятивистского случаев. Форма куба выбрана не только из-за наличия нетривиальной симметрии. Ранее в литературе [1, 2] не встречались решения уравнений Эйнштейна для тел, имеющих форму однородного куба, в силу чего задача актуальна в рамках математической физики.

Кроме фундаментального значения, эта задача интересна своим практическим приложением. Несмотря на то, что астрономические тела кубической формы неизвестны, некоторые объекты могут иметь форму, обладающую схожими параметрами. Так, астероид Рюгу имеет форму, близкую к кубической, хотя ее можно описать как куполообразную [3]. Также в [4] рассматривалась модель столкновений частиц пыли с астероидами, приводящих к образованию больших относительно плоских областей и острых краев, что может свидетельствовать в пользу возможности образования астероидов кубической или подобной сложной формы.

В ряде случаев четкое представление о гравитационном поле объекта имеет важное значение для космических аппаратов, имеющих кубическую форму (например, при планировании высадки на небольшие астероиды и при выполнении других задач) [5]. Справедлива и актуальна также обратная задача по расчету орбит движения тел, находящихся в гравитационном поле тел с формой куба [6–8].

Также важно рассмотреть эту задачу с точки зрения ее значения в области геофизики. Для оценки гравитационного поля массивных объектов (возвышенностей, гор и горных хребтов) используется метод расчета их гравитационных полей, аналогичный методу конечных элементов, где в качестве единичного элемента выступает однородный куб или квадрат [9]. Аналогичным образом производится оценка потенциала гравитационного поля астероидов и галактик [8, 10].

Стоит отметить, что рассматриваемая задача имеет и научно-методологическое значение и была предложена для описания особенностей физики гравитационных полей для тел разной формы [11, 12].

К настоящему времени опубликовано достаточно много работ, посвященных расчетам гравитационного поля однородного куба в рамках классической ньютоновской механики, однако должной систематизации результатов этих работ и целостного представления обо всех методах решения до сих пор нет. Поэтому авторы посчитали важным привести литературный обзор подобных решений. Кроме того, эта тема поднимается в современных работах [13, 14]. Также сведения, приведенные в литературном обзоре, будут использоваться для рассмотрения релятивистского случая. Основное приложение этой задачи в рамках релятивистской физики относится к области математической физики (или, шире, математики).

В разделе 1 приведен обширный литературный обзор расчета гравитационного поля для классического ньютоновского тяготения. В разделе 2 для релятивистского случая рассмотрено гравитационное поле однородного куба; приведены основные модели и приближения, приводящие к этой задаче.

1. Классический случай

Способы расчета потенциала и напряженности гравитационного поля однородного куба можно разделить на 4 класса:

1) получение аналитического решения;
2) как частный случай задачи нахождения гравитационного поля полиэдра;
3) применение метода конечных элементов;
4) использование мультипольного разложения.

Рассмотрим каждый способ решения.

1.1. Получение аналитического решения. Вероятно, впервые данная задача была сформулирована в [15], однако в [16, p. 522] решалась близкая по постановке задача. В работе [15] автор рассматривает формулу для вычисления проекции гравитационного потенциала параллелепипеда со сторонами a, b, c вдоль оси $0z$, однако общую формулу для гравитационного потенциала куба (параллелепипеда) он не приводит, ссылаясь на излишне трудоемкие расчеты. Позже были получены общие выражения для гравитационного потенциала призмы по трем проекциям на оси [17, pp. 93–104].

В работе [18] автор исходя из теоремы Эйлера об однородных функциях доказывает, что первые производные потенциала и сам потенциал гравитационного поля можно легко вычислить из вторых производных, не интегрируя их. Данный результат позволяет вычислить гравитационный потенциал прямоугольной призмы. Подобный подход к решению данной задачи встречается в работе [19].

Практическое использование полученных результатов описано в работах [20, 21], в которых решались задачи вычисления гравитационного потенциала прямоугольной призмы в связи с моделированием гравитационного поля Земли и массивных горных образований. Потенциал (напряженность) гравитационного поля куба впервые обсуждался в работе [22], в том числе для анализа потенциала (напряженности) гравитационного поля массивных объектов сложной формы.

К основным недостаткам этих работ [15–23] можно отнести:

– приведение неудобной в применении общей громоздкой формулы;
– отсутствие общей формулы, хотя приводятся выкладки, позволяющие легко рассчитать гравитационный потенциал (напряженность) куба (прямоугольной призмы);
– нераскрытые пределы суммирования (или интегрирования) в конечной записи или расчет только для проекции на оси.

Этих недостатков лишена работа [24], где дается формула расчета потенциала, записанная с помощью сумм:

$$U(x_0,y_0,z_0)=\sum_{i=0}^{1}\sum_{j=0}^{1}\sum_{k=0}^{1}\Big[x_iy_j\cdot\mathrm{th}^{-1}\Big(\frac{z_k}{r_{ijk}}\Big)+ \\ +y_jz_k\cdot\mathrm{th}^{-1}\Big(\frac{x_i}{r_{ijk}}\Big)+z_kx_i\cdot\mathrm{th}^{-1}\Big(\frac{y_j}{r_{ijk}}\Big)-\frac{x_i^2}{2}\,\mathrm{tg}^{-1}\Big(\frac{y_jz_k}{x_ir_{ijk}}\Big)- \\ -\frac{y_j^2}{2}\,\mathrm{tg}^{-1}\Big(\frac{z_kx_i}{y_jr_{ijk}}\Big)-z_k^2\,\mathrm{tg}^{-1}\Big(\frac{x_iy_j}{z_kr_{ijk}}\Big)\Big],\quad (1)$$

где $x_1=a-x_0$, $y_1=b-y_0$, $z_1=c-y_0$; a, b, c — ребра прямоугольной призмы; x_0, y_0, z_0 — начало координат; $r_{ijk}=\sqrt{x_i^2+y_j^2+z_k^2}$, $i,j,k=0,1$; здесь константы определены как $G=\rho=1$.

Однако формула (1), представленная в работе [24], имеет неточность (или опечатку), а именно вместо z_k^2 необходимо записать $z_k^2/2$. Таким образом, корректная формула выглядит так:

$$U(x_0,y_0,z_0)=\sum_{i=0}^{1}\sum_{j=0}^{1}\sum_{k=0}^{1}\Big[x_iy_j\cdot\mathrm{th}^{-1}\Big(\frac{z_k}{r_{ijk}}\Big)+ \\ +y_jz_k\cdot\mathrm{th}^{-1}\Big(\frac{x_i}{r_{ijk}}\Big)+z_kx_i\cdot\mathrm{th}^{-1}\Big(\frac{y_j}{r_{ijk}}\Big)-\frac{x_i^2}{2}\,\mathrm{tg}^{-1}\Big(\frac{y_jz_k}{x_ir_{ijk}}\Big)- \\ -\frac{y_j^2}{2}\,\mathrm{tg}^{-1}\Big(\frac{z_kx_i}{y_jr_{ijk}}\Big)-\frac{z_k^2}{2}\,\mathrm{tg}^{-1}\Big(\frac{x_iy_j}{z_kr_{ijk}}\Big)\Big].\quad (2)$$

Кроме того, уравнение (1) несимметрично, хотя от куба ожидается симметричность. В дальнейшем подобные задачи решались в [13, 14], но они не лишены проблем, которые были описаны ранее.

1.2. Как частный случай задачи нахождения гравитационного поля полиэдра. Так как космические тела могут иметь сложную форму многогранника, нахождение потенциала (напряженности) гравитационного поля куба, в том числе, можно рассматривать как частный случай нахождения потенциала (напряженности) полиэдра. В настоящей работе подробный литературный обзор становления данного метода не проводится, так как он хорошо описан в [25]. Также в работе [25] представлен оригинальный подход к решению этой задачи с помощью элементарных теорем векторного исчисления. Значение потенциала гравитационного поля однородного полиэдра плотностью ρ (в соответствии с работой [25, 26]) найдем как

$$U(\vec{r}) = \frac{\rho}{2} \sum_i \vec{n}_i \cdot \left(\vec{r} - \vec{r}\,'\right) \oint_{C_i} \vec{Q}_i\left(\vec{r} - \vec{r}\,'\right) d\vec{r}\,', \tag{3}$$

где $\vec{Q}(\vec{r})$ — дополнительный векторный потенциал, причем

$$\iint\limits_S U(\vec{r})\, dS = \oint_C \vec{Q}(\vec{r})\, d\vec{r},$$

а $\vec{n}_i$ — единичные нормали.

Суть метода состоит в оценке величины поверхностного интеграла однородного многогранника:

$$I_r(\vec{r}) = \iint\limits_{S_i} \frac{dS'}{\left|\vec{r} - \vec{r}\,'\right|}, \tag{4}$$

где $I_r(\vec{r})$ — интегральное выражение по i-той грани полиэдра; S_i — любая из плоских поверхностей полиэдра.

Запишем связь уравнений (4) и (3):

$$\oint_{C_i} \vec{Q}_i\left(\vec{r} - \vec{r}\,'\right) d\vec{r}\,' = \sum_j I_{i,j}.$$

Основной трудностью использования данного метода являются вычисления интегрального выражения (4). Несмотря на то, что в результате вычисления разными методами получаются отличные друг от друга значения потенциала однородного куба, все они отличаются в 7–8 знаке после десятичной запятой [25].

В общем виде интегральное выражение имеет вид

$$\begin{aligned} I_{i,j} = d_{i,j} \Bigg[&\frac{c_{i,j}}{\sqrt{a_{i,j}^2 - b_{i,j}^2 - c_{i,j}^2}} \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{c_{i,j}(1 - b_{i,j})}{\sqrt{a_{i,j}^2 - b_{i,j}^2 - c_{i,j}^2}\sqrt{1 + a_{i,j}^2 - 2b_{i,j}^2}} \right) + \\ &+ \frac{c_{i,j}}{\sqrt{a_{i,j}^2 - b_{i,j}^2 - c_{i,j}^2}} \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{c_{i,j} b_{i,j}}{a_{i,j}\sqrt{a_{i,j}^2 - b_{i,j}^2 - c_{i,j}^2}} \right) + \\ &+ \ln\left(\frac{1 - b_{i,j} + \sqrt{1 + a_{i,j}^2 - 2b_{i,j}^2}}{a_{i,j} - b_{i,j}} \right) \Bigg], \end{aligned} \tag{5}$$

где

$$a_{i,j} = \frac{\left|\vec{r} - \vec{r}_{i,j}\right|}{\left|\vec{r}_{i,j+1} - \vec{r}_{i,j}\right|}, \quad b_{i,j} = \frac{(\vec{r} - \vec{r}_{i,j}) \cdot (\vec{r}_{i,j+1} - \vec{r}_{i,j})}{\left|\vec{r}_{i,j+1} - \vec{r}_{i,j}\right|^2},$$

$$c_{i,j} = \frac{\vec{n}_i \cdot (\vec{r} - \vec{r}_{i,j})}{\left|\vec{r}_{i,j+1} - \vec{r}_{i,j}\right|}, \quad d_{i,j} = \frac{(\vec{n}_i \times (\vec{r} - \vec{r}_{i,j})) \cdot (\vec{r}_{i,j+1} - \vec{r}_{i,j})}{\left|\vec{r}_{i,j+1} - \vec{r}_{i,j}\right|}.$$

В уравнении (5) аргументы различных членов квадратного корня и натурального логарифма могут быть нулевыми только тогда, когда точка поля

r лежит на краевой линии или продолжении краевой линии полиэдра. Можно заметить явное сходство формул (2) и (5). Несмотря на высокую ресурсоемкость с вычислительной точки зрения, этот метод расчета потенциала гравитационного поля однородного куба используется в работах [6, 7].

1.3. Метод конечных элементов. Задачи расчета гравитационного потенциала системы N тел анализируется на основе наложения на группу точечных тел квадратной сетки, например, как в [27]. Таким образом, условно такие задачи можно отнести к расчету гравитационного потенциала (напряженности) квадрата.

1.4. Мультипольное разложение. В силу своей простоты метод расчета потенциала (напряженности) гравитационного поля мультипольным разложением (рядом Лапласа) в последнее время стал востребован для исследования орбит, создаваемых вокруг тел кубической формы [8]. Впервые задача на вычисление потенциала за пределами куба до четвертого порядка мультипольного разложения была решена в [28], а позже обсуждалась в работе [21]:

$$U_{ext}(x,y,z) = \frac{M}{r} - \frac{7Ma^4}{18r^9}(x^4+y^4+z^4+3x^2y^2+3y^2z^2+3z^2x^2), \qquad (6)$$

где $U_{ext}(x,y,z)$ — потенциал гравитационного поля вне куба, M — масса куба, a — половина стороны ребра куба.

Эквипотенциальные поверхности, полученные с помощью формулы (6), изображены на рис. 1.

Формула более высоких порядков мультипольного разложения для области внутри куба приводится в работе [14]:

$$\begin{aligned} U_{int}(x,y,z) = {} & \Big(24\ln\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}} - 2\pi\Big) - \Big[\frac{2}{3}\pi(x^2+y^2+z^2)\Big] + \\ & + \Big[-\frac{4}{9\sqrt{3}}(x^4+y^4+z^4) + \frac{4}{3\sqrt{3}}(x^2y^2+x^2z^2+y^2z^2)\Big] + \\ & + \Big[-\frac{1}{162\sqrt{3}}(x^6+y^6+z^6) + \frac{5}{108\sqrt{3}}(x^2y^4+x^2z^4+x^4y^2+x^4z^2+y^2z^4+y^4z^2) - \\ & - \frac{5}{9\sqrt{3}}x^2y^2z^2\Big], \end{aligned} \qquad (7)$$

где $U_{int}(x,y,z)$ — потенциал гравитационного поля внутри куба.

Эквипотенциальные поверхности, полученные с помощью формулы (7), изображены на рис. 2.

Рассмотрим потенциал гравитационного поля однородного куба, полученный с помощью формул (6), (7) и (2) и изображенный на рис. 3.

По рис. 3 видно, что для анализа гравитационного поля за пределами куба в релятивистском случае вполне обосновано использование формулы (6) из-за ее простоты по сравнению с формулой (2) и способности обеспечить плоское пространство на $r \gg 2a$. Аналогичное утверждение справедливо и для формулы (7) для области внутри куба.

Рис. 1. Визуализация эквипотенциальных поверхностей, полученная с помощью формулы (6)

[Figure 1. Visualization of equipotential surfaces obtained using the formula (6)]

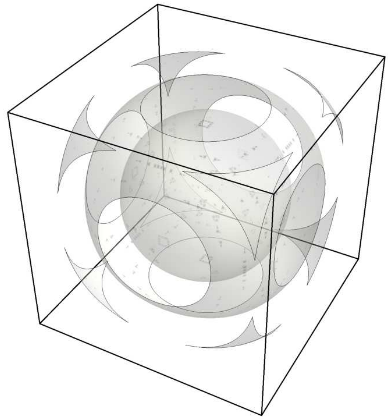


Рис. 2. Визуализация эквипотенциальных поверхностей, полученная с помощью формулы (7)

[Figure 2. Visualization of equipotential surfaces obtained using the formula (7)]

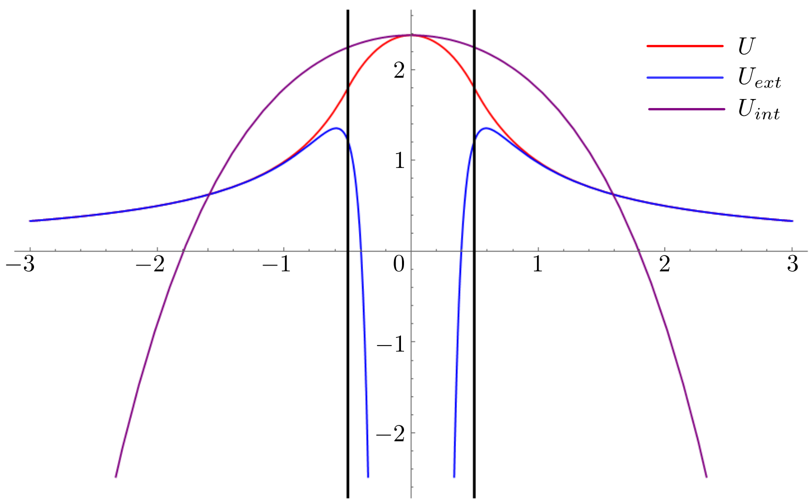


Рис. 3. Потенциалы гравитационного поля однородного куба от координаты x, полученные с помощью формул (6), (7) и (2), причем $G = c = \rho = 1$; вертикальные линии представляют собой границы куба: $a = 0.5$

[Figure 3. Potentials of the gravitational field of a homogeneous cube as functions of the coordinate x obtained using the formulas (6), (7) and (2), with $G = c = \rho = 1$; the vertical lines represent the boundaries of the cube: $a = 0.5$]

2. Релятивистский случай

2.1. Общая постановка задачи о гравитационном поле однородного куба. Современная теория тяготения в своей основе использует систему уравнений Эйнштейна, по которым и определяется гравитационное поле тела:

$$R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} R\, g^{\alpha\beta} = \frac{8\pi G}{c^4} T^{\alpha\beta}. \tag{8}$$

Однако поскольку уравнения тяготения являются системой нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных, решение такой системы в общем виде является очень тяжелой задачей как с математической, так и физической точки зрения. Поэтому в настоящее время получен лишь небольшой класс точных решений [1, 2]. В данной задаче при описании гравитационного поля куба в рамках ОТО следует решать именно уравнения (8), и авторы предполагают рассмотреть этот вопрос в будущих публикациях, но ввиду его чрезвычайной сложности рассмотрим другой метод решения.

В [29] описан способ приближенных решений уравнений тяготения. В современной литературе данный способ получил название постньютоновского формализма, или PNN [30, 31]. Применим данный подход в нашем исследовании и, как следствие, получим приближенные выражения для компонент метрического тензора однородного куба. Несмотря на общеизвестность данного метода, ранее к однородному кубу он не применялся. Постньютоновский формализм для решения этой задачи выбран по причине наличия известного нерелятивистского решения и эффективного использования в практических задачах. Также постньютоновский формализм хорошо подходит для расчета гравитационных полей малой напряженности, в особенности в применении к телам несферической формы, например, с формой куба.

В рамках рассматриваемой задачи определим куб следующим образом. Пусть в плоском пустом пространстве, которое задается обычной галилеевой метрикой, находится куб со стороной $2a$ и метрикой

$$ds_0^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2, \tag{9}$$

центр куба совмещен с началом координат; $V = 8a^3$ — объем куба.

В данной метрике все компоненты тензора энергии-импульса куба равны нулю, никакого воздействия на геометрию пространства он не оказывает. Когда куб заполнен веществом, данная метрика должна быть справедлива на бесконечности, поэтому на больших расстояниях компоненты метрического тензора следующие:

$$g_{00\infty} = c^2, \quad g_{ik\infty} = -\delta_{ik}.$$

Теория Эйнштейна, основанная на уравнениях (8), в первом приближении должна давать то же, что и ньютоновская теория тяготения. Поскольку теория Ньютона нерелятивистская, а перед нами стоит задача решать релятивистские уравнения, необходимо выделить некий параметр, характеризующий переход. Таким параметром формально будет являться скорость света c.

Для решений уравнений тяготения с достаточной точностью мы будем использовать приближенный метод [29]. Этот метод основан на разложении всех искомых функций по обратным степеням скорости света U/c^2. Наша задача облегчается тем, что метрика везде мало отличается от евклидовой.

Таким образом, в результате решения задачи мы получим приближенные выражения для метрического тензора.

2.2. Физическая модель. Пусть координатный куб в пространстве (9) заполнен несжимаемой жидкостью с нулевой скоростью и плотностью ρ. Равновесие обеспечивается изотропным давлением жидкости, которое можно найти как

$$\rho\frac{\partial U}{\partial x_i} = -\frac{\partial p_{ik}}{\partial x_i},$$

где $x_i = x, y, z$, а U — гравитационный потенциал куба.

Когда $\rho = \mathrm{const}$, получим, что

$$p = \rho U.$$

Для тензора энергии-импульса в правой части (8) мы используем приближенные выражения, которые соответствуют евклидовой метрике:

$$T^{00} = \rho/c^2, \quad T^{0\alpha} = 0, \quad T^{ik} = p/c^2. \tag{10}$$

При решении внешних уравнений будем считать, что тензор энергии-импульса во всем пространстве равен нулю, кроме некоторого отдельного объема $8a^3$, поэтому масса куба

$$M_{cube} = \int_{-a}^{a}\int_{-a}^{a}\int_{-a}^{a} T dxdydz = 8\rho a^3, \tag{11}$$

где $T = T^{00}g_{00}$.

Решая уравнения тяготения, необходимо учитывать влияние метрики на вид тензора энергии-импульса (10), поэтому далее для упрощения пренебрегаем обратной реакцией пространства на вещество.

2.3. Первое приближение. После заполнения координатного куба веществом по заданному распределению масс можно найти распределение гравитационного потенциала. В первом приближении единственной компонентой, вносящей вклад, будет компонента

$$T^{00} = \rho/c^2.$$

Перепишем уравнение (8) в виде

$$R^{\mu\nu} = -\varkappa\Big(T^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}T\Big),$$

оставляя в первом приближении компоненты тензора Риччи:

$$R^{00} = \frac{1}{2}\Delta g^{00}, \quad R^{ik} = \frac{1}{2}\Delta g^{ik}\delta^{ik}. \tag{12}$$

Таким образом, метрика внутри куба удовлетворяет уравнениям

$$\Delta g^{00} = -\frac{8\pi G}{c^4}\rho, \quad \Delta g^{ik} = -\frac{8\pi G}{c^2}\rho\delta_{ik}. \tag{13}$$

Решение уравнений тяготения (13) определит приближенные выражения для компонент метрического тензора в виде

$$g^{00} = \frac{1}{c^2}\Big(1 + \frac{2U}{c^2}\Big), \quad g^{ik} = -\left(1 - \frac{2U}{c^2}\right)\delta_{ik}. \tag{14}$$

Переход к ковариантным компонентам дает выражения

$$g_{00} = c^2 - 2U, \quad g_{ik} = -\Big(1 + \frac{2U}{c^2}\Big)\delta_{ik}.$$

Данные выражения для компонент метрического тензора удовлетворяют в первом приближении уравнениям тяготения. Соответствующее им выражение для квадрата интервала имеет вид

$$ds_I^2 = (c^2 - 2U)dt^2 - \Big(1 + \frac{2U}{c^2}\Big)(dx^2 + dy^2 + dz^2)$$

с соответствующим ньютоновым потенциалом (7) и удовлетворяет выражению

$$\Delta U_{int} = -4\pi G\rho.$$

Приближение накладывает ограничение на потенциал в виде

$$U_{\max} \ll c^2/2,$$

что в свою очередь ограничивает плотность вещества куба

$$\rho < \frac{c^2}{a^2 G}.$$

2.4. Второе приближение. Во втором приближении необходимо еще раз решить уравнения тяготения, но на этот раз учесть следующий порядок точности по $1/c$. Поэтому точность, с которой необходимо вычислить временную компоненту метрического тензора, равна

$$g^{00} = \frac{1}{c^2} + \frac{f(x,y,z)}{c^4} + \frac{f(x,y,z)}{c^6},$$

а точность, с которой будут вычислены пространственные компоненты, —

$$g^{ik} = -\delta^{ik} + \frac{g(x,y,z)}{c^4}.$$

Правая часть уравнений тяготения останется без изменений, однако учтем пространственные компоненты. Тогда во втором приближении имеем

$$T^{00} = \rho/c^2, \quad T^{ik} = \rho U/c^2. \tag{15}$$

Контравариантный тензор Риччи представим в виде

$$R^{\mu\nu} = -\frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \frac{\partial^2 g^{\mu\nu}}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} + \Gamma^{\mu\,\alpha\beta}\Gamma^{\nu}_{\alpha\beta} - \Gamma^{\mu\nu}. \tag{16}$$

Первый член (16) в ньютоновом приближении дает (12); последний член в (16) является сложной квадратичной функцией, содержащей первые производные от $g^{\mu\nu}$. Поэтому во втором приближении должно учитываться попарное произведение скобок Кристоффеля с той точностью, которого требует приближение. Во втором приближении мы ограничимся членами порядка

$$\Gamma^0_{\mu\nu} \sim 1/c^2, \quad \Gamma^0_{ik} \sim O(1/c^4), \quad \Gamma^i_{kl} \sim 1/c^2.$$

При решении уравнений тяготения мы свободны в выборе системы координат. Наиболее простой вид приближенные уравнения тяготения имеют в гармонических координатах, таких, что

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu}(\sqrt{-g}\, g^{\mu\nu}) = 0, \quad \Gamma^{\mu\nu} = 0. \tag{17}$$

Для удобства дальнейшего представления введем величину

$$\mathcal{G}^{\mu\nu} = \sqrt{-g} g^{\mu\nu}, \quad \sqrt{-g} \approx c.$$

Компоненты $\mathcal{G}^{\mu\nu}$ в первом приближении равны ds_I:

$$\mathcal{G}^{00} = \frac{1}{c} + \frac{4}{c^3}U, \quad \mathcal{G}^{ik} = -\delta^{ik}c.$$

Компоненты $\mathcal{G}^{\mu\nu}$ во втором приближении равны ds_{II}:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}^{00} &= \frac{1}{c} + \frac{4}{c^3}V(x,y,z) + \frac{7}{c^5}V(x,y,z)^2, \\ \mathcal{G}^{ik} &= -\delta^{ik}c + \frac{4}{c^3}S_{ik}(x,y,z), \end{aligned} \tag{18}$$

где V и S — некоторые функции разложения, которые удовлетворяют приближенным уравнениям Эйнштейна (в соответствии с обозначениями, принятыми в [29]).

Используя условие (17), подставим разложение (18) в тензор Риччи (16). Приравнивая полученное выражение компонентам тензора энергии-импульса (15), получим два уравнения для релятивистских поправок. Поправка для координаты t:

$$\Delta V = 4\pi G\rho\Big(c^2 + \frac{1}{2}U\Big). \tag{19}$$

Поправка пространственной координаты, которая позволит вычислить давление p:

$$\Delta S = -4\pi G\rho U - \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial U}{\partial x_i}\Big)^2. \tag{20}$$

Уравнения (20) и (19) для релятивистских поправок представляют собой уравнения Пуассона, которые решаются, например, с использованием функции Грина [32, 33]. Но так как физическая модель представляет собой координатный куб в пространстве (9), решать уравнения (20) и (19) стоит именно в декартовых координатах (x, y, z).

Получение аналитических решений для уравнений (20) и (19) для области внутри куба (т.е. области на некотором расстоянии $R < a$) с использованием внутреннего потенциала куба (7) представляет собой крайне непростую задачу. Поэтому решение для уравнений (20) и (19) для области внутри куба получено с помощью численных методов.

Граничные условия при решении уравнений (20) и (19): $S(a) = 0$; $V(a) = 0$. Результат представлен на рис. 4 и 5.

Из рис. 4 видно, что значение V в центре куба будет минимальным.

Из рис. 5 видно, что значение S в центре куба будет максимальным, что согласуется с физической моделью, т.к. ожидается, что давление p в центре куба будет также максимальным. Полученные распределения $S(x, y)$ и $V(x, y, z)$ соответствуют визуализации, представленной на рис. 2.

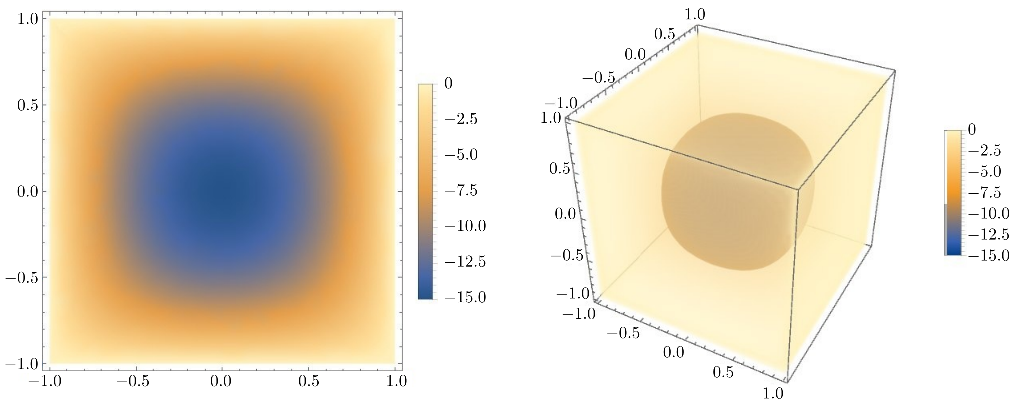


Рис. 4. Результат расчета релятивистских поправок $V(x, y)$ и $V(x, y, z)$ в системе `Wolfram Mathematica 13.0` с использованием численных методов ($c = G = \rho = 1$)

[Figure 4. The result of the calculation of relativistic corrections $V(x, y)$ and $V(x, y, z)$ in the `Wolfram Mathematica 13.0` system using numerical methods ($c = G = \rho = 1$)]

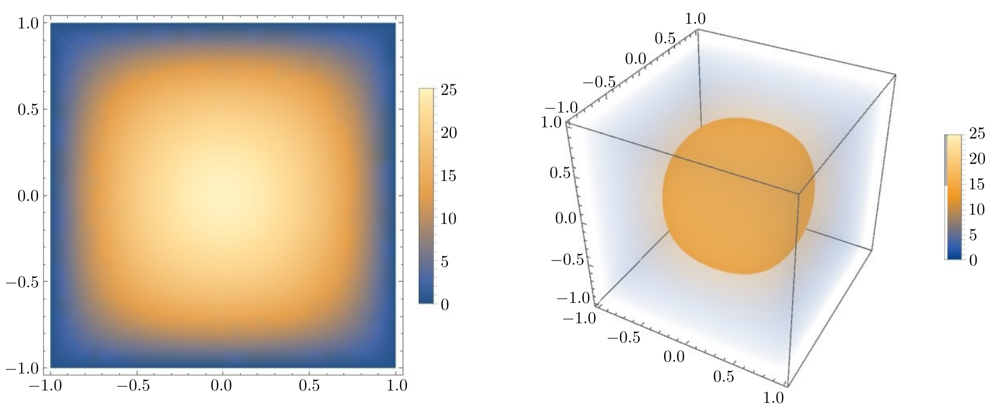


Рис. 5. Результат расчета релятивистских поправок $S(x, y)$ и $S(x, y, z)$ в системе `Wolfram Mathematica 13.0` с использованием численных методов ($c = G = \rho = 1$)

[Figure 5. The result of the calculation of relativistic corrections $S(x, y)$ and $S(x, y, z)$ in the `Wolfram Mathematica 13.0` system using numerical methods ($c = G = \rho = 1$)]

Рассмотрим аналитические решения уравнений (20) и (19) для области на некотором расстоянии от куба $R > a$. Уравнения (19) для временной поправки запишем так:

$$V(R) = Gc^2 \int_{V'} \frac{\rho'}{|R - r'|} dV' + \frac{G}{2} \int_{V'} \frac{\rho' U_{ext}}{|R - r'|} dV', \tag{21}$$

где $r' = x'_i$ — компоненты радиус-вектора, принадлежащие элементу объема куба, $R = x_i$ — компоненты радиус-вектора до точки вычисления потенциала.

Для случая, когда $R \gg a$, разложим $|R - r'|$ в ряд по мультполям [28]. Для куба из-за наличия симметрии квадроупольный момент равен $Q_{\alpha\beta} = 0$, $Q_{\alpha\beta\gamma} = 0$. Вычислим следующий полином — октоуполь. Введем координаты радиус-вектора r' и R, причем

$$r' = n_i x'_i, \quad R = n_j x_j.$$

Октоуполь является четвертым полиномом Лежандра:

$$O = \frac{r^4}{8R^5}(35\cos^4\alpha - 30\cos^2\alpha + 3),$$

тогда получим

$$O = \frac{x_i x_l x_\alpha x_\gamma}{8R^9}(x'_k x'_m x'_\mu x'_\beta)\left[35\gamma_{il\alpha\gamma km\mu\beta} - 30 n_{iklm}\delta_{\beta\mu}\delta_{\alpha\gamma} + 3\delta_{\beta\mu}\delta_{km}\delta_{il}\delta_{\alpha\gamma}\right],$$

где $\gamma_{il\alpha\gamma km\mu\beta} = n_{iklm}(\delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\mu} + \delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\mu} + \delta_{\alpha\mu}\delta_{\beta\gamma})/225$, $n_{iklm} = (\delta_{ik}\delta_{lm} + \delta_{il}\delta_{km} + \delta_{im}\delta_{kl})/15$ — усредненные значения единичного вектора.

Для куба разложение $1/|R - r'|$ в ряд по мультполям имеет следующий вид:

$$\frac{1}{|R - r'|} = \frac{1}{R} + \frac{(x_i)^2(x_j)^2}{8R^9}(x'_\alpha)^2(x'_\beta)^2\gamma, \tag{22}$$

где $\gamma = 0.16(2\delta_{i\alpha} + 1)(2\delta_{j\beta} + 1) - 2(2\delta_{i\alpha} + 1) + 3$.

Подставляя разложение (22) в (21), получим

$$V(R) = \frac{Gc^2}{R}\int_{V'} \rho' dV' + \frac{Gc^2\gamma(x_i)^2(x_j)^2}{8R^9}\int_{V'} \rho'(x'_\alpha)^2(x'_\beta)^2 dV' + \\ + \frac{G}{2R}\int_{V'} \rho' U_{ext} dV' + O(1/R^{9+n}).$$

Рассмотрим аналитическое решение уравнения для пространственных поправок (20). Поскольку первый член уравнения (20) зависит от ρ, вне куба он обращается в ноль, поэтому первый интеграл конечен. Второй член в (20) не обращается в ноль во всем пространстве, однако на бесконечности обращается в ноль, что также говорит о конечности интеграла. Перепишем уравнение (20) в виде

$$\Delta S = -4\pi G\rho U_{ext} + \frac{G^2}{2}\int_{V'}\int_{V''} \rho'\rho''\nabla'\Big(\frac{1}{|R - r'|}\Big)\nabla''\Big(\frac{1}{|R - r''|}\Big) dV' dV'', \tag{23}$$

где r' и r'' — радиус-векторы, принадлежащие элементам объема V' и V'' куба.

Решение (23) принимает вид

$$S(R) = \frac{G}{R}\int_V \rho U_{ext} dV + O(1/R^{9+n}) + \frac{G^2}{2}\int_{V'}\int_{V''} \rho'\rho'' \frac{\partial^2(\ln z)}{\partial x'_i \partial x''_i} dV' dV'',$$

где $\ln z = \ln(|R - r'| + |R - r''| - |r' - r''|)$ и удовлетворяет уравнению

$$\Delta \ln z = \frac{1}{|R - r'||R - r''|}.$$

Для нахождения внешнего решения на больших расстояниях от куба $R \gg a$ разложим функцию z по обратным степеням R. В разложении отбросим члены, убывающие быстрее $1/R^2$, и учтем симметрию куба, тогда

$$\frac{\partial^2(\ln z)}{\partial x'_i \partial x''_i} = \frac{1}{2R^2} - \frac{1}{R}\frac{1}{|r' - r''|}.$$

Запишем решение для функции S на больших расстояниях от куба $R \gg a$:

$$S(R) = \frac{G}{R}\int_V \rho U_{ext} dV + O(1/R^{9+n}) + \\ + \frac{16G^2\rho^2 a^6}{R^2} - \frac{G^2}{2R}\int_{V'}\int_{V''} \frac{\rho'\rho''}{|r' - r''|} dV' dV''. \quad (24)$$

Интегралы, входящие в S и V, являются вполне определенными физическими величинами:

$W = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_V \rho U dV$ — гравитационная энергия тела [14, 34],

$M = \displaystyle\int_V \rho dV = 8\rho a^3$ — масса куба (11).

В (24) 6-кратный интеграл можно упростить, используя определение ньютонового потенциала:

$$\frac{G^2}{2R}\int_{V'}\int_{V''} \frac{\rho'\rho''}{|r' - r''|} dV' dV'' = \frac{G}{2R}\int_{V'} \rho' U(r') dV' = \frac{GW}{R}.$$

Таким образом, решение S и V снаружи куба имеет вид

$$V(R) = \frac{GM}{R}c^2 - \frac{7Ma^4}{18R^9}c^2(x^4 + y^4 + z^4 + 3x^2y^2 + 3y^2z^2 + 3z^2x^2) + \\ + \frac{GW}{R} + O(1/R^{9+n}); \quad (25)$$

$$S(R) = \frac{G^2M^2}{4R^2} + O(1/R^{9+n}). \quad (26)$$

Компоненты метрического тензора во внешнем пространстве будут иметь вид

$$g^{00} \approx \mathcal{G}^{00}c = 1 + \frac{4GM}{R} - \frac{3Ma^4}{2R^9}A(x,y,z) + \frac{4GW}{Rc^2} + \\ + \frac{7}{c^4}\Big(\frac{GM}{R}c^2 - \frac{7Ma^4}{18R^9}A(x,y,z) + \frac{GW}{R}\Big)^2, \quad (27)$$

$$g^{ik} \approx \mathcal{G}^{ik}c = -c^2\delta_{ik}\Big(1 - \frac{G^2M^2}{R^2c^4}\Big), \tag{28}$$

где $A(x, y, z) = \big(x^4 + y^4 + z^4 + 3x^2y^2 + 3y^2z^2 + 3z^2x^2\big)$.

Рассмотрим параметры гравитационного поля однородного куба, полученные с помощью формул (6) и (27) и отраженные на рис. 6.

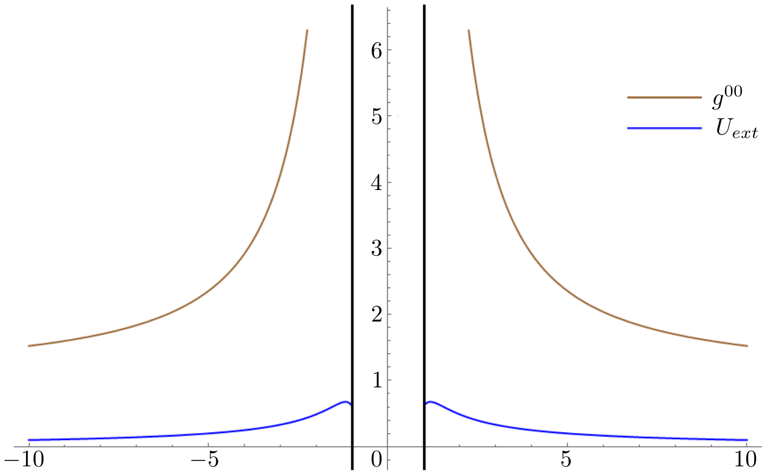


Рис. 6. Сравнение параметров гравитационного поля во внешнем пространстве без релятивистских поправок и с их наличием от координаты x, причем $c = G = \rho = 1$; вертикальные линии представляют собой границы куба: $a = 1$

[Figure 6. Comparison of the gravitational field parameters in outer space without relativistic corrections and with their presence as functions of the x coordinate, with $c = G = \rho = 1$; the vertical lines represent the boundaries of the cube: $a = 1$]

На рис. 6 очевиден вклад релятивистских поправок. Стоит обратить внимание, что функция $g^{00}(x)$ убывает с большей скоростью, чем функция $U_{ext}(x)$, а также имеет большее значение функции при равных значениях аргумента x. Черные линии, представляющие границы куба, являются также асимптотой к функции $g^{00}(x)$. Полученные результаты с точностью достаточной для нашей задачи, определяют параметры гравитационного поля для однородного куба, рассмотренного в рамках релятивистского подхода.

Выводы

В работе проведен литературный обзор расчета потенциала гравитационного поля однородного куба в рамках ньютоновской механики. Для релятивистского случая описана физическая модель, в которой координатный куб в пространстве (9) заполнен несжимаемой жидкостью с нулевой скоростью и плотностью ρ. Методом постньютоновского формализма (в первом и во втором приближении) аналитически описана временная и пространственная поправка S и V для области вне куба (см. формулы (25) и (26)), а для области внутри куба решение получено с помощью численных методов. Получены компоненты метрического тензора во внешнем пространстве в первом (см. формулы (14)) и во втором (см. формулы (27) и (28)) приближении.

Конкурирующие интересы. Конкурирующих интересов не имеется.

Авторский вклад и ответственность. Все авторы принимали участие в разработке концепции статьи и в написании рукописи. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

Финансирование. Исследование выполнялось без финансирования.

Благодарности. Авторы статьи выражают благодарность Авдееву Вячеславу Юрьевичу (Физический институт им. П.Н. Лебедева РАН, лаборатория математических методов обработки, Москва, Россия), Неясову Петру Петровичу (Оренбургский государственный университет, кафедра физики и методики преподавания физики, Оренбург, Россия) за бесценные советы по написанию рукописи статьи; Иванчику Александру Владимировичу и Барсукову Дмитрию Петровичу (ФТИ им. А.Ф. Иоффе РАН, сектор теоретической астрофизики, Санкт-Петербург, Россия) за рекомендации в решении задачи.

Библиографический список

1. Haug E. G., Spavieri G. *New exact solution to Einsteins field equation gives a new cosmological model*, 2023. hal: hal-04286328. DOI: `https://doi.org/10.13140/RG.2.2.36524.44161`.
2. Stephani H., Kramer D., MacCallum M., et al. *Exact solutions of Einstein's field equations* / Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2009. xxix+701 pp. DOI: `https://doi.org/10.1017/CBO9780511535185`.
3. Watanabe S., Hirabayashi M., Hirata N., et al. Hayabusa2 arrives at the carbonaceous asteroid 162173 Ryugu — A spinning top-shaped rubble pile // *Science*, 2019. vol. 364, no. 6437. pp. 268–272. DOI: `https://doi.org/10.1126/science.aav8032`.
4. Domokos G., Sipos A. Á., Szabó Gy. M., Várkonyi P. L. Formation of sharp edges and planar areas of asteroids by polyhedral abrasion // *Astrophys. J.*, 2009. vol. 699, no. 1, L13. DOI: `https://doi.org/10.1088/0004-637X/699/1/L13`.
5. Gibney E. Freefall space cubes are test for gravitational wave spotter // *Nature*, 2015. vol. 527, no. 7578. pp. 284–285. DOI: `https://doi.org/10.1038/527284a`.
6. Liu X., Baoyin H., Ma X. Equilibria, periodic orbits around equilibria, and heteroclinic connections in the gravity field of a rotating homogeneous cube // *Astrophys. Space Sci.*, 2011. vol. 2, no. 333. pp. 409–418. DOI: `https://doi.org/10.1007/s10509-011-0669-y`.
7. Liu X., Baoyin H., Ma X. Periodic orbits in the gravity field of a fixed homogeneous cube // *Astrophys. Space Sci.*, 2011. vol. 2, no. 334. pp. 357–364. DOI: `https://doi.org/10.1007/s10509-011-0732-8`.
8. Park R. S., Werner R. A., Bhaskaran S. Estimating small-body gravity field from shape model and navigation data // *J. Guid. Control Dyn.*, 2010. vol. 33, no. 1. pp. 212–221. DOI: `https://doi.org/10.2514/1.41585`.
9. Mufti I. R. Iterative gravity modeling by using cubical blocks // *Geophys. Prospect.*, 1975. vol. 23, no. 1. pp. 163–198. DOI: `https://doi.org/10.1111/j.1365-2478.1975.tb00688.x`.
10. Fukushima T. Mosaic tile model to compute gravitational field for infinitely thin non-axisymmetric objects and its application to preliminary analysis of gravitational field of M74 // *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 2016. vol. 459, no. 4. pp. 3825–3860. DOI: `https://doi.org/10.1093/mnras/stw924`.
11. Sanny J., Smith D. How spherical is a cube (Gravitationally)? // *Phys. Teacher*, 2015. vol. 53, no. 2. pp. 111–113. DOI: `https://doi.org/10.1119/1.4905815`.
12. Lira J. A. If the Earth were a cube, what would be the value of the acceleration of gravity at the center of each face? // *Phys. Educ.*, 2018. vol. 53, no. 6, 065013. DOI: `https://doi.org/10.1088/1361-6552/aadb25`.

13. Chappell J. M., Chappell M. J., Iqbal A., Abbott D. The gravity field of a cube // *Physics International*, 2013. vol. 3, no. 2. pp. 50–57. DOI: https://doi.org/10.3844/pisp.2012.50.57.
14. Seidov Z. F., Skvirsky P. I. *Gravitational potential and energy of homogeneous rectangular parallelepiped*, 2000, arXiv: astro-ph/0002496. DOI: https://doi.org/10.48550/arXiv.astro-ph/0002496.
15. Bessel F. W. Auszug aus einem Schreiben des Herrn Prof. Bessel an den Herausgeber // *Astron. Nachr.*, 1823. vol. 2, no. 32. pp. 133–136 (In German).
16. *Monatliche Correspondenz zur Beförderung der Erd- und Himmelskunde* / hrsg. vom Freyherrn von Zach, Band 24, November 1811. Gotha: Becker, 1811. pp. 425–522 (In German). https://zs.thulb.uni-jena.de/receive/jportal_jpvolume_00203228.
17. Everest G. *An Account of the Measurement of an Arc of the Meridian Between the Parallels of 18° 3' and 24° 7': Being a Continuation of the Grand Meridional Arc of India as Detailed by the Late Lieut.–Col. Lambton in the Volumes of the Asiatic Society of Calcutta*. London: J.L. Cox, 1830. xii+337 pp. https://catalog.hathitrust.org/Record/012336511.
18. Haáz I. B. Relations between the potential of the attraction of the mass contained in a finite rectangular prism and its first and second derivatives // *Geofizikai Közlemények*, 1953. vol. 2, no. 7. pp. 57–66 (In Hungarian). http://epa.niif.hu/02900/02941/00002/pdf/EPA02941_geofizikai_kozlemenyek_1953_02_057-066.pdf.
19. Mader K. *Das Newtonsche Raumpotential prismatischer Körper u. seine Ableitungen bis zur dritten Ordnung*: Sonderheft 11 der Österreichischen Zeitschrift für Vermessungswesen. Wien: Österr. Verein f. Vermessungswesen, 1951. 74 pp. (In German). https://www.ovg.at/static/vgi-sonderhefte/sonderheft1951_11_final_OCR.pdf.
20. Nagy D. The gravitational attraction of a right rectangular prism // *Geophys.*, 1966. vol. 31, no. 2. pp. 362–371. DOI: https://doi.org/10.1190/1.1439779.
21. Botezatu R., Visarion M., Scurtu F., Cucu G. Approximation of the gravitational attraction of geological bodies // *Geophys. Prospect.*, 1971. vol. 19, no. 2. pp. 218–227. DOI: https://doi.org/10.1111/j.1365-2478.1971.tb00594.x.
22. Mufti I. R. Rapid determination of cube's gravity field // *Geophys. Prospect.*, 1973. vol. 21, no. 4. pp. 724–735. DOI: https://doi.org/10.1111/j.1365-2478.1973.tb00054.x.
23. Banerjee B., Das Gupta S. P. Gravitational attraction of a rectangular parallelepiped // *Geophys.*, 1977. vol. 42, no. 5. pp. 1053–1055. DOI: https://doi.org/10.1190/1.1440766.
24. Waldvogel J. The Newtonian potential of a homogeneous cube // *ZAMP*, 1976. vol. 27, no. 6. pp. 867–871. DOI: https://doi.org/10.1007/BF01595137.
25. Conway J. T. Analytical solution from vector potentials for the gravitational field of a general polyhedron // *Celest. Mech. Dyn. Astron.*, 2015. vol. 121. pp. 17–38. DOI: https://doi.org/10.1007/s10569-014-9588-x.
26. Barnett C. T. Theoretical modeling of the magnetic and gravitational fields of an arbitrarily shaped three-dimensional body // *Geophys.*, 1976. vol. 41, no. 6. pp. 1353–1364. DOI: https://doi.org/10.1190/1.1440685.
27. Jessop C., Duncan M., Chau W. Y. Multigrid methods for n-body gravitational systems // *J. Comput. Phys.*, 1994. vol. 115, no. 2. pp. 339–351. DOI: https://doi.org/10.1006/jcph.1994.1200.
28. MacMillan W. D. *Theoretical Mechanics.* II: The Theory of Potential. New York, London: McGraw-Hill, 1930. xiii+469 pp.
29. Fock V. A. *The Theory of Space, Time and Gravitation.* New York: Pergamon Press, 1963. 411 pp.
30. O'Leary J., Barriot J. P. Reconstructing the cruise-phase trajectory of deep-space probes in a general relativistic framework: An application to the Cassini gravitational wave experiment // *Astrodyn.*, 2023. vol. 7, no. 3. pp. 301–314. DOI: https://doi.org/10.1007/s42064-023-0160-x.

31. Денисов В. И., Умнов А. Н. Параметризованный постньютоновский формализм для неметрических теорий гравитации // *ТМФ*, 1993. Т. 96, № 1. С. 79–95.
32. Zhu Y. *Equations and Analytical Tools in Mathematical Physics. A Concise Introduction*. Singapore: Springer, 2021. xii+252 pp. DOI: `https://doi.org/10.1007/978-981-16-5441-1`.
33. Багапш А. О. Интеграл Пуассона и функция Грина для одной сильно эллиптической системы уравнений в круге и эллипсе // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 2016. Т. 56, № 12. С. 2065–2072. DOI: `https://doi.org/10.7868/S0044466916120048`.
34. Кондратьев Б. П. *Теория потенциала. Новые методы и задачи с решениями*. М.: Мир, 2007. 512 с.

Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2024, vol. 28, no. 2, pp. 302–323
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu2085

MSC: 83C25

Gravitational field of a homogeneous cube. Classical and relativistic case

V. N. Makarov[1]**, *L. A. Shleiger***[2]**, *A. A. Karasev***[3,4]

[1] Orenburg State University,
13, pr. Pobedy, Orenburg, 460018, Russian Federation.
[2] Ioffe Physical-Technical Institute, Russian Academy of Sciences,
26, Polytekhnicheskaya str., St. Petersburg, 194021, Russian Federation.
[3] Institute of Industrial Ecology, Ural Branch of RAS,
20, Sof'ya Kovalevskaya str., Ekaterinburg, 620108, Russian Federation.
[4] Ural Federal University named after the First President of Russia B.N. Yeltsin,
19, Mira str., Ekaterinburg, 620002, Russian Federation.

Abstract

The problem of studying the gravitational field of cube-shaped bodies is of great interest to geophysics, astrophysics, mathematical physics, and other fields. The first part of the article presents a brief literary overview of various methods for calculating the gravitational field potential of a homogeneous cube within the framework of classical mechanics: obtaining an analytical solution; as a special case of the problem of finding the gravitational field of a polyhedron; by the finite element method; multipole decomposition. The method of calculating the gravitational field potential of a homogeneous cube using an analytical solution and multipole decomposition is analyzed in more detail. The second part of the article describes the relativistic case of the gravitational field of a homogeneous cube within the framework of post-Newtonian formalism in the first and second approximations. To solve the problem, a physical model was chosen that involved a balanced coordinate cube filled with an incompressible liquid with zero velocity and constant density. Relativistic corrections for the time and spatial coordinates are obtained. A precise analytical expression for these corrections in the region outside the cube, together with the components of the metric tensor, are

Mathematical Modeling, Numerical Methods and Software Complexes
Research Article

Please cite this article in press as:
Makarov V. N., Shleiger L. A., Karasev A. A. Gravitational field of a homogeneous cube. Classical and relativistic case, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2024, vol. 28, no. 2, pp. 302–323. EDN: KJCSIV. DOI: 10.14498/vsgtu2085 (In Russian).

Authors' Details:

Valery N. Makarov https://orcid.org/0000-0001-5749-1427
Cand. Phys. & Math. Sci.; Associate Professor; Dept. of Physics and Methodology of Teaching Physics[1]; e-mail: makarsvet13@gmail.com

Leonid A. Shleiger https://orcid.org/0009-0007-9648-3172
Junior Researcher; Theoretical Astrophysics Section[2]; e-mail: lslejger@gmail.com

Alexander A. Karasev https://orcid.org/0000-0001-7394-7375
Junior Researcher; Lab. of Ecological and Climatic Problems of the Arctic[3]; Assistant; Dept. of Applied Mathematics and Mechanics[4]; e-mail: karaseval@ecko.uran.ru

obtained. A brief comparison of the results obtained for the relativistic case with the results of the classical Newtonian case is provided. The solution is obtained using numerical methods for the region inside the cube. The results obtained determine, with sufficient accuracy, the gravitational field parameters for a homogeneous cube considered in the framework of the relativistic approach.

Keywords: homogeneous cube, gravitational field, gravitational field potential, Newtonian mechanics, Post-Newtonian approximation.

Received: 26th February, 2024 / Revised: 12th March, 2024 /
Accepted: 26th April, 2024 / First online: 13th September, 2024

Competing interests. We have no competing interests.

Author contributions and responsibility. All authors participated in the development of the article's concept and in writing the manuscript. The authors bear full responsibility for submitting the final manuscript for publication. The final version of the manuscript was approved by all authors.

Funding. The research was conducted without funding.

Acknowledgments. The authors of this article express gratitude to Vyacheslav Yu. Avdeev (Lebedev Physical Institute, Russian Academy of Sciences, Lab. of Mathematical Methods of Processing, Moscow, Russia), Petr P. Neyasov (Orenburg State University, Dept. of Physics and Physics Teaching Methods, Orenburg, Russia) for their invaluable advice on writing the manuscript of the article; to Alexander V. Ivanchik and Dmitry P. Barsukov (Ioffe Physical-Technical Institute, Russian Academy of Sciences, Theoretical Astrophysics Section, St. Petersburg, Russia) for their recommendations in solving the problem.

References

1. Haug E. G., Spavieri G. *New exact solution to Einsteins field equation gives a new cosmological model*, 2023. hal: hal-04286328. DOI: https://doi.org/10.13140/RG.2.2.36524.44161.
2. Stephani H., Kramer D., MacCallum M., et al. *Exact solutions of Einstein's field equations*, Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge, Cambridge Univ. Press, 2009, xxix+701 pp. DOI: https://doi.org/10.1017/CBO9780511535185.
3. Watanabe S., Hirabayashi M., Hirata N., et al. Hayabusa2 arrives at the carbonaceous asteroid 162173 Ryugu — A spinning top-shaped rubble pile, *Science*, 2019, vol. 364, no. 6437, pp. 268–272. DOI: https://doi.org/10.1126/science.aav8032.
4. Domokos G., Sipos A. Á., Szabó Gy. M., Várkonyi P. L. Formation of sharp edges and planar areas of asteroids by polyhedral abrasion, *Astrophys. J.*, 2009, vol. 699, no. 1, L13. DOI: https://doi.org/10.1088/0004-637X/699/1/L13.
5. Gibney E. Freefall space cubes are test for gravitational wave spotter, *Nature*, 2015, vol. 527, no. 7578, pp. 284–285. DOI: https://doi.org/10.1038/527284a.
6. Liu X., Baoyin H., Ma X. Equilibria, periodic orbits around equilibria, and heteroclinic connections in the gravity field of a rotating homogeneous cube, *Astrophys. Space Sci.*, 2011, vol. 2, no. 333, pp. 409–418. DOI: https://doi.org/10.1007/s10509-011-0669-y.
7. Liu X., Baoyin H., Ma X. Periodic orbits in the gravity field of a fixed homogeneous cube, *Astrophys. Space Sci.*, 2011, vol. 2, no. 334, pp. 357–364. DOI: https://doi.org/10.1007/s10509-011-0732-8.
8. Park R. S., Werner R. A., Bhaskaran S. Estimating small-body gravity field from shape model and navigation data, *J. Guid. Control Dyn.*, 2010, vol. 33, no. 1, pp. 212–221. DOI: https://doi.org/10.2514/1.41585.

9. Mufti I. R. Iterative gravity modeling by using cubical blocks, *Geophys. Prospect.*, 1975, vol. 23, no. 1, pp. 163–198. DOI: https://doi.org/10.1111/j.1365-2478.1975.tb00688.x.
10. Fukushima T. Mosaic tile model to compute gravitational field for infinitely thin non-axisymmetric objects and its application to preliminary analysis of gravitational field of M74, *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 2016, vol. 459, no. 4, pp. 3825–3860. DOI: https://doi.org/10.1093/mnras/stw924.
11. Sanny J., Smith D. How spherical is a cube (Gravitationally)?, *Phys. Teacher*, 2015, vol. 53, no. 2, pp. 111–113. DOI: https://doi.org/10.1119/1.4905815.
12. Lira J. A. If the Earth were a cube, what would be the value of the acceleration of gravity at the center of each face?, *Phys. Educ.*, 2018, vol. 53, no. 6, 065013. DOI: https://doi.org/10.1088/1361-6552/aadb25.
13. Chappell J. M., Chappell M. J., Iqbal A., Abbott D. The gravity field of a cube, *Physics International*, 2013, vol. 3, no. 2, pp. 50–57. DOI: https://doi.org/10.3844/pisp.2012.50.57.
14. Seidov Z. F., Skvirsky P. I. *Gravitational potential and energy of homogeneous rectangular parallelepiped*, 2000, arXiv: astro-ph/0002496. DOI: https://doi.org/10.48550/arXiv.astro-ph/0002496.
15. Bessel F. W. Auszug aus einem Schreiben des Herrn Prof. Bessel an den Herausgeber, *Astron. Nachr.*, 1823, vol. 2, no. 32, pp. 133–136 (In German).
16. *Monatliche Correspondenz zur Beförderung der Erd- und Himmelskunde* / hrsg. vom Freyherrn von Zach, Band 24, November 1811. Gotha, Becker, 1811, pp. 425–522 (In German). https://zs.thulb.uni-jena.de/receive/jportal_jpvolume_00203228.
17. Everest G. *An Account of the Measurement of an Arc of the Meridian Between the Parallels of 18° 3' and 24° 7': Being a Continuation of the Grand Meridional Arc of India as Detailed by the Late Lieut.–Col. Lambton in the Volumes of the Asiatic Society of Calcutta*. London, J.L. Cox, 1830, xii+337 pp. https://catalog.hathitrust.org/Record/012336511.
18. Haáz I. B. Relations between the potential of the attraction of the mass contained in a finite rectangular prism and its first and second derivatives, *Geofizikai Közlemények*, 1953, vol. 2, no. 7, pp. 57–66 (In Hungarian). http://epa.niif.hu/02900/02941/00002/pdf/EPA02941_geofizikai_kozlemenyek_1953_02_057-066.pdf.
19. Mader K. *Das Newtonsche Raumpotential prismatischer Körper u. seine Ableitungen bis zur dritten Ordnung*, Sonderheft 11 der Österreichischen Zeitschrift für Vermessungswesen. Wien, Österr. Verein f. Vermessungswesen, 1951, 74 pp. (In German). https://www.ovg.at/static/vgi-sonderhefte/sonderheft1951_11_final_OCR.pdf.
20. Nagy D. The gravitational attraction of a right rectangular prism, *Geophys.*, 1966, vol. 31, no. 2, pp. 362–371. DOI: https://doi.org/10.1190/1.1439779.
21. Botezatu R., Visarion M., Scurtu F., Cucu G. Approximation of the gravitational attraction of geological bodies, *Geophys. Prospect.*, 1971, vol. 19, no. 2, pp. 218–227. DOI: https://doi.org/10.1111/j.1365-2478.1971.tb00594.x.
22. Mufti I. R. Rapid determination of cube's gravity field, *Geophys. Prospect.*, 1973, vol. 21, no. 4, pp. 724–735. DOI: https://doi.org/10.1111/j.1365-2478.1973.tb00054.x.
23. Banerjee B., Das Gupta S. P. Gravitational attraction of a rectangular parallelepiped, *Geophys.*, 1977, vol. 42, no. 5, pp. 1053–1055. DOI: https://doi.org/10.1190/1.1440766.
24. Waldvogel J. The Newtonian potential of a homogeneous cube, *ZAMP*, 1976, vol. 27, no. 6, pp. 867–871. DOI: https://doi.org/10.1007/BF01595137.
25. Conway J. T. Analytical solution from vector potentials for the gravitational field of a general polyhedron, *Celest. Mech. Dyn. Astron.*, 2015, vol. 121, pp. 17–38. DOI: https://doi.org/10.1007/s10569-014-9588-x.
26. Barnett C. T. Theoretical modeling of the magnetic and gravitational fields of an arbitrarily shaped three-dimensional body, *Geophys.*, 1976, vol. 41, no. 6, pp. 1353–1364. DOI: https://doi.org/10.1190/1.1440685.
27. Jessop C., Duncan M., Chau W. Y. Multigrid methods for n-body gravitational systems, *J. Comput. Phys.*, 1994, vol. 115, no. 2, pp. 339–351. DOI: https://doi.org/10.1006/jcph.1994.1200.

28. MacMillan W. D. *Theoretical Mechanics.* II: The Theory of Potential. New York, London, McGraw-Hill, 1930, xiii+469 pp.
29. Fock V. A. *The Theory of Space, Time and Gravitation.* New York, Pergamon Press, 1963, 411 pp.
30. O'Leary J., Barriot J. P. Reconstructing the cruise-phase trajectory of deep-space probes in a general relativistic framework: An application to the Cassini gravitational wave experiment, *Astrodyn.*, 2023, vol. 7, no. 3, pp. 301–314. DOI: https://doi.org/10.1007/s42064-023-0160-x.
31. Denisov V. I., Umnov A. N. Parametrized post-Newtonian formalism for nonmetric theories of gravitation, *Theoret. Math. Phys.*, 1993, vol. 96, no. 1, pp. 827–836. DOI: https://doi.org/10.1007/BF01074111.
32. Zhu Y. *Equations and Analytical Tools in Mathematical Physics. A Concise Introduction.* Singapore, Springer, 2021, xii+252 pp. DOI: https://doi.org/10.1007/978-981-16-5441-1.
33. Bagapsh A. O. The Poisson integral and Green's function for one strongly elliptic system of equations in a circle and an ellipse, *Comput. Math. Math. Phys.*, 2016, vol. 56, no. 12, pp. 2035–2042. DOI: https://doi.org/10.1134/S0965542516120046.
34. Kondrat'ev B. P. *Teoriia potentsiala. Novye metody i zadachi s resheniiami* [Theory of Potential. New Methods and Problems with Solutions]. Moscow, Mir, 2007, 512 pp. (In Russian)

Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2024. Т. 28, № 2. С. 324–344
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu2086
EDN: LMDBIW

УДК 517.958:544.018

Математическое моделирование массопереноса в электромембранных системах в гальванодинамическом режиме с учетом электроконвекции и реакции диссоциации/рекомбинации молекул воды

А. М. Узденова

Карачаево-Черкесский государственный университет им. У. Д. Алиева,
Россия, 369200, Карачаевск, Ленина, 29.

Аннотация

Массоперенос в электромембранных системах в режимах интенсивного тока сопровождается возникновением дополнительных механизмов переноса, которые существенно влияют на эффективность их функционирования. Согласно современным представлениям для разбавленных растворов электролитов среди таких механизмов особенно важными являются электроконвекция и реакции диссоциации/рекомбинации молекул воды. Эти процессы оказывают противоположное действие на эффективность электромембранных технологий.

В исследованиях мембранных систем активно применяются математические модели, учитывающие влияние указанных механизмов, однако они обычно описывают только потенциодинамический режим, при котором устанавливается скачок потенциала в системе. Для интерпретации обширной базы экспериментальных данных по гальванодинамическому режиму (при фиксированной плотности тока) также необходимы инструменты теоретического анализа.

Цель данной работы заключается в разработке математической модели массопереноса в слое раствора электролита у ионообменной мембраны с учетом электроконвекции и диссоциации воды в гальванодинамическом режиме. Модель основана на системе связанных уравнений Нернста—Планка—Пуассона—Навье—Стокса, дополненной новым гальванодинамическим граничным условием для потенциала.

С использованием разработанной модели впервые рассчитаны хронопотенциограммы мембранной системы с учетом влияния как электроконвекции, так и реакции диссоциации/рекомбинации молекул воды.

Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ
Научная статья

Образец для цитирования
Узденова А. М. Математическое моделирование массопереноса в электромембранных системах в гальванодинамическом режиме с учетом электроконвекции и реакции диссоциации/рекомбинации молекул воды // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2024. Т. 28, № 2. С. 324–344. EDN: LMDBIW. DOI: 10.14498/vsgtu2086.

Сведения об авторе
Аминат Магометовна Узденова https://orcid.org/0000-0001-5951-9876
кандидат физико-математических наук, доцент; доцент; каф. информатики и вычислительной математики; e-mail: uzd_am@mail.ru

Результаты показали, что отношение концентрации продуктов диссоциации воды к концентрации ионов соли определяет баланс эффектов электроконвекции и диссоциации.

Рассмотрены следующие варианты соотношения эффектов электроконвекции и диссоциации молекул воды:
1) значимое влияние на массоперенос оказывает электроконвекция, в то время как влияние диссоциации воды минимально;
2) электроконвекция и диссоциация существенно влияют на процессы переноса: образование дополнительных носителей заряда в результате диссоциации молекул воды снижает скачок потенциала в слое раствора электролита, что уменьшает интенсивность электроконвекции, в то время как развитие электроконвекции, в свою очередь, замедляет процесс диссоциации;
3) продукты интенсивной диссоциации молекул воды тормозят развитие электроконвекции.

Ключевые слова: электромембранная система, перенос ионов, электроконвекция, реакция диссоциации/рекомбинации молекул воды, гальванодинамический режим, уравнения Нернста—Планка—Пуассона—Навье—Стокса.

Получение: 3 марта 2024 г. / Исправление: 29 апреля 2024 г. / Принятие: 4 июня 2024 г. / Публикация онлайн: 23 сентября 2024 г.

1. Введение. Электромембранные системы (электродиализные аппараты, нано- и микрофлюидные устройства) применяются для обессоливания и деионизации воды, производства кислот и оснований, при преобразовании и производстве энергии и в других областях [1–3]. В основе принципов функционирования электромембранных систем лежит селективный перенос ионообменных мембран, то есть проницаемость для ионов одного знака (противоионов) и ограничение движения ионов другого знака (коионов). В структуре вольт-амперной кривой электромембранной системы выделяются следующие характерные участки [4, 5]:
- допредельный ток — начальный линейный участок, когда концентрация ионов раствора электролита в примембранной области достаточно высока;
- плато предельного тока — горизонтальный участок с небольшим наклоном, когда селективный перенос противоионов в мембране приводит к практически полному обессоливанию раствора электролита в примембранной области;
- сверхпредельный ток — участок вторичного роста тока.

Согласно современным представлениям основным механизмом сверхпредельного массопереноса для рассматриваемых в данной работе разбавленных растворов электролитов является электроконвекция (ЭК) [6, 7], то есть увлечение молекул жидкости ионами, образующими пространственный заряд у ионоселективной поверхности под действием электрической силы [6]. В режиме сверхпредельного тока на границе раздела раствор/мембрана формируется расширенная область пространственного заряда (ОПЗ), действие электрического поля на который генерирует значимое электроконвективное течение [6], которое интенсифицирует процесс массопереноса. Наряду с появлением ОПЗ при сверхпредельных токах фиксируется смещение показателя pH раствора, что объясняется диссоциацией молекул воды с образованием ионов водорода H^+ и гидроксила OH^- [8]. Отклонение от равновесия в реакции $H_2O \underset{k_r}{\overset{k_d}{\longleftrightarrow}} H^+ + OH^-$ (где k_d и k_r — константы скорости диссоциации и рекомбинации воды соответственно) приводит к появлению новых носителей заряда (ионов H^+ и OH^-), что снижает эффективность обессоливания растворов [9], уменьшает толщину расширенной ОПЗ и величину заряда [10, 29], вызывает уменьшение интенсивности ЭК [12, 13]. Поэтому особое значение имеет математическое моделирование сверхпредельного переноса ионов с учетом ЭК и реакции диссоциации/рекомбинации молекул воды (РДРВ), которые оказывают противоположное действие на эффективность электромембранных процессов.

Одним из основных подходов математического описания переноса ионов в мембранных системах является использование уравнения Нернста—Планка, учитывающего диффузию и миграцию ионов, а также конвекцию раствора. Уравнение Нернста—Планка совместно с уравнением материального баланса описывают как стационарные, так и нестационарные процессы, учитывая, в частности, протекание химических реакций. На основе уравнений Нернста—Планка и условия электронейтральности построены модели переноса ионов соли и ионов водорода и гидроксила, образующихся в результате расщепления воды, в стационарном состоянии трехслойной системы (ионообменная мембрана и два смежных с ней слоя раствора электролита) Г. Гроссманом [14] и в неперемешиваемом слое электролита у ионообменной мембраны И. Рубинштейном [15].

И. Рубинштейн и Л. Штильман на основе системы уравнений Нернста—Планка и уравнения Пуассона для электрического потенциала построили одномерную модель переноса ионов 1 : 1-валентного электролита в неперемешиваемом слое раствора у поверхности идеально селективной мембраны при постоянном скачке потенциала в стационарном состоянии [16]. Численное решение соответствующей краевой задачи модели показало существование расширенной ОПЗ у границы раствор электролита/мембрана, которая значительно больше, чем область равновесного двойного электрического слоя, при наложении достаточно высокого скачка потенциала [16]. В. И. Заболоцкий и соавт. [10] обобщили одномерную модель И. Рубинштейна и Л. Штильмана (то есть модель переноса ионов соли 1 : 1-валентного электролита в неперемешиваемом слое раствора у поверхности идеально селективной мембраны) [16] для описания переноса ионов четырех видов: катионов и анионов соли, ионов водорода и гидроксила, образующихся в результате диссоциации молекул воды. Показано, что появление ионов водорода и гидроксила в обедненном диффузионном слое уменьшает величину пространственного заряда и толщину ОПЗ [10]. Помимо численного анализа математической модели переноса ионов в стационарном состоянии для анализа влияние РДРВ на перенос также получено асимптотическое решение [17, 18].

М. Х. Уртенов и соавт. [19] с использованием модели переноса ионов с учетом РДРВ в диффузионном слое у ионообменной мембраны в стационарном состоянии показали, что интенсивное некаталитическое расщепление воды происходит в расширенной ОПЗ и условие химического равновесия выполняется всюду в диффузионном слое, за исключением области рекомбинации и ОПЗ. Позже подобный подход (на основе системы уравнений Нернста—Планка—Пуассона) применен для описания переноса в одномерном сечении электродиализного канала, образованного между анионо- и катинообменной мембранами для стационарного [20] и нестационарного [21] случаев. Результаты численного моделирования работ [20, 21] показали, что РДРВ может создать ОПЗ в центральной части мембранного канала обессоливания.

В работах [22, 23] математическая модель стационарного переноса ионов соли с учетом РДРВ в диффузионном слое [19] была модифицирована с целью описания влияние температурных эффектов, связанных с РДРВ: система уравнений Нернста—Планка и Пуассона дополнена уравнением теплопроводности, а коэффициент скорости диссоциации определен как функция температуры.

В. В. Никоненко и соавт. в работе [24] получили численное и полуаналитическое решение задачи описания стационарного переноса ионов и ионов водорода и гидроксила, образующихся в результате диссоциации воды. Рассматриваемая в работе [24] модель основана на системе уравнений Нернста—Планка и Пуассона и учитывает отклонение от локальной электронейтральности в обедненном диффузионном слое. Аналитическое решение получено путем разделения обедненного диффузионного слоя на электронейтральную часть, расширенную область пространственного заряда и квазиравновесную зону у поверхности мембраны [24].

А. В. Коваленко в работе [25] для исследования влияния РДРВ и ЭК предложена двумерная модель на основе системы уравнений Нернста—Планка—Пуассона—Навье—Стокса для половины канала обессоливания у катионообменной мембраны. Было показано, что диссоциация воды приводит к увеличению значения скачка потенциала, при котором развивается ЭК [25]. В работе [21] область рассмотрения данной модели была расширена, она включает канал обессоливания от анионо- до катионообменной мембраны. Показано, что когда концентрации ионов водорода и гидроксила становятся сопоставимыми с концентрацией ионов соли, РДРВ может вызвать появление ОПЗ в центральной части канала обессоливания. В недавней работе [26] на основе модели переноса в электродиализном канале обессоливания исследовано совместное влияние РДРВ, ЭК и спейсеров на массоперенос.

В работах [8–26] заложены основы теоретического анализа влияния РДРВ на массоперенос в электромембранных системах. Работы [21, 25, 26] посвящены изучению массопереноса с учетом как ЭК, так и РДРВ. В них выполнено исследование только для потенциодинамического (когда задается скачок потенциала) режима электрического поля. При этом в исследованиях и практике функционирования электромембранных систем важное значение имеет и гальванодинамический режим (когда задается плотность протекающего через систему тока), так как для характеристики процесса массопереноса используются различные конкретные критические значения тока, такие, например, как предельный ток, экзальтационный ток, ток Харкаца и т.д.

В данной работе впервые выполняется математическое моделирование сверхпредельного переноса ионов в двумерном сечении слоя раствора бинарного электролита у поверхности катионообменной мембраны в гальванодинамическом режиме с учетом ЭК и РДРВ. Впервые рассчитана хронопотенциограмма мембранной системы с учетом ЭК и РДРВ. С целью оценки влияния РДРВ и ЭК на характеристики массопереноса сопоставляются результаты расчета с учетом и без учета РДРВ, а также с учетом и без учета ЭК.

2. Математическая модель. Рассмотрим покоящийся слой разбавленного раствора бинарного электролита у поверхности катионообменной мембраны, через который протекает постоянный ток плотностью i. Селективные свойства мембраны зададим граничными условиями. Плотность, температуру и диэлектрическую проницаемость раствора примем постоянными. Пусть x и y — нормальная и касательная координаты к поверхности мембраны соответственно; H и L — толщина и длина рассматриваемой области, рис. 1.

Плотность потоков ионов соли (катионов Na^+, $n = 1$, и анионов Cl^-, $n = 2$) и продуктов диссоциации воды (ионов H^+, $n = 3$, и OH^-, $n = 4$) определяется уравнениями Нернста—Планка

$$\vec{j_n} = -\frac{F}{RT} z_n D_n c_n \nabla\varphi - D_n \nabla c_n + c_n \vec{V} \tag{1}$$

и материального баланса [27]

$$\frac{\partial c_n}{\partial t} = -\operatorname{div}\vec{j_n} + R_n, \tag{2}$$

где $\vec{j_n}$, c_n, D_n, z_n — плотность потока, концентрация, коэффициент диффузии и зарядовое число n-го иона соответственно; φ — потенциал электрического поля; $\vec{V}$ — скорость течения раствора; F — постоянная Фарадея; R — газовая постоянная; T — абсолютная температура; R_n — скорость формирования n-го иона. Скорости формирования ионов соли равны нулю ($R_1 = R_2 = 0$), так как они не участвуют в химической реакции. Скорость диссоциации молекул воды определяется величиной $k_d c_{\mathrm{H_2O}}$ (где $c_{\mathrm{H_2O}}$ — концентрация воды), скорость рекомбинации — $k_r c_3 c_4$. Результирующая скорость образования ионов H^+ и OH^- равна разности скоростей диссоциации и рекомбинации: $R_3 = R_4 = k_d c_{\mathrm{H_2O}} - k_r c_3 c_4 = k_r(K_w - c_3 c_4)$, где K_w — ионное произведение воды ($K_w = 10^{-8}$ моль^2/м^6).

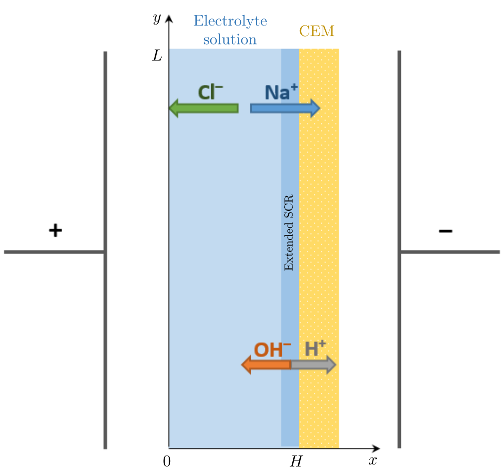


Рис. 1. Двумерное сечение слоя раствора NaCl у поверхности катионообменной мембраны (КОМ). Схематически показаны потоки ионов соли Na^+, Cl^-, а также водорода H^+ и гидроксила OH^-, образующихся в расширенной области пространственного заряда (ОПЗ) в сверхпредельном режиме

[Figure 1. Two-dimensional cross-section of a layer of NaCl electrolyte at the surface of a cation-exchange membrane (CEM). The flows of salt ions Na^+, Cl^-, as well as hydrogen H^+ and hydroxyl OH^-, generated in the extended space charge region (SCR) in the overlimiting mode]

Поле электрического потенциала с учетом пространственного заряда, обусловленного нарушением баланса катионов и анионов, определяется уравнением Пуассона

$$\varepsilon_0\varepsilon_r\Delta\varphi = -F\sum_{n=1}^{4} z_n c_n, \tag{3}$$

где ε_0 — электрическая постоянная, ε_r — диэлектрическая проницаемость раствора, правая часть уравнения (3) представляет собой плотность пространственного заряда $\rho = F\sum_{n=1}^{4} z_n c_n$.

Течение раствора электролита с учетом электрической силы, действующей на пространственный заряд, описывается уравнениями Навье—Стокса и неразрывности несжимаемой жидкости:

$$\frac{\partial\vec{V}}{\partial t} + (\vec{V}\nabla)\vec{V} = -\frac{1}{\rho_0}\nabla P + \nu\Delta\vec{V} - \frac{1}{\rho_0}\vec{f}_e, \quad \operatorname{div}\vec{V} = 0, \tag{4}$$

где P, ρ_0, ν — давление, плотность и кинематическая вязкость раствора электролита; $\vec{f}_e = \rho\nabla\varphi$ — плотность силы электрического поля, действующей на заряд плотностью ρ.

Величины φ, $\vec{V}$, P, $\vec{j}_n$, c_n, $n = 1, 2, 3, 4$, в системе уравнений (1)–(4) являются неизвестными функциями координат x, y и времени t.

В предлагаемую математическую модель включены следующие граничные условия: для скорости течения раствора задается условие прилипания на границе раздела раствор/мембрана ($x = H$) и нулевая нормальная скорость на остальных границах:

$$\vec{V}(H, y, t) = 0, \quad \vec{V}\cdot\vec{n}(0, y, t) = 0, \quad \vec{V}\cdot\vec{n}(x, 0, t) = 0, \quad \vec{V}\cdot\vec{n}(x, L, t) = 0, \tag{5}$$

где $\vec{n}$ — нормаль к границе.

На границе $x = 0$ концентрации ионов соли обоих знаков фиксированы и равны начальной концентрации электролита; концентрации ионов H^+ и OH^- равны $\sqrt{K_w} = 10^{-4}$ моль/м^3 (что соответствует нейтральному раствору):

$$c_1(0, y, t) = c_0, \quad c_2(0, y, t) = c_0, \quad c_3(0, y, t) = \sqrt{K_w}, \quad c_4(0, y, t) = \sqrt{K_w}. \tag{6}$$

Перечислим граничные условия при $x = H$: концентрация катионов соли задается постоянной; условие непрерывности потока ионов на границе раздела раствор/мембрана для анионов соли; ионы H^+, OH^-, формирующиеся в результате диссоциации воды, беспрепятственно переносятся из зоны реакции через катионообменную мембрану [21]; рассматриваются некаталитическая диссоциация и плотность потока инжекция ионов гидроксила OH^- с поверхности мембран, j_{4c} не учитывается:

$$\begin{gathered}
c_1(H, y, t) = N_c c_0, \\
\Big(-\frac{F}{RT}z_2 D_2 c_2\frac{\partial\varphi}{\partial x} - D_2\frac{\partial c_2}{\partial x} + c_2 V_y\Big)(H, y, t) = \frac{T_{2c}}{Fz_2} i_x(H, y, t), \\
\frac{\partial c_3}{\partial x} c_1(H, y, t) = 0, \\
\Big(-\frac{F}{RT}z_4 D_4 c_4\frac{\partial\varphi}{\partial x} - D_4\frac{\partial c_4}{\partial x} + c_4 V_y\Big)(H, y, t) = j_{4c} = 0,
\end{gathered} \tag{7}$$

где (H, y, t) — аргументы соответствующих выражений.

На границах $y = 0$ и $y = L$ приняты «мягкие» условия [28, 29]:

$$\frac{\partial c_n}{\partial y}(x,0,t) = 0, \quad \frac{\partial c_n}{\partial y}(x,L,t) = 0, \quad n = 1,2,3,4. \tag{8}$$

При моделировании гальванодинамического режима с использованием уравнения Пуассона для потенциала одна из продольных границ системы, параллельных поверхности мембраны, предполагается эквипотенциальной (задается некоторое постоянное значение скачка потенциала, например ноль), а на другой границе задается граничное условие, связывающее производную потенциала и плотность тока. Зададим нулевой потенциал на границе $x = H$:

$$\varphi(H,y,t) = 0. \tag{9}$$

Гальванодинамическое граничное условие на границе $x = 0$ выведем на основе следующего соотношения для плотности полного тока [30, 31]:

$$\vec{i}_{tot} = F\sum_{n=1}^{4} z_n\vec{j}_n - \varepsilon_0\varepsilon_r\frac{\partial(\nabla\varphi)}{\partial t}, \tag{10}$$

где первое слагаемое в правой части является током проводимости, а второе — током смещения.

Пусть граница рассматриваемого слоя раствора электролита с объемом ($x = 0$) достаточно удалена от поверхности мембраны, у которой формируется ОПЗ и развивается ЭК при протекании тока. Тогда на этой границе плотность тока смещения пренебрежимо мала, а также можно принять равномерное распределение нормальной составляющей плотности тока, т. е. $i_x(0,y,t) = i$, где i — плотность задаваемого тока.

С учетом данных упрощений из уравнения (10) можно записать следующее граничное условие при $x = 0$:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}(0,y,t) = -\frac{RT}{F^2}\Big(\frac{i + \sum_{n=1}^{4} F z_n D_n \frac{\partial c_n}{\partial x}}{\sum_{n=1}^{4} z_n^2 D_n C_n}\Big)(0,y,t). \tag{11}$$

На границах $y = 0$ и $y = L$ для потенциала устанавливается «мягкое» граничное условие

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,0,t) = 0, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,L,t) = 0. \tag{12}$$

Начальные условия соответствуют предположению, что концентрации ионов соли равны начальной концентрации раствора электролита во всей рассматриваемой области (кроме границы $x = H$); концентрации ионов водорода и гидроксила равны 10^{-4} моль/м^3, что соответствует нейтральному раствору:

$$\begin{aligned} &c_1(x,y,0) = c_2(x,y,0) = c_0, \\ &c_3(x,y,0) = c_4(x,y,0) = \sqrt{K_w}, \\ &\varphi(x,y,0) = 0, \quad 0 \leqslant x < H. \end{aligned} \tag{13}$$

Численное решение краевой задачи (1)–(9), (11)–(13) найдено методом конечных элементов с использованием пакета `Comsol Multiphysics` [28]. Уравнения для концентрации ионов (2) и уравнение Пуассона (3) построены на основе модуля общей формы уравнения в частных производных `General Form PDE`; уравнения Навье—Стокса и неразрывности (4) реализованы с помощью модуля ламинарного течения `Laminar Flow` [28]. Дискретизация по пространственным координатам полей концентрации и потенциала использует квадратичные интерполяционные функции Лагранжа; в модуле ламинарного течения используются элементы второго порядка для составляющих скорости и линейные элементы для поля давления [32]. Вычисления по времени реализуются с использованием сегрегированного узла с неявным методом выбора временного шага BDF (формула обратного дифференцирования) [32]. Каждая отдельная итерация включает выполнение двух отдельных шагов: первый шаг — расчет концентраций ионов и потенциала; на втором этапе рассчитываются скорость и давление. Шаг по времени определяется так, чтобы выполнялось требование для относительной погрешности (устанавливается 10^{-3}). Кроме того, при решении краевых задач моделей устанавливалось ограничение на максимальный шаг по времени, чтобы погрешность расчета плотности тока на границах составляла менее 1 %. Все расчеты проводились с использованием процессора `Intel(R) Core(TM) i9-10900K` (10 ядер 3.70 ГГц), 64 ГБ оперативной памяти.

Влияние РДРВ на характеристики массопереноса зависит от соотношения концентрации ионов соли и продуктов диссоциации, а следовательно, и от исходной концентрации раствора электролита. При описании процессов массопереноса в мембранных системах плотность тока рассматривается относительно предельного значения, которое прямо пропорционально исходной концентрации электролита c_0 [33]. Поэтому для оценки влияния РДРВ на массоперенос выполнены расчеты при различных значениях концентрации c_0 для следующих значений плотности тока:

$$\begin{array}{ll} i = 10\ \text{А/м}^2 & \text{для } c_0 = 10\ \text{моль/м}^3; \\ i = 1\ \text{А/м}^2 & \text{для } c_0 = 1\ \text{моль/м}^3; \\ i = 0.1\ \text{А/м}^2 & \text{для } c_0 = 0.1\ \text{моль/м}^3. \end{array}$$

Рассматривается раствор электролита $CuSO_4$ при температуре $T = 298$ K плотностью $\rho_0 = 1002$ кг/м^3 и вязкостью $\nu = 0.89 \cdot 10^{-6}$ м^2/с; коэффициенты диффузии ионов задаются значениями $D_1 = 0.72 \cdot 10^{-9}$ м^2/с, $D_2 = 1.065 \cdot 10^{-9}$ м^2/с, $D_3 = 9.34 \cdot 10^{-9}$ м^2/с, $D_4 = 5.23 \cdot 10^{-9}$ м^2/с; числа переноса катионов в катионообменной мембране и растворе имеют значения $T_{1C} = 1$ и $t_1 = 0.403$ соответственно; зарядовые числа ионов следующие: $z_1 = 1$, $z_2 = -1$, $z_3 = 1$, $z_4 = -1$. Толщина и длина рассматриваемого слоя раствора электролита $H = 10^{-3}$ м и $L = 10^{-3}$ м соответственно.

Указанные параметры системы соответствуют экспериментальному исследованию, выполненному в работе [34], с той разницей, что длина рассматриваемой системы выбрана меньшей. Это позволило уменьшить вычислительную трудоемкость задачи без значительного искажения хронопотенциограммы, так как вынужденное течение раствора отсутствует и обессоливание раствора не зависит от продольной координаты. Для упрощения численного решения отношение концентрации катионов при $x = H$ к c_0 (используемое в граничном условии (7)) было принято равным $N_c = 1$. Это значение меньше, чем в реальных системах [35]; однако в работе [36] показано, что значение N_c существенно не влияет на решение задачи в расширенной ОПЗ.

Большие градиенты концентраций ионов и потенциала электрического поля вблизи границы раздела раствор/мембрана обуславливают значительную вычислительную сложность рассматриваемой задачи. Поэтому для упрощения численного решения задачи была построена неоднородная расчетная сетка, в которой 33 пограничных слоя с коэффициентом растяжения 1.16 и толщиной первого слоя 0.001 мкм размещены у правой границы. В остальной части рассматриваемой области расчетная сетка построена с использованием треугольной сетки (опция `Free Triangular`) [32]. Полученная сетка состоит из 163 911 элементов области и 2 811 граничных элементов. Структура расчетной сетки определена на основе следующего алгоритма:

- проводятся расчеты хронопотенциограммы $d\varphi_{k_1}(t)$ при некоторой плотности тока на интервале времени от 0 до установления квазистационарного состояния $\tilde{t}$ для расчетной сетки, состоящей из k_1 элементов;
- затем сетка уточняется (и содержит теперь k_2 элементов), проводятся расчеты значения $d\varphi_{k_2}(t)$;
- затем определяется максимальная относительная погрешность расчета скачка потенциала по формуле $\gamma_1 = \max\limits_{t\in[0,\tilde{t}]}(|d\varphi_{k_1} - d\varphi_{k_2}|/d\varphi_{k_2}) \cdot 100\%$.

Приведенные шаги повторяются до тех пор, пока не выполнено условие $\gamma_{k_i} \leqslant 5\,\%$.

3. Результаты. Чтобы оценить влияние ЭК и РДРВ на массоперенос, для каждого значения концентрации электролита выполнены следующие варианты расчетов:

- без учета ЭК и РДРВ;
- с учетом ЭК и без учета РДРВ;
- без учета ЭК с учетом РДРВ;
- с учетом ЭК и РДРВ.

На рис. 2, *а* показаны хронопотенциограммы, рассчитанные для указанных вариантов учета механизмов сверхпредельного тока, а также хронопотенциограмма, полученная экспериментально для катионообменной мембраны `Neosepta CMX` и раствора электролита $CuSO_4$ концентрацией 10 моль/м^3 при плотности тока 10 А/м^2 и площади мембраны 3×4 мм^2 [34].

На хронопотенциограмме, рассчитанной для $c_0 = 10$ моль/м^3 с учетом ЭК и РДРВ, можно выделить участок начального быстрого омического роста скачка потенциала (при $t < t' = 10^{-8}$ с). На рис. 2 этот участок отброшен и используется приведенный скачок потенциала $d'_\varphi(t) = d_\varphi(t) - d_\varphi(t')$, так как это исключает влияние омического сопротивления, которое является функцией расстояния между измерительными электродами, толщины мембраны и некоторых других параметров, которые трудно найти, тогда как они не имеют значения для поведения мембраны и не учитываются в модели.

Далее следует участок монотонного роста скачка потенциала, вызванный электродиффузионным обессоливанием раствора. Скорость роста скачка потенциала быстро возрастает после уменьшения концентрации на границе раздела раствор/мембрана. В момент времени $\tau \approx 71.15$ с касательная к профилям концентрации в электронейтральной области вблизи поверхности мембраны проходит через 0 при $x = H$.

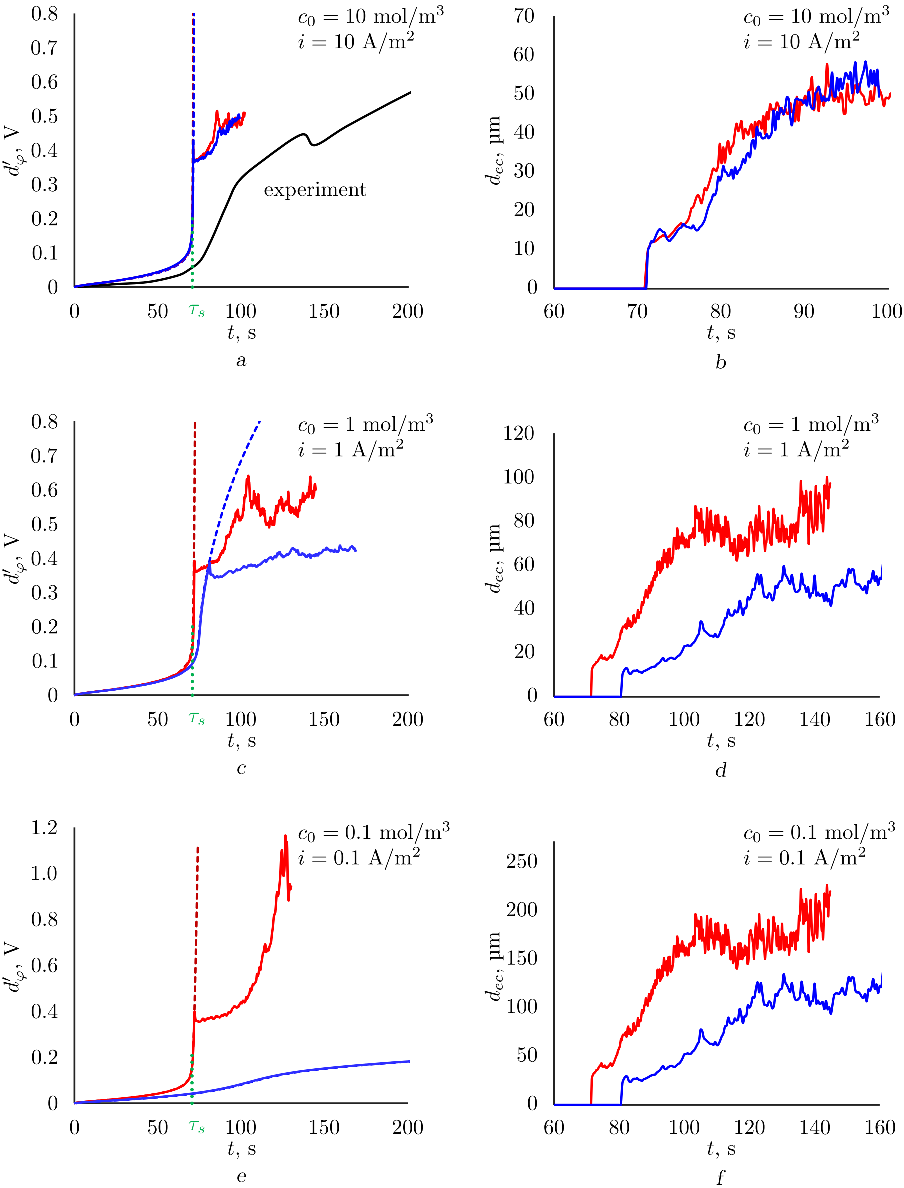


Рис. 2. Хронопотенциограммы $d'_\varphi(t)$ и средние значения толщины электроконвективного вихревого слоя $d_{ec}(t)$, рассчитанные для концентрации $c_0 = 10$ моль/м^3, при плотности тока $i = 10$ А/м^2 (*a*), (*b*); $c_0 = 1$ моль/м^3, $i = 1$ А/м^2 (*c*), (*d*); $c_0 = 0.1$ моль/м^3, $i = 0.1$ А/м^2 (*e*), (*f*). Расчеты с учетом (сплошные линии) и без учета (пунктирные линии) ЭК, с учетом (синие лини) и без учета (красные линии) РДРВ. На рис. (*a*) также приведена экспериментальная хронопотенциограмма для катионообменной мембраны `Neosepta CMX` в растворе $CuSO_4$ 10 моль/м^3 (черная линия) при $i = 10$ А/м^2, полученная в работе [34]

[Figure 2. Chronopotentiograms $d'_\varphi(t)$ and average values of the thickness of the electroconvective vortex layer $d_{ec}(t)$, calculated for concentration $c_0 = 10$ mol/m^3 at current density $i = 10$ A/m^2 (*a*), (*b*); $c_0 = 1$ mol/m^3, $i = 1$ A/m^2 (*c*), (*d*); $c_0 = 0.1$ mol/m^3, $i = 0.1$ A/m^2 (*e*), (*f*). Calculations with (solid lines) and without (dashed lines) considering EC, and with (blue lines) and without (red lines) considering DRRW. Fig. (*a*) also shows an experimental chronopotentiogram for the `Neosepta CMX` cation exchange membrane in the 10 mol/m^3 $CuSO_4$ (black line) at $i = 10$ A/m^2 from reference [34]]

После этого момента начинается формирование расширенных ОПЗ, а на хронопотенциограмме отмечается быстрое увеличение скачка потенциала. При $t \approx 71.5$ с развивается электроконвективное течение, что вызывает снижение скачка потенциала, за которым следует его рост с меньшей скоростью; рост скачка потенциала сопровождается увеличением интенсивности ЭК.

С течением времени скачок потенциала начинает колебаться относительно некоторого значения, система переходит в квазистационарное состояние.

В экспериментальных измерениях хронопотенциограмм ионообменных мембран [34] момент времени, предшествующий быстрому росту скачка потенциала, определяется как переходное время. Для аналитической оценки времени перехода используется уравнение

$$\tau_S = \frac{\pi D}{4} \frac{c_0 F z_1}{T_{1C} - t_1} \frac{1}{i^2}. \tag{14}$$

Уравнение (14) было получено Сандом (Henry J. S. Sand) на основе теоретического анализа переноса ионов в бесконечном диффузионном слое, в котором выполняется условие локальной электронейтральности [37]. Согласно теории Санда, переходное время определяется по моменту, когда концентрация противоионов у поверхности мембраны уменьшается до нуля, а скачок потенциала быстро возрастает. Для рассматриваемых параметров системы согласно соотношению (14) переходное время Санда $\tau_S \approx 70.55$ с. Переходное время, рассчитанное по предлагаемой модели, определено по моменту времени, когда касательная к концентрационным профилям (в произвольном нормальном сечении рассматриваемого слоя, например, в сечении при $y = 0.5L$) в электронейтральной области вблизи поверхности мембраны проходит через 0 при $x = H$.

Для всех рассматриваемых значений концентрации раствора электролита (см. таблицу) значения переходного времени, рассчитанные без учета ЭК и РДРВ, совпадают друг с другом, а также с аналитической оценкой Санда (отличие составляет менее 0.03 %). Для концентрации раствора $c_0 = 10$ моль/м^3 ЭК и РДРВ слабо влияют на переходное время: для всех четырех типов расчетов различие значений переходного времени не превышает 1 %. Для концентрации раствора $c_0 = 1$ моль/м^3 ЭК увеличивает переходное время (0.2 с, то есть 0.3 %), а РДРВ увеличивает на 3.63 с (≈ 5 %). Для концентрации раствора $c_0 = 0.1$ моль/м^3 в расчетах с учетом РДРВ система стабилизируется со временем без достижения предельного состояния.

Структура рассчитанных хронопотенциограмм качественно совпадает со структурой экспериментальной кривой [34], в которой выделяются следую-

Переходное время, рассчитанное с использованием предлагаемой модели
[Transition time calculated using the proposed model]

Calculations for cases	$c_0 = 10$ mol/m^3	$c_0 = 1$ mol/m^3	$c_0 = 0.1$ mol/m^3
Without EC and without DRRW	70.53 s	70.53 s	70.53 s
With EC and without DRRW	70.60 s	70.72 s	70.53 s
Without EC and with DRRW	70.85 s	74.15 s	—
With EC and with DRRW	71.15 s	74.35 s	—

щие характерные участки (рис. 2): медленный рост скачка потенциала, предельное состояние быстрого роста скачка потенциала, переходная стадия развития ЭК и квазистационарное состояние.

Экспериментальное переходное время составляет $\tau_{exp} \approx 77$ с, что на 8.4 % больше значения, рассчитанного с использованием модели. Подобное поведение экспериментальной и расчетной кривых наблюдается при $t < \tau$. Переходная стадия развития ЭК отличается более существенно.

На рассчитанной хронопотенциограмме в момент времени τ наблюдается резкое снижение скачка потенциала, связанное с развитием ЭК. В экспериментальной ХП скорость роста скачка потенциала плавно уменьшается из-за появления дополнительных механизмов, основным из которых является ЭК [34]. По-видимому, это различие связано с геометрической и электрической неоднородностью поверхности, что влияет на развитие ЭК, в то время как в расчете предполагается, что поверхность мембраны является совершенно однородной.

Различие хронопотенциограмм, рассчитанных с учетом и без учета РДРВ (рис. 2), можно объяснить с использованием временных зависимостей отношения концентраций продуктов диссоциации и ионов соли. На рис. 3 приведены зависимости от времени отношений средних значений концентрации ионов водорода c_{3av} и гидроксила c_{4av} к соответствующим значениям ионов соли c_{1av} и c_{2av}, которые рассчитаны с учетом ЭК и РДРВ по формуле

$$c_{nav}(t) = \frac{1}{HL} \int_0^H \int_0^L c_n(x, y, t) dx dy, \quad n = 1, 2, 3, 4.$$

Из рис. 3 видно, что для всех рассматриваемых значений концентрации электролита c_0 с течением времени отношение концентраций ионов водорода и катиона соли c_{3av}/c_{1av} убывает (и не превышает значения 0.001), а отношение концентраций ионов гидроксила и аниона соли c_{4av}/c_{2av} возрастает до значений, способных оказывать значимое влияние на процесс массопереноса. При этом меньшей концентрации c_0 соответствует большее значение c_{4av}/c_{2av}, например, при $t = 100$ с для $c_0 = 10$ моль/м^3 значение $c_{4av}/c_{2av} \approx 0.004$; для $c_0 = 1$ моль/м^3 — $c_{4av}/c_{2av} \approx 0.04$; для $c_0 = 0.1$ моль/м^3 — $c_{4av}/c_{2av} \approx 0.01$.

Таким образом, при протекании тока в слое раствора электролита у поверхности катионообменной мембраны влияние РДРВ проявляется возрастанием концентрации ионов гидроксила.

Скорость роста отношения c_{4av}/c_{2av} в расчете с учетом ЭК и РДРВ для $c_0 = 10$ моль/м^3 увеличивается после достижения переходного времени, при этом максимальное значение c_{4av}/c_{2av} в рассматриваемом временном диапазоне не превышает 0.004 (рис. 3, c). Поэтому при $t \leqslant \tau$ отличие значений скачка потенциала в системе не превышает 3 %, а при $t > \tau$ отличие мгновенных значений скачка потенциала может достигать 16 %, но диапазон колебаний скачка потенциала совпадает.

Для исследования влияния РДРВ на ЭК в расчетах с учетом и без учета РДРВ рассчитана усредненная по длине канала толщина электроконвективного вихревого слоя d_{ec} (рис. $2, b, d, f$). Граница электроконвективного слоя определялась по точкам, в которых разница среднеквадратического значения скорости и ее максимального значения $V_{\max}$ (на рассматриваемом временном отрезке $V_{\max} \approx 0.0044$ м/с) превышает 1 % от $V_{\max}$. Так как диапазон колеба-

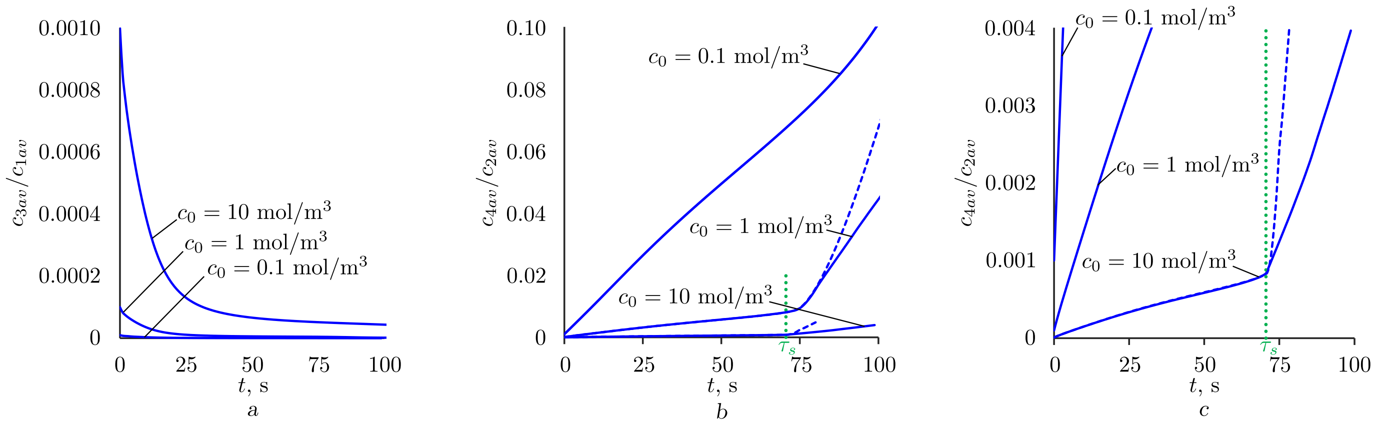


Рис. 3. Отношения концентраций ионов водорода и катиона соли c_{3av}/c_{1av} (a) и концентраций ионов гидроксила и аниона соли c_{4av}/c_{2av} (b). Рис. (c) — увеличение фрагмента рис. (b). Результаты расчета с учетом (сплошные линии) и без учета ЭК (пунктирные линии) и с учетом РДРВ для $c_0 = 10$ моль/м^3, $i = 10$ А/м^2, $c_0 = 1$ моль/м^3, $i = 1$ А/м^2, $c_0 = 0.1$ моль/м^3, $i = 0.1$ А/м^2

[Figure 3. The relationship between the concentrations of hydrogen ions and the cation of the salt c_{3av}/c_{1av} (a) and the concentrations of hydroxyl ions and the anion of the salt c_{4av}/c_{2av} (b). Fig. (c) shows an enlarged fragment of Fig. (b). The calculation results are presented with (solid lines) and without (dashed lines) consideration of EC, and with consideration of RDRW DRRW for $c_0 = 10$ mol/m^3, $i = 10$ A/m^2, $c_0 = 1$ mol/m^3, $i = 1$ A/m^2, $c_0 = 0.1$ mol/m^3, $i = 0.1$ A/m^2]

ний скачка потенциала при $t > \tau$ в расчетах с учетом и без учета РДРВ для $c_0 = 10$ моль/м^3 приблизительно совпадает, колебания d_{ec} также находится приблизительно в одном диапазоне значений (рис. 2, b).

В расчете для концентрации $c_0 = 1$ моль/м^3 значение отношения концентраций c_{4av}/c_{2av} на порядок выше, чем для $c_0 = 1$ моль/м^3 (рис. 2, b). Образование дополнительных носителей заряда в результате диссоциации молекул воды в таком количестве снижает скачок потенциала в слое раствора электролита (рис. 2, c), что уменьшает толщину электроконвективного вихревого слоя (рис. 2, d).

Электроконвективные вихри, в области у поверхности мембраны перемешивая обедненный раствор электролита с раствором из объема (рис. 4), в свою очередь, приводят к уменьшению скачка потенциала (рис. 2, a, c, e), в результате чего уменьшается концентрация ионов гидроксила (рис. 3, b, c). Таким образом, развитие ЭК в мембранной системе снижает интенсивность РДРВ.

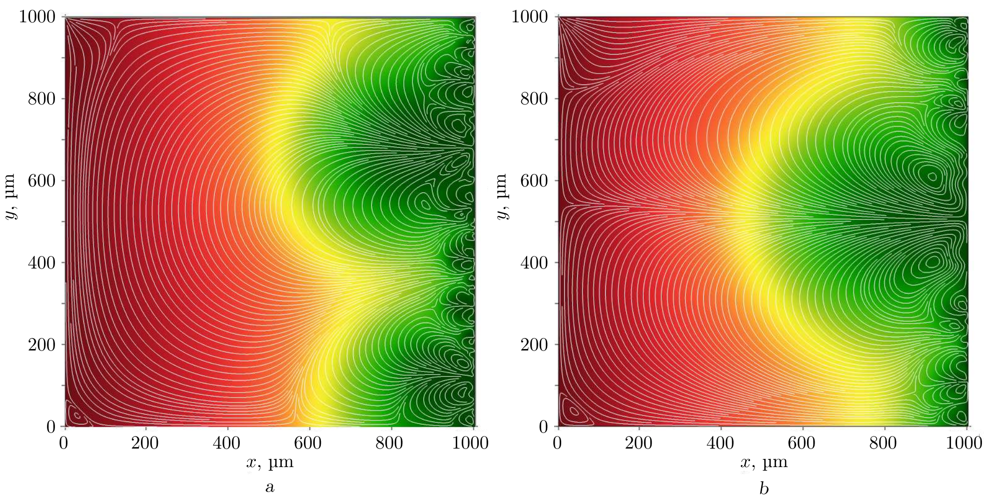


Рис. 4. Распределение концентрации ионов Na^+ (величина показана цветом) и течения раствора (белые линии) в момент времени $t = 140$ с, рассчитанные без учета (a) и с учетом РДРВ (b) для $c_0 = 1$ моль/м^3, $i = 1$ А/м^2

[Figure 3. The distribution of Na^+ ion concentrations (showed in color) and the flow of the solution (white lines) at the time $t = 140$ s, calculated without considering (a) and with consideration of (b) for $c_0 = 1$ mol/m^3, $i = 1$ A/m^2]

4. Заключение. Разработана двумерная математическая модель переноса ионов в слое раствора бинарного электролита у поверхности ионообменной мембраны при сверхпредельных постоянных токах с учетом развития ЭК и РДРВ. Модель построена на основе системы связанных уравнений Нернста—Планка—Пуассона—Навье—Стокса и нового гальванодинамического граничного условия для потенциала. Переходное время, рассчитанное с использованием предлагаемой модели, совпадает с высокой точностью (отличие менее 0.03 %) с аналитической оценкой Санда для этой величины. С использованием разработанной модели впервые рассчитаны хронопотенциограммы мембранной системы с учетом влияния электроконвекции и реакции диссоциации/рекомбинации молекул воды. Структура рассчитанных хронопотенциограмм качественно совпадает со структурой экспериментальной кривой.

Показано, что отношение концентрации продуктов диссоциации воды к концентрации ионов соли определяет различное соотношение эффектов электроконвекции и диссоциации.

Рассмотрены следующие варианты соотношения эффектов электроконвекции и диссоциации молекул воды:

1) значимое влияние на массоперенос оказывает электроконвекция, влияние реакции диссоциации воды — незначительные;
2) электроконвекция и диссоциация оказывают значимое влияние на процессы переноса: образование дополнительных носителей заряда в результате диссоциации молекул воды снижает скачок потенциала в слое электролита, что уменьшает интенсивность электроконвекции; развитие электроконвекции, в свою очередь, замедляет процесс диссоциации молекул воды;
3) продукты интенсивной диссоциации молекул воды препятствует развитию электроконвекции.

Конкурирующие интересы. Конкурирующих интересов не имею.

Авторский вклад и ответственность. Я несу полную ответственность за предоставление окончательной версии рукописи в печать. Окончательная версия рукописи мною одобрена.

Финансирование. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23–29–00534, `https://rscf.ru/project/23-29-00534/`.

Благодарность. Автор благодарен проф. М. Х. Уртенову за внимание к данной работе и полезные дискуссии.

Библиографический список

1. Ran J., Wu L., He Y., et al. Ion exchange membranes: New developments and applications // *J. Membr. Sci.*, 2017. vol. 522. pp. 267–291. DOI: https://doi.org/10.1016/j.memsci.2016.09.033.
2. Slouka Z., Senapati S., Chang H. C. Microfluidic systems with ion-selective membranes // *Annu. Rev. Anal. Chem.*, 2014. vol. 7. pp. 317–335. DOI: https://doi.org/10.1146/annurev-anchem-071213-020155.
3. Gurreri L., Tamburini A., Cipollina A., Micale G. Electrodialysis applications in wastewater treatment for environmental protection and resources recovery: A systematic review on progress and perspectives // *Membranes*, 2020. vol. 10, no. 7, 146. DOI: https://doi.org/10.3390/membranes10070146.
4. Рубинштейн И., Зальцман Б., Прец И., Линдер К. Экспериментальная проверка электроосмотического механизма формирования “запредельного” тока в системе с катионообменной электродиализной мембраной // *Электрохимия*, 2002. Т. 38, № 8. С. 956–967. EDN: RSNSYP.
5. Письменская Н. Д., Никоненко В. В., Белова Е. И. [и др.] Сопряженная конвекция раствора у поверхности ионообменных мембран в режимах интенсивного тока // *Электрохимия*, 2007. Т. 43, № 3. С. 325–345. EDN: IACEHN.
6. Никоненко В. В., Мареев С. А., Письменская Н. Д. [и др.] Эффект электроконвекции и его использование для интенсификации массопереноса в электродиализе (обзор) // *Электрохимия*, 2014. Т. 53, № 10. С. 1266–1289. EDN: ZNAASD DOI: https://doi.org/10.7868/S0424857017100061.
7. Mani A., Wang K. M. Electroconvection near electrochemical interfaces: Experiments, modeling, and computation // *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 2020. vol. 52. pp. 509–529. DOI: https://doi.org/10.1146/annurev-fluid-010719-060358.

8. Simons R. Strong electric field effects on proton transfer between membranebound amines and water // *Nature*, 1979. vol. 280. pp. 824–826. DOI: https://doi.org/10.1038/280824a0.
9. Frilette V. J. Electrogravitational transport at synthetic ion exchange membrane surfaces // *J. Phys. Chem.*, 1957. vol. 61, no. 2. pp. 168–174. DOI: https://doi.org/10.1021/J150548A010.
10. Заболоцкий В. И., Никоненко В. В., Корженко Н. М. [и др.] Влияние гетеролитической диссоциации воды на массоперенос ионов соли в электромембранной системе при нарушении электронейтральности в области диффузионного слоя // *Электрохимия*, 2002. Т. 38, № 8. С. 911–920. EDN: GIGGKH.
11. Узденова А. М. Математическое моделирование нестационарного переноса ионов в электро-мембранных системах с учетом реакции диссоциации (рекомбинации) молекул воды в гальванодинамическом режиме // *Перспективы науки*, 2023. Т. 11, № 170. С. 104–112. EDN: USIXRO.
12. Mishchuk N. A. Concentration polarization of interface and non-linear electrokinetic phenomena // *Adv. Colloid Interface Sci.*, 2010. vol. 160, no. 1–2. pp. 16–39. EDN: MYAMRJ. DOI: https://doi.org/10.1016/j.cis.2010.07.001.
13. Porozhnyy M. V., Shkirskaya S. A., Butylskii D. Y., et al. Physicochemical and electrochemical characterization of nafion-type membranes with embedded silica nanoparticles: effect of functionalization // *Electrochim. Acta*, 2021. vol. 370, 137689. EDN: INLSZS. DOI: https://doi.org/10.1016/j.electacta.2020.137689.
14. Grossman G. Water dissociation effects in ion transport through composite membrane // *J. Phys. Chem.*, 1976. vol. 80, no. 14. pp. 1616–1625. DOI: https://doi.org/10.1021/j100555a020.
15. Rubinstein I. A diffusional model of “water splitting” in electrodialysis // *J. Phys. Chem.*, 1977. vol. 81, no. 14. pp. 1431–1436. DOI: https://doi.org/10.1021/j100529a018.
16. Rubinstein I., Shtilman L. Voltage against current curves of cation exchange membranes // *J. Chem. Soc., Faraday Trans. 2*, 1979. vol. 75. pp. 231–246. DOI: https://doi.org/10.1039/F29797500231.
17. Коваленко А. В., Уртенов М. Х., Сеидова Н. М., Письменский А. В. Влияние реакции диссоциации/рекомбинации молекул воды на перенос 1:1 электролита в мембранных системах в диффузионном слое. Часть 1. Математическая модель // *Научный журнал КубГАУ*, 2016. Т. 121, 122. EDN: WWSKMP. DOI: https://doi.org/10.21515/1990-4665-121-122.
18. Коваленко А. В., Уртенов М. Х., Сеидова Н. М., Письменский А. В. Влияние реакции диссоциации/рекомбинации молекул воды на перенос 1:1 электролита в мембранных системах в диффузионном слое. Часть 2. Асимптотический анализ // *Научный журнал КубГАУ*, 2016. № 122, 017. EDN: XBDYXZ. DOI: https://doi.org/10.21515/1990-4665-122-017.
19. Уртенов М. Х., Письменский А. В., Никоненко В. В., Коваленко А. В. Математическое моделирование переноса ионов и диссоциации воды у границы ионообменная мембрана/раствор в интенсивных токовых режимах // *Мембр. и мембр. техн.*, 2018. Т. 8, № 1. С. 24–33. EDN: YNIJEE. DOI: https://doi.org/10.1134/S2218117218010054.
20. Urtenov M., Gudza V., Shkorkina I., Chubyr N. Theoretical analysis of the stationary transport of 1:1 salt ions in a cross-section of a desalination channel, taking into account the non-catalytic dissociation/recombination reaction of water molecules // *Membranes*, 2020. vol. 10, no. 11, 342. DOI: https://doi.org/10.3390/membranes10110342.
21. Kovalenko A. V., Nikonenko V. V., Chubyr N. O., Urtenov M. Kh. Mathematical modeling of electrodialysis of a dilute solution with accounting for water dissociation-recombination reactions // *Desalination*, 2023. vol. 550, 116398. DOI: https://doi.org/10.1016/j.desal.2023.116398.
22. Коваленко А. В., Уртенов М. Х., Чубырь Н. О. [и др.] Математическое моделирование влияния основных температурных эффектов на стационарный перенос ионов соли в диффузионном слое // *Экол. вестн. научн. центров ЧЭС*, 2018. Т. 15, № 3. С. 78–86. EDN: YABSYX. DOI: https://doi.org/10.31429/vestnik-15-3-78-86.

23. Коваленко А. В., Уртенов М. Х., Чубырь Н. О. [и др.] Влияние температурных эффектов, связанных с реакцией диссоциации/рекомбинации молекул воды и джоулевым нагревом раствора на стационарный перенос ионов соли в диффузионном слое // *Экол. вестн. научн. центров ЧЭС*, 2018. Т. 15, № 4. С. 67–84. EDN: YRMLET. DOI: https://doi.org/10.31429/vestnik-15-4-67-84.
24. Nikonenko V., Urtenov M., Mareev S., Pourcelly G. Mathematical modeling of the effect of water splitting on ion transfer in the depleted diffusion layer near an ion-exchange membrane // *Membranes*, 2020. vol. 10, no. 2, 22. DOI: https://doi.org/10.3390/membranes10020022.
25. Коваленко А. В. Влияние диссоциации воды на развитие электроконвекции в мембранных системах // *Конденсированные среды и межфазные границы*, 2014. Т. 16, № 3. С. 288–293. EDN: SQBSBF.
26. Kovalenko A., Urtenov M., Chekanov V. Kandaurova N. Theoretical analysis of the influence of spacers on salt ion transport in electromembrane systems considering the main coupled effects // *Membranes*, 2024. vol. 14, no. 1, 20. DOI: https://doi.org/10.3390/membranes14010020.
27. Newman J., Thomas-Alyea K. E. *Electrochemical Systems.* NJ, USA: John Wiley and Sons, 2004. xx+647 pp.
28. Uzdenova A. M. 2D mathematical modelling of overlimiting transfer enhanced by electroconvection in flow-through electrodialysis membrane cells in galvanodynamic mode // *Membranes*, 2019. vol. 9, no. 3, 39. DOI: https://doi.org/10.3390/membranes9030039.
29. Uzdenova A. M. Time-dependent two-dimensional model of overlimiting mass transfer in electromembrane systems based on the Nernst–Planck, displacement current and Navier–Stokes equations // *Computation*, 2023. vol. 11, no. 10, 205. DOI: https://doi.org/10.3390/computation11100205.
30. Cohen H., Cooley J. W. The numerical solution of the time-dependent Nernst–Planck equations // *Biophys. J.*, 1965. vol. 5, no. 2. pp. 145–162. DOI: https://doi.org/10.1016/s0006-3495(65)86707-8.
31. Brumleve T. R., Buck R. P. Numerical solution of the Nernst–Planck and Poisson equation system with applications to membrane electrochemistry and solid state physics // *J. Electroanal. Chem.*, 1978. vol. 90, no. 1. pp. 1–31. DOI: https://doi.org/10.1016/s0022-0728(78)80137-5.
32. *COMSOL Multiphysics Reference Manual.* https://doc.comsol.com/6.1/doc/com.comsol.help.comsol/COMSOL_ReferenceManual.pdf.
33. Nikonenko V. V., Vasil'eva V. I., Akberova E. M., et al. Competition between diffusion and electroconvection at an ion-selective surface in intensive current regimes // *Adv. Colloid Interface Sci.*, 2016. vol. 235. pp. 233–246. DOI: https://doi.org/10.1016/j.cis.2016.06.014.
34. de Valença J. C., Wagterveld R. M., Lammertink R. G. H., Tsai P. A. Dynamics of microvortices induced by ion concentration polarization // *Phys. Rev. E*, 2015. vol. 92, no. 3. pp. 031003. DOI: https://doi.org/10.1103/physreve.92.031003.
35. Filippov A. N., Akberova E. M., Vasil'eva V. I. Study of the thermochemical effect on the transport and structural characteristics of heterogeneous ion-exchange membranes by combining the cell model and the fine-porous membrane model // *Polymers*, 2023. vol. 15, no. 16, 3390. DOI: https://doi.org/10.3390/polym15163390.
36. Urtenov M. A. K., Kirillova E. V., Seidova N. M., Nikonenko V. V. Decoupling of the Nernst–Planck and Poisson equations. Application to a membrane system at overlimiting currents // *J. Phys. Chem. B*, 2007. vol. 111, no. 51. pp. 14208–14222. DOI: https://doi.org/10.1021/jp073103d.
37. Krol J. J., Wessling M., Strathmann H. Chronopotentiometry and overlimiting ion transport through monopolar ion exchange membranes // *J. Membr. Sci.*, 1999. vol. 162, no. 1–2. pp. 155–164. DOI: https://doi.org/10.1016/S0376-7388(99)00134-9.

Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2024, vol. 28, no. 2, pp. 324–344
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu2086

MSC: 80A30, 35Q60, 78A57

Mathematical modeling of mass transfer in electromembrane systems in galvanodynamic mode, taking into account electroconvection and the dissociation/recombination reaction of water molecules

A. M. Uzdenova

Umar Aliev Karachai-Cherkess State University,
29, Lenina st., Karachayevsk, 369202, Russian Federation.

Abstract

Mass transfer in electrodialysis systems during intense current modes is accompanied by the emergence of additional transfer mechanisms that significantly affect their operational efficiency. According to modern concepts, for dilute electrolyte solutions, mechanisms such as electroconvection and the dissociation/recombination reactions of water molecules are particularly important. These processes have opposing effects on the effectiveness of electrodialysis technologies.

Mathematical models that take these mechanisms into account are actively used in membrane system research; however, they typically describe only the potentiostatic regime, in which a potential jump is established in the system. The interpretation of a vast database of experimental data for the galvanodynamic regime (at fixed current density) also requires theoretical analysis tools.

The aim of this work is to develop a mathematical model of mass transfer in the electrolyte solution layer at an ion-exchange membrane, considering electroconvection and water dissociation in the galvanodynamic regime. The model is based on a system of coupled Nernst–Planck–Poisson–Navier–Stokes equations, supplemented by a new galvanodynamic boundary condition for the potential.

Using the developed model, chronopotentiograms of the membrane system were calculated for the first time, taking into account the influence of both electroconvection and the dissociation/recombination reactions of water molecules. The results showed that the ratio of the concentration of water dissociation products to the concentration of salt ions determines the balance of the effects of electroconvection and dissociation.

Mathematical Modeling, Numerical Methods and Software Complexes
Research Article

Please cite this article in press as:
Uzdenova A. M. Mathematical modeling of mass transfer in electromembrane systems in galvanodynamic mode, taking into account electroconvection and the dissociation/recombination reaction of water molecules, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2024, vol. 28, no. 2, pp. 324–344. EDN: LMDBIW. DOI: 10.14498/vsgtu2086 (In Russian).

Authors' Details:
Aminat M. Uzdenova https://orcid.org/0000-0001-5951-9876
Cand. Phys. & Math. Sci.; Associate Professor; Dept. of Informatics and Computational Mathematics; e-mail: uzd_am@mail.ru

The following options for balancing the effects of electroconvection and dissociation of water molecules are considered:

1) electroconvection significantly influences mass transfer, while the influence of water dissociation is minimal;
2) electroconvection and dissociation substantially affect transport processes: the formation of additional charge carriers from the dissociation of water molecules reduces the potential jump in the electrolyte layer, which decreases the intensity of electroconvection, while the development of electroconvection, in turn, slows down the dissociation process;
3) the products of intense water dissociation slow down the development of electroconvection.

Keywords: electromembrane system, ion transport, electroconvection, dissociation/recombination reaction of water molecules, galvanodynamic mode, Nernst–Planck–Poisson–Navier–Stokes equations.

Received: 3rd March, 2024 / Revised: 29th April, 2024 /
Accepted: 4th June, 2024 / First online: 23rd September, 2024

Competing interests. I have no competing interests.

Author's Responsibilities. I take full responsibility for submitting the final manuscript in print. I approved the final version of the manuscript.

Funding. The study was funded by the Russian Science Foundation grant no. 23–29–00534, `https://rscf.ru/en/project/23-29-00534/`.

Acknowledgments. The author is grateful to Prof. M. Kh. Urtenov for his attention to this study and useful discussions.

References

1. Ran J., Wu L., He Y., et al. Ion exchange membranes: New developments and applications, *J. Membr. Sci.*, 2017, vol. 522, pp. 267–291. DOI: https://doi.org/10.1016/j.memsci.2016.09.033.
2. Slouka Z., Senapati S., Chang H. C. Microfluidic systems with ion-selective membranes, *Annu. Rev. Anal. Chem.*, 2014, vol. 7, pp. 317–335. DOI: https://doi.org/10.1146/annurev-anchem-071213-020155.
3. Gurreri L., Tamburini A., Cipollina A., Micale G. Electrodialysis applications in wastewater treatment for environmental protection and resources recovery: A systematic review on progress and perspectives, *Membranes*, 2020, vol. 10, no. 7, 146. DOI: https://doi.org/10.3390/membranes10070146.
4. Rubinshtein I., Zaltzman B., Pretz J., Linder C. Experimental verification of the electroosmotic mechanism of overlimiting conductance through a cation exchange electrodialysis membrane, *Russ. J. Electrochem.*, 2002, vol. 38, no. 8, pp. 853–863. EDN: VBRMLJ. DOI: https://doi.org/10.1023/A:1016861711744.
5. Pismenskaya N. D., Nikonenko V. V., Belova E. I., et al. Coupled convection of solution near the surface of ion-exchange membranes in intensive current regimes, *Russ. J. Electrochem.*, 2007, vol. 43, no. 3, pp. 307–327. EDN: LKOUSV. DOI: https://doi.org/10.1134/S102319350703010X.
6. Nikonenko V. V., Mareev S. A., Pis'menskaya N. D., et al. Effect of electroconvection and its use in intensifying the mass transfer in electrodialysis (Review), *Russ. J. Electrochem.*, 2017, vol. 53, no. 10, pp. 1122–1144. EDN: XNXZMK. DOI: https://doi.org/10.1134/S1023193517090099.
7. Mani A., Wang K. M. Electroconvection near electrochemical interfaces: Experiments, modeling, and computation, *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 2020, vol. 52, pp. 509–529. DOI: https://doi.org/10.1146/annurev-fluid-010719-060358.

8. Simons R. Strong electric field effects on proton transfer between membranebound amines and water, *Nature*, 1979, vol. 280, pp. 824–826. DOI: https://doi.org/10.1038/280824a0.
9. Frilette V. J. Electrogravitational transport at synthetic ion exchange membrane surfaces, *J. Phys. Chem.*, 1957, vol. 61, no. 2, pp. 168–174. DOI: https://doi.org/10.1021/J150548A010.
10. Zabolotskii V. I., Nikonenko V. V., Korzhenko N. M., et al. Mass transfer of salt ions in an electromembrane system with violated electroneutrality in the diffusion layer: The effect of a heterolytic dissociation of water, *Russ. J. Electrochem.*, 2002, vol. 38, no. 8, pp. 810–818. EDN: LHEZOD. DOI: https://doi.org/10.1023/A:1016849309018.
11. Uzdenova A. M. Mathematical modeling of non-stationary ion transport in electromembrane systems given the dissociation (recombination) reaction of water molecules in galvanodynamic mode, *Perspektivy Nauki*, 2023, vol. 11, no. 170, pp. 104–112 (In Russian). EDN: USIXRO.
12. Mishchuk N. A. Concentration polarization of interface and non-linear electrokinetic phenomena, *Adv. Colloid Interface Sci.*, 2010, vol. 160, no. 1–2, pp. 16–39. EDN: MYAMRJ. DOI: https://doi.org/10.1016/j.cis.2010.07.001.
13. Porozhnyy M. V., Shkirskaya S. A., Butylskii D. Y., et al. Physicochemical and electrochemical characterization of nafion-type membranes with embedded silica nanoparticles: effect of functionalization, *Electrochim. Acta*, 2021, vol. 370, 137689. EDN: INLSZS. DOI: https://doi.org/10.1016/j.electacta.2020.137689.
14. Grossman G. Water dissociation effects in ion transport through composite membrane, *J. Phys. Chem.*, 1976, vol. 80, no. 14, pp. 1616–1625. DOI: https://doi.org/10.1021/j100555a020.
15. Rubinstein I. A diffusional model of "water splitting" in electrodialysis, *J. Phys. Chem.*, 1977, vol. 81, no. 14, pp. 1431–1436. DOI: https://doi.org/10.1021/j100529a018.
16. Rubinstein I., Shtilman L. Voltage against current curves of cation exchange membranes, *J. Chem. Soc., Faraday Trans. 2*, 1979, vol. 75, pp. 231–246. DOI: https://doi.org/10.1039/F29797500231.
17. Kovalenko A. V., Urtenov M. Kh., Seidova N. M., Pismensky A. V. The influence of reaction of dissociation/recombination of molecules of water on transporting electrolyte 1:1 in the membrane systems in the diffusion layer. Part 1. Mathematical model, *Nauchnyi Zhurnal KubGAU*, 2016, no. 121, 122 (In Russian). EDN: WWSKMP. DOI: https://doi.org/10.21515/1990-4665-121-122.
18. Kovalenko A. V., Urtenov M. Kh., Seidova N. M., Pismensky A. V. The influence of reaction of dissociation/recombination of molecules of water on transporting electrolyte 1:1 in the membrane systems in the diffusion layer. Part 2. Asymptotic analysis, *Nauchnyi Zhurnal KubGAU*, 2016, № 122, 017 (In Russian). EDN: XBDYXZ. DOI: https://doi.org/10.21515/1990-4665-122-017.
19. Urtenov M. K., Pismensky A. V., Nikonenko V. V., Kovalenko A. V. Mathematical modeling of ion transport and water dissociation at the ion-exchange membrane/solution interface in intense current regimes, *Pet. Chem.*, 2018, vol. 58, no. 2, pp. 121–129. EDN: YSXUTS. DOI: https://doi.org/10.1134/S0965544118020056.
20. Urtenov M., Gudza V., Shkorkina I., Chubyr N. Theoretical analysis of the stationary transport of 1:1 salt ions in a cross-section of a desalination channel, taking into account the non-catalytic dissociation/recombination reaction of water molecules, *Membranes*, 2020, vol. 10, no. 11, 342. DOI: https://doi.org/10.3390/membranes10110342.
21. Kovalenko A. V., Nikonenko V. V., Chubyr N. O., Urtenov M. Kh. Mathematical modeling of electrodialysis of a dilute solution with accounting for water dissociation-recombination reactions, *Desalination*, 2023, vol. 550, 116398. DOI: https://doi.org/10.1016/j.desal.2023.116398.
22. Kovalenko A. V., Urtenov M. Kh., Chubyr N. O., et al. Mathematical modeling of the influence of the main temperature effects in stationary transport of ions of salt in the diffusion layer, *Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Coop-*

eration, 2018, vol. 15, no. 3, pp. 78–86 (In Russian). EDN: YABSYX. DOI: https://doi.org/10.31429/vestnik-15-3-78-86.

23. Kovalenko A. V., Urtenov M. Kh., Chubyr N. O., et al. Influence of temperature effects associated with the dissociation/recombination reaction of water molecules and joule heating of the solution on the stationary transport of salt ions in the diffusion layer, *Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2018, vol. 15, no. 4, pp. 67–84 (In Russian). EDN: YRMLET. DOI: https://doi.org/10.31429/vestnik-15-4-67-84.
24. Nikonenko V., Urtenov M., Mareev S., Pourcelly G. Mathematical modeling of the effect of water splitting on ion transfer in the depleted diffusion layer near an ion-exchange membrane, *Membranes*, 2020, vol. 10, no. 2, 22. DOI: https://doi.org/10.3390/membranes10020022.
25. Kovalenko A. V. Influence of the water dissociation to the electroconvection in membrane systems, *Kondens. Sredy Mezhfaz. Gran.*, 2014, vol. 16, no. 3, pp. 288–293 (In Russian). EDN: SQBSBF.
26. Kovalenko A., Urtenov M., Chekanov V. Kandaurova N. Theoretical analysis of the influence of spacers on salt ion transport in electromembrane systems considering the main coupled effects, *Membranes*, 2024, vol. 14, no. 1, 20. DOI: https://doi.org/10.3390/membranes14010020.
27. Newman J., Thomas-Alyea K. E. *Electrochemical Systems.* NJ, USA, John Wiley and Sons, 2004, xx+647 pp.
28. Uzdenova A. M. 2D mathematical modelling of overlimiting transfer enhanced by electroconvection in flow-through electrodialysis membrane cells in galvanodynamic mode, *Membranes*, 2019, vol. 9, no. 3, 39. DOI: https://doi.org/10.3390/membranes9030039.
29. Uzdenova A. M. Time-dependent two-dimensional model of overlimiting mass transfer in electromembrane systems based on the Nernst–Planck, displacement current and Navier–Stokes equations, *Computation*, 2023, vol. 11, no. 10, 205. DOI: https://doi.org/10.3390/computation11100205.
30. Cohen H., Cooley J. W. The numerical solution of the time-dependent Nernst–Planck equations, *Biophys. J.*, 1965, vol. 5, no. 2, pp. 145–162. DOI: https://doi.org/10.1016/s0006-3495(65)86707-8.
31. Brumleve T. R., Buck R. P. Numerical solution of the Nernst–Planck and Poisson equation system with applications to membrane electrochemistry and solid state physics, *J. Electroanal. Chem.*, 1978, vol. 90, no. 1, pp. 1–31. DOI: https://doi.org/10.1016/s0022-0728(78)80137-5.
32. *COMSOL Multiphysics Reference Manual.* https://doc.comsol.com/6.1/doc/com.comsol.help.comsol/COMSOL_ReferenceManual.pdf.
33. Nikonenko V. V., Vasil'eva V. I., Akberova E. M., et al. Competition between diffusion and electroconvection at an ion-selective surface in intensive current regimes, *Adv. Colloid Interface Sci.*, 2016, vol. 235, pp. 233–246. DOI: https://doi.org/10.1016/j.cis.2016.06.014.
34. de Valença J. C., Wagterveld R. M., Lammertink R. G. H., Tsai P. A. Dynamics of microvortices induced by ion concentration polarization, *Phys. Rev. E*, 2015, vol. 92, no. 3, pp. 031003. DOI: https://doi.org/10.1103/physreve.92.031003.
35. Filippov A. N., Akberova E. M., Vasil'eva V. I. Study of the thermochemical effect on the transport and structural characteristics of heterogeneous ion-exchange membranes by combining the cell model and the fine-porous membrane model, *Polymers*, 2023, vol. 15, no. 16, 3390. DOI: https://doi.org/10.3390/polym15163390.
36. Urtenov M. A. K., Kirillova E. V., Seidova N. M., Nikonenko V. V. Decoupling of the Nernst–Planck and Poisson equations. Application to a membrane system at overlimiting currents, *J. Phys. Chem. B*, 2007, vol. 111, no. 51, pp. 14208–14222. DOI: https://doi.org/10.1021/jp073103d.
37. Krol J. J., Wessling M., Strathmann H. Chronopotentiometry and overlimiting ion transport through monopolar ion exchange membranes, *J. Membr. Sci.*, 1999, vol. 162, no. 1–2, pp. 155–164. DOI: https://doi.org/10.1016/S0376-7388(99)00134-9.

Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2024. Т. 28, № 2. С. 345–366
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu2059
EDN: NPCFQG

УДК 519.254, 681.5.015.4:004.94

Идентификация параметров модели конвекции–диффузии–реакции и неизвестных граничных условий при наличии случайных помех в измерениях

***Ю. В. Цыганова*[1], *А. В. Цыганов*[2], *А. Н. Кувшинова*[2], *Д. В. Галушкина*[1]**

[1] Ульяновский государственный педагогический университет им. И. Н. Ульянова, Россия, 432071, Ульяновск, пл. Ленина, 4/5.
[2] Ульяновский государственный университет, Россия, 432017, Ульяновск, ул. Льва Толстого, 42.

Аннотация

Рассматриваются математические модели конвекции–диффузии–реакции, которые относятся к моделям тепломассопереноса и применяются при исследовании природных и техногенных процессов. Для данного класса моделей актуальной является задача идентификации как параметров самой модели, так и входящих в нее граничных условий по результатам измерений значений искомой функции в отдельных точках рассматриваемой области. Задачу усложняет наличие неполных измерений, искаженных случайными помехами.

Решение заключается в разработке комбинированного двухэтапного метода идентификации, основанного на последовательном применении метода минимизации критерия идентификации безградиентного типа и рекуррентного метода оценивания неизвестных входных сигналов. Для применения указанных методов выполняется переход от исходной модели, описываемой уравнениями в частных производных, к дискретной

Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ
Научная статья

Образец для цитирования
Цыганова Ю. В., Цыганов А. В., Кувшинова А. Н., Галушкина Д. В. Идентификация параметров модели конвекции–диффузии–реакции и неизвестных граничных условий при наличии случайных помех в измерениях // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2024. Т. 28, № 2. С. 345–366. EDN: NPCFQG. DOI: 10.14498/vsgtu2059.

Сведения об авторах

Юлия Владимировна Цыганова https://orcid.org/0000-0001-8812-6035
доктор физико-математических наук, доцент; профессор; каф. информационных технологий; e-mail: tsyganovajv@gmail.com

Андрей Владимирович Цыганов https://orcid.org/0000-0002-4173-5199
кандидат физико-математических наук, доцент; профессор; каф. высшей математики; e-mail: andrew.tsyganov@gmail.com

Анастасия Николаевна Кувшинова https://orcid.org/0000-0002-3496-5981
кандидат физико-математических наук; доцент; каф. высшей математики; e-mail: kuvanulspu@yandex.ru

Дарья Валерьевна Галушкина https://orcid.org/0000-0003-4041-0533
аспирант; каф. информационных технологий; e-mail: dgalushkina73@gmail.com

линейной стохастической модели в пространстве состояний, в которой неизвестные граничные условия рассматриваются как неизвестные входные сигналы.

В результате построены новые дискретные линейные стохастические модели конвекции–диффузии–реакции для трех разных типов граничных условий. Предложена общая схема процесса параметрической идентификации, включающая двухэтапную идентификацию неизвестных параметров математической модели и идентификацию неизвестных граничных условий.

Для проверки работоспособности предложенного метода построены компьютерные модели конвекции–диффузии–реакции и выполнена реализация всех алгоритмов на языке MATLAB. Проведена серия вычислительных экспериментов, результаты которых показали, что разработанная двухэтапная комбинированная схема позволяет идентифицировать параметры исходной модели, значения функций, входящих в граничные условия, а также вычислить по неполным зашумленным измерениям оценки функции, описывающей процесс конвекции–диффузии–реакции.

Полученные результаты могут быть использованы не только при исследовании процессов тепломассопереноса, но также при решении задач идентификации параметров моделей дискретных стохастических систем с неизвестными входными сигналами и при наличии случайных помех.

Ключевые слова: модели конвекции–диффузии–реакции, параметрическая идентификация, квадратичный критерий идентификации, дискретная линейная стохастическая модель в пространстве состояний, оценивание неизвестных входных сигналов.

Получение: 5 сентября 2023 г. / Исправление: 5 декабря 2023 г. / Принятие: 11 декабря 2023 г. / Публикация онлайн: 12 сентября 2024 г.

Введение и постановка задачи. Задачи параметрической идентификации относятся к классу обратных задач математического моделирования и заключаются в определении неизвестных параметров математической модели объекта, принадлежащей выбранному классу моделей, по известным входным сигналам и выходным данным измерений. Одними из основных подходов к их решению являются метод подпространств (subspace identification method) и метод минимума ошибки предсказания (minimum prediction-error (MPE) method). Фундамент данных подходов был заложен еще в середине прошлого века в работах [1, 2]. Базовые концепции второго подхода определены в работах Л. Льюнга [3, 4], в рамках которого конкретные методы идентификации получаются как частные случаи в зависимости от выбора функции потерь, критерия качества, структуры модели и численного метода минимизации. В нашей стране большой вклад в развитие теории идентификации систем внес выдающийся советский ученый Я. З. Цыпкин [5].

В классе дискретных линейных стохастических систем с известными входными сигналами методы идентификации неизвестного модельного параметра, от которого зависят системные матрицы, хорошо развиты. Классическим подходом к решению задачи параметрической идентификации модельного параметра θ одновременно с оцениванием вектора состояния дискретной линейной стохастической системы по известным входным и выходным данным является применение методов адаптивной фильтрации [6]. При этом критерий идентификации определяет разницу между выходами реальной физической системы и дискретной линейной стохастической модели с присоединенным фильтром Калмана, параметры которого необходимо настроить таким образом, чтобы численное значение критерия идентификации стало оптимальным [3]. В настоящее время существуют различные подходы к построению алгоритмов параметрической идентификации, требующие построения адаптивных фильтров. В общий класс методов минимума ошибки предсказания входят хорошо известные метод максимального правдоподобия [7] и метод наименьших квадратов [8], а также методы минимаксного оценивания [9]. Отдельно отметим метод вспомогательного функционала качества [10, 11].

Сходимости оценок неизвестных параметров как для линейных, так и для нелинейных стохастических систем посвящены, в частности, работы [12–14]. Общие условия сходимости оценок неизвестных параметров при решении задач параметрической идентификации линейных стохастических систем рассмотрены в работе Л. Льюнга [12]. При решении задач параметрической идентификации предположения о выполнении условий сходимости, среди которых полная управляемость и наблюдаемость дискретной линейной стохастической системы, а также непрерывная дифференцируемость по модельному параметру элементов системных матриц и компактность множества допустимых значений модельного параметра, обеспечивают применимость численных методов для минимизации критерия параметрической идентификации.

Отметим, что для квадратических критериев качества, являющихся выпуклыми и монотонно возрастающими функциями по искомому параметру, существует глобальный минимум. Следовательно, отыскание точки минимума представляется возможным с помощью подходящих численных методов [15].

Методы оценивания для линейных стохастических систем с неизвестными входными сигналами в последние десятилетия привлекли к себе большое внимание благодаря их практическим приложениям для решения таких задач, для которых нельзя делать никаких предположений об эволюции неизвестных входных сигналов.

Для систем с дискретным временем самые ранние подходы основаны на включении неизвестного вектора входных сигналов в вектор состояния системы. Предполагалось, что модель динамики вектора входных сигналов известна. В этом случае для решения задачи применялся расширенный фильтр Калмана.

Большой вклад в развитие теории дискретной фильтрации стохастических систем с неизвестными входными сигналами внесли С. Гиллейнс и Б. Де-Мор. В [16] они расширили результаты, полученные в [17, 18], и предложили рекуррентный алгоритм одновременного оценивания вектора состояния системы и вектора неизвестных входных сигналов. При этом полученные оценки имеют минимальную дисперсию ошибки. Кроме того, они доказали оптимальность вычисляемых оценок. Перечисленные результаты относятся к решению задач оценивания вектора состояния и неизвестных входных воздействий. Во всех постановках задач предполагалось, что системные матрицы, определяющие математическую модель объекта и измерителя, точно известны.

Таким образом, задача параметрической идентификации линейных дискретных стохастических систем с неизвестными входными сигналами в указанных работах не решалась. В данной работе мы рассматриваем более сложную постановку задачи, в которой вводится дополнительный источник априорной неопределенности модели, а именно неизвестный векторный параметр, от элементов которого зависят матрицы, определяющие уравнения математической модели. Такая постановка задачи при условии неизвестных входных сигналов и наличии случайных помех описывает высокую степень априорной неопределенности дискретной линейной стохастической системы.

Практическое применение полученного решения поставленной задачи показано на примере идентификации параметров математических моделей конвекции–диффузии–реакции, которые относятся к моделям тепломассопереноса и широко применяются при исследовании природных и техногенных процессов [19]. Для данного класса моделей актуальной является задача идентификации как параметров самой модели, так и входящих в нее граничных условий по результатам измерений значений искомой функции в отдельных точках рассматриваемой области. Усложняет задачу наличие случайных помех в измерениях.

Применение рекуррентных методов калмановского типа для решения задачи параметрической идентификации моделей, описываемых уравнениями в частных производных, рассмотрено в работах [20–23]. Рекуррентные методы решения задач параметрической идентификации моделей конвекции–диффузии предложены в работах [24–27].

Развивая и дополняя полученные ранее результаты [24–29], данная работа ставит целью построение комбинированного двухэтапного метода идентификации моделей тепломассопереноса, основанного на совместном применении методов минимизации критерия идентификации безградиентного типа и рекуррентного оценивания неизвестных входных сигналов.

Рассмотрим математическую модель конвекции–диффузии–реакции, заданную уравнением

$$\frac{\partial c(x,t)}{\partial t} + v\frac{\partial c(x,t)}{\partial x} = \alpha\frac{\partial^2 c(x,t)}{\partial x^2} - \beta c(x,t) \tag{1}$$

с начальным условием

$$c(x,0) = \varphi(x) \tag{2}$$

и граничными условиями третьего рода

$$\frac{\partial c(a,t)}{\partial x} = \lambda[c(a,t) - f(t)], \quad \frac{\partial c(b,t)}{\partial x} = -\lambda[c(b,t) - g(t)] \tag{3}$$

либо смешанными граничными условиями первого и третьего рода

$$c(a,t) = f(t), \quad \frac{\partial c(b,t)}{\partial x} = -\lambda[c(b,t) - g(t)] \tag{4}$$

или

$$\frac{\partial c(a,t)}{\partial x} = \lambda[c(a,t) - f(t)], \quad c(b,t) = g(t), \tag{5}$$

где $x \in [a;b]$ — пространственная координата; $t \in [0;T]$ — время; $c(x,t)$ — искомая функция; v — скорость конвекции; α — коэффициент диффузии β — коэффициент реакции; $\varphi(x)$, $f(t)$, $g(t)$ — заданные функции.

В уравнении (1) $c(x,t)$ может иметь смысл температуры, концентрации вещества и т.д. Поставим задачу идентификации параметров данной модели, состоящую в определении коэффициентов v, α, β и λ при наличии случайных помех в измерениях значений функции $c(x,t)$ в отдельных точках рассматриваемого отрезка в различные моменты времени. При этом функции $f(t)$ и $g(t)$, входящие в граничные условия (3), (4) или (5), считаются неизвестными и также подлежат идентификации. Функция $\varphi(x)$ в начальном условии (2) предполагается известной.

В первом разделе предложено новое решение задачи параметрической идентификации моделей тепломассопереноса, которое заключается в переходе к дискретной линейной стохастической модели в пространстве состояний и разработке комбинированного двухэтапного метода идентификации, основанного на последовательном применении методов минимизации критерия идентификации безградиентного типа и рекуррентного оценивания неизвестных входных сигналов. Во втором разделе построены новые дискретные линейные стохастические модели конвекции–диффузии–реакции для трех разных типов граничных условий. В третьем разделе изложен этап I — идентификация параметров дискретной стохастической модели. Четвертый раздел содержит описание этапа II — рекуррентное оценивание неизвестных граничных условий модели. В пятом разделе представлены результаты компьютерного моделирования на языке `MATLAB`, а также их обсуждение. Заключение, в котором перечислены полученные результаты, завершает статью.

1. Комбинированный метод идентификации неизвестных параметров и неизвестных граничных условий моделей тепломассопереноса. Математическая модель конвекции–диффузии–реакции, заданная уравнениями (1)–(5), имеет параметрическую неопределенность двух принципиально различных типов:

1) неизвестный векторный параметр $\theta = (v, \alpha, \beta, \lambda)^\top \in \mathbb{R}^4$, элементы которого являются числовыми константами;
2) неизвестные функции $f(t)$ и $g(t)$, входящие в граничные условия (3)–(5).

В данной работе для устранения параметрической неопределенности математической модели мы предлагаем комбинированную двухэтапную схему решения поставленной задачи, представленную на рис. 1.

Общая схема процесса идентификации состоит из одного подготовительного и двух основных этапов. Априорные данные о модели включают в себя непрерывную параметризованную модель $M(\theta)$, заданную уравнениями в частных производных, измерительную информацию Z, которая представляет собой измеренные датчиками отдельные значения целевой функции $c(x,t)$ в заданных точках пространства, причем измерения являются неточными ввиду наличия случайных помех.

На подготовительном этапе с помощью метода конечных разностей осуществляется переход от исходной непрерывной модели $M(\theta)$ к дискретной модели $M_D(\theta)$, представленной разностными уравнениями в пространстве состояний.

На первом этапе при сборе измерительной информации в качестве граничных условий используется известный тестовый сигнал. Затем по доступным данным измерений Z и тестовым сигналам U проводится идентификация векторного параметра θ с помощью численной минимизации критерия качества

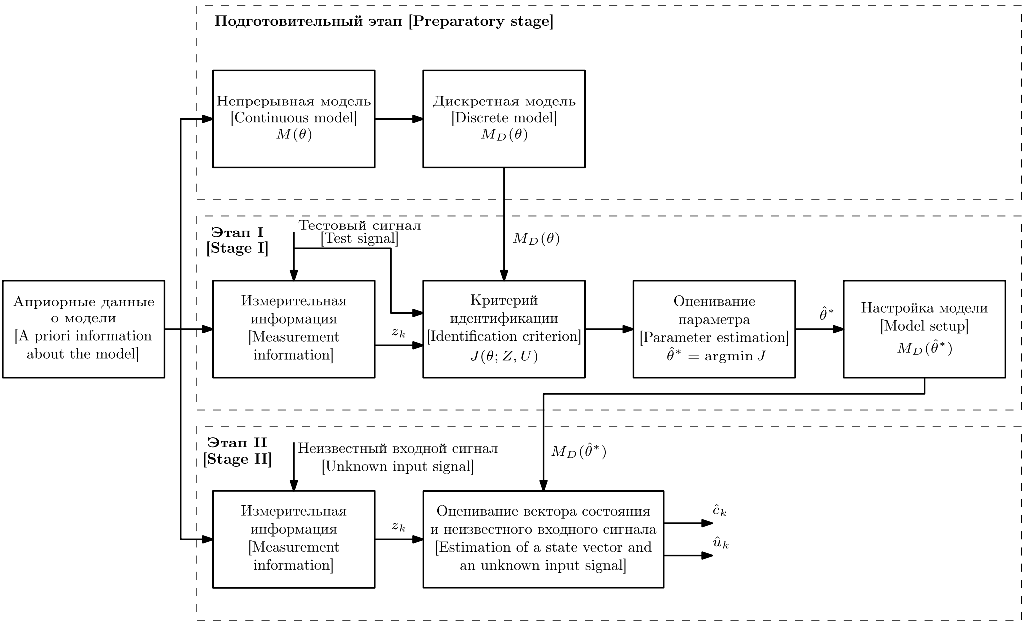


Рис. 1. Схема процесса идентификации [Figure 1. Identification process diagram]

идентификации J. По завершении первого этапа найденная оценка $\hat{\theta}^\star$ используется для настройки модели $M_D(\theta)$.

На втором этапе при сборе измерительной информации граничные условия считаются неизвестными. Для идентификации доступны только измерения Z. Граничные условия, подлежащие идентификации, рассматриваются как неизвестные входные сигналы. Применяется алгоритм одновременного оценивания вектора состояния модели и неизвестных входных сигналов.

Таким образом, по завершении процесса идентификации математической модели мы получаем:

1) оценку параметра θ в соответствии с выбранным критерием идентификации J;
2) численные значения функций $f(t)$ и $g(t)$, входящих в граничные условия;
3) оценки значений целевой функции $c(x, t)$ в каждой точке пространственно-временной сетки в рассматриваемой области.

В последующих разделах приведем подробное описание подготовительного этапа и двух основных этапов процесса параметрической идентификации.

2. Подготовительный этап: переход от исходной модели к дискретной линейной динамической модели в пространстве состояний. Перейдем от исходной непрерывной модели к дискретной модели, представленной линейной динамической системой в пространстве состояний. Следуя [25, 26], зададим в рассматриваемой пространственно-временной области конечно-разностную сетку $\{(x_i, t_k) \mid i = 0, 1, \ldots, N,\ k = 0, 1, \ldots, K\}$, где

$$x_i = a + i\Delta x, \quad t_k = k\Delta t, \quad \Delta x = (b-a)/N, \quad \Delta t = T/K. \tag{6}$$

Введем обозначения: $c_i^k = c(x_i, t_k)$, $\varphi_i = \varphi(x_i)$, $f^k = f(t_k)$, $g^k = g(t_k)$. Заменим частные производные в уравнении (1) их конечно-разностными аппроксимациями, используя двухслойную по времени и симметричную по пространственной переменной схему. Предполагая, что соответствующие условия устойчивости для разностной схемы выполняются [30], получим следующую систему уравнений:

$$\frac{c_i^k - c_i^{k-1}}{\Delta t} + v\frac{c_{i+1}^{k-1} - c_{i-1}^{k-1}}{2\Delta x} = \\ = \alpha\frac{c_{i+1}^{k-1} - 2c_i^{k-1} + c_{i-1}^{k-1}}{\Delta x^2} - \beta c_i^{k-1}, \quad k = 1, 2, \ldots, K, \quad (7)$$

где $i = 0, 1, \ldots, N$ для граничных условий (3); $i = 1, 2, \ldots, N$ для условий (4); $i = 0, 1, \ldots, N-1$ для (5).

Обозначим $r_1 = \alpha\Delta t(\Delta x^2$, $r_2 = \beta\Delta t$, $r_3 = v\Delta t/(2\Delta x)$, $r_4 = 2\Delta t/\Delta x^2$ и выразим из (7) c_i^k:

$$c_i^k = (r_1 + r_3)c_{i-1}^{k-1} + (1 - r_2 - r_4)c_i^{k-1} + (r_1 - r_3)c_{i+1}^{k-1} = a_1 c_{i-1}^{k-1} + a_2 c_i^{k-1} + a_3 c_{i+1}^{k-1},$$

где $a_1 = r_1 + r_3$, $a_2 = 1 - r_2 - r_4$, $a_3 = r_1 - r_3$.

С учетом (6) для начального условия (2) получаем

$$c_i^0 = \varphi_i, \quad i = 0, 1, \ldots, N.$$

Дискретизируя граничные условия (3), получаем

$$\frac{c_1^k - c_0^k}{\Delta x} = \lambda[c_0^k - f^k], \quad \frac{c_N^k - c_{N-1}^k}{\Delta x} = -\lambda[c_N^k - g^k], \quad k = 1, \ldots, K.$$

Обозначим $a_4 = 1/(1 + \lambda\Delta x)$, $a_5 = \lambda\Delta x/(1 + \lambda\Delta x)$. Тогда из первого граничного условия получаем

$$c_0^k = a_4 c_1^k + a_5 f^k = a_4 a_1 c_0^{k-1} + a_4 a_2 c_1^{k-1} + a_4 a_3 c_2^{k-1} + a_5 f^k, \quad k = 1, \ldots, K,$$

а из второго —

$$c_N^k = a_4 a_1 c_{N-2}^{k-1} + a_4 a_2 c_{N-1}^{k-1} + a_4 a_3 c_N^{k-1} + a_5 g^k, \quad k = 1, \ldots, K.$$

Для случая смешанных граничных условий (4) и (5) находим соответственно выражения

$$c_0^k = f^k, \quad \frac{c_N^k - c_{N-1}^k}{\Delta x} = -\lambda[c_N^k - g^k], \quad k = 1, \ldots, K,$$

и

$$\frac{c_1^k - c_0^k}{\Delta x} = \lambda[c_0^k - f^k], \quad c_N^k = g^k, \quad k = 1, \ldots, K,$$

откуда окончательно получаем

$$c_0^k = f^k, \quad c_N^k = a_4 a_1 c_{N-2}^{k-1} + a_4 a_2 c_{N-1}^{k-1} + a_4 a_3 c_N^{k-1} + a_5 g^k, \quad k = 1, \ldots, K,$$

и

$$c_0^k = a_4 a_1 c_0^{k-1} + a_4 a_2 c_1^{k-1} + a_4 a_3 c_2^{k-1} + a_5 f^k, \quad c_N^k = g^k, \quad k = 1, \ldots, K.$$

Запишем в матричном виде полученные системы для исходной модели с различными граничными условиями:

1) дискретная линейная динамическая система для модели (1), (2), (3):

$$\begin{bmatrix} c_0^k \\ c_1^k \\ c_2^k \\ \vdots \\ c_{N-2}^k \\ c_{N-1}^k \\ c_N^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_4a_1 & a_4a_2 & a_4a_3 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & a_2 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_2 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_4a_1 & a_4a_2 & a_4a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0^{k-1} \\ c_1^{k-1} \\ c_2^{k-1} \\ \vdots \\ c_{N-2}^{k-1} \\ c_{N-1}^{k-1} \\ c_N^{k-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_5 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & a_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f^k \\ g^k \end{bmatrix},$$

$$k = 1, 2, \ldots, K; \quad (8)$$

2) дискретная линейная динамическая система для модели (1), (2), (4):

$$\begin{bmatrix} c_1^k \\ c_2^k \\ c_3^k \\ \vdots \\ c_{N-2}^k \\ c_{N-1}^k \\ c_N^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2 & a_1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & a_2 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_2 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_4a_1 & a_4a_2 & a_4a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1^{k-1} \\ c_2^{k-1} \\ c_3^{k-1} \\ \vdots \\ c_{N-2}^{k-1} \\ c_{N-1}^{k-1} \\ c_N^{k-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & a_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f^{k-1} \\ g^k \end{bmatrix},$$

$$k = 1, 2, \ldots, K; \quad (9)$$

3) дискретная линейная динамическая система для модели (1), (2), (5):

$$\begin{bmatrix} c_0^k \\ c_1^k \\ c_2^k \\ \vdots \\ c_{N-3}^k \\ c_{N-2}^k \\ c_{N-1}^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_4a_1 & a_4a_2 & a_4a_3 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & a_2 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_2 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & a_1 & a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0^{k-1} \\ c_1^{k-1} \\ c_2^{k-1} \\ \vdots \\ c_{N-3}^{k-1} \\ c_{N-2}^{k-1} \\ c_{N-1}^{k-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_5 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f^k \\ g^{k-1} \end{bmatrix},$$

$$k = 1, 2, \ldots, K. \quad (10)$$

Системы (8), (9) и (10) являются дискретными линейными динамическими системами с постоянными матрицами, в которых значения функций $f(t)$ и $g(t)$ входят в двумерный вектор входных сигналов (воздействий).

Модель измерителя зададим в виде

$$z_k = Hc_k + \xi_k, \quad k = 1, 2, \ldots, K, \quad (11)$$

где $H \in \mathbb{R}^{m \times n}$ — матрица измерений, определяющая структуру измерителя; n — количество компонент вектора состояния c_k, а m — количество его измеряемых компонент; $\xi_k \in \mathbb{R}^m$ — погрешность измерителя.

3. Этап I: Идентификация неизвестного вектора параметров θ дискретной линейной стохастической модели по известным входным и выходным данным. Обозначим через θ неизвестный (в общем случае векторный) параметр линейной динамической системы (8), (9) или (10), который необходимо идентифицировать по доступным измерениям (11).

Дискретные модели конвекции–диффузии–реакции (8), (9) или (10) с моделью измерителя (11) можно представить в общем виде:

$$\begin{cases} c_k = F(\theta)c_{k-1} + B(\theta)u_{k-1}, \\ z_k = Hc_k + \xi_k, \quad k = 1, 2, \ldots, K, \end{cases} \tag{12}$$

где $\theta = (v, \alpha, \beta, \lambda)^\top \in \mathbb{R}^4$ — неизвестный векторный параметр, $c_k \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния, $u_k \in \mathbb{R}^r$ — вектор входных сигналов (воздействий), $z_k \in \mathbb{R}^m$ — вектор измерений. Предположим, что шаги пространственно-временной сетки Δx и Δt заданы, в уравнении измерений аддитивный шум $\xi_k \in \mathbb{R}^m$ является последовательностью нормально распределенных независимых случайных векторов с нулевым математическим ожиданием и известной положительно определенной ковариационной матрицей $R \in \mathbb{R}^{m \times m}$. Матрицы $F(\theta) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B(\theta) \in \mathbb{R}^{n \times r}$, входящие в уравнение состояния модели, зависят от параметра θ.

Рассмотрим задачу параметрической идентификации модели (12) по доступным измерениям z_k с целью оценки неизвестного (векторного) параметра θ.

На этапе I предполагаем, что функции $f(t)$ и $g(t)$, входящие в граничные условия (3), (4) или (5), известны. Последнее означает, что в соответствующей дискретной модели (12) вектор u_k представляет собой известный тестовый сигнал. Требуется вычислить оценку $\hat{\theta}^*$ неизвестного параметра θ по известным входным сигналам $U_0^{K-1} = \{u_0, u_1, \ldots, u_{K-1}\}$ и выходным данным измерений $Z_1^K = \{z_1, \ldots, z_K\}$ в соответствии с выбранным критерием качества идентификации $\mathcal{J}(\theta; Z_1^K, U_0^{K-1})$.

Указанная задача параметрической идентификации сводится к решению задачи нелинейного программирования

$$\hat{\theta}_{\min} = \operatorname*{argmin}_{\theta \in D(\theta)} \mathcal{J}(\theta; Z_1^K, U_0^{K-1}), \tag{13}$$

где $D(\theta) \subseteq \mathbb{R}^4$ — область определения параметра θ. Таким образом, оценку $\hat{\theta}^*$ определим как $\hat{\theta}^* = \hat{\theta}_{\min}$.

Область $D(\theta)$ допустимых значений параметра θ определяется из условий сходимости его оценок при решении задачи (13). Для дискретных линейных стохастических систем вида (12) общие условия сходимости известны и определены в [12, Леммы 2.1 и 3.1]. В данной работе предполагаем, что область $D(\theta)$ является компактом в $\mathbb{R}^4$ и удовлетворяет указанным условиям сходимости для рассматриваемого класса моделей: $\forall \theta \in D(\theta)$ дискретная модель (12) является полностью управляемой и наблюдаемой, а элементы матриц $F(\theta)$

и $B(\theta)$ — непрерывно дифференцируемые по θ функции. Например, свойство полной наблюдаемости обеспечивается выполнением следующего условия [31]:

$$\operatorname{rank} \mathcal{M}_{DTI}(\theta) = n, \tag{14}$$

где

$$\mathcal{M}_{DTI}(\theta) = \begin{bmatrix} H^\top & (HF(\theta))^\top & (HF^2(\theta))^\top & \cdots & (HF^{n-1}(\theta))^\top \end{bmatrix}^\top \tag{15}$$

есть матрица наблюдаемости модели (12). Условие (14) накладывает ограничения на выбор структуры измерителя, определяемой матрицей H.

Задача выбора оптимальной структуры измерителя с минимальным количеством сенсоров может быть решена путем анализа свойства полной наблюдаемости линейной динамической системы с учетом (14). В частности, в [27] показано, что для идентификации параметров моделей конвективно-диффузионного переноса достаточно всего лишь двух сенсоров. Из (15) следует, что очевидным является выбор H в форме единичной матрицы, что означает наличие n сенсоров для сбора данных измерений.

Для нахождения решения задачи (13) можно использовать известные численные методы оптимизации: градиентный метод, метод Ньютона, метаэвристические методы (например, генетический алгоритм или метод имитации отжига) и др. [15]. Готовые программные реализации данных методов, как правило, требуют от пользователя задания начального значения параметра θ, ограничений на переменные и описания целевой функции. Вопрос выбора конкретного численного метода оптимизации зависит от специфики решаемой задачи.

В качестве целевой функции для решения задачи численной минимизации (13) выберем отрицательную логарифмическую функцию правдоподобия [7]

$$\mathcal{J}_{LR}(\theta; Z_1^K, U_0^{K-1}) = \frac{Km}{2}\ln(2\pi) + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{K}\bigl\{\ln|\Sigma_{\nu,k}(\theta)| + \nu_k^\top(\theta)\Sigma_{\nu,k}^{-1}(\theta)\nu_k(\theta)\bigr\}, \tag{16}$$

где вектор невязки измерений $\nu_k(\theta) = z_k - H\hat{c}_k(\theta)$ и его ковариационную матрицу $\Sigma_{\nu,k}(\theta) = E\bigl\{\nu_k(\theta)\nu_k^\top(\theta)\bigr\}$ при заданных значениях параметра θ вычисляют по известным уравнениям фильтра Калмана [32].

Следует отметить, что ранее решение задачи параметрической идентификации моделей конвективно-диффузионного переноса с известными граничными условиями с помощью метода максимального правдоподобия на основе стандартного фильтра Калмана получено в [26]. Решение задачи параметрической идентификации скорости конвекции в модели конвективно-диффузионного переноса с помощью метаэвристических алгоритмов рассмотрено в [24] также с применением стандартного алгоритма Калмана. В [27] предложен новый подход к идентификации параметров дискретных моделей конвективно-диффузионного переноса на основе численно устойчивого SVD-фильтра Калмана. Предложенные ранее решения могут быть использованы для реализации первого этапа комбинированного метода идентификации моделей конвекции–диффузии–реакции.

4. Этап II: Численная идентификация неизвестных граничных условий. На втором этапе оценку параметра дискретной модели (12) считаем известной, т. е. $\theta = \hat{\theta}^*$, а вектор u_k, соответствующий граничным условиям (3), (4) или (5), неизвестным.

Рассмотрим следующую модель дискретной стохастической системы

$$\begin{cases} c_k = F(\hat{\theta}^*)c_{k-1} + B(\hat{\theta}^*)u_{k-1}, \\ z_k = Hc_k + \xi_k, \quad k = 1, 2, \dots, K, \end{cases} \tag{17}$$

где $\hat{\theta}^*$ — оценка параметра модели, вычисленная на этапе I; $c_k \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния; $u_k \in \mathbb{R}^r$ — вектор неизвестных входных воздействий; $z_k \in \mathbb{R}^m$ — вектор доступных измерений. Предположим, что погрешность измерителя $\xi_k \in \mathbb{R}^m$, как и на первом этапе, имеет характеристики $\xi_k \sim \mathcal{N}(0, R)$.

Рассмотрим задачу идентификации вектора u_k модели (17) по доступным измерениям Z_1^K с одновременным оцениванием вектора состояния c_k. Поскольку мы предполагаем, что априорная информация об эволюции входного сигнала отсутствует, для решения задачи идентификации будем использовать подход, разработанный С. Гиллейнсом и Б. Де-Мором [16].

Алгоритм Гиллейнса – Де-Мора состоит из трех последовательных шагов, повторяемых в цикле:

1) обновление оценки вектора состояния по времени;
2) оценка вектора неизвестного входного воздействия;
3) обновление оценки вектора состояния по текущим измерениям.

В работе [16] рассмотрены два варианта алгоритма, в которых шаги 1 и 2 совпадают, а шаги 3 различаются. В первом варианте на шаге 2 получается MVU-оценка (MVU — minimum-variance unbiased) вектора $\hat{u}_{k-1}$, а на шаге 3 — несмещенная оценка вектора состояния $\hat{c}_k$. Во втором варианте алгоритма на шаге 3 за счет более сложных вычислений получается MVU-оценка вектора состояния. Алгоритмы требуют выполнения условия

$$\operatorname{rank} HB(\hat{\theta}^*) = \operatorname{rank} B(\hat{\theta}^*) = r, \tag{18}$$

где r — размер вектора u_k.

Условие (18) является достаточным для существования несмещенной оценки вектора состояния в алгоритмах одновременного оценивания вектора состояния и неизвестных входных сигналов [16, 18].

Отметим, что ранее решение задачи идентификации неизвестных граничных условий в модели конвективно-диффузионного переноса на основе алгоритмов Гиллейнса – Де-Мора рассматривалось в [25, 29]. В [28] получена квадратно-корневая модификация алгоритма Гиллейнса – Де-Мора. Предложенные ранее решения могут быть использованы для реализации второго этапа комбинированного метода идентификации моделей конвекции–диффузии–реакции.

5. Численные эксперименты. Рассмотрим идентификацию параметров модели вида (1), (2), (4):

$$\frac{\partial c(x,t)}{\partial t} + v\frac{\partial c(x,t)}{\partial x} = \alpha\frac{\partial^2 c(x,t)}{\partial x^2} - \beta c(x,t), \quad x \in [0;1], \quad t \in [0;1];$$

$$c(x,0) = \varphi(x);$$
$$c(0,t) = f(t), \quad \frac{\partial c(1,t)}{\partial x} = -\lambda[c(1,t) - g(t)],$$
где $v = 3$, $\alpha = 0.8$, $\beta = 4$, $\lambda = 0.5$, $\varphi(x) \equiv 0$.

Процесс идентификации будем моделировать в системе MATLAB. Зададим в рассматриваемой области пространственно-временную сетку с 11 узлами по оси Ox и 201 узлом по оси Ot ($\Delta x = 0.1$, $\Delta t = 0.005$) и получим решение прямой задачи методом конечных разностей. Смоделируем зашумленные измерения в узлах пространственной сетки $x = 0.1, 0.2, \ldots, 1$, соответствующих всем компонентам вектора состояния c_1^k, c_2^k, …, c_{10}^k. Матрица измерений имеет вид $H = I_{10}$.

Пусть функции, входящие в граничные условия, известны: $f(t) = g(t) \equiv 5$. На рис. 2 приведены графики решения прямой задачи и смоделированных измерений с матрицей ковариации шума $R = 0.05^2 I_{10}$.

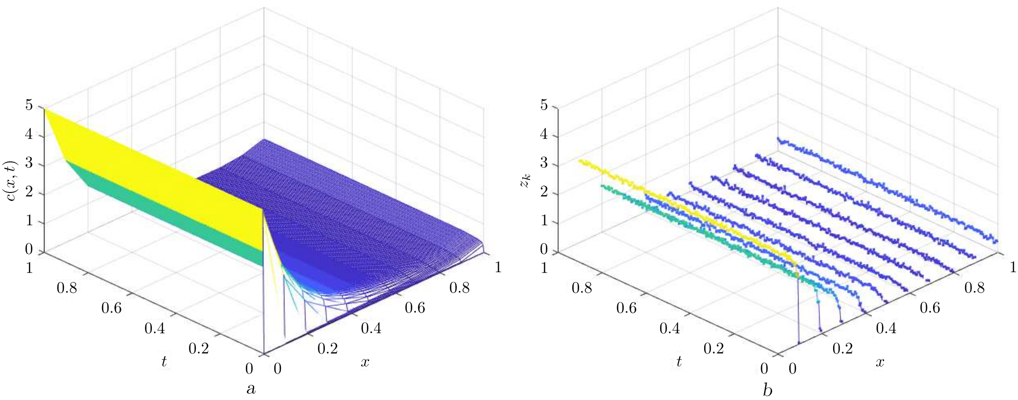


Рис. 2. Графики решения задачи (a) и зашумленных измерений (b)
[Figure 2. Plots of the solution (a) and noisy measurements (b)]

Минимизация критерия идентификации (16) выполнялась при помощи функции `fmincon`. Проведенные эксперименты показали, что точность идентификации параметров зависит как от вида дискретизации пространственно-временной области и уровня шума, так и от выбора граничных условий, начального решения, настроек функции минимизации и других факторов. В таблице приведены результаты идентификации параметров для различных значений уровня шума R по результатам 100 экспериментов (μ — среднее значение, σ^2 — дисперсия, RMSE — среднеквадратичная ошибка, MAPE — средняя абсолютная процентная ошибка). Поиск значений каждого параметра осуществлялся на отрезке $[0.01; 5]$. В качестве начального решения выбиралась середина отрезка. Основные параметры функции `fmincon`: `SpecifyObjectiveGradient = false`, `Algorithm = sqp`, `MaxFunctionEvaluations = 500`.

Результаты экспериментов показывают, что с уменьшением уровня шума в измерителе точность идентификации параметров возрастает. При этом параметр β идентифицируется хуже всех, что может быть объяснено малым вкладом слагаемого r_2 в коэффициент a_2 дискретной модели.

Используем идентифицированные значения параметров v, α, β, λ (в таблице выделены жирным) для оценивания значений неизвестных функций $f(t)$

Результаты идентификации [Identification results]

R	Parameter	μ	σ^2	RMSE	MAPE
$0.05^2 I_{10}$	v	2.990654	0.018655	0.136219	3.527277
	α	0.794360	0.000096	0.011265	1.131970
	β	2.628127	5.509623	2.708609	56.280028
	λ	0.500398	0.000097	0.009822	1.589091
$0.01^2 I_{10}$	v	2.995260	0.001055	0.032662	0.863970
	α	0.798047	0.000032	0.005990	0.570405
	β	3.516434	2.039151	1.500865	28.702054
	λ	0.500095	0.000004	0.001965	0.318911
$0.005^2 I_{10}$	v	**2.998785**	0.000287	0.016914	0.445395
	α	**0.799324**	0.000010	0.003165	0.313788
	β	**3.834971**	0.611877	0.795608	15.794188
	λ	**0.500047**	0.000001	0.000982	0.159357

Definition: R is the noise covariance matrix; μ is the mean of data set; σ is the standard deviation; RMSE is the root mean square error; MAPE is the mean absolute percentage error

и $g(t)$, входящих в граничные условия.

Пусть $f(t) = 4\,|3t - \lfloor 3t + 0.5 \rfloor|$ (треугольная волна с периодом $1/3$ и амплитудой 2), $g(t) = t$.

Зададим в рассматриваемой области пространственно-временную сетку с 9 узлами по оси Ox и 201 узлом по оси Ot ($\Delta x = 0.125$, $\Delta t = 0.005$) и получим решение прямой задачи методом конечных разностей. Смоделируем зашумленные измерения в узлах пространственной сетки $x = 0.125$ и $x = 1$, соответствующих компонентам вектора состояния c_1^k и c_8^k. В этом случае матрица измерений имеет вид

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

На рис. 3 приведены графики решения прямой задачи и смоделированных измерений с матрицей ковариации шума $R = 0.01^2 I_2$.

Для одновременного оценивания значений решения, а также функций $f(t)$ и $g(t)$ используем алгоритм Гиллейнса–Де-Мора, результаты работы которого представлены на рис. 4. Из приведенных графиков видно, что значения функции $f(t)$ оцениваются точнее, чем значения функции $g(t)$ ($\mathrm{RMSE}_f = 0.034908$, $\mathrm{RMSE}_g = 0.175363$).

Для сравнения заменим в рассматриваемой модели левое граничное условие на условие третьего рода

$$\frac{\partial c(0,t)}{\partial x} = \lambda[c(0,t) - f(t)]$$

и снова воспользуемся алгоритмом Гиллейнса–Де-Мора. Соответствующие графики приведены на рис. 5, 6. В данном случае ошибки оценивания значений $f(t)$ и $g(t)$ имеют одинаковый порядок ($\mathrm{RMSE}_f = 0.184948$, $\mathrm{RMSE}_g = 0.175259$).

6. Заключение. В работе предложен новый комбинированный двухэтапный метод параметрической идентификации моделей тепломассопереноса,

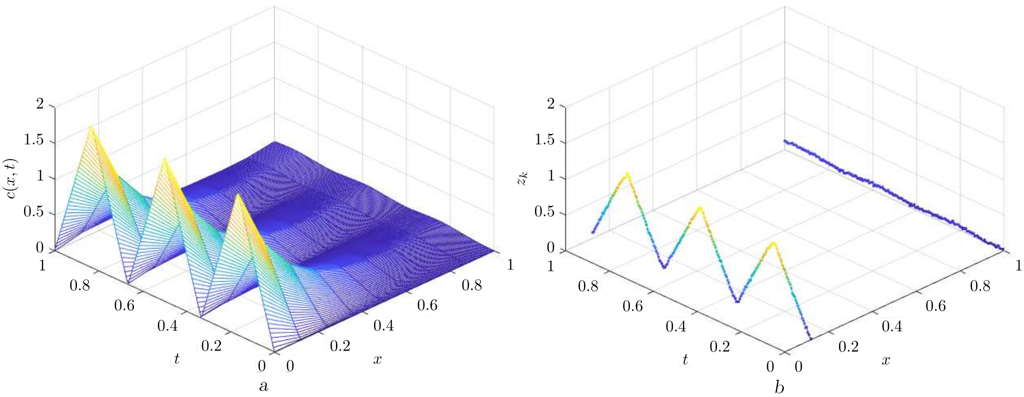


Рис. 3. Графики решения задачи (a) и зашумленных измерений (b)
[Figure 3. Plots of the solution (a) and noisy measurements (b)]

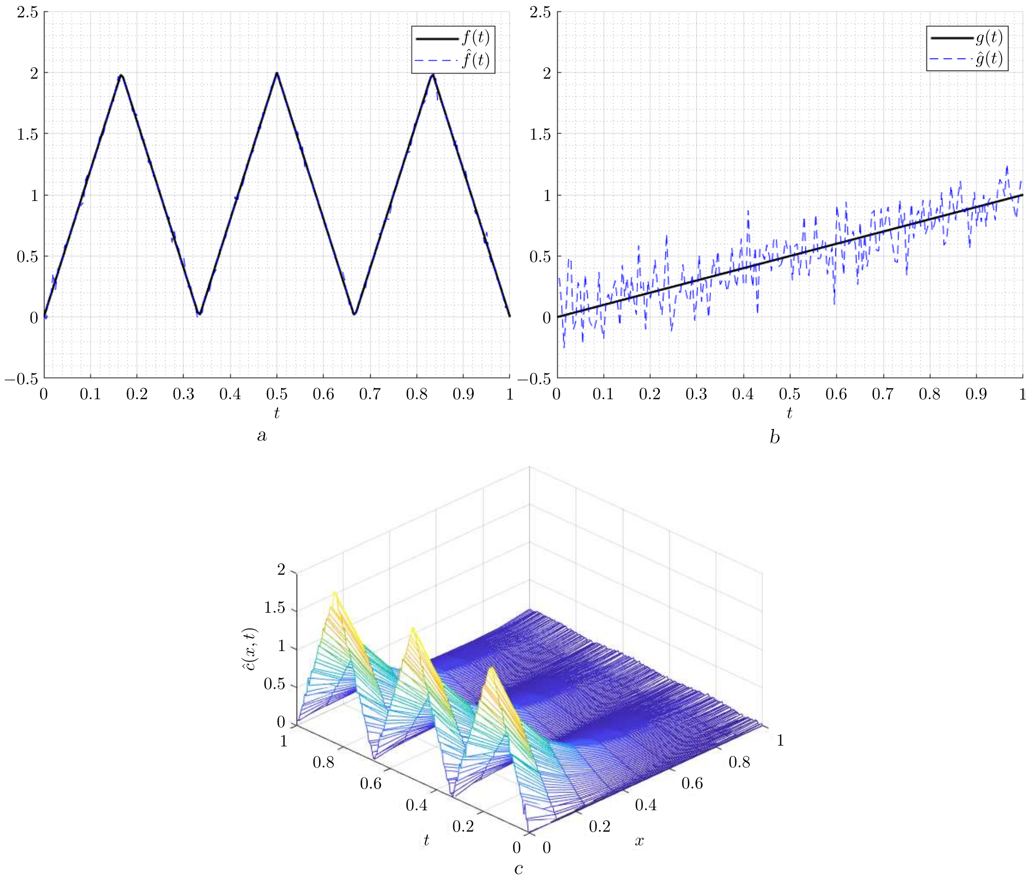


Рис. 4. Оценки $f(t)$ (a), $g(t)$ (b) и решения задачи (c)
[Figure 4. Estimates of $f(t)$ (a), $g(t)$ (b) and solution (c)]

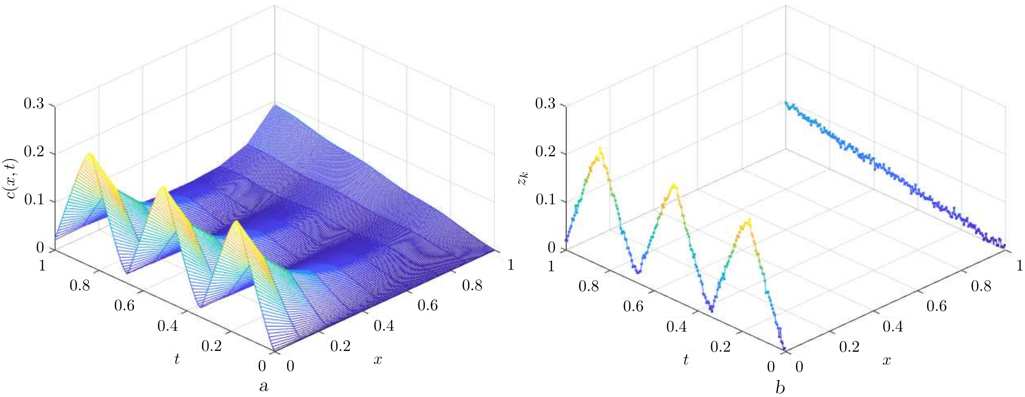


Рис. 5. Графики решения задачи (a) и зашумленных измерений (b)
[Figure 5. Plots of the solution (a) and noisy measurements (b)]

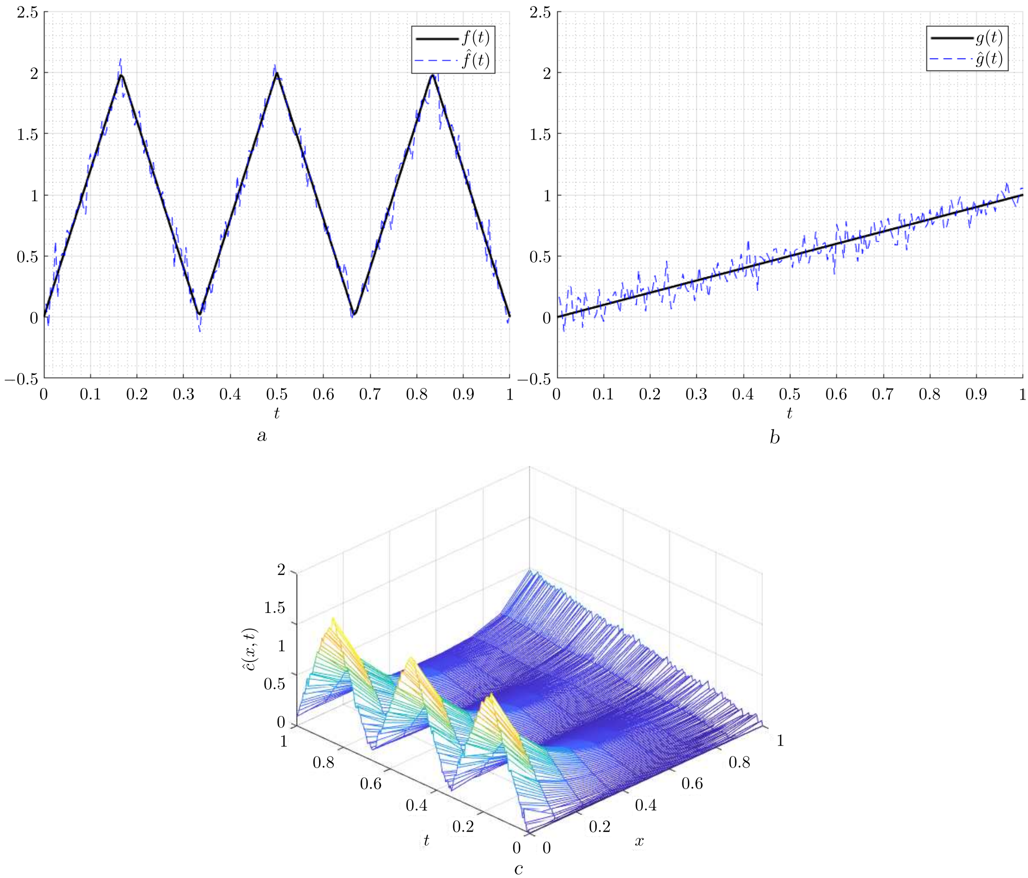


Рис. 6. Оценки $f(t)$ (a), $g(t)$ (b) и решения задачи (c)
[Figure 6. Estimates of $f(t)$ (a), $g(t)$ (b) and solution (c)]

на примере идентификации математических моделей конвекции–диффузии–реакции с неизвестными граничными условиями при наличии случайных помех в измерениях значений искомой функции $c(x, t)$. Решение заключается в переходе от исходной модели, описываемой уравнениями в частных производных, к дискретной линейной стохастической модели в пространстве состояний с неизвестными входными сигналами и разработке комбинированного двухэтапного метода идентификации, основанного на последовательном применении метода минимизации критерия идентификации безградиентного типа и рекуррентного метода одновременного оценивания вектора состояния и неизвестных входных сигналов.

Предложенный комбинированный двухэтапный метод параметрической идентификации является новым, поскольку, во-первых, он представляет комбинацию двух принципиально различных методов идентификации, во-вторых, для класса математических моделей, представленных уравнениями в частных производных, данный метод построен и применен впервые.

Основными результатами работы являются:

1) новые дискретные линейные стохастические модели конвекции–диффузии–реакции для разных типов граничных условий;
2) общая схема процесса параметрической идентификации, включающая поэтапную идентификацию неизвестных параметров математической модели и идентификацию неизвестных граничных условий.

С целью проверки работоспособности предложенного подхода построена компьютерная модель конвекции–диффузии–реакции и выполнена реализация всех алгоритмов на языке `MATLAB`. Идентификация параметров проводилась безградиентным численным методом минимизации критерия идентификации, а идентификация граничных условий — рекуррентным алгоритмом Гиллейнса – Де-Мора. Проведена серия вычислительных экспериментов, результаты которых подтверждают работоспособность предложенного решения.

Полученные результаты могут быть использованы не только при исследовании процессов тепломассопереноса, но также при решении задач идентификации параметров моделей дискретных стохастических систем с неизвестными входными сигналами и при наличии случайных помех.

Конкурирующие интересы. Конкурирующих интересов не имеем.

Авторский вклад и ответственность. Ю.В. Цыганова — общая концепция статьи; схема комбинированного двухэтапного метода идентификации; работа с черновиком и переработанным вариантом рукописи. А.В. Цыганов — программная реализация алгоритмов; подготовка первичного варианта рукописи. А.Н. Кувшинова — вычислительные эксперименты; подготовка первичного варианта рукописи. Д.В. Галушкина — дискретные модели конвекции–реакции–диффузии; подготовка первичного варианта рукописи. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

Финансирование. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23–21–00361, `https://rscf.ru/project/23-21-00361/`.

Библиографический список

1. Ho B. L., Kalman R. E. Effective construction of linear state-variable models from input/output functions // *Regelungstechnik*, 1966. vol. 14, no. 1-12. pp. 545–548. DOI: https://doi.org/10.1524/auto.1966.14.112.545.
2. Åström K.-J., Bohlin T. Numerical identification of linear dynamic systems from normal operating records // *IFAC Proceedings Volumes*, 1965. vol. 2, no. 2. pp. 96–111. DOI: https://doi.org/10.1016/S1474-6670(17)69024-4.
3. Ljung L. *System Identification: Theory for the User*. Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall, 1999. xxii+609 pp.
4. Ljung L. Perspectives on system identification // *Ann. Rev. Control*, 2010. vol. 34, no. 1. pp. 1–12. DOI: https://doi.org/10.1016/j.arcontrol.2009.12.001.
5. Цыпкин Я. З. *Информационная теория идентификации.* М.: Наука, 1995. 336 с.
6. Mehra R. Approaches to adaptive filtering // *IEEE Trans. Autom. Control*, 1972. vol. 17, no. 5. pp. 693–698. DOI: https://doi.org/10.1109/TAC.1972.1100100.
7. Aström K. J. Maximum likelihood and prediction error methods // *Automatica*, 1980. vol. 16, no. 5. pp. 551–574. DOI: https://doi.org/10.1016/0005-1098(80)90078-3.
8. Zhang Z. Parameter estimation techniques: a tutorial with application to conic fitting // *Image Vision Comp.*, 1997. vol. 15, no. 1. pp. 59–76. DOI: https://doi.org/10.1016/S0262-8856(96)01112-2.
9. Wilczyński M. Minimax prediction in the linear model with a relative squared error // *Stat. Papers*, 2012. vol. 53, no. 1. pp. 151–164. DOI: https://doi.org/10.1007/s00362-010-0325-6.
10. Semushin I. V. Adaptation in stochastic dynamic systems — Survey and new results II // *Int. J. Commun. Netw. Syst. Sci.*, 2011. vol. 4, no. 4. pp. 266–285. DOI: https://doi.org/10.4236/ijcns.2011.44032.
11. Semushin I. V., Tsyganova J. V. Adaptation in stochastic dynamic systems — Survey and new results IV: Seeking minimum of API in parameters of data // *Int. J. Commun. Netw. Syst. Sci.*, 2013. vol. 6, no. 12. pp. 513–518. DOI: https://doi.org/10.4236/ijcns.2013.612055.
12. Ljung L. Convergence analysis of parametric identification methods // *IEEE Trans. Autom. Control*, 1978. vol. 23, no. 5. pp. 770–783. DOI: https://doi.org/10.1109/TAC.1978.1101840.
13. Bastin G., Gevers M. Stable adaptive observers for nonlinear time-varying systems // *IEEE Trans. Autom. Control*, 1988. vol. 33, no. 7. pp. 650–658. DOI: https://doi.org/10.1109/9.1273.
14. Marino R., Tomei P. Global adaptive observers for nonlinear systems via filtered transformations // *IEEE Trans. Autom. Control*, 1992. vol. 37, no. 8. pp. 1239–1245. DOI: https://doi.org/10.1109/9.151117.
15. Васильев В. П. *Численные методы для решения экстремальных задач.* М.: Наука, 1988. 550 с.
16. Gillijns S., De Moor B. Unbiased minimum-variance input and state estimation for linear discrete-time systems // *Automatica*, 2007. vol. 43, no. 1. pp. 111–116. DOI: https://doi.org/10.1016/j.automatica.2006.08.002.
17. Kitanidis P. K. Unbiased minimum-variance linear state estimation // *Automatica*, 1987. vol. 23, no. 6. pp. 775–778. DOI: https://doi.org/10.1016/0005-1098(87)90037-9.
18. Darouach M., Zasadzinski M. Unbiased minimum varianceestimation for systems with unknown exogenous inputs // *Automatica*, 1997. vol. 33, no. 4. pp. 717–719. DOI: https://doi.org/10.1016/S0005-1098(96)00217-8.
19. Исаев С. И., Кожинов И. А., Кофанов В. И. [и др.] *Теория тепломассообмена.* М.: МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2018. 462 с.
20. Симбирский Г. Д., Лантрат В. К. Применение цифрового фильтра Калмана для параметрической идентификации высокотемпературного термопреобразователя // *Автомобиль и электроника. Современные технологии*, 2017. № 11. С. 68–75.

21. Пилипенко Н. В., Заричняк Ю. П., Иванов В. А., Халявин А. М. Параметрическая идентификация дифференциально-разностных моделей теплопереноса в одномерных телах на основе алгоритмов фильтра Калмана // *Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики*, 2020. Т. 20, № 4. С. 584–588. DOI: https://doi.org/10.17586/2226-1494-2020-20-4-584-588.
22. Матвеев М. Г., Копытин А. В., Сирота Е. А. Комбинированный метод идентификации параметров распределенной динамической модели / *Информационные технологии и нанотехнологии (ИТНТ-2018): сборник трудов 4-й Международной конференции и молодежной школы.* Самара, 2018. С. 1651–1657.
23. Пилипенко Н. В. *Применение фильтра Калмана в нестационарной теплометрии.* СПб.: Унив. ИТМО, 2017. 36 с.
24. Tsyganov A. V., Tsyganova Yu. V., Kuvshinova A. N., Tapia Garza H. R. Metaheuristic algorithms for identification of the convection velocity in the convection-diffusion transport model / *CEUR Workshop Proceedings.* vol. 2258, 2018. pp. 188–196. http://ceur-ws.org/Vol-2258/paper24.pdf.
25. Кувшинова А. Н. Динамическая идентификация смешанных граничных условий в модели конвективно-диффузионного переноса в условиях зашумленных измерений // *Журнал СВМО*, 2019. Т. 21, № 4. С. 469–479. DOI: https://doi.org/10.15507/2079-6900.21.201904.469-479.
26. Kuvshinova A. N., Tsyganov A. V., Tsyganova Yu. V., Tapia Garza H. R. Parameter identification algorithm for convection-diffusion transport model // *J. Phys.: Conf. Ser.*, 2021. vol. 1745, 012110. DOI: https://doi.org/10.1088/1742-6596/1745/1/012110.
27. Кувшинова А. Н., Цыганов А. В., Цыганова Ю. В. Математическое моделирование процесса параметрической идентификации моделей конвективно-диффузионного переноса с применением SVD-фильтра Калмана // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2021. Т. 25, № 4. С. 716–737. DOI: https://doi.org/10.14498/vsgtu1876. EDN: AIGGYA.
28. Кувшинова А. Н., Галушкина Д. В. О квадратно-корневой модификации алгоритма Гиллейнса – Де-Мора // *Ученые записки УлГУ. Сер. Математика и информационные технологии*, 2022. № 1. С. 17–22. EDN: AJMGBG.
29. Tsyganov A. V., Tsyganova Yu. V., Kuvshinova A. N. Dynamic identification of boundary conditions for convection-diffusion transport model subject to noisy measurements // *J. Phys.: Conf. Ser.*, 2019. vol. 1368, no. 4, 042029. DOI: https://doi.org/10.1088/1742-6596/1368/4/042029.
30. Мазо А. Б. *Вычислительная гидродинамика*: Часть 1. Математические модели, сетки и сеточные схемы. Казань: Казан. ун-т, 2018. 165 с.
31. Maybeck P. S. *Stochastic Models, Estimation, and Control.* vol. 1 / Mathematics in Science and Engineering. vol. 141. New York, San Francisco, London: Academic Press, 1979. xix+423 pp.
32. Grewal M. S., Andrews A. P. *Kalman Filtering. Theory and Practice with MATLAB.* Hoboken, NJ: John Wiley and Sons, 2015. xvii+617 pp. DOI: https://doi.org/10.1002/9781118984987.

Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2024, vol. 28, no. 2, pp. 345–366
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu2059

MSC: 93A30, 65C20

Identification of parameters of convection–diffusion–reaction model and unknown boundary conditions in the presence of random noise in measurements

***Yu. V. Tsyganova*[1], *A. V. Tsyganov*[2], *A. N. Kuvshinova*[2], *D. V. Galushkina*[1]**

[1] Ilya Ulyanov State Pedagogical University,
4/5, Lenin Square, Ulyanovsk, 432071, Russian Federation.
[2] Ulyanovsk State University,
42, L. Tolstoy st., Ulyanovsk, 432017, Russian Federation.

Abstract

The study considers mathematical models described by partial differential equations, namely, convection-diffusion-reaction models, which are related to heat and mass transfer models and are used in the study of natural and technogenic processes. For this class of models, the actual problem is to identify both the model parameters itself and the boundary conditions included in it based on the results of measuring the values of the desired function at certain points of the area under consideration. The problem is complicated by the presence of incomplete measurements distorted by random noise.

The solution is to develop a combined two-stage identification method based on the sequential application of a gradient-free identification criterion minimization method and a recurrent method for estimating unknown input signals. To apply the above methods, a transition is made from the original

Mathematical Modeling, Numerical Methods and Software Complexes
Research Article

Please cite this article in press as:
Tsyganova Yu. V., Tsyganov A. V., Kuvshinova A. N., Galushkina D. V. Identification of parameters of convection–diffusion–reaction model and unknown boundary conditions in the presence of random noise in measurements, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2024, vol. 28, no. 2, pp. 345–366. EDN: NPCFQG. DOI: 10.14498/vsgtu2059 (In Russian).

Authors' Details:

Yulia V. Tsyganova https://orcid.org/0000-0001-8812-6035
Dr. Phys. & Math. Sci.; Professor; Dept. of Information Technology;
e-mail: tsyganovajv@gmail.com

Andrey V. Tsyganov https://orcid.org/0000-0002-4173-5199
Cand. Phys. & Math. Sci; Professor; Dept. of Higher Mathematics;
e-mail: andrew.tsyganov@gmail.com

Anastasia N. Kuvshinova https://orcid.org/0000-0002-3496-5981
Cand. Phys. & Math. Sci; Associate Professor; Dept. of Higher Mathematics;
e-mail: kuvanulspu@yandex.ru

Darya V. Galushkina https://orcid.org/0000-0003-4041-0533
Postgraduate Student; Dept. of Information Technology; e-mail: dgalushkina73@gmail.com

model described by partial differential equations to a discrete linear stochastic state-space model in which unknown boundary conditions are treated as unknown input signals.

In this paper, new discrete linear stochastic models of convection–diffusion–reaction are constructed for three different types of boundary conditions. A general scheme of the parameter identification process is proposed, including two-stage identification of unknown parameters of a mathematical model and identification of unknown boundary conditions.

To test the efficiency of the proposed method, computer models of convection–diffusion–reaction were built and all algorithms were implemented in `MATLAB`. A series of computational experiments was carried out, the results of which showed that the developed two-stage combined scheme allows one to identify the parameters of the original model, the values of the functions included in the boundary conditions, and also to calculate estimates of the function, which describes the process of convection–diffusion–reaction given incomplete noisy measurements.

The results obtained can be used not only in the study of heat and mass transfer processes, but also in solving problems of identifying the model parameters of discrete-time stochastic systems with unknown input signals and in the presence of random noise.

Keywords: convection–diffusion–reaction models, parameter identification, quadratic identification criterion, discrete-time linear state-space stochastic model, estimation of unknown inputs.

Received: 5th September, 2023 / Revised: 5th December, 2023 / Accepted: 11th December, 2023 / First online: 12th September, 2024

Competing interests. We have no competing interests.

Author contributions and responsibilities. Yu.V. Tsyganova: General concept of the article; Schema of the combined two-stage identification method; Writing — original draft and review & editing. A.V. Tsyganov: Programming implementation of the algorithms; Writing — original draft. A.N. Kuvshinova: Computational experiments; Writing — original draft. D.V. Galushkina: Discrete models of convection–reaction–diffusion; Writing — original draft. The authors bear full responsibility for providing the final manuscript for publication. The final version of the manuscript was approved by all authors.

Funding. The study was supported by a grant from the Russian Science Foundation, project no. 23–21–00361, `https://rscf.ru/en/project/23-21-00361/`.

References

1. Ho B. L., Kalman R. E. Effective construction of linear state-variable models from input/output functions, *Regelungstechnik*, 1966, vol. 14, no. 1-12, pp. 545–548. DOI: `https://doi.org/10.1524/auto.1966.14.112.545`.
2. Åström K.-J., Bohlin T. Numerical identification of linear dynamic systems from normal operating records, *IFAC Proceedings Volumes*, 1965, vol. 2, no. 2, pp. 96–111. DOI: `https://doi.org/10.1016/S1474-6670(17)69024-4`.
3. Ljung L. *System Identification: Theory for the User*. Upper Saddle River, NJ, Prentice-Hall, 1999, xxii+609 pp.
4. Ljung L. Perspectives on system identification, *Ann. Rev. Control*, 2010, vol. 34, no. 1, pp. 1–12. DOI: `https://doi.org/10.1016/j.arcontrol.2009.12.001`.
5. Tsypkin Ya. Z. *Informatsionnaia teoriia identifikatsii* [Information Theory of Identification]. Moscow, Nauka, 1995, 336 pp. (In Russian)

6. Mehra R. Approaches to adaptive filtering, *IEEE Trans. Autom. Control*, 1972, vol. 17, no. 5, pp. 693–698. DOI: https://doi.org/10.1109/TAC.1972.1100100.
7. Aström K. J. Maximum likelihood and prediction error methods, *Automatica*, 1980, vol. 16, no. 5, pp. 551–574. DOI: https://doi.org/10.1016/0005-1098(80)90078-3.
8. Zhang Z. Parameter estimation techniques: a tutorial with application to conic fitting, *Image Vision Comp.*, 1997, vol. 15, no. 1, pp. 59–76. DOI: https://doi.org/10.1016/S0262-8856(96)01112-2.
9. Wilczyński M. Minimax prediction in the linear model with a relative squared error, *Stat. Papers*, 2012, vol. 53, no. 1, pp. 151–164. DOI: https://doi.org/10.1007/s00362-010-0325-6.
10. Semushin I. V. Adaptation in stochastic dynamic systems — Survey and new results II, *Int. J. Commun. Netw. Syst. Sci.*, 2011, vol. 4, no. 4, pp. 266–285. DOI: https://doi.org/10.4236/ijcns.2011.44032.
11. Semushin I. V., Tsyganova J. V. Adaptation in stochastic dynamic systems — Survey and new results IV: Seeking minimum of API in parameters of data, *Int. J. Commun. Netw. Syst. Sci.*, 2013, vol. 6, no. 12, pp. 513–518. DOI: https://doi.org/10.4236/ijcns.2013.612055.
12. Ljung L. Convergence analysis of parametric identification methods, *IEEE Trans. Autom. Control*, 1978, vol. 23, no. 5, pp. 770–783. DOI: https://doi.org/10.1109/TAC.1978.1101840.
13. Bastin G., Gevers M. Stable adaptive observers for nonlinear time-varying systems, *IEEE Trans. Autom. Control*, 1988, vol. 33, no. 7, pp. 650–658. DOI: https://doi.org/10.1109/9.1273.
14. Marino R., Tomei P. Global adaptive observers for nonlinear systems via filtered transformations, *IEEE Trans. Autom. Control*, 1992, vol. 37, no. 8, pp. 1239–1245. DOI: https://doi.org/10.1109/9.151117.
15. Vasil'ev V. P. *Chislennye metody dlia resheniia ekstremal'nykh zadach* [Numerical Methods for Solving Extremal Problems]. Moscow, Nauka, 1988, 550 pp. (In Russian)
16. Gillijns S., De Moor B. Unbiased minimum-variance input and state estimation for linear discrete-time systems, *Automatica*, 2007, vol. 43, no. 1, pp. 111–116. DOI: https://doi.org/10.1016/j.automatica.2006.08.002.
17. Kitanidis P. K. Unbiased minimum-variance linear state estimation, *Automatica*, 1987, vol. 23, no. 6, pp. 775–778. DOI: https://doi.org/10.1016/0005-1098(87)90037-9.
18. Darouach M., Zasadzinski M. Unbiased minimum varianceestimation for systems with unknown exogenous inputs, *Automatica*, 1997, vol. 33, no. 4, pp. 717–719. DOI: https://doi.org/10.1016/S0005-1098(96)00217-8.
19. Isaev S. I., Kozhinov I. A., Kofanov V. I., et al. *Teoriia teplomassoobmena* [Theory of Heat and Mass Transfer]. Moscow, Bauman Moscow State Techn. Univ., 2018, 462 pp.
20. Simbirskiy G. D., Lantrat V. K. Application of the Kalman digital filter for parametric identification high-temperature thermocouple, *Autom. Electron. Modern Technology*, 2017, no. 11, pp. 68–75 (In Russian).
21. Pilipenko N. V., Zarichnyak Yu. P., Ivanov V. A., Khalyavin A. M. Parametric identification of differencial-difference models of heat transfer in one-dimensional bodies based on Kalman filter algorithms, *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2020, vol. 20, no. 4, pp. 584–588 (In Russian). DOI: https://doi.org/10.17586/2226-1494-2020-20-4-584-588.
22. Matveev M. G., Kopytin A. V., Sirota E. A. Combined method for identifying the parameters of a distributed dynamic model, In: *Proc. IV Int. Conf. (ITNT, 2018)*. Samara, 2018, pp. 1651–1657 (In Russian).
23. Pilipenko N. V. *Primenenie fil'tra Kalmana v nestatsionarnoi teplometrii* [Applying the Kalman Filter in Non-Stationary Heat Metering]. St. Petersburg, ITMO Univ., 2017, 36 pp. (In Russian)
24. Tsyganov A. V., Tsyganova Yu. V., Kuvshinova A. N., Tapia Garza H. R. Metaheuristic algorithms for identification of the convection velocity in the convection-diffusion transport

model, In: *CEUR Workshop Proceedings*, vol. 2258, 2018, pp. 188–196. http://ceur-ws.org/Vol-2258/paper24.pdf.

25. Kuvshinova A. N. Dynamic identification of boundary conditions for convection-diffusion transport model in the case of noisy measurements, *Zhurnal SVMO*, 2019, vol. 21, no. 4, pp. 469–479 (In Russian). DOI: https://doi.org/10.15507/2079-6900.21.201904.469-479.
26. Kuvshinova A. N., Tsyganov A. V., Tsyganova Yu. V., Tapia Garza H. R. Parameter identification algorithm for convection-diffusion transport model, *J. Phys.: Conf. Ser.*, 2021, vol. 1745, 012110. DOI: https://doi.org/10.1088/1742-6596/1745/1/012110.
27. Kuvshinova A. N., Tsyganov A. V., Tsyganova Yu. V. Mathematical modeling of parameter identification process of convection-diffusion transport models using the SVD-based Kalman filter, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2021, vol. 25, no. 4, pp. 716–737 (In Russian). DOI: https://doi.org/10.14498/vsgtu1876. EDN: AIGGYA.
28. Kuvshinova A. N., Galushkina D. V. On the square-root modification of the Gillijns – De Moor algorithm, *Uch. Zap. Ul'yanovsk. Gos. Univ. Ser. Matem. Inform. Tekhn.*, 2022, no. 1, pp. 17–22 (In Russian). EDN: AJMGBG.
29. Tsyganov A. V., Tsyganova Yu. V., Kuvshinova A. N. Dynamic identification of boundary conditions for convection-diffusion transport model subject to noisy measurements, *J. Phys.: Conf. Ser.*, 2019, vol. 1368, no. 4, 042029. DOI: https://doi.org/10.1088/1742-6596/1368/4/042029.
30. Mazo A. B. *Vychislitel'naia gidrodinamika* [Computational Fluid Dynamics], Chast' 1. Matematicheskie modeli, setki i setochnye skhemy [Part 1. Mathematical Models, Grids and Grid Schemes]. Kazan, Kazan Univ., 2018, 165 pp. (In Russian)
31. Maybeck P. S. *Stochastic Models, Estimation, and Control*, vol. 1, Mathematics in Science and Engineering, vol. 141. New York, San Francisco, London, Academic Press, 1979, xix+423 pp.
32. Grewal M. S., Andrews A. P. *Kalman Filtering. Theory and Practice with MATLAB.* Hoboken, NJ, John Wiley and Sons, 2015, xvii+617 pp. DOI: https://doi.org/10.1002/9781118984987.

Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2024. Т. 28, № 2. С. 367–377
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu2057
EDN: UNNXFS

УДК 517.58

Некоторые интегральные преобразования одной функции Фокса с четырьмя параметрами

Ф. Г. Хуштова

Институт прикладной математики и автоматизации –
филиал федерального государственного бюджетного научного учреждения
«Федеральный научный центр «Кабардино-Балкарский научный центр
Российской академии наук»,
Россия, 360000, Нальчик, ул. Шортанова, 89 А.

Аннотация

Рассматривается функция Фокса с четырьмя параметрами, которая возникает в теории вырождающихся дифференциальных уравнений с частными производными дробного порядка. В терминах указанной функции были ранее записаны явные решения первой и второй краевых задач в полуполосе для уравнения с оператором Бесселя, действующим по пространственной переменной, и дробной производной по времени.

Для рассматриваемой функции в случае зависимости двух параметров из четырех в работе получена формула преобразования Лапласа, которая выражается через специальную функцию Макдональда. Также получены формулы интегральных преобразований, выражающиеся через обобщенную функцию Райта и более общую H-функцию Фокса.

Вспомогательным средством для доказательства полученных формул является интеграл Меллина–Барнса, с помощью которого записывается рассматриваемая специальная функция. Сходимость несобственных интегралов при этом следует из асимптотических оценок, также приведенных в работе.

Показано, что при частных значениях из формулы преобразования Лапласа следуют известные формулы преобразований экспоненциальной функции и функции Райта со степенными множителями.

Ключевые слова: функция Фокса, функция Макдональда, функция Райта, оператор Бесселя, дробная производная, интегральные преобразования, преобразование Лапласа.

Получение: 15 августа 2023 г. / Исправление: 21 декабря 2023 г. / Принятие: 29 января 2024 г. / Публикация онлайн: 10 октября 2024 г.

Дифференциальные уравнения и математическая физика
Краткое сообщение

Образец для цитирования
Хуштова Ф. Г. Некоторые интегральные преобразования одной функции Фокса с четырьмя параметрами // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2024. Т. 28, № 2. С. 367–377. EDN: UNNXFS. DOI: 10.14498/vsgtu2057.

Сведения об авторе
Фатима Гидовна Хуштова https://orcid.org/0000-0003-4088-3621
кандидат физико-математических наук; научный сотрудник; отдел дробного исчисления;
e-mail: khushtova@yandex.ru

Введение. Пусть $0 < \rho \leqslant 2$, μ, σ и $\nu \in \mathbb{C}$, $(\sigma+\nu)/2 \notin \mathbb{Z}$. Рассмотрим функцию

$$\mathcal{J}_\nu^{\rho,\mu,\sigma}(z) = H_{2,3}^{2,1}\left[\,\frac{z^2}{4}\,\middle|\,\begin{matrix}\big(1-\sigma/2,1\big),\ \big(\mu-\rho\,\sigma/2,\rho\big)\\ \big(\nu/2,1\big),\ \big(1-\sigma/2,1\big),\ \big(-\nu/2,1\big)\end{matrix}\,\right], \tag{1}$$

где $H_{2,3}^{2,1}[\cdots]$ — *H-функция Фокса* [1–3].

Функция (1) возникает в теории вырождающихся дифференциальных уравнений с частными производными дробного порядка. В частности, в терминах функции (1) записываются решения некоторых краевых задач для дифференциального уравнения

$$B_x u(x,y) - D_{0y}^\alpha u(x,y) = 0, \tag{2}$$

где

$$B_x u = x^{-b}\frac{\partial}{\partial x}\Big(x^b\frac{\partial u}{\partial x}\Big)$$

— оператор Бесселя, $|b| < 1$, D_{0y}^α — оператор дробного дифференцирования в смысле Римана—Лиувилля порядка α, $0 < \alpha \leqslant 1$ [4, § 0.1]. Например, решение первой краевой задачи (задачи Дирихле) для уравнения (2) в полуполосе $\Omega = \{(x,y) : 0 < x < \infty, 0 < y < T\}$

$$\lim_{y\to 0} y^{1-\alpha}u(x,y) = 0, \quad 0 < x < \infty,$$

$$u(0,y) = \tau(y), \quad 0 < y < T,$$

имеет вид [5]

$$u(x,y) = \int_0^y K_1(x,y-\eta)\tau(\eta)d\eta,$$

где

$$K_1(x,y) = \frac{x^\beta y^{-\alpha\beta/2-1}}{2^\beta\Gamma(\beta)}\mathcal{J}_\beta^{\alpha,\alpha,2+\beta}(xy^{-\alpha/2}), \quad \beta = (1-b)/2,$$

$\Gamma(\beta)$ — гамма-функция Эйлера [6, § 1], [7, § 1.1, форм. (1)].

Решение второй краевой задачи (задачи Неймана) в области Ω

$$\lim_{y\to 0} y^{1-\alpha}u(x,y) = 0, \quad 0 < x < \infty,$$

$$\lim_{x\to 0} x^b u_x(x,y) = \nu(y), \quad 0 < y < T,$$

имеет вид [8]

$$u(x,y) = \int_0^y K_2(x,y-\eta)\tau(\eta)d\eta,$$

где

$$K_2(x,y) = -\frac{x^\beta y^{\alpha\beta/2-1}}{2^{1-\beta}\Gamma(1-\beta)}\mathcal{J}_{-\beta}^{\alpha,\alpha,2-\beta}(xy^{-\alpha/2}).$$

Некоторые свойства функции (1), такие как представление через контурный интеграл, асимптотические свойства, формулы дифференцирования и интегрирования, рекуррентные соотношения, рассмотрены в работах [9–13]. Отметим при этом, что основные свойства функции (1), такие как, например, представление через контурный интеграл Меллина—Барнса, асимптотические свойства, разложение в степенные ряды, следуют из свойств более общей H-функции. Некоторые интегральные преобразования H-функции Фокса исследованы в работах [1–3].

Среди более поздних работ, посвященных интегральным преобразованиям с различными специальными функциями гипергеометрического типа в ядрах, отметим, например, работы [14–23].

В работах [24–26] развиты методы операторов преобразования для эллиптических и параболических уравнений с операторами Бесселя.

1. Вспомогательные сведения. Далее в работе

$$K_\nu(z) = \frac{1}{4\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \Gamma(\nu/2+s)\,\Gamma(-\nu/2+s)\left(\frac{z}{2}\right)^{-2s} ds, \quad \gamma > |\mathrm{Re}\,\nu|/2, \tag{3}$$

— *функция Макдональда* [27, § 5.7], [28, § 6, форм. (6.36)];

$$\phi(\rho,\delta;z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!\,\Gamma(\rho k+\delta)}, \quad \rho > -1,$$

— *функция Райта* [29, 30];

$${}_p\Psi_q\left[z \left| \begin{array}{l} (a_p,\, A_p) \\ (b_q,\, B_q) \end{array} \right. \right] = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\Gamma(s)\prod\limits_{j=1}^{p}\Gamma(a_j - A_j s)}{\prod\limits_{j=1}^{q}\Gamma(b_j - B_j s)} (-z)^{-s} ds. \tag{4}$$

— *обобщенная функция Райта* [3, § 1.8, форм. (1.140)], $p,\ q = 0,1,2,\ldots$, $p^2+q^2 \neq 0$, $a_i, b_j \in \mathbb{C}$, $A_i,\ B_j \in \mathbb{R}$ $(a_i, b_j \neq 0; i = 1,2,\ldots,p; j = 1,2,\ldots,q)$.

Функция (1) может быть представлена с помощью интеграла Меллина—Барнса [11]:

$$\mathcal{J}_\nu^{\rho,\mu,\sigma}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{L_{i\infty}} \Theta(s)\left(\frac{z}{2}\right)^{-2s} ds, \quad z \in \mathbb{C}, \tag{5}$$

где $L_{i\infty} = (\omega - i\infty, \omega + i\infty)$, $\omega_1 < \omega < \omega_2$, $\omega_1 = -\min\{\mathrm{Re}\,\nu/2,\ 1 - \mathrm{Re}\,\sigma/2\}$, $\omega_2 = \mathrm{Re}\,\sigma/2$,

$$\Theta(s) = \frac{\Gamma(\nu/2+s)\,\Gamma(1-\sigma/2+s)\,\Gamma(\sigma/2-s)}{\Gamma(\mu-\rho\,\sigma/2+\rho\,s)\,\Gamma(1+\nu/2-s)}.$$

Для функции (1) справедливы асимптотические разложения [11]

$$\mathcal{J}_\nu^{\rho,\mu,\sigma}(z) = a_0\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu} + b_0\left(\frac{z}{2}\right)^{2-\sigma} + o(z^\delta), \quad z \to 0, \tag{6}$$

где $\delta = \min\{\mathrm{Re}\,\nu, 2-\mathrm{Re}\,\sigma\}$,

$$a_0 = \frac{\Gamma\,(1-(\nu+\sigma)/2)\,\Gamma\,((\nu+\sigma)/2)}{\Gamma\,(\mu-\rho(\nu+\sigma)/2)\,\Gamma\,(1+\nu)}, \quad b_0 = \frac{\Gamma\,((\nu+\sigma)/2-1)}{\Gamma\,(\mu-\rho)\,\Gamma\,(2+(\nu-\sigma)/2)},$$

и

$$\mathcal{J}_\nu^{\rho,\mu,\sigma}(z) = c_0\Big(\frac{z}{2}\Big)^{-\sigma} + o(z^{-\sigma}), \quad z\to\infty, \tag{7}$$

где

$$c_0 = \frac{\Gamma\,((\nu+\sigma)/2)}{\Gamma\,(\mu)\,\Gamma\,(1+(\nu-\sigma)/2)}.$$

Также далее понадобятся частные случаи:

$$\mathcal{J}_\nu^{1,1,2+\nu}(z) = \Big(\frac{z}{2}\Big)^{\nu}\exp\Big(-\frac{z^2}{4}\Big), \tag{8}$$

$$\sqrt{z}\,\mathcal{J}_{-1/2}^{2\rho,\mu+\rho,3/2}(z) = \sqrt{2\pi}\,\phi(-\rho,\mu;-z). \tag{9}$$

2. Основные результаты. Докажем следующие формулы.

2.1. *Для любого* $\mathrm{Re}\,\mu>0$ *имеет место равенство*

$$\int_0^\infty e^{-t}t^{\mu-\rho-\rho\,\nu/2-1}\mathcal{J}_\nu^{\rho,\mu,\nu+2}(zt^{-\rho/2})\,dt = 2K_\nu(z). \tag{10}$$

Доказательство. Сходимость интеграла в (10) следует из (6) и (7). Согласно (5) можем записать

$$\mathcal{J}_\nu^{\rho,\mu,\nu+2}(zt^{-\rho/2}) = \frac{1}{2\pi i}\int_{L_1}\Theta_1(s)\Big(\frac{zt^{-\rho/2}}{2}\Big)^{-2s}ds,$$

где

$$\Theta_1(s) = \frac{\Gamma\,(\nu/2+s)\,\Gamma\,(-\nu/2+s)}{\Gamma\,(\mu-\rho-\rho\,\nu/2+\rho s)}, \tag{11}$$

$$L_1 = (\omega-i\infty,\omega+i\infty), \quad \omega>|\mathrm{Re}\,\nu|/2.$$

Тогда левая часть (10) запишется в виде

$$\int_0^\infty e^{-t}t^{\mu-\rho-\rho\,\nu/2-1}\mathcal{J}_\nu^{\rho,\mu,\nu+2}(zt^{-\rho/2})\,dt =$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty e^{-t}t^{\mu-\rho-\rho\,\nu/2-1}\int_{L_1}\Theta_1(s)\Big(\frac{zt^{-\rho/2}}{2}\Big)^{-2s}ds\,dt. \tag{12}$$

Меняя в (12) порядок интегрирования, получим

$$\int_0^\infty e^{-t}t^{\mu-\rho-\rho\,\nu/2-1}\mathcal{J}_\nu^{\rho,\mu,\nu+2}(zt^{-\rho/2})\,dt =$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{L_1}\Theta_1(s)\Big(\frac{z}{2}\Big)^{-2s}\int_0^\infty e^{-t}t^{\mu-\rho-\rho\,\nu/2+\rho s-1}dt\,ds. \tag{13}$$

Согласно формуле [31, форм. 2.3.3.1]

$$\int_0^\infty t^{a-1}e^{-pt^b}dt = b^{-1}p^{-a/b}\Gamma(a/b), \quad b,\ \mathrm{Re}\,a,\ \mathrm{Re}\,p > 0, \tag{14}$$

внутренний интеграл в (13) равен

$$\int_0^\infty e^{-t}t^{\mu-\rho-\rho\,\nu/2+\rho s-1}dt = \Gamma\left(\mu-\rho-\rho\,\nu/2+\rho s\right).$$

Подставляя найденное значение в (13) и учитывая представления (11) и (3), приходим к (10).

В терминах преобразования Лапласа формулу (10) можно записать в виде

$$\int_0^\infty e^{-pt}t^{\mu-\rho-\rho\,\nu/2-1}\mathcal{J}_\nu^{\rho,\mu,\nu+2}(t^{-\rho/2})\,dt = \\ = 2p^{\rho-\mu+\rho\,\nu/2}K_\nu(p^{\rho/2}), \quad \mathrm{Re}\,p>0. \tag{15}$$

При $\rho=\mu=1$ из (8) и (15) получим формулу

$$\int_0^\infty t^{-\nu-1}e^{-pt-1/(4t)}dt = 2^{\nu+1}p^{\nu/2}K_\nu(\sqrt{p}), \quad \mathrm{Re}\,p>0,$$

которая совпадает с приведенной в [31, форм. 2.3.16.1].

Из (15) при $\rho=2\beta$, $\mu=\beta+\delta$, $\nu=-1/2$ с учетом представлений (9) и

$$K_{\pm 1/2}(z) = \sqrt{\pi/(2z)}e^{-z}$$

получим формулу

$$\int_0^\infty e^{-pt}t^{\delta-1}\phi(-\beta,\delta;-t^{-\beta})dt = p^{-\delta}e^{-p^\beta}, \quad \mathrm{Re}\,p>0,$$

которая совпадает с приведенной в [32, § 3.2, форм. (3.2.7)]. □

2.2. *Пусть выполняется одно из условий*: $-1<\mathrm{Re}\,\nu<2-\mathrm{Re}\,\sigma$ *либо* $2-\mathrm{Re}\,\nu<\mathrm{Re}\,\sigma<4+\mathrm{Re}\,\nu$. *Тогда для* $\mathrm{Re}\,z>0$ *имеет место формула*

$$\int_0^\infty e^{-zt^2/4}t^{\nu+1}\mathcal{J}_\nu^{\rho,\mu,\sigma}(t)\,dt = \\ = 2^{\nu+1}z^{(\sigma-\nu)/2-1}{}_2\Psi_1\left[z\,\middle|\,\begin{matrix}\left((\sigma+\nu)/2,1\right),\ (1,1)\\ (\mu,\rho)\end{matrix}\right]. \tag{16}$$

Доказательство. Сходимость интеграла в (16) следует из (6) и (7). Из интегрального представления (5) имеем

$$\int_0^\infty e^{-zt^2/4}t^{\nu+1}\mathcal{J}_\nu^{\rho,\mu,\sigma}(t)\,dt = \frac{1}{2\pi i}\int_L 2^{2s}\Theta(s)\int_0^\infty t^{\nu+1-2s}e^{-zt^2/4}dt\,ds. \tag{17}$$

Из формулы (14) имеем

$$\int_0^\infty t^{\nu+1-2s} e^{-zt^2/4} dt = 2^{\nu-2s+1}\Gamma\left(1+\nu/2-s\right) z^{s-\nu/2-1}.$$

Подставляя найденное значение в (17), находим

$$\int_0^\infty e^{-zt^2/4} t^{\nu+1} \mathcal{J}_\nu^{\rho,\mu,\sigma}(t)\,dt = 2^{\nu+1} z^{-\nu/2-1} \frac{1}{2\pi i}\int_L \Theta_1(s) z^s\,ds,$$

где $\Theta_1(s) = \dfrac{\Gamma\left(\nu/2+s\right)\Gamma\left(1-\sigma/2+s\right)\Gamma\left(\sigma/2-s\right)}{\Gamma\left(\mu-\rho\,\sigma/2+\rho\,s\right)}$.

Сделаем замену $\tau = \sigma/2 - s$. Получим

$$\int_0^\infty e^{-zt^2/4} t^{\nu+1} \mathcal{J}_\nu^{\rho,\mu,\sigma}(t)\,dt = 2^{\nu+1} z^{(\sigma-\nu)/2-1} \frac{1}{2\pi i}\int_{L_2} \Theta_2(\tau) z^{-\tau}\,d\tau, \tag{18}$$

где

$$L_2 = (\omega - i\infty, \omega + i\infty), \quad 0 < \omega < \min\{\mathrm{Re}\,(\sigma+\nu)/2, 1\},$$

$$\Theta_2(\tau) = \frac{\Gamma((\sigma+\nu)/2-\tau)\Gamma(1-\tau)\Gamma(\tau)}{\Gamma(\mu-\rho\,\tau)}.$$

Сравнивая правую часть (18) с представлением (4), приходим к (16). □

2.3. *Пусть выполняется одно из условий*: $-\mathrm{Re}\,\alpha < \mathrm{Re}\,\nu < 2 - \mathrm{Re}\,\sigma$ *либо* $2 - \mathrm{Re}\,\nu < \mathrm{Re}\,\sigma < 2 + \mathrm{Re}\,\alpha$. *Тогда для* $\mathrm{Re}\,z > 0$ *имеет место формула*

$$\int_0^\infty e^{-t/z} t^{\alpha-1} \mathcal{J}_\nu^{\rho,\mu,\sigma}(t)\,dt = \\ = z^\alpha H_{3,3}^{2,2}\left[\frac{z^2}{4}\,\middle|\,\begin{matrix}\big(1-\alpha,2\big),\ \big(1-\sigma/2,1\big),\ \big(\mu-\rho\,\sigma/2,\rho\big)\\ \big(\nu/2,1\big),\ \big(1-\sigma/2,1\big),\ \big(-\nu/2,1\big)\end{matrix}\right]. \tag{19}$$

Доказательство. Сходимость интеграла в (19) следует из (6) и (7). Из интегрального представления (5) имеем

$$\int_0^\infty e^{-t/z} t^{\alpha-1} \mathcal{J}_\nu^{\rho,\mu,\sigma}(t)\,dt = \frac{1}{2\pi i}\int_L 2^{2s}\Theta(s)\int_0^\infty t^{\alpha-2s-1} e^{-t/z} dt\,ds. \tag{20}$$

Из формулы (14) имеем

$$\int_0^\infty t^{\alpha-2s-1} e^{-t/z} dt = \Gamma(\alpha-2s) z^{\alpha-2s}.$$

Подставляя найденное значение в (20), получаем

$$\int_0^\infty e^{-t/z} t^{\alpha-1} \mathcal{J}_\nu^{\rho,\mu,\sigma}(t)\,dt = \frac{z^\alpha}{2\pi i}\int_L \Theta_2(s)\Big(\frac{z}{2}\Big)^{-2s} ds, \tag{21}$$

где

$$\Theta_2(s) = \frac{\Gamma(\nu/2+s)\Gamma(1-\sigma/2+s)\Gamma(\sigma/2-s)\Gamma(\alpha-2s)}{\Gamma(\mu-\rho\,\sigma/2+\rho\,s)\Gamma(1+\nu/2-s)}.$$

Сравнивая правую часть (21) с представлением H-функции Фокса [1, форм. 8.3.1.1], [3, § 1.2, форм. (1.2)], приходим к (19). □

Заключение. В работе получены некоторые интегральные преобразования специальной функции Фокса, которая зависит от четырех параметров. Рассматриваемая функция представляет интерес в связи с ее применением в теории вырождающихся дифференциальных уравнений в частных производных. Показано, что результаты рассматриваемых интегральных преобразований можно записать в терминах известных специальных функций.

Конкурирующие интересы. Конкурирующих интересов не имею.

Авторский вклад и ответственность. Я несу полную ответственность за предоставление окончательной версии рукописи в печать. Окончательная версия рукописи мною одобрена.

Финансирование. Исследование выполнялось без финансирования.

Библиографический список

1. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. *Интегралы и ряды.* Т. 3: Дополнительные главы. М.: Физматлит, 2003. 708 с.
2. Kilbas A. A., Saigo M. *H-Transforms. Theory and Applications* / Analytical Methods and Special Functions. vol. 9. Boca Raton, FL: Chapman & Hall/CRC, 2004. xii+389 pp.
3. Mathai A. M., Saxena R. K., Haubold H. J. *The H-Function. Theory and Applications.* Dordrecht: Springer, 2010. xiv+268 pp. DOI: https://doi.org/10.1007/978-1-4419-0916-9.
4. Нахушев А. М. *Дробное исчисление и его применение.* М.: Физматлит, 2003. 271 с.
5. Хуштова Ф. Г. Первая краевая задача в полуполосе для уравнения параболического типа с оператором Бесселя и производной Римана–Лиувилля // *Матем. заметки*, 2016. Т. 99, № 6. С. 921–928. EDN: WGAQIH. DOI: https://doi.org/10.4213/mzm10759.
6. Кузнецов Д. С. *Специальные функции.* М.: Высш. шк., 1962. 248 с.
7. Бейтмен Г., Эрдейи А. *Высшие трансцендентные функции.* Т. 1: Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра. М.: Наука, 1965. 294 с.
8. Хуштова Ф. Г. Вторая краевая задача в полуполосе для уравнения параболического типа с оператором Бесселя и частной производной Римана–Лиувилля // *Матем. заметки*, 2018. Т. 103, № 3. С. 460–470. EDN: YSWJYG. DOI: https://doi.org/10.4213/mzm10986.
9. Хуштова Ф. Г. Формулы дифференцирования и формула автотрансформации для одного частного случая функции Фокса // *Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук*, 2020. Т. 20, № 4. С. 15–18. EDN: DKAMMT. DOI: https://doi.org/10.47928/1726-9946-2020-20-4-15-18.
10. Хуштова Ф. Г. О некоторых свойствах одной специальной функции // *Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук*, 2022. Т. 22, № 2. С. 34–40. EDN: LITQCZ. DOI: https://doi.org/10.47928/1726-9946-2022-22-2-34-40.
11. Хуштова Ф. Г. Об интегральном представлении Меллина–Барнса одной специальной функции // *Известия Кабардино-Балкарского научного центра РАН*, 2022. № 6. С. 19–27. EDN: TXVTRD. DOI: https://doi.org/10.35330/1991-6639-2022-6-110-19-27.
12. Хуштова Ф. Г. Некоторые формулы дробного интегрирования от одной функции Фокса с четырьмя параметрами // *Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук*, 2022. Т. 22, № 4. С. 29–38. EDN: NUYVKX. DOI: https://doi.org/10.47928/1726-9946-2022-22-4-29-38.
13. Хуштова Ф. Г. К свойствам одной функции Фокса // *Вестн. КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*, 2023. Т. 42, № 1. С. 140–149. EDN: FXXPSA. DOI: https://doi.org/10.26117/2079-6641-2023-42-1-140-149.
14. Ворошилов А. А. Дробное дифференцирование типа Эрдейи–Кобера H-функции Фокса // *Вестн. Гродненск. гос. ун-та им. Янки Купалы. Сер. 2. Мат. Физ. Информ., вычисл. техн. и управл.*, 2012. Т. 2, № 129. С. 11–20. EDN: TSVCDL.

15. Авсиевич А. В., Авсиевич В. В. Преобразование Лапласа в системах автоматического управления дробного порядка // *Наука и образование транспорту*, 2013. №1. С. 195–199. EDN: SJGJKR.
16. Авсиевич А. В. Преобразование Лапласа специальных функций Райта // *Вестник транспорта Поволжья*, 2013. №6. С. 50–52. EDN: RVKGWX.
17. Заикина С. М. Обобщённое интегральное преобразование Лапласа и его применение к решению некоторых интегральных уравнений // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2014. №1. С. 19–24. EDN: TFGEOL. DOI: https://doi.org/10.14498/vsgtu1265.
18. Qureshi M. I., Kabra D. K., Baboo M. S. Laplace transforms of multiple hypergeometric functions using Mellin–Barnes type contour integration // *Asia Pac. J. Math.*, 2015. vol. 2, no. 2. pp. 94–107.
19. Скоромник О. В. Интегральные преобразования с вырожденной гипергеометрической функцией Куммера и нормированной функцией Бесселя в ядрах и интегральные уравнения первого рода в пространстве суммируемых функций // *Вестн. Полоцкого гос. ун-та. Сер. С. Фундамент. науки*, 2016. №12. С. 104–110. EDN: XRFOMX.
20. Karp D., Prilepkina E. G. Applications of the Stieltjes and Laplace transform representations of the hypergeometric functions // *Integral Transforms Spec. Funct.*, 2017. vol. 28, no. 10. pp. 710–731. DOI: https://doi.org/10.1080/10652469.2017.1351964.
21. Скоромник О. В. Двумерное интегральное преобразование с модифицированной H-функцией в пространстве суммируемых функций // *Вестн. Полоцкого гос. ун-та. Сер. С. Фундамент. науки*, 2018. №4. С. 187–193. EDN: UXBAMJ.
22. Папкович М. В., Скоромник О. В. Двумерное интегральное преобразование с G-функцией Мейера в ядре в пространстве суммируемых функций // *Вестн. Полоцкого гос. ун-та. Сер. С. Фундамент. науки*, 2019. №4. С. 131–136. EDN: HFPVNO.
23. Mohammed A. O., Rakha M. A., Awad M. M., Rathie A. K. On several new Laplace transforms of generalized hypergeometric functions ${}_2F_2(x)$ // *Bol. Soc. Parana. Mat.* (3), 2021. vol. 39, no. 4. pp. 97–109. DOI: https://doi.org/10.5269/bspm.42207.
24. Катрахов В. В., Ситник С. М. Метод операторов преобразования и краевые задачи для сингулярных эллиптических уравнений // *Современная математика. Фундаментальные направления*, 2018. Т. 64, №2. С. 211–426. EDN: AXVBAI. DOI: https://doi.org/10.22363/2413-3639-2018-64-2-211-426.
25. Ситник С. М., Шишкина Э. Л. *Метод операторов преобразования для дифференциальных уравнений с операторами Бесселя.* М.: Физматлит, 2019. 221 с. EDN: YGUEZW.
26. *Transmutation Operators and Applications* / Trends in Mathematics / eds. V. V. Kravchenko, S. M. Sitnik. Cham: Birkhäuser, 2020. xvii+686 pp. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-030-35914-0.
27. Лебедев Н. Н. *Специальные функции и их приложения.* М.: Физматлит, 1963. 358 с.
28. Маричев О. И. *Метод вычисления интегралов от специальных функций (теория и таблицы формул).* Мн.: Наука и техника, 1978. 312 с.
29. Wright E. M. On the coefficients of power series having exponential singularities // *J. Lond. Math. Soc.*, 1933. vol. s1-8, no. 1. pp. 71–79. DOI: https://doi.org/10.1112/jlms/s1-8.1.71.
30. Wright E. M. The generalized Bessel function of order greater than one // *Q. J. Math.*, 1940. vol. os-11, no. 1. pp. 36–48. DOI: https://doi.org/10.1093/qmath/os-11.1.36.
31. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. *Интегралы и ряды.* Т. 1: Элементарные функции. М.: Физматлит, 2002. 632 с.
32. Псху А. В. *Уравнения в частных производных дробного порядка.* М.: Наука, 2005. 199 с. EDN: QJPLZX.

Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2024, vol. 28, no. 2, pp. 367–377
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu2057

MSC: 33C60, 33E50, 35R11

Some integral transformations of a Fox function with four parameters

F. G. Khushtova

Institute of Applied Mathematics and Automation
of Kabardin-Balkar Scientific Centre of RAS,
89 A, Shortanov st., Nalchik, 360000, Russian Federation.

Abstract

The study examines the Fox function with four parameters, which arises in the theory of degenerate differential equations with partial derivatives of fractional order. In terms of this function, explicit solutions to the first and second boundary value problems in a half-space were previously derived for the equation with the Bessel operator acting on the spatial variable and a fractional derivative with respect to time.

For the function under consideration, when two of the four parameters are dependent, a Laplace transform formula has been obtained, expressed in terms of the special MacDonald function. Additionally, integral transformation formulas have been derived, expressed through the generalized Wright function and the more general H-function of Fox.

An auxiliary tool for proving the obtained formulas is the Mellin–Barnes integral, which is used to express the special function under consideration. The convergence of the improper integrals follows from the asymptotic estimates also provided in the work.

It is shown that for specific values from the Laplace transform formula, known transformation formulas for the exponential function and the Wright function with power multipliers follow.

Keywords: Fox function, Macdonald function, Wright function, Bessel operator, fractional derivative, integral transformations, Laplace transform.

Received: 15th August, 2023 / Revised: 21st December, 2023 /
Accepted: 29th January, 2024 / First online: 10th October, 2024

Differential Equations and Mathematical Physics
Short Communication

Please cite this article in press as:
Khushtova F. G. Some integral transformations of a Fox function with four parameters, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2024, vol. 28, no. 2, pp. 367–377. EDN: UNNXFS. DOI: 10.14498/vsgtu2057 (In Russian).

Author's Details:
Fatima G. Khushtova https://orcid.org/0000-0003-4088-3621
Cand. Phys. & Math. Sci.; Researcher; Dept. of Fractional Calculus;
e-mail: khushtova@yandex.ru

Competing interests. I have no competing interests.

Authors' contributions and responsibilities. I take full responsibility for providing the final version of the manuscript for publication. The final version of the manuscript has been approved by me.

Funding. The research was conducted without funding.

References

1. Prudnikov A. P., Brychkov Yu. A., Marichev O. I. *Integrals and Series*, vol. 3, More Special Functions. New York, Gordon and Breach Science Publ., 1990, 800 pp.
2. Kilbas A. A., Saigo M. *H-Transforms. Theory and Applications*, Analytical Methods and Special Functions, vol. 9. Boca Raton, FL, Chapman & Hall/CRC, 2004, xii+389 pp.
3. Mathai A. M., Saxena R. K., Haubold H. J. *The H-Function. Theory and Applications*. Dordrecht, Springer, 2010, xiv+268 pp. DOI: https://doi.org/10.1007/978-1-4419-0916-9.
4. Nakhushev A. M. *Drobnoe ischislenie i ego primenenie* [Fractional Calculus and Its Applications]. Moscow, Fizmatlit, 2003, 271 pp. (In Russian)
5. Khushtova F. G. First boundary-value problem in the half-strip for a parabolic-type equation with Bessel 0perator and Riemann–Liouville derivative, *Math. Notes*, 2016, vol. 99, no. 6, pp. 916–923. EDN: WPITGJ. DOI: https://doi.org/10.1134/S0001434616050308.
6. Kuznetsov D. S. *Spetsial'nye funktsii* [Special Functions]. Moscow, Vyssh. Shk., 1962, 248 pp. (In Russian)
7. Erdélyi A, Magnus W., Oberhettinger F., Tricomi F. G. *Higher Transcendental Functions*, vol. I, Bateman Manuscript Project. New York, McGraw-Hill Book Co., 1953, xxvi+302 pp.
8. Khushtova F. G. The second boundary-value problem in a half-strip for a parabolic-type equation with Bessel operator and Riemann–Liouville partial derivative, *Math. Notes*, 2018, vol. 103, no. 3, pp. 474–482. EDN: XXXDBZ. DOI: https://doi.org/10.1134/S0001434618030136.
9. Khushtova F. G. Differentiation formulas and the autotransformation formula for one particular case of the Fox function, *Dokl. Adygsk. (Cherkessk.) Mezhdun. Akad. Nauk*, 2020, vol. 20, no. 4, pp. 15–18 (In Russian). EDN: DKAMMT. DOI: https://doi.org/10.47928/1726-9946-2020-20-4-15-18.
10. Khushtova F. G. On some properties of one special function, *Dokl. Adygsk. (Cherkessk.) Mezhdun. Akad. Nauk*, 2022, vol. 22, no. 2, pp. 34–40 (In Russian). EDN: LITQCZ. DOI: https://doi.org/10.47928/1726-9946-2022-22-2-34-40.
11. Khushtova F. G. On the Mellin–Barnes integral representation of one special function, *Izv. Kabard.-Balkarsk. Nauchn. Tsentra RAN*, 2022, no. 6, pp. 19–27 (In Russian). EDN: TXVTRD. DOI: https://doi.org/10.35330/1991-6639-2022-6-110-19-27.
12. Khushtova F. G. On some formulas for fractional integration of one Fox function with four parameters, *Dokl. Adygsk. (Cherkessk.) Mezhdun. Akad. Nauk*, 2022, vol. 22, no. 4, pp. 29–38 (In Russian). EDN: NUYVKX. DOI: https://doi.org/10.47928/1726-9946-2022-22-4-29-38.
13. Khushtova F. G. To the properties of one Fox function, *Vestn. KRAUNC. Fiz.-Mat. Nauki*, 2023, vol. 42, no. 1, pp. 140–149 (In Russian). EDN: FXXPSA. DOI: https://doi.org/10.26117/2079-6641-2023-42-1-140-149.
14. Voroshilov A. A. Erdélyi–Kober type fractional differentiation of the Fox H-function, *Vestn. Grodnensk. Gos. Univ. im. Yanki Kupaly. Ser. 2. Mat. Fiz. Inform., Vychisl. Tekhn. Upravl.*, 2012, vol. 2, no. 129, pp. 11–20 (In Russian). EDN: TSVCDL.
15. Avsievich A. V., Avsievich V. V. Laplace transform in fractional order automatic control systems, *Nauka Obrazov. Transp.*, 2013, no. 1, pp. 195–199 (In Russian). EDN: SJGJKR.
16. Avsievich A. V. The Laplace transform of special Wright functions, *Vestn. Transp. Povolzh.*, 2013, no. 6, pp. 50–52 (In Russian). EDN: RVKGWX.
17. Zaikina S. M. Generalized integral Laplace transform and its application to solving some integral equations, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara

State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2014, no. 1, pp. 19–24 (In Russian). EDN: TFGEOL. DOI: https://doi.org/10.14498/vsgtu1265.

18. Qureshi M. I., Kabra D. K., Baboo M. S. Laplace transforms of multiple hypergeometric functions using Mellin–Barnes type contour integration, *Asia Pac. J. Math.*, 2015, vol. 2, no. 2, pp. 94–107.
19. Skoromnik O. V. Integral transforms with the confluent hyperdeometric function of Kummer and the cut Bessel function in the kernels and integral equations of the first kind in the space of summable functions, *Vestn. Polotsk. Gosud. Univ. Ser. C. Fundament. Nauki*, 2016, no. 12, pp. 104–110 (In Russian). EDN: XRFOMX.
20. Karp D., Prilepkina E. G. Applications of the Stieltjes and Laplace transform representations of the hypergeometric functions, *Integral Transforms Spec. Funct.*, 2017, vol. 28, no. 10, pp. 710–731. DOI: https://doi.org/10.1080/10652469.2017.1351964.
21. Skoromnik O. V. Two-dimentional integral transform with the H-function in the kernel in the space of summable functions, *Vestn. Polotsk. Gosud. Univ. Ser. C. Fundament. Nauki*, 2018, no. 4, pp. 187–193 (In Russian). EDN: UXBAMJ.
22. Papkovich M. V., Skoromnik O. V. Two-dimentional integral transform with the meijer G-function in the kernel in the space of summable functions, *Vestn. Polotsk. Gosud. Univ. Ser. C. Fundament. Nauki*, 2019, no. 4, pp. 131–136 (In Russian). EDN: HFPVNO.
23. Mohammed A. O., Rakha M. A., Awad M. M., Rathie A. K. On several new Laplace transforms of generalized hypergeometric functions ${}_2F_2(x)$, *Bol. Soc. Parana. Mat.* (3), 2021, vol. 39, no. 4, pp. 97–109. DOI: https://doi.org/10.5269/bspm.42207.
24. Katrakhov V. V., Sitnik S. M. The transmutation method and boundary-value problems for singular elliptic equations, *Contemporary Mathematics. Fundamental Directions*, 2018, vol. 64, no. 2, pp. 211–426 (In Russian). EDN: AXVBAI. DOI: https://doi.org/10.22363/2413-3639-2018-64-2-211-426.
25. Sitnik S. M., Shishkina E. L. *Metod operatorov preobrazovaniia dlia differentsial'nykh uravnenii s operatorami Besselia* [Method of Transformation Operators for Differential Equations with Bessel Operators]. Moscow, Fizmatlit, 2019, 224 pp. (In Russian). EDN: YGUEZW.
26. *Transmutation Operators and Applications*, Trends in Mathematics, eds. V. V. Kravchenko, S. M. Sitnik. Cham, Birkhäuser, 2020, xvii+686 pp. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-030-35914-0.
27. Lebedev N. N. *Special Functions and Their Applications.* Englewood Cliffs, N.J., Prentice Hall, 1965, xii+308 pp.
28. Marichev O. I. *Handbook of Integral Transforms of Higher Transcendental Functions: Theory and Algorithmic Tables*, Ellis Horwood Series in Mathematics and its Applications. Chichester, Ellis Horwood Limited, 1983, 336 pp.
29. Wright E. M. On the coefficients of power series having exponential singularities, *J. Lond. Math. Soc.*, 1933, vol. s1-8, no. 1, pp. 71–79. DOI: https://doi.org/10.1112/jlms/s1-8.1.71.
30. Wright E. M. The generalized Bessel function of order greater than one, *Q. J. Math.*, 1940, vol. os-11, no. 1, pp. 36–48. DOI: https://doi.org/10.1093/qmath/os-11.1.36.
31. Prudnikov A. P., Brychkov Yu. A., Marichev O. I. *Integrals and Series*, vol. 1, Elementary Functions. New York-London, Gordon and Breach Science Publishers, 1986, 798 pp.
32. Pskhu A. V. *Uravneniia v chastnykh proizvodnykh drobnogo poriadka* [Fractional Partial Differential Equations]. Moscow, Nauka, 2005, 199 pp. (In Russian). EDN: QJPLZX.

Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2024. Т. 28, № 2. С. 378–389
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu2061
EDN: WTKDQB

УДК 519.63:534.113

Идентификация параметров стержня с продольным прямоугольным пазом по двум спектрам собственных частот изгибных колебаний

И. М. Утяшев[1]***, А. Ф. Фатхелисламов***[2]

[1] Институт механики им. Р.Р. Мавлютова —
обособленное структурное подразделение ФГБНУ УФИЦ РАН,
Россия, 450054, Уфа, пр. Октября, 71.
[2] Уфимский университет науки и технологий,
Россия, 450076, Уфа, ул. Заки Валиди, 32.

Аннотация

Рассмотрена коэффициентная обратная задача определения геометрических параметров продольного прямоугольного паза по собственным частотам изгибных колебаний прямоугольного стержня. Предполагается, что паз проходит не по всей длине, а от определенной точки до правого конца. Для решения задачи стержень с продольным пазом моделируется в виде двух стержней, причем первый не имеет паз, а второй имеет.

В месте соединения используются условия сопряжения, в которых приравниваются величины прогибов, углов поворота, изгибающие моменты и перерезывающие силы. Исследованы закономерности поведения собственных частот изгибных колебаний при изменении длины паза. Предложен метод решения, позволяющий определять искомые параметры по конечному числу собственных значений изгибных колебаний. Показано, что решение однозначно в случае использования частотных спектров относительно взаимно перпендикулярных осей.

Ключевые слова: изгибные колебания, собственная частота, продольный паз, обратная задача, момент инерции, оценка погрешности, прямоугольный стержень.

Получение: 8 сентября 2023 г. / Исправление: 31 октября 2023 г. /
Принятие: 1 ноября 2023 г. / Публикация онлайн: 19 сентября 2024 г.

Механика деформируемого твердого тела
Краткое сообщение

Образец для цитирования
Утяшев И. М., Фатхелисламов А. Ф. Идентификация параметров стержня с продольным прямоугольным пазом по двум спектрам собственных частот изгибных колебаний // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2024. Т. 28, № 2. С. 378–389. EDN: WTKDQB. DOI: 10.14498/vsgtu2061.

Сведения об авторах

Ильнур Мирзович Утяшев https://orcid.org/0000-0002-2342-0492
кандидат физико-математических наук; научный сотрудник; лаб. механики твердого тела[1]; e-mail: utyashevim@mail.ru

Альфир Фирдависович Фатхелисламов https://orcid.org/0000-0002-8494-9592
старший преподаватель; каф. управления информационной безопасностью[2];
e-mail: alfir93@mail.ru

Введение. Изгибные колебания имеют огромное значение в различных областях науки и техники. В механике и инженерии они используются для анализа и проектирования различных конструкций, таких как мосты, здания, металлические конструкции и т.д. Изучение изгибных колебаний помогает проектировщикам и инженерам понимать, как конструкции будут себя вести в условиях механических нагрузок, вибраций и ветровых нагрузок. В физике изгибные колебания исследуются в рамках учения об упругих телах. Они играют важную роль в теории упругости и могут быть использованы для измерения механических свойств материалов. Изучение изгибных колебаний важно для понимания многих физических и инженерных систем и может приводить к созданию более эффективных и безопасных конструкций [1].

Собственные частоты колебаний играют существенную роль при детальном выявлении параметров изучаемого объекта, например дефектов. Например, в работах [2, 3] исследована эволюция характеристик собственных продольных колебаний круглого стержня при увеличении дефекта его поперечного сечения. В [4] рассматриваются собственные поперечные колебания стержня с поперечным сечением прямоугольной формы, имеющим постоянную высоту и переменную ширину, изменяющуюся по экспоненциальному закону. Исследованы собственные колебания стержня, защемленного на левом конце и шарнирно опертого на правом, а также защемленного на левом и правом концах. В [5] рассмотрен численный метод решения задачи изгибных колебаний стержня с переменным модулем Юнга. В отличие от [5] в настоящей работе приведен метод, позволяющий найти аналитическое решение, которое дает более точный результат. Работа [6] показывает, как, основываясь на моделировании дефекта сечения как известной функции, приближенно определяются основные параметры, его характеризующие, такие как местоположение и объем по двум низшим частотам колебаний свободного и консольно закрепленного стержней. С помощью численного моделирования показано, что для удовлетворительного определения свойств дефекта достаточно использовать несколько низших частот. В [7] проведено сравнение экспериментальных данных с различными теоретическими моделями для описания продольных колебаний стержня. В [8] исследуется поведение собственных частот изгибных колебаний стержня при изменении размера полости. Показано, как местоположение полости влияет на частотные характеристики колебаний. Доказано, что одного спектра частот изгибных колебаний еще недостаточно для идентификации местоположения и размеров полости. Для идентификации полости предложено использование собственных частот из двух спектров изгибных колебаний (относительно разных осей). Работа [9] посвящена идентификации длины продольного надреза по собственным частотам изгибных колебаний консольно закрепленного стержня. Показано, что задача имеет бесконечное количество решений, но в силу физической постановки можно выделить единственное решение, причем для решения задачи достаточно одной собственной частоты.

Обратные задачи идентификации таких дефектов, как трещина, имеют большую популярность [2, 3, 6, 10–17]. Поперечные раскрытые трещины, начиная с работ [10–12], как правило, моделируют условиями сопряжения пружины. В современной литературе предлагаются и другие условия сопряжения для описания поперечных дефектов [13–15]. Однако продольная трещина, которая в данной работе моделируется пазом, не может быть описана пружиной.

1. Прямая задача. Рассматривается однородный изотропный прямоугольный стержень длины $L = 1$ с продольным прямоугольным пазом, проходящий не по всей длине стержня, а от некоторой точки x_c до правого конца (см. рис. 1). Предполагается, что оси симметрии поперечного сечения участка стержня без паза и с пазом совпадают, а стержень заделан на обеих концах. Поперечное сечение имеет высоту H и ширину B. Прямоугольный паз имеет длину $l = L - x_c$, глубину h и ширину b. В случае малого b следует рассматривать прямоугольный паз как продольную трещину.

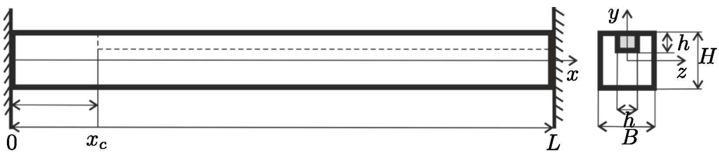


Рис. 1. Изображение стержня с продольным пазом
[Figure 1. Image of a rod with a longitudinal groove]

Требуется определить собственные частоты изгибных колебаний стержня относительно вертикальной оси Oy и горизонтальной оси Oz, установить зависимость размеров и места начала паза на эти частоты.

Рассмотрим колебания относительно вертикальной оси Oy. Изгибные колебания стержня с постоянным поперечным сечением F описываются уравнением [18]

$$EJ\frac{d^4U(x,t)}{dx^4} + \rho F\frac{d^2U(x,t)}{dt^2} = 0, \tag{1}$$

где $U(x,t)$ — поперечное смещение относительно оси Oy, E — модуль упругости, J — момент инерции поперечного сечения, ρ — плотность стержня.

Решение уравнения (1) ищем в виде $U(x,t) = y(x)\cos\omega t$, где ω — круговая частота. Тогда (1) сводится к уравнению

$$y^{(4)}(x) = s^4 y(x), \tag{2}$$

где $s^4 = \rho F\omega^2/(EJ)$. Поскольку стержень слева и справа от точки x_c имеет разную форму поперечного сечения, уравнения (2) слева и справа от точки x_c запишутся в следующей форме:

$$y_-^{(4)} = d_1^4\lambda^4 y_-, \quad y_+^{(4)} = d_2^4\lambda^4 y_+, \tag{3}$$

где $d_1^4 = F_-/J_{y-}$, $d_2^4 = F_+/J_{y+}$, $\lambda^4 = \rho\omega^2/E$; y_- — поперечное смещение левее точки x_c (участок стержня без паза), y_+ — правее точки x_c (с пазом).

Моменты инерции относительно оси Oy находим по формулам

$$J_{y+} = \frac{B^3H}{12} - \frac{b^3h}{12}, \quad J_{y-} = \frac{B^3H}{12}. \tag{4}$$

Условие сопряжения получим, приравняв в точке x_c поперечные смещения, углы поворота, изгибающие моменты и перерезывающие силы:

$$\begin{aligned} y_-(x_c) &= y_+(x_c), & y'_-(x_c) &= y'_+(x_c), \\ y''_-(x_c) &= \frac{J_{y+}}{J_{y-}} y''_+(x_c), & y'''_-(x_c) &= \frac{J_{y+}}{J_{y-}} y'''_+(x_c). \end{aligned} \tag{5}$$

Так как стержень заделан на левом и правом концах, краевые условия следующие:

$$y_-(0) = 0, \quad y'_-(0) = 0; \quad y_+(1) = 0, \quad y'_+(1) = 0. \tag{6}$$

Общее решение уравнений (3) примем в виде

$$\begin{aligned} y_- &= C_{11}y_{1-} + C_{12}y_{2-} + C_{13}y_{3-} + C_{14}y_{4-}, \\ y_+ &= C_{21}y_{1+} + C_{22}y_{2+} + C_{23}y_{3+} + C_{24}y_{4+}, \end{aligned} \tag{7}$$

где $y_{1-} = \cos(d_1\lambda x)$, $y_{2-} = \sin(d_1\lambda x)$, $y_{3-} = \cosh(d_1\lambda x)$, $y_{4-} = \sinh(d_1\lambda x)$, $y_{1+} = \cos(d_2\lambda x)$, $y_{2+} = \sin(d_2\lambda x)$, $y_{3+} = \cosh(d_2\lambda x)$, $y_{4+} = \sinh(d_2\lambda x)$.

Подставив (7) в (5), (6), получим систему, которая имеет нетривиальное решение относительно коэффициентов C_{ij} тогда и только тогда, когда определитель этой системы $\Delta(\lambda)$ равен нулю, вычисляя который, получим частотное уравнение относительно оси Oy:[1]

$$\begin{aligned} \Delta(\lambda) = {} & \frac{1}{16\lambda^4 d_{y1}^4 J_{y-}^2 d_{y2}^4} \times \\ & \times (-2J_{y-}J_{y+}e^{-d_{y1}\lambda x_c}e^{d_{y1}\lambda x_c}e^{-d_{y2}\lambda x_x}e^{d_2\lambda x_c}\sin(d_{y2}\lambda)^2 d_{y1}^2 d_{y2}^2 - \cdots \\ & + J_{y+}^2\sin(d_{y1}\lambda x_c)^2\sin(d_{y2}\lambda x_c)^2 e^{-d_{y2}\lambda}e^{d_{y2}\lambda}d_{y2}^4) = 0. \end{aligned} \tag{8}$$

По горизонтальной оси Oz частотное уравнение получается аналогично, разница заключается только в моментах инерции:

$$J_{z+} = \frac{B^2H^4 - 4h(H^2 - 1.5Hh + h^2)HhB + b^2h^4}{12(HB - hb)}, \quad J_{z-} = \frac{BH^3}{12}. \tag{9}$$

1.1. Пример решения прямой задачи. Примем следующие входные данные: $H = B = 0.1$, $h = 0.01$, $b = 0.02$, $L = 1$, $x_c = 0.5$. При заданных параметрах моменты инерции (4), (9) относительно осей Oy и Oz, а также их отношения к площади сечения следующие:

$$\begin{aligned} J_{y+} &= 8.326666 \cdot 10^{-6}, & J_{y-} &= 8.333333 \cdot 10^{-6}, \\ J_{z+} &= 7.918401 \cdot 10^{-6}, & J_{z-} &= 8.333333 \cdot 10^{-6}; \\ d_{y1} &= 5.88566191, & d_{y2} &= 5.85718206, \\ d_{z1} &= 5.88566191, & d_{z2} &= 5.93126244. \end{aligned}$$

Используя эти значения, получаем частотные уравнения относительно осей Oy и Oz, из которых с помощью математического пакета `Maple` численно находим собственные значения изгибных колебаний:
$\lambda_{1y} = 0.80559430$, $\lambda_{2y} = 1.33754047$, $\lambda_{3y} = 1.87272027$ — относительно оси Oy;
$\lambda_{1z} = 0.80053059$, $\lambda_{2z} = 1.32919190$, $\lambda_{3z} = 1.86093715$ — относительно оси Oz.

[1] Из-за большого объема выражение приведено не полностью.

На рис. 2–4 приведены графические зависимости первых трех собственных значений стержня от длины паза. Рисунки показывают, что график собственных значений изгибных колебаний относительно оси Oy растет, а относительно оси Oz убывает по мере увеличения длины паза. Это обусловлено тем, что отношение изгибающих моментов и площади поперечного сечения относительно оси Oy растет с увеличением длины паза, а по оси Oz уменьшается. Видно, что первое собственное значение относительно оси Oy при длине паза от 0 до 0.4 и от 0.8 до 1 возрастает несущественно. Собственные значения относительно оси Oz значительно уменьшаются в значениях l от 0 до 0.1 и от 0.9 до 1. В остальных промежутках собственные значения уменьшаются без сильных отклонений. Из анализа графиков следует, что при решении

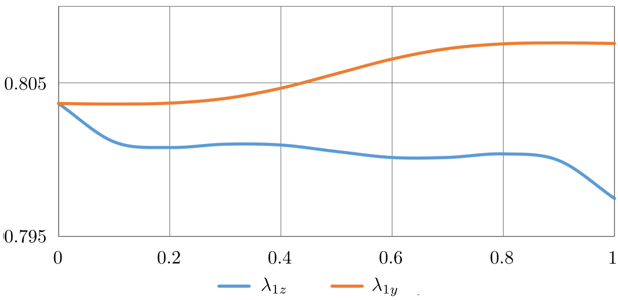


Рис. 2. Зависимость λ_1 от длины паза
[Figure 2. Dependence of λ_1 on the groove length]

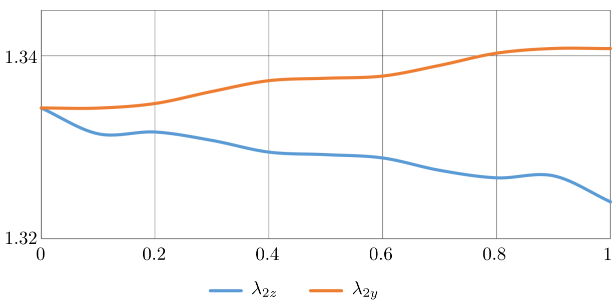


Рис. 3. Зависимость λ_2 от длины паза
[Figure 3. Dependence of λ_2 on the groove length]

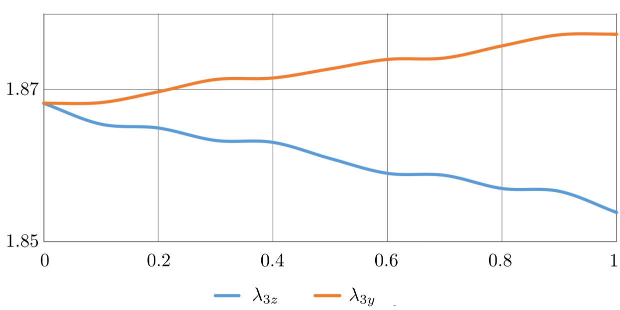


Рис. 4. Зависимость λ_3 от длины паза
[Figure 4. Dependence of λ_3 on the groove length]

обратных задач с использованием частот только из одного спектра могут возникнуть трудности. Например, при определенных длинах паза собственные значения меняются несущественно, что приводит к множеству вариантов решений обратной задачи.

2. Обратная задача. Рассмотрим пример решения обратной задачи. Пусть имеется прямоугольный стержень длины $L = 1$ с прямоугольным пазом l, проходящим не по всей длине. Требуется найти параметры паза по собственным частотам изгибных колебаний. Также необходимо определить наименьшее количество этих частот для решения задачи.

Для определения длины, ширины и глубины паза используем собственные значения с двух взаимно перпендикулярных осей Oy и Oz. Причем для более точного решения нужно использовать первые собственные значения, то есть с наименьшим порядковым номером. Данное требование вытекает из практических соображений, поскольку приборы для измерения частот наиболее точно определяют первые собственные частоты.

Возьмем три собственных значения колебания стержня относительно оси Oz, полученные в результате решения прямой задачи: $\lambda_{1z} = 0.80037439$, $\lambda_{2z} = 1.32665822$, $\lambda_{3z} = 1.85699429$. Подставляя их в частотное уравнение (8) в предположении, что ширина b, глубина h, начало паза x_c неизвестны, получим систему нелинейных уравнений относительно искомых параметров. Из физических соображений ищем вещественные значения $x_c \in [0, 1]$, $b \in [0, 0.1]$ и $h \in [0, 0.1]$. В табл. 1 приведен набор значений, полученных с помощью математического пакета `Maple`.

Для выявления единственного решения предлагается применить подход, предложенный авторами в работе [16], который заключается в том, что требуется решить несколько систем уравнений с числом уравнений, совпадающим с числом неизвестных, а затем найти пересечение этих решений. Сравнивая данные табл. 1, 2, видим, что одно решение является общим и это решение есть суть решения поставленной задачи (точное решение $b = 0.01$, $h = 0.01$, $x_c = 0.2$).

Для определения наименьшего количества собственных значений, требуемых для решения обратной задачи, возьмем по два собственных значения из спектров частот колебаний относительно взаимно перпендикулярных осей

Таблица 1

Набор решений обратной задачи для λ_{1z}, λ_{2z} и λ_{3z}
[A set of solutions to the inverse problem for λ_{1z}, λ_{2z}, and λ_{3z}]

no.	x_c	h	b
1	0.19999999	0.00999999	0.02000000
2	0.32114148	0.02823376	0.01738215
3	0.41343226	0.07987103	0.08653772

Таблица 2

Набор решений обратной задачи для λ_{1y}, λ_{2y} и λ_{3y}
[A set of solutions to the inverse problem for λ_{1y}, λ_{2y}, and λ_{3y}]

no.	x_c	h	b
1	0.19999999	0.00999999	0.02000000
2	0.47243139	0.01926569	0.09219030

Oy и Oz. В табл. 3 приведены результаты для случая, когда две собственные частоты взяты по оси Oz и одна по Oy, а в табл. 4 — для случая, когда две собственные частоты взяты по оси Oy и одна по Oz.

Таблица 3

Набор решений обратной задачи для λ_{1z}, λ_{2z} и λ_{1y}
[A set of solutions to the inverse problem for λ_{1z}, λ_{2z}, and λ_{1y}]

no.	x_c	h	b
1	0.18623568	0.00985498	0.02020706
2	0.20000000	0.01000000	0.01999999
3	0.39887811	0.09925593	0.09964666

Таблица 4

Набор решений обратной задачи для λ_{1y}, λ_{2y} и λ_{1z}
[A set of solutions to the inverse problem for λ_{1y}, λ_{2y}, and λ_{1z}]

no.	x_c	h	b
1	0.20000000	0.01000000	0.01999999
2	0.48204891	0.02422458	0.01478118

Из данных табл. 3, 4 видим, что искомое решение снова является общим. Отсюда следует вывод, что для однозначного нахождения параметров паза достаточно четырех собственных значений, два из которых взяты из спектра колебаний относительно оси Oy и два относительно оси Oz.

3. Оценка погрешности. Проведем вычислительный эксперимент по зашумлению входных данных аналогично работе [17]. Для оценки погрешности метода будем оценивать погрешность нахождения положения точки начала паза x_c. В качестве входных данных примем первое собственное значение, заданное в виде $\lambda j\gamma = \lambda_j(1 + \gamma\psi_j)$, где λ_j — собственное значение, вычисленное с точностью до 8 значащих цифр; γ — амплитуда зашумления; ψ_j — случайная величина с равномерным законом распределения, определенная на отрезке $[-1, 1]$. Относительная погрешность приведенного в данной работе метода исследуется в зависимости от $\gamma = 10^{-n}$, $n = 3, \ldots, 9$.

В табл. 5 приведены результаты пяти экспериментов с различными ψ_j для x_c при каждом значении амплитуды γ. Значения ψ_j получены с помощью генератора случайных чисел математического пакета `Maple`. Для исключения

Таблица 5

Относительная погрешность нахождения точки начала паза x_c в зависимости от зашумления входных данных [The relative error in determining the starting point of the groove x_c depending on the noise in the input data]

γ	$\delta_{x_c}(\psi)$, %				
10^{-3}	13.401911	13.790595	14.779052	16.650421	13.790595
10^{-4}	1.043232	0.675387	0.661847	0.792041	1.165774
10^{-5}	0.021450	0.038733	0.068768	0.155276	0.119227
10^{-6}	0.001472	0.014118	0.014660	0.006625	0.014113
10^{-7}	0.000500	0.001080	0.001173	0.001131	0.000920
10^{-8}	0.000078	0.000076	0.000157	0.000133	0.000099
10^{-9}	0.000014	0.000030	0.000010	0.000013	0.000007

ложных решений поиск параметра x_c производится в более узком интервале: $x_c \in [0.45, 0.55]$. Из табл. 5 следует, что при погрешности входных данных не более $\gamma = 10^{-4}$ погрешность восстановления x_c менее двух процентов.

Заключение. Решены прямая и обратная задачи колебания прямоугольного стержня с продольным прямоугольным пазом, который проходит не по всей длине. Предложен метод моделирования, в котором стержень состоит из двух частей, где первая часть с пазом, а вторая без паза, части соединены с помощью условий сопряжения. Данный метод позволяет решить как прямую задачу, так и обратную. Анализ зависимости собственных частот изгибных колебаний от длины паза относительно разных осей показал, что собственные значения относительно одной оси растут, а относительно другой падают. Предложен метод решения обратной задачи, позволяющий определять искомые параметры по конечному числу собственных значений изгибных колебаний, взятых из двух спектров частот. Анализ графиков и примеры решения обратной задачи показали, что решение однозначно в случае использования первых частот из спектров относительно взаимно перпендикулярных осей. Из оценки погрешности следует, что при зашумлении входных данных не более 10^{-4} погрешность восстановления одного из коэффициентов составляет менее 2 %. Данный метод применим для идентификации продольных трещин, где трещина проходит не по всей длине стержня.

Конкурирующие интересы. Конфликта интересов не имеется.

Авторский вклад и ответственность. Каждый автор внес равный вклад в написание статьи. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

Финансирование. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23–21–00420, `https://rscf.ru/project/23-21-00420/`.

Библиографический список

1. Шакирзянов Р. А., Шакирзянов Ф. Р. *Динамика и устойчивость сооружений.* Москва: Ай Пи Ар Медиа, 2022. 119 с. DOI: https://doi.org/10.23682/116444.
2. Акуленко Л. Д., Байдулов В. Г., Георгиевский Д. В., Нестеров С. В. Эволюция собственных частот продольных колебаний стержня при увеличении дефекта поперечного сечения // *Изв. РАН. МТТ*, 2017. Т. 52, № 6. С. 136–144. EDN: ZVFRFB.
3. Нестеров С. В., Байдулов В. Г. Эволюция собственных частот и форм изгибных колебаний стержня при увеличении дефекта поперечного сечения // *Процессы в геосредах*, 2018. № 4. С. 1174–1179. EDN: YSJIJN.
4. Нусратуллина Л. Р., Павлов В. П. Поперечные колебания стержня с переменным сечением и вычисление его собственных частот и форм // *Информационные технологии. Проблемы и решения*, 2019. № 3. С. 37–42. EDN: LRPOQR.
5. Bukenov M., Ibrayev A., Zhussupova D., Azimova D. Numerical solution of a problem on bending oscillation of a rod // *Bulletin Karaganda Univ. Math.*, 2019. no. 2. pp. 32–36. EDN: AJRJBB. DOI: https://doi.org/10.31489/2017M2/32-36.
6. Акуленко Л. Д., Гавриков А. А., Нестеров С. В. Идентификация дефектов поперечного сечения стержня по собственным частотам и особенностям формы продольных колебаний // *Изв. РАН. МТТ*, 2019. № 6. С. 98–107. EDN: WCPKID. DOI: https://doi.org/10.1134/S0572329919060023.
7. Попов А. Л., Садовский С. А. О соответствии теоретических моделей продольных колебаний стержня с кольцевыми дефектами экспериментальным данным // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2021. Т. 25, № 1. С. 97–110. EDN: JXMCLM. DOI: https://doi.org/10.14498/vsgtu1827.

8. Ахтямов А. М., Саляхова Е. В. Всегда ли наличие полости в стержне меняет собственные частоты? // *Техническая акустика*, 2011. Т. 11, 7. EDN: ONGQLJ.
9. Утяшев И. М., Фатхелисламов А. Ф. Идентификация длины продольного надреза стержня по собственным частотам изгибных колебаний // *Системы управления и информационные технологии*, 2022. Т. 4, № 90. С. 19–22. EDN: FJCOQH. DOI: https://doi.org/10.36622/VSTU.2022.90.4.004.
10. Rice J. R., Levy N. The part-through surface crack in an elastic plate // *J. Appl. Mech.*, 1972. vol. 39, no. 1. pp. 185–194. DOI: https://doi.org/10.1115/1.3422609.
11. Freund L. B., Herrmann G. Dynamic fracture of a beam or plate in plane bending // *J. Appl. Mech.*, 1976. vol. 43, no. 1. pp. 112–116. DOI: https://doi.org/10.1115/1.3423760.
12. Narkis Y. Identification of crack location in vibrating simply-supported beames // *J. Sound Vibrations*, 1994. vol. 172, no. 4. pp. 549–558. DOI: https://doi.org/10.1006/jsvi.1994.1195.
13. Ахтямов А. М., Ильгамов М. А. Модель изгиба балки с надрезом: прямая и обратная задачи // *ПМТФ*, 2013. Т. 54, № 1. С. 152–162. EDN: UHSXNX.
14. Ватульян А. О., Осипов А. В. Поперечные колебания балки с локализованными неоднородностями // *Вестн. Донск. гос. техн. унив.*, 2012. Т. 12, № 8. С. 34–40. EDN: QADMKN.
15. Ильгамов М. А., Хакимов А. Г. Диагностика повреждений консольной балки с надрезом // *Дефектоскопия*, 2009. № 6. С. 83–89. EDN: MSRGER.
16. Ахтямов А. М., Урманчеев С. Ф. Определение параметров твердого тела, прикрепленного к одному из концов балки, по собственным частотам колебаний // *Сиб. журн. индустр. матем.*, 2008. Т. 11, № 4. С. 19–24.
17. Утяшев И. М., Ахтямов А. М. Определение граничных условий закрепления струн по собственным частотам колебаний в среде с переменным несимметричным коэффициентом упругости // *ПМТФ*, 2018. Т. 54, № 4. С. 204–211. EDN: XTUVQT. DOI: https://doi.org/10.15372/PMTF20180423.
18. *Вибрации в технике.* Т. 1: Колебания линейных систем / ред. В. В. Болотин. М.: Машиностроение, 1978. 352 с.

Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2024, vol. 28, no. 2, pp. 378–389
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu2061

MSC: 74J25

Identification of the parameters of a rod with a longitudinal rectangular groove using two spectra of natural frequencies of bending vibrations

***I. M. Utyashev*[1], *A. F. Fatkhelislamov*[2]**

[1] Mavlyutov Institute of Mechanics, Ufa Centre RAS,
71, prosp. Oktyabrya, Ufa, 450054, Russian Federation.
[2] Ufa University of Science and Technology,
32, Zaki Validi st., Ufa, 450076, Russian Federation.

Abstract

The inverse coefficient problem involves determining the geometric parameters of a longitudinal rectangular groove based on the natural frequencies of the bending vibrations of a rectangular rod. It is assumed that the groove does not extend along the entire length of the rod, but rather from a certain point to the right end. To solve the problem, the rod with the longitudinal groove is modeled as two sections: the first section without a groove and the second section with a groove.

Mating conditions are applied at the connection point, where deflection values, rotation angles, bending moments, and shear forces are equated. The behavior of the natural frequencies of bending vibrations when changing the length of the groove was investigated. A solution method is proposed that allows for determining the required parameters based on a finite number of natural frequencies of bending vibrations. It is shown that the solution is unambiguous when using frequency spectra with respect to mutually perpendicular axes.

Keywords: bending vibrations, natural frequency, longitudinal groove, inverse problem, moment of inertia, error estimation, rectangular rod.

Received: 8th September, 2023 / Revised: 31st October, 2023 /
Accepted: 1st November, 2023 / First online: 19th September, 2024

Mechanics of Solids
Short Communication

Please cite this article in press as:
Utyashev I. M., Fatkhelislamov A. F. Identification of the parameters of a rod with a longitudinal rectangular groove using two spectra of natural frequencies of bending vibrations, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2024, vol. 28, no. 2, pp. 378–389. EDN: WTKDQB. DOI: 10.14498/vsgtu2061 (In Russian).

Authors' Details:
Ilnur M. Utyashev https://orcid.org/0000-0002-2342-0492
Cand. Phys. & Math. Sci.; Researcher; Lab. of Solid Mechanics[1]; e-mail: utyashevim@mail.ru
Alfir F. Fatkhelislamov https://orcid.org/0000-0002-8494-9592
Senior Lecturer; Dep. of Information Security Management[2]; e-mail: alfir93@mail.ru

Competing interests. We have no competing interests.

Authors' contributions and responsibilities. Each author contributed equally to the writing of the articles. The final version of the manuscript was approved by all authors.

Funding. The work was supported by the grant of the Russian Science Foundation no. 23–21–00420, `https://rscf.ru/en/project/23-21-00420/`.

References

1. Shakirzyanov R. A., Shakirzyanov F. R. *Dinamika i ustoichivost' sooruzhenii* [Dynamics and Stability of Structures]. Moscow, IP Ar Media, 2022, 119 pp (In Russian). DOI: https://doi.org/10.23682/116444
2. Akulenko L. D., Baidulov V. G., Georgievskii D. V., Nesterov S. V. Evolution of natural frequencies of longitudinal vibrations of a bar as its cross-section defect increases, *Mech. Solids*, 2017, vol. 52, no. 6, pp. 708–714. EDN: XYGSVN. DOI: https://doi.org/10.3103/S0025654417060103.
3. Nesterov S. V., Baidulov V. G. Evolution of natural frequencies and forms of flexural vibrations of the rod with the increase of the defect cross section, *Proc. Geosred.*, 2018, no. 4, pp. 1174–1179 (In Russian). EDN: YSJIJN.
4. Nusratullina L. R., Pavlov V. P. Transverse vibrations of a rod with variable cross section and calculating its natural frequencies and shapes, *Inform. Technol. Probl. Solutions*, 2019, no. 3, pp. 37–42 (In Russian). EDN: LRPOQR.
5. Bukenov M., Ibrayev A., Zhussupova D., Azimova D. Numerical solution of a problem on bending oscillation of a rod, *Bulletin Karaganda Univ. Math.*, 2019, no. 2, pp. 32–36. EDN: AJRJBB. DOI: https://doi.org/10.31489/2017M2/32-36.
6. Akulenko L. D., Gavrikov A. A., Nesterov S. V. Identification of cross-section defects of the rod by using eigenfrequencies and features of the shape of longitudinal oscillations, *Mech. Solids*, 2019, vol. 54, no. 8, pp. 1208–1215. EDN: GKJAEX. DOI: https://doi.org/10.3103/S0025654419080119.
7. Popov A. L., Sadovskiy S. A. On the conformity of theoretical models of longitudinal rod vibrations with ring defects experimental data, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2021, vol. 25, no. 1, pp. 97–110 (In Russian). EDN: JXMCLM. DOI: https://doi.org/10.14498/vsgtu1827.
8. Akhtyamov A. M., Salyakhova E. V. Does the presence of a cavity in the rod always change the natural frequencies?, *Techn. Acoustics*, 2011, vol. 11, 7 (In Russian). EDN: ONGQLJ.
9. Utyashev I.M., Fatkhelislamov A. F. Identification of the length of the longitudinal notch of the rod by the natural frequencies of bending vibrations, *Sist. Upravl. Inform. Tekhnol.*, 2022, vol. 4, no. 90, pp. 19–22 (In Russian). EDN: FJCOQH. DOI: https://doi.org/10.36622/VSTU.2022.90.4.004.
10. Rice J. R., Levy N. The part-through surface crack in an elastic plate, *J. Appl. Mech.*, 1972, vol. 39, no. 1, pp. 185–194. DOI: https://doi.org/10.1115/1.3422609.
11. Freund L. B., Herrmann G. Dynamic fracture of a beam or plate in plane bending, *J. Appl. Mech.*, 1976, vol. 43, no. 1, pp. 112–116. DOI: https://doi.org/10.1115/1.3423760.
12. Narkis Y. Identification of crack location in vibrating simply-supported beames, *J. Sound Vibrations*, 1994, vol. 172, no. 4, pp. 549–558. DOI: https://doi.org/10.1006/jsvi.1994.1195.
13. Akhtyamov A. M., Ilgamov M. A. Flexural model for a notched beam: Direct and inverse problems, *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2013, vol. 54, no. 1, pp. 132–141. EDN: RFFRAF. DOI: https://doi.org/10.1134/S0021894413010161.
14. Vatulyan A. O., Osipov A. V. Transverse vibrations of beam with localized heterogeneities, *Vestn. Donsk. Gos. Tekhn. Univ.*, 2012, vol. 12, no. 8, pp. 34–40 (In Russian). EDN: QADMKN.
15. Il'gamov M.A., Khakimov A.G. Diagnosis of damage of a cantilever beam with a notch, *Russ. J. Nondestruct. Test*, 2009, vol. 45, no. 6, pp. 430–435. EDN: MWWMPV. DOI: https://doi.org/10.1134/S1061830909060072.

16. Akhtyamov A. M., Urmancheev C. F. Determination of the parameters of a rigid body clamped at an end of a beam from the natural frequencies of vibrations, *J. Appl. Ind. Math.*, 2010, vol. 4, no. 1, pp. 1–5. DOI: https://doi.org/10.1134/S1990478910010011.
17. Utyashev I. M., Akhtyamov A. M. Determination of the boundary conditions for string fastening using natural vibration frequencies in a medium with a variable asymmetric elasticity coefficient, *J. Appl. Mech. Techn. Phys.*, 2018, vol. 59, no. 4, pp. 755–761. EDN: YBIXLF. DOI: https://doi.org/10.1134/S0021894418040235.
18. *Vibratsii v tekhnike* [Vibrations in the Technics], vol. 1, Kolebaniia lineinykh sistem [Oscillations of Linear Systems], ed. V. V. Bolotin. Moscow, Mashinostroenie, 1978, 352 pp.

Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2024. Т. 28, № 2. С. 390–400
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu2018
EDN: WXJJNS

УДК 539.376

Длительное разрушение составного стержня при растяжении в условиях ползучести в присутствии активной среды

Л. В. Фомин, Ю. Г. Басалов

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова,
Научно-исследовательский институт механики,
Россия, 119192, Москва, Мичуринский проспект, 1.

Аннотация

Рассматривается напряженно-деформированное состояние и длительная прочность составного растягиваемого стержня при ползучести в условии воздействия на него активной окружающей среды. Конструкция состоит из центрального стержня и двух симметрично расположенных стержней относительно центрального, соединенных с идеальной адгезией. Ползучесть каждой из трех частей стержня описывается степенной реологической моделью с различными значениями параметра. Для определения времени до разрушения используется кинетическое уравнение, описывающее накопление повреждений в процессе ползучести, структура которого одна и та же для всех стержней. Влияние активной среды определяется диффузионным проникновением ее элементов в материал стержня. Используется приближенный метод решения уравнения диффузии, основанный на введении диффузионного фронта. Анализируется распределение напряжений во времени при условии проникновения активной среды в разные части стержня с различными коэффициентами диффузии. Выполнен параметрический анализ влияния напряжений и параметров реологических моделей материалов составного стержня на напряженно-деформированное состояние и длительную прочность как элементов стержневой системы, так и трехстержневой системы в целом. Определена зависимость времени до разрушения от соотношения коэффициентов диффузии активной среды в элементах составного стержня.

Ключевые слова: составной стержень, ползучесть, поврежденность, длительная прочность, активная среда, диффузионный фронт.

Механика деформируемого твердого тела
Краткое сообщение

Образец для цитирования
Ф о м и н Л. В., Б а с а л о в Ю. Г. Длительное разрушение составного стержня при растяжении в условиях ползучести в присутствии активной среды // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2024. Т. 28, № 2. С. 390–400. EDN: WXJJNS. DOI: 10.14498/vsgtu2018.

Сведения об авторах

Леонид Викторович Фомин https://orcid.org/0000-0002-9075-5049
кандидат физико-математических наук; ведущий научный сотрудник; лаб. проектирования и прикладных методов расчета композитных конструкций; e-mail: fleonid1975@mail.ru

Юрий Генрихович Басалов https://orcid.org/0000-0002-1416-3690
ведущий инженер; лаб. проектирования и прикладных методов расчета композитных конструкций; e-mail: basalov@yandex.ru

Получение: 6 мая 2023 г. / Исправление: 23 ноября 2023 г. /
Принятие: 17 января 2024 г. / Публикация онлайн: 26 марта 2024 г.

Введение. Актуальность исследований высокотемпературной прочности материалов и конструкций [1], в том числе находящихся в условиях воздействия активных сред [2, 3], не подлежит сомнению. Современные материалы и элементы конструкций должны обеспечивать надежность и работоспособность изделий в течение всего срока службы в рабочих условиях с учетом их взаимодействия с внешними и/или рабочими средами. Наиболее часто для дополнительной защиты элементов конструкций от деструктивного воздействия внешней активной среды применяются типовые элементы составного типа. Внешний слой такой составной конструкции, как правило, контактирует с агрессивным веществом и защищает основные элементы конструкции от его разрушительного воздействия.

В статье [4] рассмотрено напряженно-деформированное состояние, кинетика накопления повреждений в процессе ползучести и определены времена до разрушения составного стержня при различных значениях материальных констант в уравнениях состояния ползучести и длительного разрушения его элементов.

В работе [5] проведен анализ влияния эксплуатационных условий на работу лопаток турбины в составе двигателя. Авторы отмечают, что особенностью работы лопаток турбин практически всех двигателей являются переменные нагрузки, высокие температуры газа перед турбиной, наличие высокоскоростного газового потока, которые в значительной мере усложняют условия работы лопаток, а совместное действие температуры, напряжений и окислительной среды приводит к диффузионным процессам в поверхностных слоях лопаток, ограничивающих их долговечность.

В статье [6] приведены результаты экспериментальных исследований влияния высокотемпературных покрытий на лопатках турбины и компрессора из жаропрочных никелевых и титановых сплавов на характеристики долговечности при газовой коррозии, термических и термомеханических циклических нагрузках: количественные характеристики трещиностойкости, вязкости разрушения, циклической долговечности.

В исследовании [7] определены условия, при которых обработка оболочек тепловыделяющих элементов (ТВЭЛ) из сплава Э110 мощным ультрафиолетовым или инфракрасным лазерным излучением приводит к повышению коррозионной стойкости при высокотемпературном (1100 °C) окислении, моделирующем условия аварии с потерей теплоносителя. Исследовано поведение защитных покрытий Al, Al_2O_3 и Cr, нанесенных методом импульсного лазерного осаждения на сталь ЭП823. Показаны методы практически полного подавления коррозии в жидком свинце до температуры 720 °C.

В статье [8] рассматривается радиационная ползучесть ТВЭЛа из двухслойной оболочки UN-SiC. Проведены исследования параметров с точки зрения скорости ползучести SiC при облучении и скорости отжига. Авторы отмечают тепловую эффективность оболочки SiC.

Монография [9] демонстрирует методы противодействия тепловым эффектам быстрой коррозии и деградации открытых материалов и оборудования, которые могут возникнуть при высоких рабочих температурах. Это первое настоящее практическое руководство по использованию термозащитных покрытий для применения в условиях высоких температур, включая последние разработки в области создания материалов, используемых для защитных покрытий.

Настоящая статья посвящена исследованию напряженно-деформированного состояния и моделированию процессов разрушения такой типовой конструкции, как составной стержень, находящийся в условиях ползучести [1] при растяжении и воздействии на части стержня активной среды [2, 3].

1. Постановка задачи. Рассматривается составной призматический стержень длиной L прямоугольного поперечного сечения $H \times b$, $L \gg H \gg b$, в системе координат $Oxyz$ (рис. 1), находящийся в состоянии установившейся ползучести под действием постоянной растягивающей силы P, приложенной к его торцам. Расположение частей симметрично относительно срединной плоскости Oxz. Материалы центральной (1) и периферийной (2) частей составного стержня (см. рис. 1) удовлетворяют разным законам ползучести. Дополнительно примем следующее условие: все части составного стержня жестко, без проскальзывания соединены между собой.

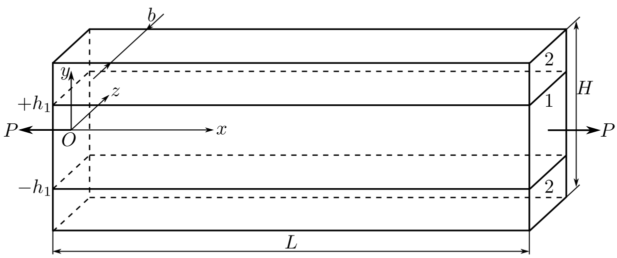


Рис. 1. Схема расположения частей в составном стержне
[Figure 1. Scheme of the arrangement of parts in a composite rod]

Рассмотрим ползучесть данного составного стержня, который дополнительно к действию растягивающей силы находится в активной среде. Влияние активной среды определяется ее диффузионным проникновением в материал составных элементов стержня. Поскольку $L \gg H \gg b$, влиянием диффузии с торцов стержня можно пренебречь, аналогично, влиянием продольной координаты стержня на диффузионный процесс можно пренебречь. Таким образом, процесс диффузии является одномерным по координате z. Ввиду принятых одинаковых граничных условий диффузии на гранях стержня в плоскости xOy процесс диффузии является симметричным относительно оси Oy. Примем различные характеристики диффузионного процесса для центральной части и двух крайних частей стержня. Пусть активная среда проникает в центральную часть (1) с коэффициентом диффузии $D_1 = \text{const}$, а в крайние части (2) — с коэффициентом диффузии $D_2 = \text{const}$.

Таким образом, распределение концентрации элементов активной среды в каждой части составного стержня подчиняется одномерным уравнениям диффузии:

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial \tilde{t}_i} = \frac{1}{12}\frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial \bar{z}^2}, \quad \bar{c} = \bar{c}(\bar{z}, \tilde{t}_i), \quad 0 \leqslant \bar{z} \leqslant 1, \quad 0 \leqslant \tilde{t}_i < \infty, \quad i = 1, 2, \tag{1}$$

где $\bar{z} = 2z/b$, $\tilde{t}_i = 48D_i t/b^2$, $\bar{c} = c/c_0$; c_0 — равновесная концентрация (экспериментальная константа), достигаемая при $t \to \infty$. Начальные и граничные условия записываются в виде

$$\bar{c}(\bar{z}, 0) = 0, \quad \bar{c}(1, 0) = 1, \quad \frac{\partial \bar{c}}{\partial \bar{z}}(0, \tilde{t}_i) = 0.$$

Предполагается наличие скачка концентрации на границе раздела активной окружающей среды и материала стержня в момент времени $\tilde{t}_i = 0$.

Предлагается приближенный метод решения уравнения диффузии (1), основанный на введении диффузионного фронта, который подробно описан в [2, 3, 10]. Такой подход позволяет разделить весь материал стержня на возмущенную (где среда уже проникла в материал) и невозмущенную (где еще нет проникновения среды) области и затем определять движение границы между этими областями во времени. Решение (распределение концентрации по координатам и времени) ищется в виде полинома, коэффициенты которого в общем виде являются функциями пространственных координат и времени. При этом граничные и начальное условия выполняются точно, а уравнение диффузии удовлетворяется интегрально во всем объеме стержня.

Рассматриваются две последовательные стадии процесса диффузии: стадия проникновения фронта (первая стадия) и стадия насыщения (вторая стадия). На первой стадии невозмущенная и возмущенная области стержня разделены движущейся границей $x = l(t)$, соответствующей диффузионному фронту; на второй стадии концентрация среды распространяется на весь стержень.

На основе предлагаемого подхода получено соотношение для интегрально средних безразмерных концентраций $\bar{c}_{mi}$, определяемых соотношением

$$\bar{c}_{mi} = \bar{c}_m(\tilde{t}_i) \equiv \int_0^1 \bar{c}(\bar{z}, \tilde{t}_i) d\bar{z}, \quad i = 1, 2.$$

Для рассматриваемой задачи

$$\bar{c}_{mi} = \bar{c}_m(\tilde{t}_i) = \begin{cases} \frac{1}{3}\sqrt{\tilde{t}_i}, & 0 \leqslant \tilde{t}_i \leqslant 1, \\ 1 - \frac{2}{3}\exp\left(\frac{1-\tilde{t}_i}{4}\right), & \tilde{t}_i > 1. \end{cases} \tag{2}$$

2. Определяющие и кинетические соотношения. Используя принятое условие длинномерности стержня, а также учитывая принцип Сен–Венана, рассмотрим напряженно-деформированное состояние вдали от мест приложения силы к торцам стержня. Аналогично [4] и с дополнительным условием симметрии диффузионного процесса относительно центральной плоскости симметрии примем одномерный вид напряженно-деформированного состояния в составном стержне.

Пусть соотношения, описывающие скорость деформации ползучести соответственно первой (центральной) и двух крайних частей, имеют вид

$$\dot{p}_i = \frac{B_i \sigma_i^n}{(1 - \omega_i)^n}, \quad i = 1, 2, \tag{3}$$

где σ_1 — напряжение в первой (центральной) части стержня, σ_2 — напряжения в двух крайних частях стержня; ω_1, ω_2 — соответствующие параметры поврежденности; B_1, B_2, n — материальные константы; точка означает производную по времени t.

Введем безразмерные переменные:

$$\bar{\sigma}_1 = \sigma_1/\sigma_0, \quad \bar{\sigma}_2 = \sigma_2/\sigma_0, \quad \bar{t} = B_1\sigma_0^n t,$$

где σ_0 — некоторое характерное напряжение, например, половина предела кратковременной прочности σ_B ($\sigma_0 = \sigma_B/2$) при соответствующей температуре. Тогда определяющие соотношения (3) будут иметь следующий вид:

$$\frac{dp_1}{d\bar{t}} = \frac{\bar{\sigma}_1^n}{(1-\omega_1)^n}, \quad \frac{dp_2}{d\bar{t}} = \frac{\bar{B}\bar{\sigma}_2^n}{(1-\omega_2)^n},$$

где $\bar{B} = B_2/B_1$.

3. Учет влияния активной среды. Большинство экспериментальных данных показывает, что активная среда деструктивно влияет на материал, уменьшает время до разрушения по сравнению с эксплуатацией материалов и элементов конструкций в нейтральных условиях.

Процессы разрушения инициируются ростом повреждений в материале. Учтем влияние активной среды в кинетических уравнениях накопления поврежденности:

$$\frac{d\omega_i}{dt} = \frac{A\sigma_i^m}{(1-\omega_i)^m} f_i(\bar{c}_{mi}), \quad i = 1, 2; \tag{4}$$
$$\omega_i(0) = 0, \quad \omega_i(t_i^*) = 1,$$

где $\omega_i = \omega_i(t)$; t_1^* — время до разрушения центральной части стержня, t_2^* — время до разрушения крайних частей стержня; A, m — материальные константы, которые определяются на основе испытаний на длительную прочность без влияния активной среды (в нейтральных условиях), при этом $f_i(\bar{c}_{mi}) = 1$.

В уравнениях (4) введены возрастающие функции от интегрально средних концентраций $f_i(\bar{c}_{mi})$ такие, что $f_i(0) = 1$.

С учетом единого для определяющих и кинетических уравнений безразмерного времени $\bar{t}$ уравнения (4) примут следующий вид:

$$\frac{d\omega_i}{d\bar{t}} = \frac{\bar{C}\bar{\sigma}_i^m}{(1-\omega_i)^m} f_i(\bar{c}_{mi}), \quad i = 1, 2, \tag{5}$$

где $\bar{C} = A\sigma_0^{m-n}/B_1$.

Поскольку кинетические соотношения (5) и соотношения (2) для интегрально средней концентрации $\bar{c}_m$ записаны в различных безразмерных временах $\bar{t}$, $\tilde{t}_1$ и $\tilde{t}_2$, для дальнейших расчетов необходимо перейти к одному единому безразмерному времени для задачи $\bar{t}$:

$$\tilde{t}_i = K_i\bar{t}, \quad K_i = \frac{48D_i}{B_1\sigma_0^n b^2}, \quad i = 1, 2.$$

Отметим, что $K_2/K_1 = D_2/D_1 = \bar{D}$.

Тогда соотношения (2) примут вид ($i = 1, 2$)

$$\bar{c}_{mi}(\bar{t}) = \begin{cases} \frac{1}{3}\sqrt{K_i\bar{t}}, & 0 \leqslant \bar{t} \leqslant 1/K_i, \\ 1 - \frac{2}{3}\exp\left(\frac{1-K_i\bar{t}}{4}\right), & \bar{t} > 1/K_i. \end{cases} \tag{6}$$

Кинетические соотношения для первой (центральной) и двух вторых (крайних) частей составного стержня в едином безразмерном времени $\bar{t}$ примут вид

$$\frac{d\omega_i}{d\bar{t}} = \frac{\bar{C}\bar{\sigma}_i^m}{(1-\omega_i)^m} f_i(\bar{c}_{mi}(\bar{t})), \quad i = 1, 2,$$

где $\bar{c}_{mi}(\bar{t})$ определены в (6).

Принятое условие жесткого соединения частей стержня без проскальзывания и гипотеза плоских сечений дают возможность принять условие $p_1(\bar{t}) = p_2(\bar{t})$. С учетом этого факта и заданного начального условия $p_i(0) = 0$, $i = 1, 2$, имеем

$$\int_0^{\bar{t}} \frac{\bar{\sigma}_1^n}{(1-\omega_1)^n} d\bar{\tau} = \bar{B} \int_0^{\bar{t}} \frac{\bar{\sigma}_2^n}{(1-\omega_2)^n} d\bar{\tau}. \tag{7}$$

Выпишем уравнение равновесия с учетом выражений для безразмерных напряжений $\bar{\sigma}_1$ и $\bar{\sigma}_2$:

$$\Sigma_0 = \alpha\bar{\sigma}_1 + (1-\alpha)\bar{\sigma}_2, \tag{8}$$

где $\Sigma_0 = P/(bH\sigma_0)$, $\alpha = 2h_1/H$.

Выразим $\bar{\sigma}_2$ из (8):

$$\bar{\sigma}_2 = \frac{\Sigma_0 - \alpha\bar{\sigma}_1}{1-\alpha}.$$

С учетом уравнений (5)–(7) получим систему уравнений:

$$\frac{d\omega_1}{d\bar{t}} = \frac{\bar{C}\bar{\sigma}_1^m}{(1-\omega_1)^m} f(\bar{c}_{m1}(\bar{t})), \quad \omega_1(0) = 0; \tag{9}$$

$$\frac{d\omega_2}{d\bar{t}} = \frac{\bar{C}(\Sigma_0 - \alpha\bar{\sigma}_1)^m}{(1-\alpha)^m(1-\omega_2)^m} f(\bar{c}_{m2}(\bar{t})), \quad \omega_2(0) = 0; \tag{10}$$

$$\int_0^{\bar{t}} \frac{\bar{\sigma}_1^n}{(1-\omega_1)^n} d\bar{\tau} = \bar{B} \int_0^{\bar{t}} \frac{(\Sigma_0 - \alpha\bar{\sigma}_1)^n}{(1-\alpha)^n(1-\omega_2)^n} d\bar{\tau}, \tag{11}$$

где $\omega_1 = \omega_1(\bar{t})$, $\omega_2 = \omega_2(\bar{t})$ и $\bar{\sigma}_1 = \bar{\sigma}_1(\bar{t})$ — неизвестные величины.

В расчетах принят линейный вид функции от интегрально средних концентраций $f(\bar{c}_{mi})$:

$$f(\bar{c}_{mi}(\bar{t})) = 1 + a\bar{c}_{mi}(\bar{t}), \quad i = 1, 2,$$

где константа a определяется из эксперимента на длительную прочность образцов материала, находящихся в активной среде. В [11] для испытаний на длительную прочность образцов из углеродистой стали, находящихся в высокотемпературной воздушной среде [12], определено значение данной величины, равное $a = 9.5$.

Разрушение каждой части стержня определяется условиями $\omega_1(\bar{t}_1^*) = 1$ и $\omega_2(\bar{t}_2^*) = 1$. Общее время до разрушения всего составного стержня определяется величиной $\bar{t}^* = \min\{\bar{t}_1^*, \bar{t}_2^*\}$.

Результатом решения задачи являются зависимости величин $\bar{\sigma}_i = \bar{\sigma}_i(\bar{t})$, $\omega_i = \omega_i(\bar{t})$, $i = 1, 2$.

4. Пример численного расчета. Численное решение задачи (9)–(11) осуществлялось методом «шагами по времени», широко применяемым в теории неупругого реологического деформирования.

В качестве примера для численного расчета использовались следующие модельные значения параметров, фигурирующие в соотношениях (9)–(11):

$$m = n = 3, \quad \bar{C} = 2, \quad K_1 = 1, \quad K_2 = 2, \quad \bar{B} = 2, \quad \alpha = 0.5, \quad \Sigma_0 = 0.5.$$

Типичные расчетные зависимости для величин $\bar{\sigma}_i = \bar{\sigma}_i(\bar{t})$, $\omega_i = \omega_i(\bar{t})$, $i = 1, 2$, показаны на рис. 2.

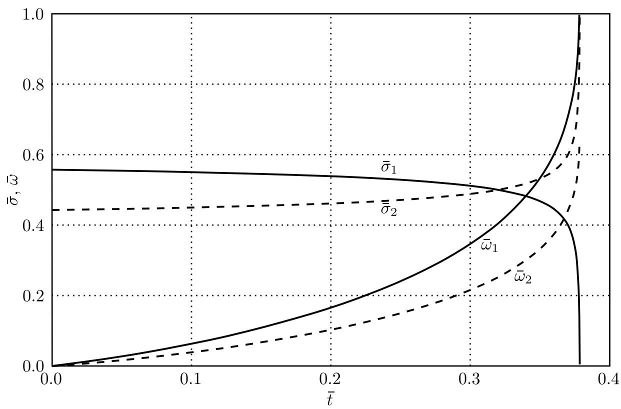


Рис. 2. Графики зависимостей величин $\bar{\sigma}_i = \bar{\sigma}_i(\bar{t})$, $\omega_i = \omega_i(\bar{t})$, $i = 1, 2$
[Figure 2. Graphs of dependences of quantities $\bar{\sigma}_i = \bar{\sigma}_i(\bar{t})$, $\omega_i = \omega_i(\bar{t})$, $i = 1, 2$]

5. Анализ полученных результатов. Выполнен параметрический анализ задачи для различных значений m, n, K_1, K_2, α и Σ_0.

Предварительный анализ показал следующее:

1) с ростом значения $\bar{D} = D_2/D_1$, характеризующего отношение коэффициентов диффузии активной среды в части составного стержня, время до разрушения $\bar{t}^*$ составного стержня уменьшается;
2) с ростом показателей степеней $n = m$ в определяющих и кинетических соотношениях время до разрушения составного стержня увеличивается.

В статье [4] выполнено исследование аналогичного составного стержня без влияния активной среды и показано, что коэффициент $\bar{B} = B_2/B_1$ влияет на характер накопления поврежденности и на очередность разрушения частей составного стержня. Этот характер влияния коэффициента $\bar{B}$ на очередность разрушения частей составного стержня также справедлив и для настоящего исследования. Но в отличие от [4] в настоящей статье определение времен до разрушения составного стержня дополнительно зависит еще от диффузионных процессов в частях составного стержня.

Заключение. Проведено исследование напряженно-деформированного состояния и определено время до разрушения составного стержня при ползучести в условиях воздействия на него активной окружающей среды и растягивающей нагрузки.

Изучение и моделирование таких процессов является предварительным опорным исследованием перспективной задачи о защите внешних частей составного стержня при его контакте с рабочей активной средой в условиях длительного действия нагрузки и повышенных температур.

На основе кинетической теории ползучести и длительной прочности Ю. Н. Работнова получены зависимости накопления поврежденности от времени в элементах составного стержня, при этом учтено диффузионное проникновение элементов активной среды в части стержня с различными коэффициентами диффузии.

В результате проведенного исследования проанализировано влияние параметров моделей ползучести и длительной прочности, коэффициентов диффузии на время до разрушения составного стержня. Такого рода исследования могут способствовать рациональному выбору необходимых материалов составных конструкций, работающих в активной среде.

Результаты настоящей работы могут быть применены в энергетическом машиностроении, авиационно-космической отрасли, судостроении и нефтехимическом машиностроении.

Конкурирующие интересы. Заявляем, что в отношении авторства и публикации этой статьи конфликта интересов не имеем.

Авторский вклад и ответственность. Все авторы принимали участие в разработке концепции статьи; все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

Финансирование. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (номер проекта 20-08-00387) и госбюджетной НИР (номер ЦИТИС АААА-А16-116021110204-3; АААА-А19-119012990120-9).

Библиографический список

1. Работнов Ю. Н. *Ползучесть элементов конструкций.* М.: Наука, 1966. 752 с.
2. Локощенко А. М. *Ползучесть и длительная прочность металлов.* М.: Физматлит, 2016. 504 с.
3. Lokoshchenko A., Fomin L. Kinetic theory of cand long-term strength of metals / *Kinetic Theory.* Rijeka: IntechOpen, 2018. pp. 51–69. DOI: https://doi.org/10.5772/intechopen.70768.
4. Фомин Л. В., Басалов Ю. Г. О длительном разрушении составного растягиваемого стержня в условиях ползучести // *Изв. РАН. МТТ*, 2023. №1. С. 102–114. EDN: KLPUYU. DOI: https://doi.org/10.31857/S0572329922100087.
5. Петрова М. А., Саадатибаи М., Тарасов А. И. Анализ условий работы поверхностных слоев рабочих лопаток турбины современных двигателей // *Научный вестник МГТУ ГА*, 2015. №217. С. 124–127. EDN: RWNDAE.
6. Абраимов Н. В., Золотарева А. Ю. Влияние высокотемпературных покрытий на характеристики надежности лопаточных элементов ГТД // *Электрометаллургия*, 2019. №6. С. 24–32. EDN: OSTDXN.
7. Борисов В. М., Трофимов В. М., Сапожков А. Ю. [и др.] О возможностях повышения коррозионной стойкости оболочек ТВЭЛов с использованием мощных лазерных и

плазменных источников // *Ядерная физика и инжиниринг*, 2015. Т. 6, № 11–12. С. 643–650. EDN: XGWIPF. DOI: https://doi.org/10.1134/S2079562915060032.

8. Li W., Shirvan K. Implications of SiC irradiation creep and annealing to UN-SiC fuel rod behavior // *J. Nucl. Mat.*, 2020. vol. 542, 152479. DOI: https://doi.org/10.1016/j.jnucmat.2020.152479.
9. Bose S. *High Temperature Coatings*. Cambridge, MA: Butterworth-Heinemann, 2018. xviii+398 pp. DOI: https://doi.org/10.1016/C2015-0-01316-8.
10. Lokoshchenko A. M., Fomin L. V. Delayed fracture of plates under creep condition in unsteady complex stress state in the presence of aggressive medium // *Appl. Math. Model.*, 2018. vol. 60. pp. 478–489. EDN: XYDIAH. DOI: https://doi.org/10.1016/j.apm.2018.03.031.
11. Фомин Л. В. Описание длительной прочности растягиваемых стержней прямоугольного и круглого поперечных сечений в высокотемпературной воздушной среде // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2013. № 3(32). С. 87–97. EDN: PRWXIE. DOI: https://doi.org/10.14498/vsgtu1228.
12. Одинг И. А., Фридман З. Г. Роль поверхностных слоев при длительном разрушении металлов в условиях ползучести // *Завод. лаб.*, 1959. Т. 25, № 3. С. 329–332.

Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2024, vol. 28, no. 2, pp. 390–400
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu2018

MSC: 74R20

Long-term fracture of a composite rod under tension in creep conditions in the presence of an active medium

L. V. Fomin, Yu. G. Basalov

Lomonosov Moscow State University, Institute of Mechanics,
1, Michurinsky prospekt, Moscow, 119192, Russian Federation.

Abstract

The stress-strain state and long-term strength of a composite tensile rod under creep conditions in the presence of an active environment are considered. The structure consists of a central rod and two symmetrically arranged rods relative to the central one, connected with perfect adhesion. The creep of each of the three parts of the rod is described by a power rheological model with different parameter values. To determine the time to failure, a kinetic equation is used to describe damage accumulation during creep, which has the same structure for all rods. The influence of the active environment is determined by the diffusion penetration of its elements into the rod material. An approximate method of solving the diffusion equation is used, based on introducing a diffusion front. The distribution of stresses over time is analyzed considering the penetration of the active environment into different parts of the rod with varying diffusion coefficients. A parametric analysis is carried out on the influence of stresses and parameters of the rheological models of the composite rod materials on the stress-strain state and long-term strength as elements of the rod system and the three-rod system as a whole. The relationship between time to failure and the ratio of diffusion coefficients of the active environment in the elements of the composite rod is determined.

Keywords: composite rod, creep, damage, long-term fracture, active medium, diffusion front.

Received: 6th May, 2023 / Revised: 23rd November, 2023 /
Accepted: 17th January, 2024 / First online: 26th March, 2024

Mechanics of Solids
Short Communication

Please cite this article in press as:
Fomin L. V., Basalov Yu. G. Long-term fracture of a composite rod under tension in creep conditions in the presence of an active medium, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2024, vol. 28, no. 2, pp. 390–400. EDN: WXJJNS. DOI: 10.14498/vsgtu2018 (In Russian).

Authors' Details:

Leonid V. Fomin https://orcid.org/0000-0002-9075-5049
Cand. Phys. & Math. Sci.; Leading Researcher; Lab. of Design and Applied Methods of Calculation of Composite Structures; e-mail: fleonid1975@mail.ru

Yuriy G. Basalov https://orcid.org/0000-0002-1416-3690
Lead Engineer; Lab. of Design and Applied Methods of Calculation of Composite Structures; e-mail: basalov@yandex.ru

Competing interests. We declare that we have no conflicts of interest in the authorship and publication of this article.

Authors' contributions and responsibilities. Each author has participated in the article concept development; the authors contributed equally to this article. The authors are absolutely responsible for submit the final manuscript to print. Each author has approved the final version of manuscript.

Funding. This study was carried out with financial support from the Russian Foundation for Basic Research (project no. 20-08-00387) and State Budget Research Work (CITiS no. AAAA-A16-116021110204-3; AAAA-A19-119012990120-9).

References

1. Rabotnov Yu. N. *Creep problems in structural members*. Amsterdam, London, North-Holland Publ. Co., 1969, xiv+822 pp.
2. Lokoshchenko A. M. *Creep and Long-term Strength of Metals*. Boca, Raton, CRC Press, 2017, xviii+545 pp. EDN: YKQNZJ. DOI: https://doi.org/10.1201/b22242.
3. Lokoshchenko A., Fomin L. Kinetic theory of cand long-term strength of metals, In: *Kinetic Theory*. Rijeka, IntechOpen, 2018, pp. 51–69. DOI: https://doi.org/10.5772/intechopen.70768.
4. Fomin L. V., Basalov Yu. G. On the long-term fracture of a composite tensile rod under creep conditions, *Mech. Solids*, 2023, vol. 58, no. 84–94. DOI: https://doi.org/10.3103/S0025654422100338.
5. Petrova M. A., Saadatibai M., Tarasov A. I. Analysis of modern turbine engines working surface layers blades work conditions, *Civil Aviation High Technologies*, 2015, no. 217, pp. 124–127 (In Russian). EDN: RWNDAE.
6. Abraimov N. V., Zolotareva A. Yu. Effect of high-temperature coatings on the reliability characteristics of GTE blade elements, *Russ. Metall.*, 2019, vol. 2019, no. 12, pp. 1268–1274. EDN: KNYMBU. DOI: https://doi.org/10.1134/S0036029519120024.
7. Borisov V. M., Trofimov V. N., Sapozhkov A. Yu., et al. On the capabilities of improving the corrosion resistance of fuel cladding by using high-power laser and plasma sources, *Nuclear Physics and Engineering*, 2015, vol. 6, no. 11–12, pp. 643–650 (In Russian). EDN: XGWIPF. DOI: https://doi.org/10.1134/S2079562915060032.
8. Li W., Shirvan K. Implications of SiC irradiation creep and annealing to UN-SiC fuel rod behavior, *J. Nucl. Mat.*, 2020, vol. 542, 152479. DOI: https://doi.org/10.1016/j.jnucmat.2020.152479.
9. Bose S. *High Temperature Coatings*. Cambridge, MA, Butterworth-Heinemann, 2018, xviii+398 pp. DOI: https://doi.org/10.1016/C2015-0-01316-8.
10. Lokoshchenko A. M., Fomin L. V. Delayed fracture of plates under creep condition in unsteady complex stress state in the presence of aggressive medium, *Appl. Math. Model.*, 2018, vol. 60, pp. 478–489. EDN: XYDIAH. DOI: https://doi.org/10.1016/j.apm.2018.03.031.
11. Fomin L. V. Description of creep rupture strength of tensile rod with rectangular and circular cross-section at high temperature air media, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2013, no. 3(32), pp. 87–97 (In Russian). EDN: PRWXIE. DOI: https://doi.org/10.14498/vsgtu1228.
12. Oding I. A., Fridman Z. G. Role of surface layers in long-term fracture of metals under creep conditions, *Zavod. Lab.*, 1959, vol. 25, no. 3, pp. 329–332 (In Russian).