

ISSN 1991-8615 (print)
ISSN 2310-7081 (online)



ВЕСТНИК

САМАРСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО
ТЕХНИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

Серия
«Физико-математические науки»

Т. 28, № 3 – 2024

Journal of Samara State Technical University
Ser. Physical and Mathematical Sciences

Вестник Самарского государственного технического университета

ISSN 1991–8615 (print)
ISSN 2310–7081 (online)
НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ
Издаётся с 1996 г.
Выходит 4 раза в год

Ноябрь — 2024

Серия

«ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ» (Т. 28, № 3/76 – 2024)

Главный редактор В. П. Радченко — д.ф.-м.н., проф. (Самара, Россия)
Заместитель главного редактора А. И. Жданов — д.ф.-м.н., проф. (Самара, Россия)
Отв. секретарь М. Н. Саушкин — к.ф.-м.н., доц. (Самара, Россия)
Отв. секретарь Е. В. Мурашкин — к.ф.-м.н. (Москва, Россия)
Секретарь Е. А. Козлова — к.ф.-м.н. (Самара, Россия)

Редакционный совет:

- С. А. Авдонин — д.ф.-м.н., проф. (Фэрбенкс, Аляска, США)
- Б. Д. Аннин — акад. РАН, д.ф.-м.н., проф. (Новосибирск, Россия)
- А. А. Буренин — чл. кор. РАН, д.ф.-м.н., проф. (Комсомольск-на-Амуре, Россия)
- Р. Вельмураган — доктор наук (Ченнай, Индия)
- С. П. Верёвкин — д.х.н., проф. (Росток, Германия)
- Ш. Иматани — доктор наук (Киото, Япония)
- О. И. Маричев — д.ф.-м.н., проф. (Ларами, Вайоминг, США)
- В. П. Матвеев — акад. РАН, д.т.н., проф. (Пермь, Россия)
- П. В. Севастьянов — д.т.н., проф. (Ченстохова, Польша)

Редакционная коллегия:

- В. Н. Акопян — д.ф.-м.н., проф. (Ереван, Армения)
- А. П. Амосов — д.ф.-м.н., проф. (Самара, Россия)
- А. В. Боровских — д.ф.-м.н., проф. (Москва, Россия)
- Л. А. Игумнов — д.ф.-м.н., проф. (Нижний Новгород, Россия)
- Ф. дель Изола — д. н., проф. (Рим, Италия)
- В. А. Ковалёв — д.ф.-м.н., проф. (Москва, Россия)
- А. И. Кожанов — д.ф.-м.н., проф. (Новосибирск, Россия)
- Д. С. Лисовенко — д.ф.-м.н. (Москва, Россия)
- А. Н. Миронов — д.ф.-м.н., проф. (Елабуга, Россия)
- Е. Ю. Просвириков — д.ф.-м.н., (Екатеринбург, Россия)
- Л. С. Пулькина — д.ф.-м.н., проф. (Самара, Россия)
- Ю. Н. Радаев — д.ф.-м.н., проф. (Москва, Россия)
- Е. В. Радкевич — д.ф.-м.н., проф. (Москва, Россия)
- А. В. Саакян — д.ф.-м.н., проф. (Ереван, Армения)
- К. Б. Сабитов — д.ф.-м.н., проф. (Стерлитамак, Россия)
- Л. А. Сараев — д.ф.-м.н., проф. (Самара, Россия)
- А. П. Солдатов — д.ф.-м.н., проф. (Москва, Россия)

НАУЧНОЕ ИЗДАНИЕ

Вестник Самарского государственного технического университета.
Серия «Физико-математические науки» (Т. 28, № 3/76 – 2024)

Учредитель — ФГБОУ ВО «Самарский государственный технический университет» 443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244

Редактор Е. С. Захарова

Выпускающий редактор Е. В. Абрамова

Компьютерная вёрстка М. Н. Саушкин, О. С. Афанасьева,
Е. Ю. Арланова

Адрес редакции и издателя:

ФГБОУ ВО «СамГТУ»,

443100, г. Самара,

ул. Молодогвардейская, 244

Тел.: +7 (846) 337 04 43

Факс: +7 (846) 278 44 00

E-mail: vsgtu@samgtu.ru

URL: <http://www.mathnet.ru/vsgtu>

Оригинал-макет изготовлен

на кафедре прикладной математики

и информатики СамГТУ

Свидетельство о регистрации

ПИ № ФС 77–66685 от 27.07.2016.

Федеральная служба по надзору
в сфере связи информационных
технологий и массовых коммуникаций

Подписано в печать 25 ноября 2024 г.

Дата выхода в свет 19 декабря 2024 г.

Формат 70 × 108 1/16.

Усл. печ. л. 13.00. Уч.-изд. л. 12.97.

Тираж 500 экз. Рег. № 177/24.

Заказ № 464.

Отпечатано в типографии
Самарского государственного
технического университета

443100, г. Самара,

ул. Молодогвардейская, 244.

Журнал индексируется в Web of Science Core Collection (Emerging Sources Citation Index), Scopus, Russian Science Citation Index, Zentralblatt MATH, DOAJ и входит в ядро Российского индекса научного цитирования.

Журнал включен в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук, по научным специальностям и соответствующим им отраслям науки:

- 1.1.2 – Дифференциальные уравнения и математическая физика (физико-математические науки);
- 1.1.8 – Механика деформируемого твердого тела (физико-математические науки);
- 1.2.2 – Математическое моделирование численные методы и комплексы программ (физико-математические науки).

Полнотекстовый доступ к статьям журнала осуществляется на Общероссийском математическом портале (<http://www.mathnet.ru>), портале научных журналов «Эко-Вектор» (<https://journals.eco-vector.com>), сайтах научных электронных библиотек eLibrary.ru (<http://elibrary.ru>) и КиберЛенинка (<http://cyberleninka.ru>).

© Коллектив авторов, 2024

© СамГТУ, 2024 (составление, дизайн, макет)

♾️ Контент публикуется на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

Подписной индекс в каталоге агентства «Урал-Пресс» 18108 Цена свободная

Journal of Samara State Technical University

ISSN 1991–8615 (print)

ISSN 2310–7081 (online)

SCIENTIFIC JOURNAL

Published since 1996

4 issues per year

November — 2024

Ser. Physical & Mathematical Sciences, 2024, vol. 28, no. 3

Founder — Samara State Technical University, Samara, 443100, Russian Federation

Editor-in-Chief V. P. Radchenko (Samara, Russian Federation)

Deputy Editor-in-Chief A. I. Zhdanov (Samara, Russian Federation)

Executive Secretary M. N. Saushkin (Samara, Russian Federation)

Executive Secretary E. V. Murashkin (Moscow, Russian Federation)

Secretary E. A. Kozlova (Samara, Russian Federation)

Editorial Council:

- B. D. Annin (Novosibirsk, Russian Federation)
- S. A. Avdonin (Fairbanks, Alaska, USA)
- A. A. Burenin (Komsomolsk-on-Amur, Russian Federation)
- Shōji Imatani (Kyoto, Japan)
- O. I. Marichev (Laramie, Wyoming, USA)
- V. P. Matveenko (Perm, Russian Federation)
- P. V. Sevast'yanov (Częstochowa, Poland)
- Ramachandran Velmurugan (Chennai, India)
- S. P. Verevkin (Rostock, Germany)

Editorial Board:

- A. P. Amosov (Samara, Russian Federation)
- A. V. Borovskikh (Moscow, Russian Federation)
- F. dell'Isola (Rome, Italy)
- V. N. Hakobyan (Yerevan, Armenia)
- L. A. Igumnov (N. Novgorod, Russian Federation)
- V. A. Kovalev (Moscow, Russian Federation)
- A. I. Kozhanov (Novosibirsk, Russian Federation)
- D. S. Lisovenko (Moscow, Russian Federation)
- A. N. Mironov (Elabuga, Russian Federation)
- E. Yu. Prosviryakov (Ekaterinburg, Russian Federation)
- L. S. Pulkina (Samara, Russian Federation)
- Yu. N. Radayev (Moscow, Russian Federation)
- E. V. Radkevich (Moscow, Russian Federation)
- K. B. Sabitov (Sterlitamak, Russian Federation)
- A. V. Sahakyan (Yerevan, Armenia)
- L. A. Saraev (Samara, Russian Federation)
- A. P. Soldatov (Moscow, Russian Federation)

Edited by E. S. Zakharova, E. V. Abramova
Compiled and typeset by M. N. Saushkin, O. S. Afanas'eva,
E. Yu. Arlanova

The Editorial Board Address:

Dept. of Applied Mathematics and Computer Science,
Samara State Technical University,
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russian Federation

Phone: +7 (846) 337 04 43

Phax: +7 (846) 278 44 00

E-mail: vsgtu@samgtu.ru

URL: <http://www.mathnet.ru/eng/vsgtu>

Printed at the Samara State Technical University Press.

The journal covered in Web of Science Core Collection (Emerging Sources Citation Index), Zentralblatt MATH, Scopus, Russian Science Citation Index, and DOAJ.

The full-text electronic version of journal is hosted by the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru (<http://www.mathnet.ru>), the Eco-Vector Journals Portal (<https://journals.eco-vector.com>), and by the web-sites of scientific electronic libraries eLibrary.ru (<http://elibrary.ru>) and CyberLeninka (<http://cyberleninka.ru>).

© Authors, 2024

© Samara State Technical University, 2024 (Compilation, Design, and Layout)

 The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Содержание

Дифференциальные уравнения и математическая физика

<i>Khalouta A.</i> “Преобразование Халуты, осуществляемое с использованием различных операторов дробной производной”	407
<i>Немдили А., Кориши Ф., Фуджита Яшима Х.</i> “Приближение решения уравнения переноса-диффузии в пространстве Гёльдера”	426

Механика деформируемого твёрдого тела

<i>Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н.</i> “Волновые числа гармонических плоских волн трансляционных и спинорных перемещений в полуизотропной термоупругой среде”	445
<i>Прокудин А. Н.</i> “Упругопластический анализ вращающегося полого цилиндра, жестко посаженного на вал, при наличии температурного градиента” . . .	462
<i>Радченко В. П., Саушкин М. Н., Шишкин Д. М.</i> “Анализ остаточных напряжений в поверхностно упрочненных вращающихся призматических элементах с полукруглыми надрезами в условиях высокотемпературной ползучести”	489
<i>Роговой А. А.</i> “Микроструктурная модель процессов двойникования и раздвойникования мартенситной фазы в сплавах с памятью формы”	516
<i>Севодина Н. В., Юрлова Н. А., Ошмарин Д. А.</i> “Способ определения параметров электрического сигнала для управления вынужденными установившимися колебаниями электровязкоупругих тел. Приложение к активному демпфированию колебаний”	543
<i>Янковский А. П.</i> “Уточненная модель термовязкоупругопластического динамического деформирования армированных гибких пологих оболочек”	562

Математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

<i>Зотеев В. Е., Сагитова Л. А., Гаврилова А. А.</i> “Разработка и сравнительный анализ математических моделей функционирования региональной энергосистемы Самарской области”	586
---	-----

Contents

Differential Equations and Mathematical Physics

Khalouta A. “Khalouta transform via different fractional derivative operators” . 407

Nemdili A., Korichi F., Fujita Yashima H. “Approximation of the solution of transport-diffusion equation in Hölder space” 426

Mechanics of Solids

Murashkin E. V., Radayev Yu. N. “Wave numbers of harmonic plane waves of translational and spinor displacements in a semiisotropic thermoelastic solid” . . 445

Prokudin A. N. “Elastoplastic analysis of a rotating hollow cylinder with a rigid shaft under temperature gradient” 462

Radchenko V. P., Saushkin M. N., Shishkin D. M. “Residual stress analysis in surface-hardened rotating prismatic elements with semicircular notches under high-temperature creep” 489

Rogovoy A. A. “Microstructural model of twinning and detwinning processes of the martensitic phase in shape memory alloys” 516

Sevodina N. V., Iurlova N. A., Oshmarin D. A. “Method for determining the parameters of an electrical signal for controlling forced steady-state vibrations of electroviscoelastic bodies. Application to active vibration damping ” 543

Yankovskii A. P. “Refined model of thermo-visco-elastic-plastic dynamic deformation of reinforced flexible shallow shells” 562

Mathematical Modeling, Numerical Methods and Software Complexes

Zoteev V. E., Sagitova L. A., Gavrilova A. A. “Development and comparative analysis of mathematical models for the functioning of the regional power system of the Samara region” 586



MSC: 34A08, 35A22, 33E12, 35C10

Khalouta transform via different fractional derivative operators

A. *Khalouta*

Université Ferhat Abbas de Sétif 1, Sétif, 19000, Algeria.

Abstract

Recently, the author defined and developed a new integral transform namely the Khalouta transform, which is a generalization of many well-known integral transforms. The aim of this paper is to extend this new integral transform to include different fractional derivative operators. The fractional derivatives are described in the sense of Riemann–Liouville, Liouville–Caputo, Caputo–Fabrizio, Atangana–Baleanu–Riemann–Liouville, and Atangana–Baleanu–Caputo. Theorems dealing with the properties of the Khalouta transform for solving fractional differential equations using the mentioned fractional derivative operators are proven. Several examples are presented to verify the reliability and effectiveness of the proposed technique. The results show that the Khalouta transform is more efficient and useful in dealing with fractional differential equations.

Keywords: fractional differential equations, Khalouta transform, Riemann–Liouville derivative, Liouville–Caputo derivative, Caputo–Fabrizio derivative, Atangana–Baleanu–Riemann–Liouville derivative, Atangana–Baleanu–Caputo derivative, exact solution.

Received: 2nd February, 2024 / Revised: 20th September, 2024 /Accepted: 27th September, 2024 / First online: 12th November, 2024

Differential Equations and Mathematical Physics Research Article

© The Author(s), 2024

© Samara State Technical University, 2024 (Compilation, Design, and Layout)

© © The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Please cite this article in press as:

Khalouta A. Khalouta transform via different fractional derivative operators, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2024, vol. 28, no. 3, pp. 407–425. EDN: QNZQSC. DOI: 10.14498/vsgtu2082.

Author's Details:

Ali Khalouta <https://orcid.org/0000-0003-1370-3189>

Lab. of Fundamental Mathematics and Numerical; Dept. of Mathematics; Faculty of Sciences;
e-mail: ali.khalouta@univ-setif.dz

1. Introduction. Nowadays, the field of fractional calculus is one of the most vital fields for many researchers and scientists from all over the world, where fractional calculus plays an important role in modeling and describing many phenomena in many fields including quantum mechanics, plasma physics, chemistry, biology, psychology, electromagnetic theory and other different fields of science and engineering, see the papers, [1–5]. Due to the increasing applications of fractional calculus, there has been great interest in solving fractional differential equations.

Over the past decades, mathematicians and physicists have devoted great efforts to finding robust and stable methods for solving fractional differential equations representing real physical problems. Among these methods, the integral transform method is considered one of the most effective methods to solve this kind of equations.

There are many integral transforms that are used in different fields of science such as physics, engineering, astronomy, etc. In particular, for solving fractional differential equations, integral transforms are widely used and many research works are carried out on the theory and applications of the Laplace transform, Fourier transform, and Mellin transform. The most common integral transform with an exponential-type kernel is the Laplace transform. Laplace transform has proven its dominancy in engineering and applied science applications. In recent years, many integral transforms with an exponential type kernel have been introduced. In 1993, Watugala [6] presented the Sumudu transform. The natural transform was developed by Khan [7] in 2008. In 2011, Elzaki invented the Elzaki transform [8]. Atangana and Kiliçman [9] in 2013, defined the novel transform. In 2015, Srivastava et al. [10] introduced the M-transform. In 2016, many transforms were proposed, such as the ZZ transform by Zafar [11], Ramadan Group transform [12], a polynomial transform by Barnes [13], also, a new integral transform was presented by Yang [14]. In 2017, other transforms were introduced, such as the Aboodh transform [15] and the Rangaig transform [16], while the Shehu transform [17] was created in 2019, by Maitama and Zhao.

In 2023, the author proposed a new integral transform called the Khalouta transform [18], which is a new efficient technique to solve differential equations with real applications in applied physical sciences and engineering. The advantages of this new integral transform lie in the following:

- 1) this transform covers those existing transforms such as Laplace, Aboodh, Elzaki, Sumudu, natural, Shehu, and ZZ transforms for different values of the transform variables;
- 2) this method transforms the differential problem into an algebraic problem that can be easily solved;
- 3) the Khalouta transform method finds the solution without any discretization, transformation or restrictive assumptions;
- 4) the Khalouta transform method can be used to solve a large number of differential equations with minimal computational effort.

The main objective of this paper is to study the relationship between the Khalouta transform and five different fractional derivative operators and then to use the results obtained to solve fractional differential equations.

The outline of the paper is as follows. In Sect. 2, we explain some of the basic concepts and properties of fractional calculus theory. In Sect. 3, we present the definition of the Khalouta transform and some of its important properties that

we need in our work. In Sect. 4, we prove the results and examine the relationship between the Khalouta transform with the Riemann–Liouville fractional derivative, Liouville–Caputo fractional derivative, Caputo–Fabrizio fractional derivative, Atangana–Baleanu–Riemann–Liouville derivative, and Atangana–Baleanu–Caputo derivative, as well as some new results. In Sect. 5, we provide various numerical examples to illustrate the precision of the results of the previous sections. Finally, the conclusion is given in Sect. 6.

2. Preliminary Concepts. In this section, we present some essential concepts of fractional calculus necessary to prove our main results.

DEFINITION 1 [19]. The Riemann–Liouville fractional integral with order $\alpha > 0$ for a function $u \in L^1(\mathbb{R}^+)$ is defined by

$$\mathbb{I}^\alpha u(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} u(\tau) d\tau, \quad (1)$$

where $\Gamma(\cdot)$ is the Euler gamma function.

DEFINITION 2 [19]. The Riemann–Liouville fractional derivative with order $\alpha > 0$ for a function $u \in L^1(\mathbb{R}^+)$ is defined by

$$\mathbb{D}^\alpha u(t) = \frac{d^n}{dt^n} \mathbb{I}^{n-\alpha} u(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_0^t (t - \tau)^{n-\alpha-1} u(\tau) d\tau, \quad (2)$$

where $n - 1 < \alpha \leq n$, $n = [\alpha] + 1$ with $[\alpha]$ being the integer part of α .

DEFINITION 3 [19]. The Liouville–Caputo fractional derivative with order $\alpha > 0$ for a function u is defined by

$$D^\alpha u(t) = \mathbb{I}^{n-\alpha} \frac{d^n}{dt^n} u(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{n-\alpha-1} u^{(n)}(\tau) d\tau, \quad (3)$$

where $n - 1 < \alpha \leq n$, $n = [\alpha] + 1$ with $[\alpha]$ being the integer part of α .

DEFINITION 4 [19]. The two-parameter Mittag–Leffler function is defined by

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{z^i}{\Gamma(i\alpha + \beta)}, \quad \alpha, \beta > 0, \quad z \in \mathbb{C}. \quad (4)$$

If $\beta = 1$, equation (4) reduced to the one-parameter Mittag–Leffler function as follows

$$E_\alpha(z) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{z^i}{\Gamma(i\alpha + 1)}, \quad \alpha > 0, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Now, for $n = 1$ in equation (3), if transformations happen as follows

$$(t - \tau)^{-\alpha} \longrightarrow \exp\left(-\frac{\alpha(t - \tau)}{1 - \alpha}\right) \quad \text{and} \quad \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha)} \longrightarrow \frac{\mathcal{CF}(\alpha)}{1 - \alpha},$$

the new definition of fractional derivative operator is expressed by Caputo and Fabrizio.

DEFINITION 5 [20]. The Caputo–Fabrizio fractional derivative with order α when $0 < \alpha \leq 1$ for a function $u \in H^1(\mathbb{R}^+)$ is defined by

$$\mathcal{D}^\alpha u(t) = \frac{\mathcal{CF}(\alpha)}{1-\alpha} \int_0^t u'(\tau) \exp\left(-\frac{\alpha(t-\tau)}{1-\alpha}\right) d\tau,$$

where $\mathcal{CF}(\alpha)$ is a normalization function that satisfies $\mathcal{CF}(0) = \mathcal{CF}(1) = 1$.

The above Caputo–Fabrizio fractional derivative was later modified by Jorge Losada and Juan José Nieto as

DEFINITION 6 [21]. The Caputo–Fabrizio fractional derivative with order α when $0 < \alpha \leq 1$ for a function $u \in H^1(\mathbb{R}^+)$ is defined by

$$\mathcal{D}^\alpha u(t) = \frac{(2-\alpha)\mathcal{CF}(\alpha)}{2(1-\alpha)} \int_0^t u'(\tau) \exp\left(-\frac{\alpha(t-\tau)}{1-\alpha}\right) d\tau. \quad (5)$$

For $\mathcal{CF}(\alpha) = 2/(2-\alpha)$ in equation (5), we have

$$\mathcal{D}^\alpha u(t) = \frac{1}{1-\alpha} \int_0^t u'(\tau) \exp\left(-\frac{\alpha(t-\tau)}{1-\alpha}\right) d\tau. \quad (6)$$

DEFINITION 7 [21]. The Caputo–Fabrizio fractional derivative with order $\alpha + n$ when $0 < \alpha \leq 1$ and $n \geq 1$ is defined by

$$\mathcal{D}^{\alpha+n} u(t) = \mathcal{D}^\alpha (\mathcal{D}^n u(t)). \quad (7)$$

DEFINITION 8 [22]. Let a function $u(t) \in H^1(\mathbb{R}^+)$ and $n-1 < \alpha < n$, $n \in \mathbb{N}^*$, then the Atangana–Baleanu–Riemann–Liouville fractional derivative with order α is defined by

$${}^{ABR}\mathfrak{D}^\alpha u(t) = \frac{\mathcal{AB}(\alpha)}{1-\alpha} \frac{d^n}{dt^n} \int_0^t u(\tau) E_\alpha\left(-\frac{\alpha(t-\tau)^\alpha}{1-\alpha}\right) d\tau, \quad (8)$$

and the Atangana–Baleanu–Caputo fractional derivative with order α is defined by

$${}^{ABC}\mathfrak{D}^\alpha u(t) = \frac{\mathcal{AB}(\alpha)}{1-\alpha} \int_0^t u^{(n)}(\tau) E_\alpha\left(-\frac{\alpha(t-\tau)^\alpha}{1-\alpha}\right) d\tau, \quad (9)$$

where $\mathcal{AB}(\alpha)$ represents the normalization function that satisfies the conditions $\mathcal{AB}(0) = \mathcal{AB}(1) = 1$ and $E_\alpha(\cdot)$ is the Mittag–Leffler function for one-parameter.

3. Khalouta transform. Recently, the author introduced a new integral transform, called the Khalouta transform, which is applied to solve ordinary and partial differential equations. For more details, see [18].

DEFINITION 9. The Khalouta transform of the function $u(t)$ of exponential order is defined over the set of functions

$$\mathcal{S} = \{u(t) : \exists K, \vartheta_1, \vartheta_2 > 0, |u(t)| < K \exp(\vartheta_j |t|), \text{ if } t \in (-1)^j \times [0, \infty)\},$$

by the following integral

$$\mathbb{KH}[u(t)] = \mathcal{K}(s, \gamma, \eta) = \frac{s}{\gamma\eta} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{st}{\gamma\eta}\right) u(t) dt, \quad (10)$$

where $s, \gamma, \eta > 0$ are the Khalouta transform variables.

Some basic properties of the Khalouta transform are given as follows.

PROPERTY 1. The Khalouta transform is a linear operator. That is, if λ and μ are non-zero constants, then

$$\mathbb{KH}[\lambda u(t) \pm \mu v(t)] = \lambda \mathbb{KH}[u(t)] \pm \mu \mathbb{KH}[v(t)].$$

PROPERTY 2. If $u^{(n)}(t)$ is the n -th derivative of the function $u(t) \in \mathcal{S}$ with respect to “ t ” then its Khalouta transform is given by

$$\mathbb{KH}[u^{(n)}(t)] = \frac{s^n}{\gamma^n \eta^n} \mathcal{K}(s, \gamma, \eta) - \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{s}{\gamma \eta} \right)^{n-k} u^{(k)}(0).$$

PROPERTY 3 (CONVOLUTION PROPERTY). Suppose $\mathcal{K}_1(s, \gamma, \eta)$ and $\mathcal{K}_2(s, \gamma, \eta)$ are the Khalouta transforms of $u_1(t)$ and $u_2(t)$, respectively, both defined in the set $\mathcal{S}$. Then the Khalouta transform of their convolution is given by

$$\mathbb{KH}[(u_1 * u_2)(t)] = \frac{\gamma \eta}{s} \mathcal{K}_1(s, \gamma, \eta) \mathcal{K}_2(s, \gamma, \eta),$$

where $u_1 * u_2$ is convolution of two functions defined by

$$(u_1 * u_2)(t) = \int_0^t u_1(\tau) u_2(t - \tau) d\tau = \int_0^t u_1(t - \tau) u_2(\tau) d\tau.$$

PROPERTY 4. Khalouta transform of some basic functions

$$\begin{aligned} \mathbb{KH}[1] &= 1, \\ \mathbb{KH}[t] &= \frac{\gamma \eta}{s}, \\ \mathbb{KH}\left[\frac{t^n}{n!}\right] &= \frac{\gamma^n \eta^n}{s^n}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \\ \mathbb{KH}\left[\frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)}\right] &= \frac{\gamma^\alpha \eta^\alpha}{s^\alpha}, \quad \alpha > -1, \\ \mathbb{KH}[\exp(at)] &= \frac{s}{s - a\gamma\eta}. \end{aligned}$$

4. Main results. In this section, we prove new theorems related to the Khalouta transform of different fractional derivative operators, namely Riemann–Liouville fractional derivative, Liouville–Caputo fractional derivative, Caputo–Fabrizio fractional derivative, Atangana–Baleanu–Riemann–Liouville fractional derivative, and Atangana–Baleanu–Caputo fractional derivative. Moreover, we prove a new and important results in solving fractional differential equations.

THEOREM 1. If $\mathcal{K}(s, \gamma, \eta)$ is the Khalouta transform of the function $u(t)$, then the Khalouta transform of the Riemann–Liouville fractional integral for $u(t)$ with order α , is given by

$$\mathbb{KH}[\mathbb{I}^\alpha u(t)] = \frac{\gamma^\alpha \eta^\alpha}{s^\alpha} \mathcal{K}(s, \gamma, \eta).$$

Proof. Taking the Khalouta transform of both sides of equation (1) and using Properties 3 and 4, we get

$$\begin{aligned}\mathbb{KH}[\mathbb{I}^\alpha u(t)] &= \mathbb{KH}\left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} u(\tau) d\tau\right] = \\ &= \mathbb{KH}\left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} * u(t)\right] = \frac{\gamma\eta}{s} \mathbb{KH}\left[\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right] \mathbb{KH}[u(t)] = \\ &= \frac{\gamma^\alpha \eta^\alpha}{s^\alpha} \mathcal{K}(s, \gamma, \eta).\end{aligned}$$

The proof is complete. $\square$

THEOREM 2. Let $n \in \mathbb{N}^*$ and $\alpha > 0$ such that $n-1 < \alpha \leq n$ and $\mathcal{K}(s, \gamma, \eta)$ is the Khalouta transform of the function $u(t)$, then the Khalouta transform of the Riemann–Liouville fractional derivative of $u(t)$ with order α , is given by

$$\mathbb{KH}[\mathbb{D}^\alpha u(t)] = \frac{s^\alpha}{\gamma^\alpha \eta^\alpha} \mathcal{K}(s, \gamma, \eta) - \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{s}{\gamma\eta}\right)^{k+1} \mathbb{D}^{\alpha-k-1} u(0).$$

Proof. According to the definition of the Riemann–Liouville fractional derivative (2)

$$\mathbb{D}^\alpha u(t) = \frac{d^n}{dt^n} \mathbb{I}^{n-\alpha} u(t),$$

let

$$v(t) = \mathbb{I}^{n-\alpha} u(t), \quad (11)$$

then

$$\mathbb{D}^\alpha u(t) = \frac{d^n}{dt^n} v(t) = v^{(n)}(t). \quad (12)$$

Taking the Khalouta transform of both sides of equation (11) and using Theorem 1, we get

$$\mathcal{V}(s, \gamma, \eta) = \mathbb{KH}[v(t)] = \mathbb{KH}[\mathbb{I}^{n-\alpha} u(t)] = \frac{\gamma^{n-\alpha} \eta^{n-\alpha}}{s^{n-\alpha}} \mathcal{K}(s, \gamma, \eta), \quad (13)$$

where $\mathcal{V}(s, \gamma, \eta)$ is the Khalouta transform of the function $v(t)$.

Applying the Khalouta transform on both sides of equation (12) and using Property 2, we get

$$\begin{aligned}\mathbb{KH}[\mathbb{D}^\alpha u(t)] &= \mathbb{KH}[v^{(n)}(t)] = \frac{s^n}{\gamma^n \eta^n} \mathcal{V}(s, \gamma, \eta) - \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{s}{\gamma\eta}\right)^{n-k} v^{(k)}(0) = \\ &= \frac{s^n}{\gamma^n \eta^n} \mathcal{V}(s, \gamma, \eta) - \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{s}{\gamma\eta}\right)^{k+1} v^{(n-k-1)}(0).\end{aligned} \quad (14)$$

From equation (11), we have

$$v^{(n-k-1)}(0) = \frac{d^{n-k-1}}{dt^{n-k-1}} v(0) = \frac{d^{n-k-1}}{dt^{n-k-1}} \mathbb{I}^{n-\alpha} u(0) = \mathbb{D}^{\alpha-k-1} u(0). \quad (15)$$

Thus, by replacing equations (13) and (15) in equation (14), we obtain

$$\mathbb{KH}[\mathbb{D}^\alpha u(t)] = \frac{s^\alpha}{\gamma^\alpha \eta^\alpha} \mathcal{K}(s, \gamma, \eta) - \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{s}{\gamma \eta} \right)^{k+1} \mathbb{D}^{\alpha-k-1} u(0).$$

The proof is complete. $\square$

THEOREM 3. *Let $n \in \mathbb{N}^*$ and $\alpha > 0$ such that $n - 1 < \alpha \leq n$ and $\mathcal{K}(s, \gamma, \eta)$ is the Khalouta transform of the function $u(t)$, then the Khalouta transform of the Liouville–Caputo fractional derivative of $u(t)$ with order α , is given by*

$$\mathbb{KH}[D^\alpha u(t)] = \frac{s^\alpha}{\gamma^\alpha \eta^\alpha} \mathcal{K}(s, \gamma, \eta) - \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{s}{\gamma \eta} \right)^{\alpha-k} u^{(k)}(0).$$

Proof. We put

$$v(t) = u^{(n)}(t). \quad (16)$$

Then, according to the definition of the Liouville–Caputo fractional derivative in equation (3), we have

$$\begin{aligned} D^\alpha u(t) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} u^{(n)}(\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} v(\tau) d\tau = \mathbb{I}^{n-\alpha} v(t). \end{aligned} \quad (17)$$

Taking the Khalouta transform of both sides of equation (17) and using Theorem 1, we get

$$\mathbb{KH}[D^\alpha u(t)] = \mathbb{KH}[\mathbb{I}^{n-\alpha} v(t)] = \frac{\gamma^{n-\alpha} \eta^{n-\alpha}}{s^{n-\alpha}} \mathcal{V}(s, \gamma, \eta), \quad (18)$$

where $\mathcal{V}(s, \gamma, \eta)$ is the Khalouta transform of the function $v(t)$.

Applying the Khalouta transform on both sides of equation (16) and using Property 2, we get

$$\begin{aligned} \mathbb{KH}[v(t)] &= \mathbb{KH}[u^{(n)}(t)], \\ \mathcal{V}(s, \gamma, \eta) &= \frac{s^n}{\gamma^n \eta^n} \mathcal{K}(s, \gamma, \eta) - \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{s}{\gamma \eta} \right)^{n-k} u^{(k)}(0). \end{aligned}$$

Therefore, equation (18) becomes

$$\begin{aligned} \mathbb{KH}[D^\alpha u(t)] &= \frac{\gamma^{n-\alpha} \eta^{n-\alpha}}{s^{n-\alpha}} \left(\frac{s^n}{\gamma^n \eta^n} \mathcal{K}(s, \gamma, \eta) - \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{s}{\gamma \eta} \right)^{n-k} u^{(k)}(0) \right) = \\ &= \frac{s^\alpha}{\gamma^\alpha \eta^\alpha} \mathcal{K}(s, \gamma, \eta) - \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{s}{\gamma \eta} \right)^{\alpha-k} u^{(k)}(0). \end{aligned}$$

The proof is complete. $\square$

THEOREM 4. Let $\mathcal{K}(s, \gamma, \eta)$ be the Khalouta transform of the function $u(t)$, then the Khalouta transform of the Caputo–Fabrizio fractional derivative of $u(t)$ with order $\alpha + n$ when $0 < \alpha \leq 1$ and $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, is given by

$$\mathbb{KH}[\mathcal{D}^{\alpha+n}u(t)] = \frac{s}{s - \alpha(s - \gamma\eta)} \left(\frac{s^n}{\gamma^n \eta^n} \mathcal{K}(s, \gamma, \eta) - \sum_{k=0}^n \frac{s^{n-k}}{\gamma^{n-k} \eta^{n-k}} u^{(k)}(0) \right).$$

Proof. According to the definition of the Caputo–Fabrizio fractional derivative in equation (6) and using relation (7), we get

$$\begin{aligned} \mathbb{KH}[\mathcal{D}^{\alpha+n}u(t)] &= \mathbb{KH}[\mathcal{D}^\alpha(\mathcal{D}^n u(t))] = \\ &= \frac{1}{1 - \alpha} \frac{s}{\gamma\eta} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{st}{\gamma\eta}\right) \left(\int_0^t u^{(n+1)}(\tau) \exp\left(-\frac{\alpha(t-\tau)}{1-\alpha}\right) d\tau \right) dt = \\ &= \frac{1}{1 - \alpha} \frac{s}{\gamma\eta} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{st}{\gamma\eta}\right) \left(u^{(n+1)}(t) * \exp\left(-\frac{\alpha t}{1-\alpha}\right) \right) dt = \\ &= \frac{1}{1 - \alpha} \mathbb{KH}\left[u^{(n+1)}(t) * \exp\left(-\frac{\alpha t}{1-\alpha}\right)\right]. \end{aligned}$$

Using Properties 2, 3, and 4, we have

$$\begin{aligned} \mathbb{KH}[\mathcal{D}^{\alpha+n}u(t)] &= \frac{1}{1 - \alpha} \frac{\gamma\eta}{s} \mathbb{KH}[u^{(n+1)}(t)] \mathbb{KH}\left[\exp\left(-\frac{\alpha t}{1-\alpha}\right)\right] = \\ &= \frac{\gamma\eta}{s(1 - \alpha) + \alpha\gamma\eta} \left(\frac{s^{n+1}}{\gamma^{n+1} \eta^{n+1}} \mathcal{K}(s, \gamma, \eta) - \sum_{k=0}^n \left(\frac{s}{\gamma\eta}\right)^{n-k+1} u^{(k)}(0) \right) = \\ &= \frac{s}{s - \alpha(s - \gamma\eta)} \left(\frac{s^n}{\gamma^n \eta^n} \mathcal{K}(s, \gamma, \eta) - \sum_{k=0}^n \frac{s^{n-k}}{\gamma^{n-k} \eta^{n-k}} u^{(k)}(0) \right). \end{aligned}$$

The proof is complete. □

THEOREM 5. Let $\alpha, \beta > 0$, $a \in \mathbb{R}$, and $|a| < \frac{s^\alpha}{\gamma^\alpha \eta^\alpha}$, then

$$\mathbb{KH}[t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(-at^\alpha)] = \frac{s^{\alpha-\beta+1} \gamma^{\beta-1} \eta^{\beta-1}}{s^\alpha + a \gamma^\alpha \eta^\alpha}.$$

Proof. Taking the Khalouta transform of the function $t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(-at^\alpha)$, we obtain

$$\begin{aligned} \mathbb{KH}[t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(-at^\alpha)] &= \frac{s}{\gamma\eta} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{st}{\gamma\eta}\right) t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(-at^\alpha) dt = \\ &= \frac{s}{\gamma\eta} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{st}{\gamma\eta}\right) t^{\beta-1} \sum_{k=0}^\infty \frac{(-at^\alpha)^k}{\Gamma(k\alpha + \beta)} dt = \\ &= \sum_{k=0}^\infty \frac{s}{\gamma\eta} \frac{(-a)^k}{\Gamma(k\alpha + \beta)} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{st}{\gamma\eta}\right) t^{\alpha k + \beta - 1} dt. \quad (19) \end{aligned}$$

Now, by integration by parts, we have

$$\int_0^\infty \exp\left(-\frac{st}{\gamma\eta}\right) t^{\alpha k + \beta - 1} dt = \left(\frac{\gamma\eta}{s}\right)^{\alpha k + \beta} \Gamma(k\alpha + \beta). \quad (20)$$

Substituting equation (20) into equation (19), we get

$$\begin{aligned} \mathbb{KH}[t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(-at^\alpha)] &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{s}{\gamma\eta} \frac{(-a)^k}{\Gamma(k\alpha + \beta)} \left(\frac{\gamma\eta}{s}\right)^{\alpha k + \beta} \Gamma(k\alpha + \beta) = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\gamma\eta}{s}\right)^{\alpha k + \beta - 1} (-a)^k = \left(\frac{\gamma\eta}{s}\right)^{\beta-1} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{-a\gamma^\alpha \eta^\alpha}{s^\alpha}\right)^k = \\ &= \left(\frac{\gamma\eta}{s}\right)^{\beta-1} \frac{1}{1 - \left(\frac{-a\gamma^\alpha \eta^\alpha}{s^\alpha}\right)} = \left(\frac{\gamma\eta}{s}\right)^{\beta-1} \frac{s^\alpha}{s^\alpha + a\gamma^\alpha \eta^\alpha} = \\ &= \frac{s^{\alpha-\beta+1} \gamma^{\beta-1} \eta^{\beta-1}}{s^\alpha + a\gamma^\alpha \eta^\alpha}, \quad \left| \frac{a\gamma^\alpha \eta^\alpha}{s^\alpha} \right| < 1. \end{aligned}$$

The proof is complete. $\square$

THEOREM 6. Let $\mathcal{K}(s, \gamma, \eta)$ be the Khalouta transform of the function $u(t)$. Then the Khalouta transform of the Atangana–Baleanu–Riemann–Liouville fractional derivative is expressed as

$$\mathbb{KH}[{}^{ABR}\mathfrak{D}^\alpha u(t)] = \left(\frac{s^{\alpha+n-1} \mathcal{AB}(\alpha)}{s^\alpha \gamma^{n-1} \eta^{n-1} - \alpha(s^\alpha \gamma^{n-1} \eta^{n-1} - \gamma^{\alpha+n-1} \eta^{\alpha+n-1})} \right) \mathcal{K}(s, \gamma, \eta).$$

Proof. Using the definition of the Khalouta transform (10) and the Atangana–Baleanu–Riemann–Liouville fractional derivative (8), we get

$$\mathbb{KH}[{}^{ABR}\mathfrak{D}^\alpha u(t)] = \mathbb{KH}\left[\frac{\mathcal{AB}(\alpha)}{1-\alpha} \frac{d^n}{dt^n} \int_0^t u(\tau) E_\alpha\left[-\frac{\alpha(t-\tau)^\alpha}{1-\alpha}\right] d\tau\right].$$

Applying the properties of the Khalouta transform 2 and 3, we get

$$\begin{aligned} \mathbb{KH}[{}^{ABR}\mathfrak{D}^\alpha u(t)] &= \frac{\mathcal{AB}(\alpha)}{1-\alpha} \mathbb{KH}\left[\frac{d^n}{dt^n} \left(u(t) * E_\alpha\left(-\frac{\alpha t^\alpha}{1-\alpha}\right)\right)\right] = \\ &= \frac{\mathcal{AB}(\alpha)}{1-\alpha} \left(\frac{s^n}{\gamma^n \eta^n} \mathbb{KH}\left[u(t) * E_\alpha\left(-\frac{\alpha t^\alpha}{1-\alpha}\right)\right] - \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{s}{\gamma\eta}\right)^{n-k} D^k(\mathbb{KH}[u(0) * E_\alpha(0)]) \right) = \\ &= \frac{\mathcal{AB}(\alpha)}{1-\alpha} \frac{s^n}{\gamma^n \eta^n} \frac{\gamma\eta}{s} \left(\frac{s^\alpha}{s^\alpha + \frac{\alpha}{1-\alpha} \gamma^\alpha \eta^\alpha} \mathcal{K}(s, \gamma, \eta) \right) = \\ &= \left(\frac{s^{\alpha+n-1} \mathcal{AB}(\alpha)}{s^\alpha \gamma^{n-1} \eta^{n-1} - \alpha(s^\alpha \gamma^{n-1} \eta^{n-1} - \gamma^{\alpha+n-1} \eta^{\alpha+n-1})} \right) \mathcal{K}(s, \gamma, \eta). \end{aligned}$$

The proof is complete. $\square$

THEOREM 7. Let $\mathcal{K}(s, \gamma, \eta)$ be the Khalouta transform of the function $u(t)$. Then the Khalouta transform of the Atangana–Baleanu–Caputo fractional derivative is expressed as

$$\begin{aligned} \mathbb{KH}[{}^{ABC}\mathfrak{D}^\alpha u(t)] &= \\ &= \left(\frac{s^\alpha \mathcal{AB}(\alpha)}{s^\alpha - \alpha(s^\alpha - \gamma^\alpha \eta^\alpha)} \right) \left(\frac{s^{n-1}}{\gamma^{n-1} \eta^{n-1}} \mathcal{K}(s, \gamma, \eta) - \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{s}{\gamma \eta} \right)^{n-k-1} u^{(k)}(0) \right). \end{aligned}$$

Proof. Using the definition of the Khalouta transform (10) and the Atangana–Baleanu–Caputo fractional derivative (9), we get

$$\mathbb{KH}[{}^{ABC}\mathfrak{D}^\alpha u(t)] = \mathbb{KH} \left[\frac{\mathcal{AB}(\alpha)}{1-\alpha} \int_0^t u^{(n)}(\tau) E_\alpha \left(-\frac{\alpha(t-\tau)^\alpha}{1-\alpha} \right) d\tau \right].$$

Applying the properties of the Khalouta transform 2 and 3, we get

$$\begin{aligned} \mathbb{KH}[{}^{ABC}\mathfrak{D}^\alpha u(t)] &= \frac{\mathcal{AB}(\alpha)}{1-\alpha} \mathbb{KH} \left[\left(u^{(n)}(t) * E_\alpha \left(-\frac{\alpha t^\alpha}{1-\alpha} \right) \right) \right] = \\ &= \frac{\mathcal{AB}(\alpha)}{1-\alpha} \left(\frac{\gamma \eta}{s} \mathbb{KH}[u^{(n)}(t)] \mathbb{KH} \left[E_\alpha \left(-\frac{\alpha t^\alpha}{1-\alpha} \right) \right] \right) = \\ &= \frac{\mathcal{AB}(\alpha)}{1-\alpha} \frac{s^\alpha}{s^\alpha + \frac{\alpha}{1-\alpha} \gamma^\alpha \eta^\alpha} \frac{\gamma \eta}{s} \left(\frac{s^n}{\gamma^n \eta^n} \mathcal{K}(s, \gamma, \eta) - \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{s}{\gamma \eta} \right)^{n-k} u^{(k)}(0) \right) = \\ &= \frac{s^\alpha \mathcal{AB}(\alpha)}{s^\alpha (1-\alpha) + \alpha \gamma^\alpha \eta^\alpha} \left(\frac{s^{n-1}}{\gamma^{n-1} \eta^{n-1}} \mathcal{K}(s, \gamma, \eta) - \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{s}{\gamma \eta} \right)^{n-k-1} u^{(k)}(0) \right) = \\ &= \left(\frac{s^\alpha \mathcal{AB}(\alpha)}{s^\alpha - \alpha(s^\alpha - \gamma^\alpha \eta^\alpha)} \right) \left(\frac{s^{n-1}}{\gamma^{n-1} \eta^{n-1}} \mathcal{K}(s, \gamma, \eta) - \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{s}{\gamma \eta} \right)^{n-k-1} u^{(k)}(0) \right). \end{aligned}$$

The proof is complete. $\square$

5. Applications. In this section, we demonstrate the simplicity and applicability of the Khalouta transform with different fractional derivative operators to solve fractional differential equations.

EXAMPLE 1. Consider the following Riemann–Liouville fractional differential equation

$$\mathbb{D}^{1/2} u(t) + u(t) = 0, \quad (21)$$

with the initial condition

$$\mathbb{D}^{-1/2} u(0) = 2. \quad (22)$$

Taking the Khalouta transform of both sides of equation (21) and using Theorem 2, we get

$$\frac{s^{1/2}}{\gamma^{1/2} \eta^{1/2}} \mathcal{K}(s, \gamma, \eta) - \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{s}{\gamma \eta} \right)^{k+1} \mathbb{D}^{1/2-k-1} u(0) + \mathcal{K}(s, \gamma, \eta) = 0. \quad (23)$$

Substituting the initial condition (22) into equation (23), we get

$$\left(\frac{s^{1/2}}{\gamma^{1/2} \eta^{1/2}} + 1 \right) \mathcal{K}(s, \gamma, \eta) - \frac{2s}{\gamma \eta} = 0.$$

So

$$\mathcal{K}(s, \gamma, \eta) = \frac{2s\gamma^{-1/2}\eta^{-1/2}}{s^{1/2} + \gamma^{1/2}\eta^{1/2}}.$$

According to Theorem 5, when $\alpha = 1/2$, $\beta = 1/2$, and $a = 1$, we have

$$\mathbb{KH}[u(t)] = \mathcal{K}(s, \gamma, \eta) = \frac{2s\gamma^{-1/2}\eta^{-1/2}}{s^{1/2} + \gamma^{1/2}\eta^{1/2}} = \mathbb{KH}[2t^{-1/2}E_{1/2,1/2}(-t^{1/2})]. \quad (24)$$

Taking the inverse Khalouta transform of both sides of equation (24), to obtain

$$u(t) = 2t^{-1/2}E_{1/2,1/2}(-t^{1/2}).$$

This is the exact solution of equations (21) and (22), which is the same result as obtained using the natural transform [23].

EXAMPLE 2. Consider the following Riemann–Liouville fractional differential equation

$$\mathbb{D}^\alpha u(t) - \lambda u(t) = f(t), \quad t > 0, \quad n - 1 < \alpha \leq n, \quad (25)$$

with the initial conditions

$$\mathbb{D}^{\alpha-k-1}u(0) = a_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (26)$$

where λ and a_k are constants.

Taking the Khalouta transform of both sides of equation (25) and using Theorem 2, we get

$$\frac{s^\alpha}{\gamma^\alpha \eta^\alpha} \mathcal{K}(s, \gamma, \eta) - \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{s}{\gamma \eta} \right)^{k+1} \mathbb{D}^{\alpha-k-1}u(0) - \lambda \mathcal{K}(s, \gamma, \eta) = \mathcal{F}(s, \gamma, \eta), \quad (27)$$

where $\mathcal{F}(s, \gamma, \eta)$ is the Khalouta transform of the function $f(t)$.

Substituting the initial conditions (26) into equation (27), we get

$$\left(\frac{s^\alpha}{\gamma^\alpha \eta^\alpha} - \lambda \right) \mathcal{K}(s, \gamma, \eta) - \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{s}{\gamma \eta} \right)^{k+1} b_k = \mathcal{F}(s, \gamma, \eta).$$

So

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(s, \gamma, \eta) &= \frac{\gamma^\alpha \eta^\alpha}{s^\alpha - \lambda \gamma^\alpha \eta^\alpha} \mathcal{F}(s, \gamma, \eta) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{s^{k+1} \gamma^{\alpha-k-1} \eta^{\alpha-k-1}}{s^\alpha - \lambda \gamma^\alpha \eta^\alpha} b_k = \\ &= \frac{\gamma \eta}{s} \frac{s \gamma^{\alpha-1} \eta^{\alpha-1}}{s^\alpha - \lambda \gamma^\alpha \eta^\alpha} \mathcal{F}(s, \gamma, \eta) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{s^{k+1} \gamma^{\alpha-k-1} \eta^{\alpha-k-1}}{s^\alpha - \lambda \gamma^\alpha \eta^\alpha} b_k. \end{aligned}$$

According to Theorem 5 and Property 3, we have

$$\mathbb{KH}[u(t)] = \mathcal{K}(s, \gamma, \eta) =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\gamma\eta}{s} \mathbb{KH}[t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda t^\alpha)] \mathcal{F}(s, \gamma, \eta) + \sum_{k=0}^{n-1} b_k \mathbb{KH}[t^{\alpha-k-1} E_{\alpha,\alpha-k}(\lambda t^\alpha)] = \\
 &= \mathbb{KH} \left[\left[t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda t^\alpha) * f(t) \right] + \sum_{k=0}^{n-1} b_k t^{\alpha-k-1} E_{\alpha,\alpha-k}(\lambda t^\alpha) \right] = \\
 &= \mathbb{KH} \left[\int_0^\infty (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda(t-\tau)^\alpha) f(\tau) d\tau + \sum_{k=0}^{n-1} b_k t^{\alpha-k-1} E_{\alpha,\alpha-k}(\lambda t^\alpha) \right].
 \end{aligned} \tag{28}$$

Taking the inverse Khalouta transform of both sides of equation (28), to obtain

$$u(t) = \int_0^\infty (t-\xi)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda(t-\tau)^\alpha) f(\tau) d\tau + \sum_{k=0}^{n-1} b_k t^{\alpha-k-1} E_{\alpha,\alpha-k}(\lambda t^\alpha).$$

This is the exact solution of equations (21) and (22) which is the same result as obtained using the Sumudu transform [24].

EXAMPLE 3. Consider the following Liouville–Caputo fractional differential equation

$$D^\alpha u(t) = u(t) + 1, \quad 0 < \alpha \leq 1, \tag{29}$$

with the initial condition

$$u(0) = 0. \tag{30}$$

Taking the Khalouta transform of both sides of equation (29) and using Theorem 3, we get

$$\frac{s^\alpha}{\gamma^\alpha \eta^\alpha} \mathcal{K}(s, \gamma, \eta) = \mathcal{K}(s, \gamma, \eta) + 1.$$

So

$$\mathcal{K}(s, \gamma, \eta) = \frac{\gamma^\alpha \eta^\alpha}{s^\alpha - \gamma^\alpha \eta^\alpha}.$$

According to Theorem 5, when $\beta = \alpha + 1$, and $a = -1$, we have

$$\mathbb{KH}[u(t)] = \mathcal{K}(s, \gamma, \eta) = \frac{\gamma^\alpha \eta^\alpha}{s^\alpha - \gamma^\alpha \eta^\alpha} = \mathbb{KH}[t^\alpha E_{\alpha,\alpha+1}(t^\alpha)]. \tag{31}$$

Taking the inverse Khalouta transform of both sides of equation (31), to obtain

$$u(t) = t^\alpha E_{\alpha,\alpha+1}(t^\alpha).$$

This is the exact solution of equations (29) and (30) which is the same result as obtained using the Aboodh transform [25].

EXAMPLE 4. Consider the following Liouville–Caputo fractional Bagley–Torvik equation

$$u''(t) + D^{3/2}u(t) + u(t) = 1 + t, \tag{32}$$

with the initial conditions

$$u(0) = u'(0) = 1. \tag{33}$$

Taking the Khalouta transform of both sides of equation (32) and using Properties 2, 4 and Theorem 3, we get

$$\begin{aligned} \frac{s^2}{\gamma^2 \eta^2} \mathcal{K}(s, \gamma, \eta) - \frac{s^2}{\gamma^2 \eta^2} u(0) - \frac{s}{\gamma \eta} u'(0) + \frac{s^{3/2}}{\gamma^{3/2} \eta^{3/2}} \mathcal{K}(s, \gamma, \eta) - \\ - \frac{s^{3/2}}{\gamma^{3/2} \eta^{3/2}} u(0) - \frac{s^{1/2}}{\gamma^{1/2} \eta^{1/2}} u'(0) + \mathcal{K}(s, \gamma, \eta) = 1 + \frac{\gamma \eta}{s}. \end{aligned} \quad (34)$$

Substituting the initial conditions (33) into equation (34), we get

$$\begin{aligned} \left(\frac{s^2}{\gamma^2 \eta^2} + \frac{s^{3/2}}{\gamma^{3/2} \eta^{3/2}} + 1 \right) \mathcal{K}(s, \gamma, \eta) = \\ = 1 + \frac{\gamma \eta}{s} + \frac{s^2}{\gamma^2 \eta^2} + \frac{s}{\gamma \eta} + \frac{s^{3/2}}{\gamma^{3/2} \eta^{3/2}} + \frac{s^{1/2}}{\gamma^{1/2} \eta^{1/2}}. \end{aligned} \quad (35)$$

Then, equation (35) becomes

$$\left(\frac{s^2}{\gamma^2 \eta^2} + \frac{s^{3/2}}{\gamma^{3/2} \eta^{3/2}} + 1 \right) \mathcal{K}(s, \gamma, \eta) = \left(1 + \frac{\gamma \eta}{s} \right) \left(\frac{s^2}{\gamma^2 \eta^2} + \frac{s^{3/2}}{\gamma^{3/2} \eta^{3/2}} + 1 \right).$$

So

$$\mathbb{KH}[u(t)] = \mathcal{K}(s, \gamma, \eta) = 1 + \frac{\gamma \eta}{s}. \quad (36)$$

Taking the inverse Khalouta transform of both sides of equation (36), to obtain

$$u(t) = 1 + t.$$

This is the exact solution of equations (32) and (33), which is the same result as obtained using the Shehu transform [26].

EXAMPLE 5. Consider the following Caputo–Fabrizio fractional differential equation

$$\mathcal{D}^\alpha u(t) = t, \quad 0 < \alpha \leq 1, \quad (37)$$

with the initial condition

$$u(0) = c, \quad c \in \mathbb{R}. \quad (38)$$

Taking the Khalouta transform of both sides of equation (37) and using Theorem 4, we get

$$\frac{1}{s - \alpha(s - \gamma \eta)} [s \mathcal{K}(s, \gamma, \eta) - s u(0)] = \mathbb{KH}[t], \quad (39)$$

Substituting the initial condition (38) into equation (39) and using Property 4, we get

$$\frac{s}{s - \alpha(s - \gamma \eta)} [\mathcal{K}(s, \gamma, \eta) - c] = \frac{\gamma \eta}{s}.$$

So

$$\mathbb{KH}[u(t)] = \mathcal{K}(s, \gamma, \eta) = \frac{\gamma \eta (s - \alpha(s - \gamma \eta)) + c s^2}{s^2} = c + (1 - \alpha) \frac{\gamma \eta}{s} + \alpha \frac{\gamma^2 \eta^2}{s^2}. \quad (40)$$

Taking the inverse Khalouta transform of both sides of equation (40), we get

$$u(t) = c + (1 - \alpha)t + \alpha \frac{t^2}{2}. \quad (41)$$

Note that, when $\alpha = 1$ in equation (41), we obtain

$$u(t) = c + \frac{t^2}{2}.$$

This is the exact solution of equations (37) and (38) which is the same result as that obtained using the Laplace transform [27].

EXAMPLE 6. Consider the following Caputo–Fabrizio fractional differential equation

$$\mathcal{D}^\alpha u(t) + u(t) = 0, \quad 0 < \alpha \leq 1, \quad (42)$$

with the initial condition

$$u(0) = 1. \quad (43)$$

Taking the Khalouta transform of both sides of equation (42) and using Theorem 4, we get

$$\frac{1}{s - \alpha(s - \gamma\eta)}[s\mathcal{K}(s, \gamma, \eta) - su(0)] + \mathcal{K}(s, \gamma, \eta) = 0. \quad (44)$$

Substituting the initial condition (43) into equation (44), we get

$$\frac{1}{s - \alpha(s - \gamma\eta)}[s\mathcal{K}(s, \gamma, \eta) - s] + \mathcal{K}(s, \gamma, \eta) = 0.$$

So

$$\mathbb{KH}[u(t)] = \mathcal{K}(s, \gamma, \eta) = \frac{s}{(2 - \alpha)s + \alpha\gamma\eta} = \frac{1}{2 - \alpha} \left(\frac{s}{s + \frac{\alpha}{2 - \alpha}\gamma\eta} \right). \quad (45)$$

Taking the inverse Khalouta transform of both sides of equation (45), we get

$$u(t) = \frac{1}{2 - \alpha} \exp\left(-\frac{\alpha}{2 - \alpha}t\right). \quad (46)$$

Note that, when $\alpha = 1$ in equation (46), we obtain

$$u(t) = \exp(-t).$$

This is the exact solution of equations (42) and (43), which is the same result as that obtained using the Sumudu transform [28].

EXAMPLE 7. Consider the following Atangana–Baleanu–Riemann–Liouville fractional differential equation

$${}^{ABR}\mathfrak{D}^\alpha u(t) + u(t) = f(t), \quad 0 < \alpha \leq 1, \quad (47)$$

with the initial condition

$$u(0) = 0. \quad (48)$$

Taking the Khalouta transform of both sides of equation (47) and using Theorem 6, we get

$$\left(\frac{s^\alpha \mathcal{AB}(\alpha)}{s^\alpha - \alpha(s^\alpha - \gamma^\alpha \eta^\alpha)} \right) \mathcal{K}(s, \gamma, \eta) + \mathcal{K}(s, \gamma, \eta) = \mathbb{KH}[f(t)]. \quad (49)$$

Simplifying equation (49), then we have

$$\mathcal{K}(s, \gamma, \eta) = \left(\frac{s^\alpha - \alpha(s^\alpha - \gamma^\alpha \eta^\alpha)}{s^\alpha \mathcal{AB}(\alpha) + s^\alpha - \alpha(s^\alpha - \gamma^\alpha \eta^\alpha)} \right) \mathcal{F}(s, \gamma, \eta). \quad (50)$$

Taking the inverse Khalouta transform of both sides of equation (50), we get

$$u(t) = \mathbb{KH}^{-1} \left[\left(\frac{s^\alpha - \alpha(s^\alpha - \gamma^\alpha \eta^\alpha)}{s^\alpha \mathcal{AB}(\alpha) + s^\alpha - \alpha(s^\alpha - \gamma^\alpha \eta^\alpha)} \right) \mathcal{F}(s, \gamma, \eta) \right].$$

If $f(t) = \sin(t)$, then equation (47) becomes

$${}^{ABR} \mathfrak{D}^\alpha u(t) + u(t) = \sin(t), \quad 0 < \alpha \leq 1,$$

and the exact solution is

$$u(t) = \mathbb{KH}^{-1} \left[\frac{s^\alpha - \alpha(s^\alpha - \gamma^\alpha \eta^\alpha)}{s^\alpha \mathcal{AB}(\alpha) + s^\alpha - \alpha(s^\alpha - \gamma^\alpha \eta^\alpha)} \frac{s\gamma\eta}{s^2 + \gamma^2\eta^2} \right]. \quad (51)$$

Note that, when $\alpha = 1$ in equation (51), we obtain

$$\begin{aligned} u(t) &= \mathbb{KH}^{-1} \left[\frac{\gamma\eta}{s + \gamma\eta} \frac{s\gamma\eta}{s^2 + \gamma^2\eta^2} \right] = \\ &= \mathbb{KH}^{-1} \left[\frac{1}{2} \frac{s}{s + \gamma\eta} - \frac{1}{2} \frac{s^2}{s^2 + \gamma^2\eta^2} + \frac{1}{2} \frac{s\gamma\eta}{s^2 + \gamma^2\eta^2} \right] = \\ &= \frac{1}{2} (\exp(-t) - \cos(t) + \sin(t)). \end{aligned}$$

This is the exact solution of equations (47) and (48), which is the same result as obtained using the Shehu transform [29].

EXAMPLE 8. Consider the following Atangana–Baleanu–Caputo fractional differential equation

$${}^{ABC} \mathfrak{D}^\alpha u(t) = u(t), \quad 0 < \alpha \leq 1, \quad (52)$$

with the initial condition

$$u(0) = 1. \quad (53)$$

Taking the Khalouta transform of both sides of equation (52) and using Theorem 7, we get

$$\frac{s^\alpha \mathcal{AB}(\alpha)}{s^\alpha(1 - \alpha) + \alpha\gamma^\alpha \eta^\alpha} (\mathcal{K}(s, \gamma, \eta) - u(0)) = \mathcal{K}(s, \gamma, \eta). \quad (54)$$

Substituting the initial condition (53) into equation (54), we get

$$\frac{s^\alpha \mathcal{AB}(\alpha)}{s^\alpha(1 - \alpha) + \alpha\gamma^\alpha \eta^\alpha} (\mathcal{K}(s, \gamma, \eta) - 1) = \mathcal{K}(s, \gamma, \eta).$$

So

$$\mathcal{K}(s, \gamma, \eta) = \frac{\mathcal{AB}(\alpha)}{\mathcal{AB}(\alpha) - 1 + \alpha - \alpha \frac{\gamma^\alpha \eta^\alpha}{s^\alpha}}. \quad (55)$$

Equation (55) can be rewritten as

$$\mathbb{KH}[u(t)] = \mathcal{K}(s, \gamma, \eta) = \frac{\mathcal{AB}(\alpha)}{(\mathcal{AB}(\alpha) - 1 + \alpha)} \left(1 - \frac{\alpha}{\mathcal{AB}(\alpha) - 1 + \alpha} \frac{\gamma^\alpha \eta^\alpha}{s^\alpha} \right)^{-1}. \quad (56)$$

Taking the inverse Khalouta transform of both sides of equation (56) and using Property 4, we get

$$u(t) = \frac{\mathcal{AB}(\alpha)}{(\mathcal{AB}(\alpha) - 1 + \alpha)} E_\alpha \left(\frac{\alpha}{\mathcal{AB}(\alpha) - 1 + \alpha} t^\alpha \right). \quad (57)$$

Note that, when $\alpha = 1$ in equation (57), we obtain

$$u(t) = E_1(t) = \exp(t).$$

This is the exact solution of equations (52) and (53), which is the same result as obtained using the ZZ transform [30].

6. Conclusion. In this paper, we have studied the application of the Khalouta transform method to obtain exact solutions of homogeneous and inhomogeneous linear fractional differential equations using different fractional derivative operators. Various examples have been used to illustrate the effectiveness of this technique. The results obtained have shown that the Khalouta transform is a powerful tool and an efficient method for solving initial value problems in the fields of applied mathematics and engineering. In the future, we hope to extend the Khalouta transform method to solve initial value problems by considering other fractional-order differential equations that have not yet been solved analytically.

Competing interests. I have no competing interests.

Authors' contributions and responsibilities. I take full responsibility for submitting the final version of the manuscript for publication. The final version of the manuscript has been approved by me.

Funding. The research was conducted without financial support.

References

1. Chen Y., Moore K. L. Analytical stability bound for a class of delayed fractional-order dynamic systems, *Nonlinear Dyn.*, 2002, vol. 29, pp. 191–200. DOI: <https://doi.org/10.1023/A:1016591006562>.
2. Friedrich C. Relaxation and retardation functions of the Maxwell model with fractional derivatives, *Rheol. Acta*, 1991, vol. 30, pp. 151–158. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01134604>.
3. Khalouta A. The existence and uniqueness of solution for fractional Newel–Whitehead–Segel equation within Caputo–Fabrizio fractional operator, *Appl. Appl. Math.*, 2021, vol. 16, no. 2, pp. 894–909. <https://digitalcommons.pvamu.edu/aam/vol16/iss2/7/>.
4. Khalouta A. A novel representation of numerical solution for fractional Bratu-type equation, *Adv. Stud.: Euro-Tbil. Math. J.*, 2022, vol. 15, no. 1, pp. 93–109. DOI: <https://doi.org/10.32513/asetmj/19322008207>.

5. Magin R. L., Ingo C., Colon-Perez L., et al. Characterization of anomalous diffusion in porous biological tissues using fractional order derivatives and entropy, *Microporous Mesoporous Mater.*, 2013, vol.178, pp. 39–43. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.micromeso.2013.02.054>.
6. Watugula G. K. Sumudu transform: A new integral transform to solve differential equations and control engineering problems, *Int. J. Math. Educ. Sci. Technol.*, 1993, vol.24, no.1, pp. 35–43. DOI: <https://doi.org/10.1080/0020739930240105>.
7. Khan Z. H., Khan W. A. N-transform – properties and applications, *NUST J. Eng. Sci.*, 2008, vol.1, no.1, pp. 127–133.
8. Elzaki T. M. The new integral transform “Elzaki transform”, *Glob. J. Pure Appl. Math.*, 2011, vol.7, no.1, pp. 57–64. https://www.ripublication.com/gjpamv7/gjpamv7n1_7.pdf.
9. Atangana A., Kiliçman A. A novel integral operator transform and its application to some FODE and FPDE with some kind of singularities, *Math. Probl. Eng.*, 2013, 531984. DOI: <https://doi.org/10.1155/2013/531984>.
10. Srivastava H. M., Luo M., Raina R. K. A new integral transform and its applications, *Acta Math. Sci., Ser. B, Engl. Ed.*, 2015, vol.35, no.6, pp. 1386–1400. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0252-9602\(15\)30061-8](https://doi.org/10.1016/S0252-9602(15)30061-8).
11. Zafar Z. U. A. ZZ transform method, *Int. J. Adv. Eng. Glob. Technol.*, 2016, vol.4, no.1, pp. 1605–1611.
12. Ramadan M., Raslan K. R., El-Danaf T., Hadhoud A. On a new general integral transform: Some properties and remarks, *J. Math. Comput. Sci.*, 2016, vol.6, no.1, pp. 103–109. <https://scik.org/index.php/jmcs/article/view/2392>.
13. Barnes B. Polynomial integral transform for solving differential equations, *Eur. J. Pure Appl. Math.*, 2016, vol.9, no.2, pp. 140–151. <http://www.ejpm.com/index.php/ejpm/article/view/2531>.
14. Yang X. J. A new integral transform method for solving steady heat-transfer problem, *Thermal Science*, 2016, vol.20 (Suppl. 3), pp. S639–S642. DOI: <https://doi.org/10.2298/TSCI16S3639Y>.
15. Aboodh K. S., Abdullahi I., Nuruddeen R. I. On the Aboodh transform connections with some famous integral transforms, *Int. J. Eng. Inf. Syst.*, 2017, vol.1, no.9, pp. 143–151. <http://ijeais.org/wp-content/uploads/2017/11/IJEAIS171116.pdf>.
16. Rangaig N., Minor N., Penonal G., et al. On another type of transform called Rangaig transform, *Int. J. Partial Differ. Equ. Appl.*, 2017, vol.5, no.1, pp. 42–48. DOI: <https://doi.org/10.12691/ijpdea-5-1-6>.
17. Maitama S., Zhao W. New integral transform: Shehu transform a generalization of Sumudu and Laplace transform for solving differential equations, *Int. J. Anal. Appl.*, 2019, vol.17, no.2, pp. 167–190, arXiv:1904.11370 [math.GM]. DOI: <https://doi.org/10.28924/2291-8639-17-2019-167>.
18. Khalouta A. A new exponential type kernel integral transform: Khalouta transform and its applications, *Math. Montisnigri*, 2023, vol.57, pp. 5–23. DOI: <https://doi.org/10.20948/mathmontis-2023-57-1>.
19. Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J. *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, North Holland Mathematics Studies, vol.204. Amsterdam, Elsevier, 2006, xv+523 pp. DOI: [https://doi.org/10.1016/s0304-0208\(06\)x8001-5](https://doi.org/10.1016/s0304-0208(06)x8001-5). EDN: YZECAT.
20. Caputo M., Fabrizio M. A new definition of fractional derivative without singular kernel, *Progr. Fract. Differ. Appl.*, 2015, vol.1, no.2, pp. 73–85. <https://www.naturalspublishing.com/files/published/0gb83k287mo759.pdf>.
21. Losada J., Nieto J. J. Properties of a new fractional derivative without singular kernel, *Progr. Fract. Differ. Appl.*, 2015, vol.1, no.2, pp. 87–92. <https://www.naturalspublishing.com/files/published/2j1ns3h8o2s789.pdf>.
22. Atangana A., Baleanu D. New fractional derivatives with non-local and non-singular kernel: Theory and application to heat transfer model, *Thermal Science*, 2016,

- vol. 20, no. 2, pp. 763–769, arXiv: 1602.03408 [math.GM]. DOI: <https://doi.org/10.2298/TSCI160111018A>.
23. Rawashdeh M. S., Al-Jammal H. Theories and applications of the inverse fractional natural transform method, *Adv. Differ. Equ.*, 2018, vol. 2018, 222. DOI: <https://doi.org/10.1186/s13662-018-1673-0>.
24. Bodkhe D. S., Panchal S. K. On Sumudu transform of fractional derivatives and its applications to fractional differential equations, *Asian J. Math. Comp. Res.*, 2016, vol. 11, no. 1, pp. 69–77. <https://ikprress.org/index.php/AJOMCOR/article/view/380>.
25. Aruldoss R., Devi R. A. Aboodh transform for solving fractional differential equations, *Glob. J. Pure Appl. Math.*, 2020, vol. 16, no. 2, pp. 145–153. https://www.ripublication.com/gjppam20/gjppamv16n2_01.pdf.
26. Belgacem R., Baleanu D., Bokhari A. Shehu transform and applications to Caputo–Fractional differential equations, *Int. J. Anal. Appl.*, 2019, vol. 17, no. 6, pp. 917–927. DOI: <https://doi.org/10.28924/2291-8639-17-2019-917>.
27. Toprakseven Ş. The existence and uniqueness of initial-boundary value problems of the fractional Caputo–Fabrizio differential equations, *Univers. J. Math. Appl.*, 2019, vol. 2, no. 2, pp. 100–106. DOI: <https://doi.org/10.32323/ujma.549942>.
28. Akgul A., Öztürk G. Application of the Sumudu transform to some equations with fractional derivatives, *Sigma J. Eng. Nat. Sci.*, 2023, vol. 41, no. 6, pp. 1132–1143. DOI: <https://doi.org/10.14744/sigma.2023.00137>.
29. Bokhari A., Baleanu D., Belgacem R. Application of Shehu transform to Atangana–Baleanu derivatives, *J. Math. Comput. Sci.*, 2020, vol. 20, no. 2, pp. 101–107. DOI: <https://doi.org/10.22436/jmcs.020.02.03>.
30. Jena R. M., Chakraverty S., Baleanu D., Alqurashi M. M. New aspects of ZZ transform to fractional operators with Mittag–Leffler kernel, *Front. Phys.*, 2020, vol. 8, 352. DOI: <https://doi.org/10.3389/fphy.2020.00352>.

УДК 519.642.2

Преобразование Халуты, осуществляемое с использованием различных операторов дробной производной

A. *Khalouta*

Université Ferhat Abbas de Sétif 1, Sétif, 19000, Algeria.

Аннотация

Недавно автором было введено и разработано новое интегральное преобразование, которое обобщает множество известных интегральных преобразований. Цель этой работы — расширение данного интегрального преобразования (преобразование Халуты) различными операторами дробной производной. Рассматриваются дробные производные в смысле Римана–Лиувилля, Лиувилля–Капуто, Капуто–Фабрицио, Атанганы–Балеану–Римана–Лиувилля и Атанганы–Балеану–Капуто. Доказаны теоремы, касающиеся свойств преобразования Халуты для решения дробных дифференциальных уравнений с использованием указанных операторов дробной производной. Приведено несколько примеров для проверки надежности и эффективности предложенной техники. Результаты показывают, что преобразование Халуты является эффективным инструментом при работе с дробными дифференциальными уравнениями.

Ключевые слова: дробные дифференциальные уравнения, преобразование Халуты, производная Римана–Лиувилля, производная Лиувилля–Капуто, производная Капуто–Фабрицио, производная Атанганы–Балеану–Римана–Лиувилля, производная Атанганы–Балеану–Капуто, точное решение.

Получение: 2 февраля 2024 г. / Исправление: 20 сентября 2024 г. /
Принятие: 27 сентября 2024 г. / Публикация онлайн: 12 ноября 2024 г.

Конкурирующие интересы. Конкурирующих интересов не имею.

Авторская ответственность. Я несу полную ответственность за предоставление окончательной версии рукописи в печать. Окончательная версия рукописи мною одобрена.

Финансирование. Исследование выполнено без финансовой поддержки.

Дифференциальные уравнения и математическая физика
Научная статья

© Коллектив авторов, 2024

© СамГТУ, 2024 (составление, дизайн, макет)

♾️ ©️ Контент публикуется на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

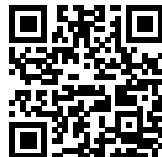
Образец для цитирования

Khalouta A. Khalouta transform via different fractional derivative operators, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2024, vol. 28, no. 3, pp. 407–425. EDN: QNZQSC. DOI: 10.14498/vsgtu2082.

Сведения об авторе

Ali Khalouta  <https://orcid.org/0000-0003-1370-3189>

Lab. of Fundamental Mathematics and Numerical; Dept. of Mathematics; Faculty of Sciences;
e-mail: ali.khalouta@univ-setif.dz



УДК 517.956.4

Приближение решения уравнения переноса-диффузии в пространстве Гёльдера

А. Немдили¹, Ф. Кориши², Х. Фуджита Яшима¹

- ¹ Высшая нормальная школа Константина им. А. Джебара,
Алжир, 25000, Константин, Айн-эль-Бей Али Менджели, Университетский городок.
² Высшая нормальная школа Кубы,
Алжир, 16050, Алжир, Старая Куба, В.Р. 92.

Аннотация

Рассматриваются приближенные решения для уравнения переноса-диффузии и их предельная функция, изучается принадлежность предельной функции к пространству Гёльдера, соответствующему регулярности данных. Цель исследования состоит в том, чтобы построить такое приближение решения уравнения переноса-диффузии, чтобы его основное свойство не зависело от величины коэффициента диффузии.

Точнее, рассматривается уравнение переноса-диффузии с постоянным коэффициентом диффузии в целом пространстве $\mathbb{R}^d$ со свободным членом, который может зависеть от искомой функции. Приближенные решения на каждом шаге дискретизации по времени строятся с использованием ядра теплопроводности и локально линейаризованного перемещения, соответствующего переносу. Приближенные решения оцениваются в предположении, что заданные функции и их производные по $x \in \mathbb{R}^d$ до порядка m включительно ($m \geq 2$) равномерно ограничены на $[0, \tau] \times \mathbb{R}^d$ для каждого $\tau > 0$ и их производные порядка m непрерывны по Гёльдеру с показателем α , $2/3 < \alpha \leq 1$. Оценки не зависят от величины коэффициента диффузии. На основании этих оценок доказываются равномерная сходимость приближенных решений и их производных по x до порядка m включительно на $[0, \tau] \times \mathbb{R}^d$, сходимость их производных порядка m в пространстве Гёльдера $C^{0+\alpha'}(\mathbb{R}^d)$, $0 < \alpha' < \alpha$,

Дифференциальные уравнения и математическая физика
Научная статья

© Коллектив авторов, 2024

© СамГТУ, 2024 (составление, дизайн, макет)

© Контент публикуется на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

Образец для цитирования

Немдили А., Кориши Ф., Фуджита Яшима Х. Приближение решения уравнения переноса-диффузии в пространстве Гёльдера // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2024. Т. 28, № 3. С. 426–444. EDN: QYPUUB. DOI: 10.14498/vsgtu2097.

Сведения об авторах

Амина Немдили <https://orcid.org/0009-0007-5898-3360>

ассистент; преподаватель, член лаборатории; лаб. прикладной математики и дидактики;
e-mail: nemdili.amina@gmail.com

Фархух Кориши <https://orcid.org/0009-0006-6442-3506>

доцент; член лаборатории; лаб. теории неподвижной точки и ее приложения;
e-mail: korichi_korichi@yahoo.com

Хисао Фуджита Яшима <https://orcid.org/0000-0001-9937-8406>

профессор; член лаборатории; лаб. прикладной математики и дидактики;
e-mail: hisaofujitayashima@yahoo.com

для каждого $t \geq 0$ и непрерывность по Гёльдеру с показателем α производных по x порядка m предельной функции, которая удовлетворяет уравнению. То есть показано, что при использовании пространства Гёльдера получается та же дифференцируемость предельной функции, как и дифференцируемость данных, а в предыдущих работах для получения дифференцируемости порядка m предельной функции предполагалась дифференцируемость порядка $m + 1$ данных.

Ключевые слова: уравнение переноса-диффузии, приближенные решения, пространство Гёльдера.

Получение: 1 июня 2024 г. / Исправление: 3 октября 2024 г. /

Принятие: 21 октября 2024 г. / Публикация онлайн: 11 ноября 2024 г.

Введение. Хорошо известно, что при изучении уравнений параболического типа, в том числе уравнения переноса-диффузии

$$\partial_t u(t, x) + v(t, x) \cdot \nabla u(t, x) = \kappa \Delta u(t, x) + f(t, x, u(t, x)),$$

часто используются методы, основанные на свойствах эллиптического оператора, которые дают удобные оценки в пространстве Соболева или в пространстве Гёльдера. С использованием этих оценок изучается разрешимость таких уравнений (см., например, работы [1–4] и многие другие). Отметим, что метод, основанный на полугруппе операторов (см., например, [5]), также использует оценки, полученные с помощью эллиптического оператора, но эти оценки становятся менее полезными в случае, когда коэффициент диффузии стремится к нулю.

С другой стороны, обратное уравнение Колмогорова, являющееся стохастическим представлением решения параболического уравнения (см., например, [6, гл. VIII]), дает возможность охарактеризовать поведение решения относительно коэффициента диффузии, стремящегося к нулю, выражая результаты понятиями теории вероятностей (см. [7] и процитированную там литературу).

В последние годы опубликовано несколько работ, посвященных построению такого приближения для уравнения переноса-диффузии, в которых показано, что поведение такого приближения не зависит от величины коэффициента диффузии, и поэтому оно может использоваться даже в случае, когда коэффициент диффузии стремится к нулю. Действительно, в [8, 9] на каждом шаге дискретизации по времени предложены приближенные решения для уравнения переноса-диффузии, построенные с помощью ядра теплопроводности и локально линеаризованного перемещения, соответствующего переносу, доказана их равномерная сходимость к решению уравнения переноса-диффузии. С помощью этих приближенных решений в [10, 11] доказана сходимость решения уравнения переноса-диффузии к решению уравнения переноса. Аналогичные приближенные решения также построены в полупространстве $\mathbb{R}_+^d$ с однородным условием Дирихле (см. [12, 13]) и с однородным условием Неймана (см. [14]).

В настоящей работе определяются приближенные решения для уравнения переноса-диффузии аналогично [8, 9], при этом предполагается, что производные по x порядка m ($m \geq 2$) заданных функций $v(t, x)$, $f(t, x, u)$ и $u_0(x)$

(смысл этих функций будет ясен из приведенной ниже постановки задачи Коши) непрерывны по Гёльдеру с показателем α , $2/3 < \alpha \leq 1$. В этих предположениях доказывается принадлежность предельной функции, удовлетворяющей уравнению, к пространству Гёльдера $C^{m+\alpha}(\mathbb{R}^d)$ в каждый момент времени. Другими словами, использование непрерывности по Гёльдеру в настоящей работе улучшает отношение регулярности предельной функции с регулярностью данных. Действительно, в предыдущих работах получались ограниченные производные по x второго порядка предельной функции в предположении, что заданные функции $v(t, x)$, $f(t, x, u)$ и $u_0(x)$ обладают ограниченными производными по x третьего порядка. Следует также отметить, что оценки приближенных решений, полученные в настоящей работе, не зависят от коэффициента κ , что дает возможность использовать их в дальнейших исследованиях поведения решения в случае, когда коэффициент κ стремится к нулю. Для этого будет полезна идея работ [10, 11].

1. Определение приближенных решений и основной результат. Определим приближенные решения задачи Коши

$$\partial_t u(t, x) + v(t, x) \cdot \nabla u(t, x) = \kappa \Delta u(t, x) + f(t, x, u(t, x)), \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^d, \quad (1)$$

$$u(0, x) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^d, \quad (2)$$

и докажем их сходимость. Здесь и далее

$$v \cdot \nabla = \sum_{j=1}^d v_j \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad \Delta = \sum_{j=1}^d \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}.$$

Для определения приближенных решений $u^{[n]}(t, x)$, $n = 1, 2, \dots$, для каждого n введем дискретизацию по времени t :

$$0 = t_0^{[n]} < t_1^{[n]} < \dots < t_{k-1}^{[n]} < t_k^{[n]} < \dots, \quad t_k^{[n]} - t_{k-1}^{[n]} = \delta_n = 2^{-n}$$

и рассмотрим ядро теплопроводности для $t = \delta_n$:

$$\Theta_n(x) = \frac{1}{(4\pi\delta_n\kappa)^{d/2}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4\delta_n\kappa}\right), \quad x \in \mathbb{R}^d,$$

где κ — положительная постоянная. Для каждого n определим приближенное решение $u^{[n]}(t, x)$ соотношениями

$$u^{[n]}(t_0^{[n]}, x) = u_0(x), \quad (3)$$

$$\begin{aligned} u^{[n]}(t_k^{[n]}, x) = & \int_{\mathbb{R}^d} \Theta_n(y) u^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x - \delta_n v(t_k^{[n]}, x) - y) dy + \\ & + \delta_n f(t_{k-1}^{[n]}, x, u^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x)), \quad k = 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (4)$$

$$u^{[n]}(t, x) = \frac{t_k^{[n]} - t}{\delta_n} u^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x) + \frac{t - t_{k-1}^{[n]}}{\delta_n} u^{[n]}(t_k^{[n]}, x) \quad \text{при } t_{k-1}^{[n]} \leq t \leq t_k^{[n]}. \quad (5)$$

В этой статье используются следующие обозначения (для неотрицательных целых ν_j и m и для $0 < \alpha \leq 1$):

$$D_x^\nu = \frac{\partial^{|\nu|}}{\partial x_1^{\nu_1} \dots \partial x_d^{\nu_d}}, \quad \nu = (\nu_1, \dots, \nu_d), \quad |\nu| = \sum_{j=1}^d \nu_j,$$

$$D_{x,u}^\nu = \frac{\partial^{|\nu|}}{\partial x_1^{\nu_1} \dots \partial x_d^{\nu_d} \partial u^{\nu_{d+1}}}, \quad \nu = (\nu_1, \dots, \nu_d, \nu_{d+1}), \quad |\nu| = \sum_{j=1}^{d+1} \nu_j,$$

$$\|\varphi\|_{C^{m+\alpha}(\mathbb{R}^d)} = \|\varphi\|_{C^m(\mathbb{R}^d)} + \sum_{|\nu|=m} [D_x^\nu \varphi]_{\alpha, \mathbb{R}^d},$$

$$\|\varphi\|_{C^m(\mathbb{R}^d)} = \sum_{|\nu| \leq m} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |D_x^\nu \varphi(x)|,$$

$$[D_x^\nu \varphi]_{\alpha, \mathbb{R}^d} = \sup_{x, y \in \mathbb{R}^d, x \neq y} \frac{|D_x^\nu \varphi(x) - D_x^\nu \varphi(y)|}{|x - y|^\alpha}.$$

Там, где это не вызывает недоразумения, будем писать $\|\cdot\|_{C^{m+\alpha}}$ вместо $\|\cdot\|_{C^{m+\alpha}(\mathbb{R}^d)}$ и т.д.

Основным результатом настоящей работы является

ТЕОРЕМА 1. Пусть $m \in \mathbb{Z}$, $m \geq 2$, $2/3 < \alpha \leq 1$, $0 < \alpha_1 \leq 1$, $0 < \alpha_2 \leq 1$. Предположим, что для каждого $\tau > 0$ справедливы соотношения

$$\sup_{0 \leq t \leq \tau} \|v(t, \cdot)\|_{C^{m+\alpha}(\mathbb{R}^d)} < \infty, \quad (6)$$

$$\sup_{0 \leq t \leq \tau} \|\partial_t v(t, \cdot)\|_{C^{m-1}(\mathbb{R}^d)} < \infty, \quad (7)$$

$$\sup_{0 \leq t < t' \leq \tau, x \in \mathbb{R}^d} \frac{|D_x^\nu v(t, x) - D_x^\nu v(t', x)|}{|t - t'|^{\alpha_1}} < \infty, \quad |\nu| = m, \quad (8)$$

$$\sup_{0 \leq t \leq \tau, u \in \mathbb{R}} \frac{\|f(t, \cdot, u)\|_{C^{m+\alpha}(\mathbb{R}^d)}}{1 + |u|} < \infty, \quad (9)$$

$$\sup_{0 \leq t \leq \tau, x \in \mathbb{R}^d, u \in \mathbb{R}} |\partial_t D_{x,u}^\nu f(t, x, u)| < \infty, \quad |\nu| \leq m - 1, \quad (10)$$

$$\sup_{0 \leq t < t' \leq \tau, x \in \mathbb{R}^d, u \in \mathbb{R}} \frac{|D_{x,u}^\nu f(t, x, u) - D_{x,u}^\nu f(t', x, u)|}{|t - t'|^{\alpha_2}} < \infty, \quad |\nu| = m, \quad (11)$$

$$\sup_{0 \leq t \leq \tau, x \in \mathbb{R}, u, u' \in \mathbb{R}, u \neq u'} \frac{|D_{x,u}^\nu f(t, x, u) - D_{x,u}^\nu f(t, x, u')|}{|u - u'|} < \infty, \quad |\nu| = m, \quad (12)$$

$$\|u_0\|_{C^{m+\alpha}(\mathbb{R}^d)} < \infty. \quad (13)$$

Тогда функции $u^{[n]}(t, x)$, определенные соотношениями (3)–(5), и их производные $D_x^\nu u^{[n]}(t, x)$, $|\nu| \leq m$, сходятся при $n \rightarrow \infty$ равномерно на $[0, \tau] \times \mathbb{R}^d$ для любого $\tau > 0$ к одной функции $u(t, x)$ и ее производным $D_x^\nu u(t, x)$ и их производные порядка m сходятся в норме $C^{0+\alpha'}(\mathbb{R}^d)$ ($0 < \alpha' < \alpha$) для каждого $t \geq 0$, причем

(I) существует функция $\bar{\Phi}_{m+\alpha}(t)$, определенная условиями (6), (9) и (13) для v, f, u и u_0 , такая, что функция $u(t, x)$ удовлетворяет неравенству

$$\sup_{0 \leq t' \leq t} \|u(t', \cdot)\|_{C^{m+\alpha}(\mathbb{R}^d)} \leq \bar{\Phi}_{m+\alpha}(t) \quad \forall t \geq 0, \quad (14)$$

(II) функция $u(t, x)$ удовлетворяет начальному условию (2) поточечно и уравнению (1) в том смысле, что для любого $x \in \mathbb{R}^d$ имеет место равенство

$$\begin{aligned} - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t) u(t, x) dt = \\ = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) (-v(t, x) \cdot \nabla u(t, x) + \kappa \Delta u(t, x) + f(t, x, u(t, x))) dt \end{aligned} \quad (15)$$

для любой обладающей непрерывной производной функции φ такой, что ее носитель ограничен и расположен внутри $\mathbb{R}_+$.

2. Оценки приближенных решений и их производных. Далее будем использовать обозначение

$$\tau_+ = \tau + \delta_1,$$

где $\tau > 0$. Прежде всего установим оценку $|u^{[n]}(t, x)|$.

ЛЕММА 1. Пусть $u^{[n]}(t, x)$ — функции, определенные соотношениями (3)–(5). Пусть выполнены предположения теоремы 1. Тогда существует возрастающая непрерывная на $\mathbb{R}_+$ и независимая от n функция $\Phi_0(t)$ такая, что

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^d} |u^{[n]}(t, x)| \leq \Phi_0(t) \quad \forall t \geq 0. \quad (16)$$

Доказательство. Пусть $\tau > 0$. Положим

$$C_f = C_f(\tau) = \sup_{(t, x, u) \in [0, \tau_+] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}} \frac{|f(t, x, u)|}{1 + |u|}.$$

Так как

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^d} \Theta_n(y) u^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x - \delta_n v(t_k^{[n]}, x) - y) dy \right| \leq \sup_{\xi \in \mathbb{R}^d} |u^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, \xi)|, \\ |f(t_{k-1}^{[n]}, x, u^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x))| \leq C_f \left(1 + \sup_{\xi \in \mathbb{R}^d} |u^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, \xi)| \right), \end{aligned}$$

из (3), (4) следует, что для $A_k^{[0, n]} = \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |u^{[n]}(t_k^{[n]}, x)|$ имеем

$$A_k^{[0, n]} \leq (1 + \delta_n C_f) A_{k-1}^{[0, n]} + \delta_n C_f.$$

Применяя последнее неравенство k раз, для $0 \leq t_k^{[n]} \leq \tau_+$ имеем

$$A_k^{[0,n]} \leq (1 + \delta_n C_f)^k A_0^{[0,n]} + \delta_n C_f \sum_{j=1}^k (1 + \delta_n C_f)^{k-j}.$$

Из этого соотношения и (5) вытекает, что существует возрастающая непрерывная и независимая от n функция $\Phi_0(t)$, удовлетворяющая неравенству (16). Лемма 1 доказана. $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ. В силу (16) выражение $|u^{[n]}(t, x)|$ ограничено в каждом отрезке времени $[0, \tau]$, поэтому далее норму $\|f(t, \cdot, u)\|_{C^{m+\alpha}(\mathbb{R}^d)}$ можно считать ограниченной в каждом отрезке $[0, \tau]$.

ЛЕММА 2. Пусть $u^{[n]}(t, x)$ — функции, определенные соотношениями (3)–(5). Пусть выполнены предположения теоремы 1. Тогда существует возрастающая непрерывная на $\mathbb{R}_+$ и независимая от n функция $\Phi_m(t)$ такая, что

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^d, |\nu| \leq m} |D_x^\nu u^{[n]}(t, x)| \leq \Phi_m(t) \quad \forall t \geq 0. \quad (17)$$

Доказательство. В силу (16) выражение $|u^{[n]}(t, x)|$ ограничено в каждом отрезке времени $[0, \tau]$, поэтому норму $\|f(t, \cdot, u)\|_{C^{m+\alpha}}$ можно считать ограниченной в каждом отрезке $[0, \tau]$. Таким образом, лемма 2 доказывается аналогично [8, 9]. $\square$

3. Оценка приближенных решений в пространстве Гёльдера.

ЛЕММА 3. Пусть $u^{[n]}(t, x)$ — функции, определенные соотношениями (3)–(5). Пусть выполнены предположения теоремы 1. Тогда существует возрастающая непрерывная на $\mathbb{R}_+$ и независимая от n функция $\Phi_{\alpha, m}(t)$, определенная условиями (6), (9) и (13) для v , f и u_0 такая, что

$$\sum_{|\nu|=m} [D_x^\nu u^{[n]}(t, \cdot)]_{\alpha, \mathbb{R}^d} \leq \Phi_{\alpha, m}(t) \quad \forall t \geq 0. \quad (18)$$

Доказательство. Рассмотрим дифференциальный оператор D_x^ν , в котором $|\nu| = m$. В силу условия (13) и определения (3) имеем

$$[D_x^\nu u^{[n]}(t_0^{[n]}, \cdot)]_\alpha = [D_x^\nu u_0(\cdot)]_\alpha < \infty. \quad (19)$$

Пусть $x^{(a)} \in \mathbb{R}^d$, $x^{(b)} \in \mathbb{R}^d$, $x^{(a)} \neq x^{(b)}$. Из (4) следует, что

$$(D_x^\nu u^{[n]}(t_k^{[n]}, \cdot))(x^{(a)}) - (D_x^\nu u^{[n]}(t_k^{[n]}, \cdot))(x^{(b)}) = D_{(1)} + D_{(2)}, \quad (20)$$

где

$$\begin{aligned} D_{(1)} = \int_{\mathbb{R}^d} \Theta_n(y) & \left(D_x^\nu u^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x^{(a)} - \delta_n v(t_k^{[n]}, x^{(a)}) - y) - \right. \\ & \left. - D_x^\nu u^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x^{(b)} - \delta_n v(t_k^{[n]}, x^{(b)}) - y) \right) dy, \end{aligned}$$

$$D_{(2)} = \delta_n \left(D_x^\nu f(t_{k-1}^{[n]}, x^{(a)}, u^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x^{(a)})) - D_x^\nu f(t_{k-1}^{[n]}, x^{(b)}, u^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x^{(b)})) \right).$$

Поскольку для $\varphi \in C^{m+\alpha}(\mathbb{R}^d)$ и $|\nu'| < m$ имеет место неравенство

$$\begin{aligned} \frac{|D_x^{\nu'} \varphi(\cdot)(x^{(a)}) - D_x^{\nu'} \varphi(\cdot)(x^{(b)})|}{|x^{(a)} - x^{(b)}|^\alpha} &\leq \\ &\leq \left(\sum_{|\nu''|=|\nu'|+1} \sup_{\xi \in \mathbb{R}^d} |D_x^{\nu''} \varphi(\cdot)(\xi)| \right)^\alpha \left(2 \sup_{\xi \in \mathbb{R}^d} |D_x^{\nu'} \varphi(\cdot)(\xi)| \right)^{1-\alpha} < \infty, \end{aligned}$$

используя правило дифференцирования сложной функции и предполагая, что $u^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, \cdot) \in C^{m+\alpha}(\mathbb{R}^d)$, с учетом условия (6) и леммы 2 получаем

$$\begin{aligned} |D_{(1)}| &\leq [D_x^\nu u^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, \cdot)]_\alpha |x^{(a)} - x^{(b)}|^\alpha + \\ &+ \delta_n C \left(\sum_{|\nu'|=m} [D_x^{\nu'} u^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, \cdot)]_\alpha + \sum_{|\nu'|=m} [D_x^{\nu'} v(t_k^{[n]}, \cdot)]_\alpha \right) |x^{(a)} - x^{(b)}|^\alpha + \\ &+ \delta_n C |x^{(a)} - x^{(b)}|^\alpha, \quad (21) \end{aligned}$$

где C — независимая от n и k постоянная. Аналогичным образом с учетом условий (9) и (12) имеем

$$\begin{aligned} |D_{(2)}| &\leq \delta_n C' \left(\sum_{|\nu'|=m} [D_x^{\nu'} u^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, \cdot)]_\alpha + \sum_{|\nu'|=m} [D_x^{\nu'} f(t_k^{[n]}, \cdot, u)]_\alpha \right) |x^{(a)} - x^{(b)}|^\alpha + \\ &+ \delta_n C |x^{(a)} - x^{(b)}|^\alpha. \quad (22) \end{aligned}$$

Из (20)–(22) следует, что существует независимая от n и k постоянная C' такая, что

$$\sum_{|\nu|=m} [D_x^\nu u^{[n]}(t_k^{[n]}, \cdot)]_\alpha \leq (1 + \delta_n C') \sum_{|\nu|=m} [D_x^\nu u^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, \cdot)]_\alpha + \delta_n C'.$$

Значит,

$$\sum_{|\nu|=m} [D_x^\nu u^{[n]}(t_k^{[n]}, \cdot)]_\alpha \leq (1 + \delta_n C')^k \sum_{|\nu|=m} [D_x^\nu u^{[n]}(t_0^{[n]}, \cdot)]_\alpha + \delta_n C' \sum_{j=1}^k (1 + \delta_n C')^{k-j}$$

при $0 \leq t_k^{[n]} \leq \tau$.

Из последнего неравенства, равенства (19) и определения (5) следует, что существует возрастающая непрерывная и независимая от n функция $\Phi_{\alpha,m}(t)$, удовлетворяющая неравенству (18) в отрезке $[0, \tau]$. Так как $\tau > 0$ произвольная величина, функцию $\Phi_{\alpha,m}(t)$ можно продолжить на все $t \geq 0$, что завершает доказательство леммы 3. $\square$

4. Сходимость приближенных решений.

ЛЕММА 4. Пусть $u^{[n]}(t, x)$ — функции, определенные соотношениями (3)–(5). Пусть выполнены предположения теоремы 1. Тогда для каждого $\tau > 0$ функции $u^{[n]}(t, x)$ и их производные по $x \in \mathbb{R}^d$ до порядка m включительно сходятся при $n \rightarrow \infty$ равномерно на $[0, \tau] \times \mathbb{R}^d$, а их производные порядка m сходятся в норме $C^{0+\alpha'}(\mathbb{R}^d)$ ($0 < \alpha' < \alpha$) для каждого $t \geq 0$. Кроме того, существует функция $\bar{\Phi}_{m+\alpha}(t)$, определенная условиями (6), (9) и (13) для v , f , и u_0 , такая, что предельная функция $u(t, x)$ последовательности $\{u^{[n]}(t, x)\}_{n=1}^{\infty}$ удовлетворяет неравенству (14).

Доказательство. Лемма будет доказана в три шага.

ШАГ 1. Функции $u^{[n]}(t, x)$ и их производные по $x \in \mathbb{R}^d$ до порядка $m - 1$ включительно сходятся равномерно на $[0, \tau] \times \mathbb{R}^d$ для любого $\tau > 0$.

Действительно, равномерная сходимость $u^{[n]}(t, x)$ и их производных первого и второго порядков на $[0, \tau] \times \mathbb{R}^d$ для каждого $\tau > 0$ доказывается так же, как в [8, 9]. Аналогичным образом с использованием оценки (17) равномерная сходимость может быть доказана и для их производных порядка от 2 до $m - 1$.

ШАГ 2. Докажем, что производные функций $u^{[n]}(t, x)$ по $x \in \mathbb{R}^d$ порядка m сходятся равномерно на $[0, \tau] \times \mathbb{R}^d$ для любого $\tau > 0$.

Напомним, что $t_{2k+2}^{[n+1]} = t_{k+1}^{[n]}$, и рассмотрим разность $D_x^{\nu} u^{[n+1]}(t_{2k+2}^{[n+1]}, x) - D_x^{\nu} u^{[n]}(t_{k+1}^{[n]}, x)$. Для упрощения записи введем следующие обозначения:

$$w_{\nu', k}^{[m', n]}(x) = D_x^{\nu'} u^{[n]}(t_k^{[n]}, x), \quad m' = |\nu'|, \quad \nu' = (\nu'_1, \dots, \nu'_d),$$

$$\xi_{k'}^{n'}(x, y) = x - \delta_{n'} v(t_{k'}^{[n']}, x) - y.$$

Из (4) следует, что $u^{[n+1]}(t_{2k+2}^{[n+1]}, x)$ может быть выражено в виде

$$u^{[n+1]}(t_{2k+2}^{[n+1]}, x) = \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \Theta_{n+1}(y_1) \Theta_{n+1}(y_2) u^{[n+1]}(t_{2k}^{[n+1]}, \xi^*(y_1, y_2)) dy_1 dy_2 +$$

$$+ \delta_{n+1} \int_{\mathbb{R}^d} \Theta_{n+1}(y_1) f\left(t_{2k}^{[n+1]}, \xi_{2k+2}^{n+1}(x, y_1), u^{[n+1]}(t_{2k}^{[n+1]}, \xi_{2k+2}^{n+1}(x, y_1))\right) dy_1 +$$

$$+ \delta_{n+1} f(t_{2k+1}^{[n+1]}, x, U), \quad k = 1, 2, \dots, \quad (23)$$

где

$$\xi^*(y_1, y_2) = \xi_{2k+2}^{n+1}(x, y_1) - \delta_{n+1} v(t_{2k+1}^{[n+1]}, \xi_{2k+2}^{n+1}(x, y_1)) - y_2,$$

$$U = \int_{\mathbb{R}^d} \Theta_{n+1}(y) u^{[n+1]}(t_{2k}^{[n+1]}, \xi_{2k+1}^{n+1}(x, y)) dy + \delta_{n+1} f(t_{2k}^{[n+1]}, x, u^{[n+1]}(t_{2k}^{[n+1]}, x)).$$

С другой стороны, так как $\Theta_n(y) = \int_{\mathbb{R}^d} \Theta_{n+1}(y - y_1) \Theta_{n+1}(y_1) dy_1$, для произвольной регулярной функции $\varphi(\cdot)$ имеем

$$\int_{\mathbb{R}^d} \Theta_n(y) \varphi(x - y) dy = \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \Theta_{n+1}(y_2) \Theta_{n+1}(y_1) \varphi(x - y_1 - y_2) dy_1 dy_2.$$

Поэтому из (4) также получим

$$u^{[n]}(t_{k+1}^{[n]}, x) = \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \Theta_{n+1}(y_1) \Theta_{n+1}(y_2) u^{[n]}(t_k^{[n]}, \xi_{k+1}^n(x, y_1 + y_2)) dy_1 dy_2 + \\ + \delta_n f(t_k^{[n]}, x, u^{[n]}(t_k^{[n]}, x)), \quad k = 1, 2, \dots \quad (24)$$

Из (23) и (24) следует, что

$$D_x^\nu u^{[n+1]}(t_{2k+2}^{[n+1]}, x) - D_x^\nu u^{[n]}(t_{k+1}^{[n]}, x) = \\ = \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \Theta_{n+1}(y_1) \Theta_{n+1}(y_2) (D_x^\nu(U_1) + D_x^\nu(U_2)) dy_1 dy_2 + \\ + \delta_{n+1} \int_{\mathbb{R}^d} \Theta_{n+1}(y_1) D_x^\nu(F_1) dy_1 + \delta_{n+1} D_x^\nu(F_2), \quad (25)$$

где

$$U_1 = u^{[n+1]}(t_{2k}^{[n+1]}, \xi_{k+1}^n(x, y_1 + y_2)) - u^{[n]}(t_k^{[n]}, \xi_{k+1}^n(x, y_1 + y_2)), \\ U_2 = u^{[n+1]}(t_{2k}^{[n+1]}, \xi^*(y_1, y_2)) - u^{[n+1]}(t_{2k}^{[n+1]}, \xi_{k+1}^n(x, y_1 + y_2)), \\ F_1 = f(t_{2k}^{[n+1]}, \xi_{2k+2}^{n+1}(x, y_1), u^{[n+1]}(t_{2k}^{[n+1]}, \xi_{2k+2}^{n+1}(x, y_1))) - f(t_k^{[n]}, x, u^{[n]}(t_k^{[n]}, x)), \\ F_2 = f(t_{2k+1}^{[n+1]}, x, U) - f(t_k^{[n]}, x, u^{[n]}(t_k^{[n]}, x)).$$

В силу условия (6) имеем оценку

$$|D_x^\nu U_1| \leq |w_{\nu, 2k}^{[m, n+1]}(\xi_{k+1}^n(x, y_1 + y_2)) - w_{\nu, k}^{[m, n]}(\xi_{k+1}^n(x, y_1 + y_2))| + \\ + C_1 \delta_{n+1} \sum_{|\nu'|=m} |w_{\nu', 2k}^{[m, n+1]}(\xi_{k+1}^n(x, y_1 + y_2)) - w_{\nu', k}^{[m, n]}(\xi_{k+1}^n(x, y_1 + y_2))| + \\ + C_1 \delta_{n+1} \sum_{|\nu'|=m', 0 < m' < m} |w_{\nu', 2k}^{[m', n+1]}(\xi_{k+1}^n(x, y_1 + y_2)) - w_{\nu', k}^{[m', n]}(\xi_{k+1}^n(x, y_1 + y_2))|,$$

где C_1 — независимая от n и k постоянная.

С другой стороны, с учетом леммы 2 и условий (6) и (7) имеем

$$|D_x^\nu U_2| \leq |w_{\nu, 2k}^{[m, n+1]}(\xi^*(y_1, y_2)) - w_{\nu, 2k}^{[m, n+1]}(\xi_{k+1}^n(x, y_1 + y_2))| + \\ + C_2 \delta_{n+1} \sum_{|\nu'|=m} |w_{\nu', 2k}^{[m, n+1]}(\xi^*(y_1, y_2)) - w_{\nu', 2k}^{[m, n+1]}(\xi_{k+1}^n(x, y_1 + y_2))| + \\ + C_2 \delta_{n+1} |D_x^\nu v(t_{2k+1}^{[n+1]}, \xi_{2k+2}^{n+1}(x, y_1)) - D_x^\nu v(t_{k+1}^{[n]}, x)| + C_2 \delta_{n+1}^2 + C_2 \delta_{n+1} |y_1|,$$

где C_2 — независимая от n и k постоянная.

Заметим, что в силу леммы 3 имеем оценки

$$|w_{\nu, 2k}^{[m, n+1]}(\xi^*(y_1, y_2)) - w_{\nu, 2k}^{[m, n+1]}(\xi_{k+1}^n(x, y_1 + y_2))| \leq$$

$$\begin{aligned} &\leq [D_x^\nu u^{[n+1]}(t_{2k}^{[n+1]}, \cdot)]_\alpha |\xi^*(y_1, y_2) - \xi_{k+1}^n(x, y_1 + y_2)|^\alpha \leq \\ &\leq [D_x^\nu u^{[n+1]}(t_{2k}^{[n+1]}, \cdot)]_\alpha \delta_{n+1}^\alpha (\delta_{n+1} \sup |\partial_t v| + \sup |\nabla v| (\sup |v| \delta_{n+1} + |y_1|))^\alpha \end{aligned}$$

(здесь и далее запишем просто $\sup$ вместо $\sup_{0 \leq t \leq \tau, x \in \mathbb{R}^d}$). Кроме этого, из условий (6) и (8) следует, что

$$\begin{aligned} &|D_x^\nu v(t_{2k+1}^{[n+1]}, \xi_{2k+2}^{n+1}(x, y_1)) - D_x^\nu v(t_{k+1}^{[n]}, x)| \leq \\ &\leq |D_x^\nu v(t_{2k+1}^{[n+1]}, x) - D_x^\nu v(t_{k+1}^{[n]}, x)| + |D_x^\nu v(t_{2k+1}^{[n+1]}, \xi_{2k+2}^{n+1}(x, y_1)) - D_x^\nu v(t_{2k+1}^{[n+1]}, x)| \leq \\ &\leq C_3 \delta_{n+1}^{\alpha_1} + [D_x^\nu v(t_{2k+1}^{[n+1]}, \cdot)]_\alpha (\delta_{n+1} \sup |v| + |y_1|)^\alpha, \end{aligned}$$

где C_3 — независимая от n и k постоянная.

Следовательно, учитывая соотношение

$$\int_{\mathbb{R}^d} \Theta_{n+1} |y|^\alpha dy = C_\alpha \delta_{n+1}^{\alpha/2} \quad (26)$$

с независимой от n постоянной C_α , определенной числом α , делаем вывод, что существует независимая от n постоянная C такая, что

$$\begin{aligned} &\sup_{x \in \mathbb{R}^d} \left| \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \Theta_{n+1}(y_1) \Theta_{n+1}(y_2) (D_x^\nu(U_1) + D_x^\nu(U_2)) dy_1 dy_2 \right| \leq \\ &\leq \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |w_{\nu, 2k}^{[m, n+1]}(x) - w_{\nu, k}^{[m, n]}(x)| + C \delta_{n+1} \sum_{|\nu'|=m} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |w_{\nu', 2k}^{[m, n+1]}(x) - w_{\nu', k}^{[m, n]}(x)| + \\ &+ C \delta_{n+1} \sum_{|\nu'|=m', 0 < m' < m} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |w_{\nu', 2k}^{[m', n+1]}(x) - w_{\nu', k}^{[m', n]}(x)| + C \delta_{n+1}^{\min(1+\alpha_1, 3\alpha/2)}. \quad (27) \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь второе слагаемое правой части (25). В силу леммы 2 и условий (6) и (9) имеем

$$\begin{aligned} |D_x^\nu F_1| &\leq |w_{\nu, 2k}^{[m, n+1]}(x) - w_{\nu, k}^{[m, n]}(x)| + C'_1 |w_{\nu, 2k}^{[m, n+1]}(\xi_{2k+2}^{n+1}(x, y_1)) - w_{\nu, 2k}^{[m, n+1]}(x)| + \\ &+ C'_1 \sum_{|\nu'|=m', 0 < m' < m} |w_{\nu', 2k}^{[m', n+1]}(x) - w_{\nu', k}^{[m', n]}(x)| + C'_1 |u^{[n+1]}(t_{2k}^{[n+1]}, x) - u^{[n]}(t_k^{[n]}, x)| + \\ &+ C'_1 \sum_{|\nu'|=m} |f_{\nu'}^{[**]} - f_{\nu'}^{[*]}| + C'_1 \delta_{n+1} + C'_1 |y_1|, \quad (28) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} f_{\nu'}^{[**]} &= D_{x, u}^{\nu'} f(t_{2k}^{[n+1]}, \xi_{2k+2}^{n+1}(x, y_1), u^{[n+1]}(t_{2k}^{[n+1]}, \xi_{2k+2}^{n+1}(x, y_1))), \\ f_{\nu'}^{[*]} &= D_{x, u}^{\nu'} f(t_k^{[n]}, x, u^{[n]}(t_k^{[n]}, x)), \end{aligned}$$

а C'_1 — независимая от n и k постоянная. В силу леммы 3 имеем

$$|w_{\nu, 2k}^{[m, n+1]}(\xi_{2k+2}^{n+1}(x, y_1)) - w_{\nu, 2k}^{[m, n+1]}(x)| \leq$$

$$\leq [D_x^\nu u^{[n+1]}(t_{2k}^{[n+1]}, \cdot)]_\alpha (\sup |v| \delta_{n+1} + |y_1|)^\alpha. \quad (29)$$

Кроме этого, в силу условий (9) и (12) имеем

$$\begin{aligned} & \left| D_{x,u}^{\nu'} f \left(t_{2k}^{[n+1]}, \xi_{2k+2}^{n+1}(x, y_1), u^{[n+1]}(t_{2k}^{[n+1]}, \xi_{2k+2}^{n+1}(x, y_1)) \right) - \right. \\ & \quad \left. - D_{x,u}^{\nu'} f(t_k^{[n]}, x, u^{[n]}(t_k^{[n]}, x)) \right| \leq \\ & \leq C'_2 \left[(\sup |v| \delta_{n+1} + |y_1|)^\alpha + \sup |\nabla u^{n+1}| (\sup |v| \delta_{n+1} + |y_1|) + \right. \\ & \quad \left. + \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |u^{[n+1]}(t_{2k}^{[n+1]}, x) - u^{[n]}(t_k^{[n]}, x)| \right], \quad (30) \end{aligned}$$

где C'_2 — независимая от n и k постоянная. Из (26), (28), (29) и (30) вытекает, что существует независимая от n и k постоянная C' такая, что

$$\begin{aligned} & \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \left| \int_{\mathbb{R}^d} \Theta_{n+1}(y_1) D_x^\nu(F_1) dy_1 \right| \leq \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |w_{\nu, 2k}^{[m, n+1]}(x) - w_{\nu, k}^{[m, n]}(x)| + \\ & \quad + C' \sum_{|\nu'|=m', 0 < m' < m} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |w_{\nu', 2k}^{[m', n+1]}(x) - w_{\nu', k}^{[m', n]}(x)| + \\ & \quad + C' \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |u^{[n+1]}(t_{2k}^{[n+1]}, x) - u^{[n]}(t_k^{[n]}, x)| + C' \delta_{n+1}^{\alpha/2}. \quad (31) \end{aligned}$$

Что касается последнего слагаемого правой части (25), то с учетом условия (10) получаем

$$\begin{aligned} & |D_x^\nu F_2| \leq |w_{\nu, 2k}^{[m, n+1]}(x) - w_{\nu, k}^{[m, n]}(x)| + \\ & \quad + \int_{\mathbb{R}^d} \Theta_{n+1}(y) |w_{\nu, 2k}^{[m, n+1]}(\xi_{2k+1}^{n+1}(x, y)) - w_{\nu, 2k}^{[m, n+1]}(x)| dy + \\ & \quad + C''_1 \sum_{|\nu'|=m', 0 < m' < m} |w_{\nu', 2k}^{[m', n+1]}(x) - w_{\nu', k}^{[m', n]}(x)| + C''_1 |u^{[n+1]}(t_{2k}^{[n+1]}, x) - u^{[n]}(t_k^{[n]}, x)| + \\ & \quad + C''_1 \sum_{|\nu'|=m} |D_{x,u}^{\nu'} f(t_{2k+1}^{[n+1]}, x, U) - D_{x,u}^{\nu'} f(t_k^{[n]}, x, u^{[n]}(t_k^{[n]}, x))| + C''_1 \sqrt{\delta_{n+1}}, \quad (32) \end{aligned}$$

где C''_1 — независимая от n и k постоянная. В силу леммы 3 имеем

$$\begin{aligned} & |w_{\nu, 2k}^{[m, n+1]}(\xi_{2k+1}^{n+1}(x, y)) - w_{\nu, 2k}^{[m, n+1]}(x)| \leq \\ & \leq [D_x^\nu u^{[n+1]}(t_{2k}^{[n+1]}, \cdot)]_\alpha (\sup |v| \delta_{n+1} + |y|)^\alpha. \quad (33) \end{aligned}$$

Кроме этого, в силу условий (11) и (12) имеем

$$\begin{aligned} & |D_{x,u}^{\nu'} f(t_{2k+1}^{[n+1]}, x, U) - D_{x,u}^{\nu'} f(t_k^{[n]}, x, u^{[n]}(t_k^{[n]}, x))| \leq \\ & \leq C''_2 (\delta_{n+1}^{\alpha_2} + |u^{[n+1]}(t_{2k}^{[n+1]}, x) - u^{[n]}(t_k^{[n]}, x)| + \sqrt{\delta_{n+1}}), \quad (34) \end{aligned}$$

где C_2'' — независимая от n и k постоянная. Из (26), (32), (33) и (34) вытекает, что существует независимая от n и k постоянная C'' такая, что

$$\begin{aligned} |D_x^\nu F_2| &\leq \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |w_{\nu, 2k}^{[m, n+1]}(x) - w_{\nu, k}^{[m, n]}(x)| + \\ &+ C'' \sum_{|\nu'|=m', 0 < m' < m'} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |w_{\nu', 2k}^{[m', n+1]}(x) - w_{\nu', k}^{[m', n]}(x)| + \\ &+ C'' |u^{[n+1]}(t_{2k}^{[n+1]}, x) - u^{[n]}(t_k^{[n]}, x)| + C'' \delta_{n+1}^{\min(\alpha/2, \alpha_2)}. \end{aligned} \quad (35)$$

Из неравенств (27), (31) и (35) получаем

$$\begin{aligned} \sum_{0 \leq |\nu| \leq m} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |D_x^\nu u^{[n+1]}(t_{2k+2}^{[n+1]}, x) - D_x^\nu u^{[n]}(t_{k+1}^{[n]}, x)| &\leq \\ &\leq (1 + \tilde{C} \delta_{n+1}) \sum_{0 \leq |\nu| \leq m} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |w_{\nu, 2k}^{[m, n+1]}(x) - w_{\nu, k}^{[m, n]}(x)| + \tilde{C} \delta_{n+1}^{1+\beta}, \end{aligned}$$

где $\beta = \min(3\alpha/2 - 1, \alpha_1, \alpha_2)$ и $\tilde{C} = C + C' + C''$. Таким образом, если положим

$$Y_{k+1}^{[m, n]} = \sum_{0 \leq |\nu| \leq m} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |D_x^\nu u^{[n+1]}(t_{2k+2}^{[n+1]}, x) - D_x^\nu u^{[n]}(t_{k+1}^{[n]}, x)|,$$

то имеет место неравенство

$$Y_{k+1}^{[m, n]} \leq (1 + \delta_{n+1} \tilde{C}) Y_k^{[m, n]} + \tilde{C} \delta_{n+1}^{1+\beta},$$

откуда с учетом соотношения $Y_0^{[m, n]} = 0$

$$Y_k^{[m, n]} \leq \tilde{C} \delta_{n+1}^{1+\beta} \sum_{j=0}^k (1 + \delta_{n+1} \tilde{C})^{k-j} \leq \delta_{n+1}^\beta e^{t_{k+1}^n \tilde{C}}.$$

Следовательно, напоминая определение $Y_k^{[m, n]}$ и соотношение (5), получим

$$\sum_{0 \leq |\nu| \leq m} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |D_x^\nu u^{[n+1]}(t, x) - D_x^\nu u^{[n]}(t, x)| \leq \delta_{n+1}^\beta e^{t_{k+1}^n \tilde{C}}. \quad (36)$$

Так как $\beta > 0$, имеем

$$\sum_{n=0}^{\infty} \delta_{n+1}^\beta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n\beta}} < \infty.$$

Значит, из (36) вытекает равномерная сходимость $D_x^\nu u^{[n]}(t, x)$ при $n \rightarrow \infty$.

Шаг 3. Докажем, что существует функция $\bar{\Phi}_{m+\alpha}(t)$, определенная условиями (6), (9) и (13) для v , f , и u_0 такая, что предельная функция $u(t, x)$ удовлетворяет неравенству (14), а для каждого $t \geq 0$ $D_x^\nu u^{[n]}(t, x)$ ($|\nu| = m$) сходится к $D_x^\nu u(t, x)$ в норме $C^{0+\alpha'}(\mathbb{R}^d)$ при $0 < \alpha' < \alpha$.

Действительно, из шагов 1 и 2 следует, что величина $\sup_{0 \leq t' \leq t} \|u(t', \cdot)\|_{C^m}$ ограничена функцией, определенной условиями (6), (9) и (13) для v , f и u_0 . Помня об этом, рассмотрим для $|\nu| = m$ неравенство

$$\begin{aligned} \frac{|D_x^\nu u(t, x) - D_x^\nu u(t, y)|}{|x - y|^\alpha} &\leq \frac{|D_x^\nu u^{[n]}(t, x) - D_x^\nu u^{[n]}(t, y)|}{|x - y|^\alpha} + \\ &+ \frac{|D_x^\nu u(t, x) - D_x^\nu u^{[n]}(t, x)|}{|x - y|^\alpha} + \frac{|D_x^\nu u(t, y) - D_x^\nu u^{[n]}(t, y)|}{|x - y|^\alpha}. \end{aligned}$$

Из шага 2 следует, что для каждого $\varepsilon > 0$ можно найти $\bar{n}_\varepsilon$ такое, что

$$|D_x^\nu u(t, x) - D_x^\nu u^{[n]}(t, x)| \leq \varepsilon \quad \text{при } n \geq \bar{n}_\varepsilon.$$

Следовательно, в силу (18) имеем

$$\frac{|D_x^\nu u(t, x) - D_x^\nu u(t, y)|}{|x - y|^\alpha} \leq \Phi_{\alpha, m}(t) + 1,$$

откуда получим (14) с $\bar{\Phi}_{m+\alpha}(t) = \Phi_{\alpha, m}(t) + \Phi_m(t) + 1$. Сходимость $D_x^\nu u^{[n]}(t, x)$ ($|\nu| = m$) к $D_x^\nu u(t, x)$ для каждого $t \geq 0$ в $C^{0+\alpha'}(\mathbb{R}^d)$ при $0 < \alpha' < \alpha$ следует из (14), (18), равномерной сходимости $D_x^\nu u^{[n]}(t, x)$ к $D_x^\nu u(t, x)$ и неравенства

$$\begin{aligned} \sup \frac{|D_x^\nu u^{[n]}(t, x^{(a)}) - D_x^\nu u(t, x^{(a)}) - (D_x^\nu u^{[n]}(t, x^{(b)}) - D_x^\nu u(t, x^{(b)}))|}{|x^{(a)} - x^{(b)}|^{\alpha'}} &\leq \\ &\leq \left(\sup \frac{|D_x^\nu u^{[n]}(t, x^{(a)}) - D_x^\nu u(t, x^{(a)}) - (D_x^\nu u^{[n]}(t, x^{(b)}) - D_x^\nu u(t, x^{(b)}))|}{|x^{(a)} - x^{(b)}|^{\alpha'}} \right)^{\alpha'/\alpha} \times \\ &\times \left(\sup |D_x^\nu u^{[n]}(t, x^{(a)}) - D_x^\nu u(t, x^{(a)}) - (D_x^\nu u^{[n]}(t, x^{(b)}) - D_x^\nu u(t, x^{(b)}))| \right)^{(\alpha-\alpha')/\alpha}, \end{aligned}$$

где $\sup = \sup_{x^{(a)}, x^{(b)} \in \mathbb{R}^d, x^{(a)} \neq x^{(b)}}$. Лемма 4 доказана. $\square$

5. Переход к пределу. Перед тем как доказать, что предельная функция $u(t, x)$ удовлетворяет уравнению переноса-диффузии (1), напомним сначала связь между приближенными решениями $u^{[n]}(t, x)$ и уравнением (1).

ЛЕММА 5. Пусть $\tau > 0$, а $u^{[n]}(t, x)$ — функция, определенная соотношениями (3), (4). Пусть выполнены предположения теоремы 1. Тогда при $t_1^{[n]} \leq \leq t_k^{[n]} \leq \tau_+$ имеем

$$\begin{aligned} \frac{u^{[n]}(t_k^{[n]}, x) - u^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x)}{\delta_n} &= -v(t_k^{[n]}, x) \cdot \nabla u^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x) + \\ &+ \kappa \Delta u^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x) + f(t_{k-1}^{[n]}, x, u^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x)) + R, \end{aligned} \quad (37)$$

$$|R| \leq \delta_n^{\alpha/2} C_0, \quad (38)$$

где C_0 — независимая от n постоянная, определенная предположениями.

Доказательство. Согласно формуле Тейлора получаем

$$\begin{aligned}
 u^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x - \delta_n v(t_k^{[n]}, x) - y) = \\
 = u^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x) - \delta_n v(t_k^{[n]}, x) \cdot \nabla u^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x) - y \cdot \nabla u^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x) + \\
 + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d y_i y_j \frac{\partial^2 u^{[n]}}{\partial x_i \partial x_j}(t_{k-1}^{[n]}, x) + \\
 + \int_0^1 (1-s) \sum_{i,j=1}^d y_i y_j \left[\frac{\partial^2 u^{[n]}}{\partial x_i \partial x_j}(t_{k-1}^{[n]}, x - \delta_n v(t_k^{[n]}, x)s - ys) - \right. \\
 \left. - \frac{\partial^2 u^{[n]}}{\partial x_i \partial x_j}(t_{k-1}^{[n]}, x) \right] ds + \\
 + \int_0^1 (1-s) \sum_{i,j=1}^d [\delta_n^2 v_i(x) v_j(t, x) + 2\delta_n v_i(t, x) y_j] \times \\
 \times \frac{\partial^2 u^{[n]}}{\partial x_i \partial x_j}(t_{k-1}^{[n]}, x - \delta_n v(t_k^{[n]}, x)s - ys) ds. \quad (39)
 \end{aligned}$$

Так как

$$\int_{\mathbb{R}^d} \Theta_n(y) y_j dy = 0, \quad \int_{\mathbb{R}^d} \Theta_n(y) y_i y_j dy = 0 \quad \text{для } i \neq j, \quad \int_{\mathbb{R}^d} \Theta_n(y) y_i^2 dy = 2\delta_n \kappa,$$

имеем

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbb{R}^d} \Theta_n(y) y \cdot \nabla u^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x) dy = 0, \\
 \int_{\mathbb{R}^d} \Theta_n(y) \left[\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d y_i y_j \frac{\partial^2 u^{[n]}}{\partial x_i \partial x_j}(t_{k-1}^{[n]}, x) \right] dy = \delta_n \kappa \Delta u^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x).
 \end{aligned}$$

С другой стороны, так как $m \geq 2$, в силу леммы 3 производные второго порядка функции $u^{[n]}$ по x непрерывны по Гёльдеру с показателем α , так что

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{\partial^2 u^{[n]}}{\partial x_i \partial x_j}(t_{k-1}^{[n]}, x - \delta_n v(t_k^{[n]}, x)s - ys) - \frac{\partial^2 u^{[n]}}{\partial x_i \partial x_j}(t_{k-1}^{[n]}, x) \right| \leq \\
 \leq \left[\frac{\partial^2 u^{[n]}}{\partial x_i \partial x_j}(t_k^{[n]}, \cdot) \right]_{\alpha} (\sup |v| \delta_n + |y|)^{\alpha} s^{\alpha}.
 \end{aligned}$$

Следовательно, с учетом (26) имеем

$$\begin{aligned}
 \left| \int_{\mathbb{R}^d} \Theta_n(y) \left(\int_0^1 (1-s) \sum_{i,j=1}^d y_i y_j \left[\frac{\partial^2 u^{[n]}}{\partial x_i \partial x_j}(t_{k-1}^{[n]}, x - \delta_n v(t_k^{[n]}, x)s - ys) - \right. \right. \right. \\
 \left. \left. \left. - \frac{\partial^2 u^{[n]}}{\partial x_i \partial x_j}(t_{k-1}^{[n]}, x) \right] ds \right) dy \right| \leq C_1 \delta_n^{1+\alpha/2},
 \end{aligned}$$

где C_1 — независимая от n постоянная. Кроме этого, так как производные второго порядка функции $u^{[n]}$ по x равномерно ограничены (см. лемму 2), интеграл последнего слагаемого (39), умноженного на $\Theta_n(y)$, ограничен величиной $C_2\delta_n^{3/2}$ с независимой от n постоянной C_2 .

Принимая во внимание (4), из полученных выше соотношений получаем

$$u^{[n]}(t_k^{[n]}, x) - u^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x) = -\delta_n v(t_{k-1}^{[n]}, x) \cdot \nabla u^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x) + \\ + \delta_n \kappa \Delta u^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x) + \delta_n f(t_{k-1}^{[n]}, x, u^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x)) + \delta_n R$$

с $|R| \leq \delta_n^{\alpha/2} C_0$. Разделив обе части этого равенства на δ_n , получим (37). Лемма 5 доказана. $\square$

Перейдем теперь к доказательству теоремы 1.

Доказательство. Введем в рассмотрение функцию

$$h^{[n]}(t) = t_{k-1}^{[n]} \quad \text{при} \quad t_{k-1}^{[n]} \leq t < t_k^{[n]}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Тогда из соотношений (37), (38) и определения (5) получим

$$\frac{\partial u^{[n]}}{\partial t}(t, x) = -v(h^{[n]}(t + \delta_n), x) \cdot \nabla u^{[n]}(h^{[n]}(t), x) + \kappa \Delta u^{[n]}(h^{[n]}(t), x) + \\ + f(h^{[n]}(t), x, u^{[n]}(h^{[n]}(t), x)) + R \quad \text{при} \quad t \neq t_k^{[n]}.$$

Продолжим обе части этого равенства на $t \leq 0$ их значениями на $0 < t < t_1^{[n]}$. Тогда их свертка по t со стандартной регуляризующей функцией $\varrho_\varepsilon(t)$ дает

$$\varrho_\varepsilon * \partial_t u^{[n]}(\cdot, x)(t) = \\ = \varrho_\varepsilon * \left(-v(h^{[n]}(\cdot + \delta_n), x) \cdot \nabla u^{[n]}(h^{[n]}(\cdot), x) + \kappa \Delta u^{[n]}(h^{[n]}(\cdot), x) + \right. \\ \left. + f(h^{[n]}(\cdot), x, u^{[n]}(h^{[n]}(\cdot), x)) + R \right)(t), \quad (40)$$

где $*_t$ обозначает свертку по t .

Учитывая равномерную сходимость производных первого и второго порядка по x приближенных решений (см. лемму 5), нетрудно видеть, что правая часть равенства (40) сходится равномерно к функции

$$\varrho_\varepsilon * \left(-v(\cdot, x) \cdot \nabla u(\cdot, x) + \kappa \Delta u(\cdot, x) + f(\cdot, x, u(\cdot, x)) \right)(t)$$

на $[0, \tau] \times \mathbb{R}^d$ при $n \rightarrow \infty$.

Пусть $\varphi(t)$ — обладающая непрерывной производной функции такая, что ее носитель ограничен и расположен внутри $\mathbb{R}_+$. Тогда из равенства

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) \left(\varrho_\varepsilon * \frac{\partial u^{[n]}}{\partial t}(\cdot, x) \right)(t) dt = - \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} * \varrho_\varepsilon \right)(t) u^{[n]}(t, x) dt$$

и равномерной сходимости приближенных решений $u^{[n]}(t, x)$ к функции u на $[0, \tau] \times \mathbb{R}^d$ следует, что

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) \left(\varrho_\varepsilon *_t \frac{\partial u^{[n]}}{\partial t}(\cdot, x) \right) (t) dt = - \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} *_t \varrho_\varepsilon \right) (t) u(t, x) dt.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} & - \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} *_t \varrho_\varepsilon \right) (t) u(t, x) dt = \\ & = \int_{-\infty}^{+\infty} (\varphi *_t \varrho_\varepsilon)(t) \left(-v(t, x) \cdot \nabla u(t, x) + \kappa \Delta u(t, x) + f(t, x, u(t, x)) \right) dt. \end{aligned}$$

Отсюда получается равенство (15) при $\varepsilon \rightarrow 0$. Теорема 1 доказана. $\square$

Выводы. В этой работе рассмотрены приближенные решения для уравнения переноса-диффузии, построенные путем применения ядра теплопроводности на каждом шаге дискретизации по времени, и кроме их сходимости к решению уравнения переноса-диффузии доказана принадлежность предельной функции к пространству Гёльдера. Оценки этих приближенных решений и их предельной функции имеют независимое от коэффициента диффузии поведение, что дает возможность использовать их в дальнейшем исследовании поведения решения в случае, когда коэффициент диффузии стремится к нулю. Также благодаря использованию непрерывности по Гёльдеру показано, что предельная функция приближенных решений может иметь такую же дифференцируемость по x , как и заданная функция переноса $v(t, x)$, что является первым шагом в направлении изучения квазилинейных уравнений.

Конкурирующие интересы. Мы заявляем об отсутствии явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

Авторский вклад и ответственность. Вклад авторов равноценен. Мы несем полную ответственность за предоставление окончательной версии рукописи в печать. Окончательной версии рукописи нами одобрена.

Финансирование. Исследование выполнялось без финансирования.

Библиографический список

1. Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уралцева Н. Н. *Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа*. М.: Наука, 1967. 738 с. EDN: VLRBIL.
2. Krylov N. V. *Lectures on Elliptic and Parabolic Equations in Hölder Spaces* / Graduate Studies in Mathematics. vol. 12. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1996. xii+164 pp.
3. Lieberman G. M. *Second Order Parabolic Differential Equations*. Singapore: World Scientific, 1996. xi+439 pp.
4. Evans L. C. *Partial Differential Equations* / Graduate Studies in Mathematics. vol. 19. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2010. xxi+749 pp.
5. Pazy A. *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations* / Applied Mathematical Sciences. vol. 44. New York: Springer-Verlag, 1983. viii+279 pp. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-1-4612-5561-1>.
6. Гихман И. И., Скороход А. В. *Введение в теорию случайных процессов*. М.: Наука, 1977. 567 с.

7. Freidlin M. I., Wentzell A. D. *Random Perturbations of Dynamical Systems* / Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften. vol.260. Berlin: Springer, 2012. xxviii+458 pp. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-642-25847-3>.
8. Taleb L., Selvaduray S., Fujita Yashima H. Approximation par une moyenne locale de la solution de l'équation de transport-diffusion // *Afr. Math. Ann.*, 2020. vol. 8. pp. 71–90 (In French).
9. Smaali H., Fujita Yashima H. Une généralisation de l'approximation par une moyenne locale de la solution de l'équation de transport-diffusion // *Afr. Math. Ann.*, 2021. vol. 9. pp. 89–108 (In French).
10. Ait Mahiout L., Fujita Yashima H. Convergence de la solution d'une équation de transport-diffusion vers la solution d'une équation de transport // *Afr. Math. Ann.*, 2023. vol. 10. pp. 105–124 (In French).
11. Фуджита Яшима Х., Айт Махиут Л. Сходимость решения системы уравнений переноса-диффузии к решению системы уравнений переноса // *Вестн. Бурят. гос. ун-та. Мат., информ.*, 2023. № 1. С. 22–36. EDN: NDMPRK. DOI: <https://doi.org/10.18101/2304-5728-2023-1-22-36>.
12. Аюаюуда М., Аяди А., Фуджита Яшима Х. Сходимость приближенных решений ядром теплопроводности для уравнения переноса-диффузии в полуплоскости // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2022. Т. 26, № 2. С. 222–258. EDN: JNGCBE. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1881>.
13. Gherdaoui R., Taleb L., Selvaduray S. Convergence of the heat kernel approximated solutions of the transport-diffusion equation in the half-space // *J. Math. Anal. Appl.*, 2023. vol. 527, no. 2, 127507. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2023.127507>.
14. Гердауй Р., Селвадурай С., Фуджита Яшима Х. Сходимость приближенных решений для уравнения переноса-диффузии в полупространстве с условием Неймана // *Изв. Иркутск. гос. ун-та. Сер. мат.*, 2024. Т. 48. С. 64–79. EDN: NPBQLS. DOI: <https://doi.org/10.26516/1997-7670.2024.48.64>.

MSC: 35K58, 35K15

Approximation of the solution of transport-diffusion equation in Hölder space

A. Nemdili¹, F. Korichi², H. Fujita Yashima¹¹ École Normale Supérieure El Katiba Assia Djebar Constantine, Ville Universitaire, Ain El Bey Ali Mendjeli, Constantine, 25000, Algeria.² École Normale Supérieure de Kouba, B.P. 92, Vieux Kouba, Alger, 16050, Algeria.

Abstract

In this paper, approximate solutions for the transport-diffusion equation in $\mathbb{R}^d$ and their limit function are considered and it is proved that the limit function belongs to the Hölder space corresponding to the regularity of given functions and satisfies the equation. More precisely, we construct these approximate solutions by using the heat kernel and the translation corresponding to the transport on each step of time discretization. Under the assumption of the boundedness of given functions and their partial derivatives with respect to the space variables up to the m -th order ($m \geq 2$) and of the α -Hölder continuity of their m -th derivatives ($2/3 < \alpha \leq 1$; if $\alpha = 1$, it means the Lipschitz condition), we first establish suitable estimates of the approximate solutions and then, using these estimates, we prove their convergence to a function which satisfies the equation and the α -Hölder continuity of the m -th derivatives with respect to the space variables of the limit function. Note that these estimates do not depend on the coefficient of diffusion, so they can be used even in the case where the coefficient of diffusion tends to 0.

Keywords: transport-diffusion equation, approximate solutions, Hölder space.Received: 1st June, 2024 / Revised: 3rd October, 2024 /Accepted: 21st October, 2024 / First online: 11th November, 2024

Differential Equations and Mathematical Physics

Research Article

© The Author(s), 2024

© Samara State Technical University, 2024 (Compilation, Design, and Layout)

 The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Please cite this article in press as:

Nemdili A., Korichi F., Fujita Yashima H. Approximation of the solution of transport-diffusion equation in Hölder space, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2024, vol. 28, no. 3, pp. 426–444. EDN: QYPUUB. DOI: 10.14498/vsgtu2097 (In Russian).

Authors' Details:

Amina Nemdili  <https://orcid.org/0009-0007-5898-3360>

Assistant; Teacher, Member of Laboratory; Lab. of Applied Mathematics and Didactics;
e-mail: nemdili.amina@gmail.com

Farhouh Korichi  <https://orcid.org/0009-0006-6442-3506>

Associate Professor; Member of Laboratory; Lab. of Theory of Fixed-Point and Applications;
e-mail: korichi_korichi@yahoo.com

Hisao Fujita Yashima  <https://orcid.org/0000-0001-9937-8406>

Professor; Member of Laboratory; Lab. of Applied Mathematics and Didactics;
e-mail: hisao@fujitayashima@yahoo.com

Competing interests. We declare that we have no apparent or potential conflicts of interest related to the publication of this article.

Author's Responsibilities. The contribution of the authors is equivalent. We take full responsibility for submit the final manuscript to print. We approved the final version of the manuscript.

Funding. This research received no specific grant from any funding agency in the public, commercial, or not-for-profit sectors.

References

1. Ladyzhenskaya O. A., Solonnikov V. A., Ural'tseva N. N. *Linear and Quasi-Linear Equations of Parabolic Type*, Translations of Mathematical Monographs, vol. 23. Providence, RI, Amer. Math. Soc., 1968, xi+648 pp.
2. Krylov N. V. *Lectures on Elliptic and Parabolic Equations in Hölder Spaces*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 12. Providence, RI, Amer. Math. Soc., 1996, xii+164 pp.
3. Lieberman G. M. *Second Order Parabolic Differential Equations*. Singapore, World Scientific, 1996, xi+439 pp.
4. Evans L. C. *Partial Differential Equations*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 19. Providence, RI, Amer. Math. Soc., 2010, xxi+749 pp.
5. Pazy A. *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*, Applied Mathematical Sciences, vol. 44. New York, Springer-Verlag, 1983, viii+279 pp. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-1-4612-5561-1>.
6. Guikhman I., Skorokhod A. *Introduction À La Théorie Des Processus Aléatoires* [Introduction to the Theory of Random Processes]. Moscow, Mir, 1980, 557 pp. (In French)
7. Freidlin M. I., Wentzell A. D. *Random Perturbations of Dynamical Systems*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, vol. 260. Berlin, Springer, 2012, xxviii+458 pp. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-642-25847-3>.
8. Taleb L., Selvaduray S., Fujita Yashima H. Approximation par une moyenne locale de la solution de l'équation de transport-diffusion, *Afr. Math. Ann.*, 2020, vol. 8, pp. 71–90 (In French).
9. Smaali H., Fujita Yashima H. Une généralisation de l'approximation par une moyenne locale de la solution de l'équation de transport-diffusion, *Afr. Math. Ann.*, 2021, vol. 9, pp. 89–108 (In French).
10. Ait Mahiout L., Fujita Yashima H. Convergence de la solution d'une équation de transport-diffusion vers la solution d'une équation de transport, *Afr. Math. Ann.*, 2023, vol. 10, pp. 105–124 (In French).
11. Fujita Yashima H., Ait Mahiout L. Convergence of solution of transport-diffusion system to that of transport system, *Vestn. Buryat. gos. univ. Mat., inform.* [Bull. Buryat State Univ. Math., Inform.], 2023, no. 1, pp. 22–36 (In Russian). EDN: NDMPRK. DOI: <https://doi.org/10.18101/2304-5728-2023-1-22-36>.
12. Aouaouda M., Ayadi A., Fujita Yashima H. Convergence of approximate solutions by heat kernel for transport-diffusion equation in a half-plane, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2022, vol. 26, no. 2, pp. 222–258 (In Russian). EDN: JNGCBE. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1881>.
13. Gherdaoui R., Taleb L., Selvaduray S. Convergence of the heat kernel approximated solutions of the transport-diffusion equation in the half-space, *J. Math. Anal. Appl.*, 2023, vol. 527, no. 2, 127507. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2023.127507>.
14. Gherdaoui R., Selvaduray S., Fujita Yashima H. Convergence of approximate solutions for the transport-diffusion equation in the half-space with Neumann condition, *Izv. Irkutsk. Gos. Univ. Ser. Mat.* [Bull. Irkutsk State Univ. Ser. Math.], 2024, vol. 48, pp. 64–79 (In Russian). EDN: NPBQLS. DOI: <https://doi.org/10.26516/1997-7670.2024.48.64>.



УДК 539.3

Волновые числа гармонических плоских волн трансляционных и спинорных перемещений в полуизотропной термоупругой среде

Е. В. Мурашкин, Ю. Н. Радаев

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН,
Россия, 119526, Москва, просп. Вернадского, 101, корп. 1.

Аннотация

Рассматриваются вопросы распространения плоских гармонических связанных волн температурного инкремента, трансляционных и спинорных перемещений в полуизотропном термоупругом теле. Получены и проанализированы характеристические уравнения для волновых чисел плоских гармонических связанных термоупругих продольных (бикубическое уравнение) и поперечных волн перемещений (уравнение 8-й степени, естественным образом распадающееся на два алгебраических уравнения 4-й степени). Для продольной волны комплексные амплитуды температурного инкремента, трансляционных и спинорных перемещений оказываются также связанными, в отличие от поперечной волны. С помощью системы символьных вычислений Wolfram Mathematica 13 для волновых чисел поперечных волн получены алгебраические формы, содержащие многозначные комплексные квадратные и кубические радикалы.

Ключевые слова: микрополярная термоупругость, полуизотропное тело, трансляционное перемещение, спинорное перемещение, плоская гармоническая волна, продольная волна, поперечная волна, волновое число, комплексная амплитуда, фазовая плоскость, дисперсионное уравнение.

Получение: 5 марта 2024 г. / Исправление: 15 сентября 2024 г. /
Принятие: 27 сентября 2024 г. / Публикация онлайн: 21 октября 2024 г.

Механика деформируемого твердого тела Научная статья

© Коллектив авторов, 2024

© СамГТУ, 2024 (составление, дизайн, макет)

♾️ © ⓘ Контент публикуется на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

Образец для цитирования

Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Волновые числа гармонических плоских волн трансляционных и спинорных перемещений в полуизотропной термоупругой среде // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2024. Т. 28, № 3. С. 445–461. EDN: TYWWKW. DOI: 10.14498/vsgtu2087.

Сведения об авторах

Евгений Валерьевич Мурашкин ✉️ <https://orcid.org/0000-0002-3267-4742>

кандидат физико-математических наук; старший научный сотрудник; лаб. моделирования в механике деформируемого твердого тела; e-mail: murashkin@ipmnet.ru, evmurashkin@gmail.com

Юрий Николаевич Радаев <https://orcid.org/0000-0002-0866-2151>

доктор физико-математических наук, профессор; ведущий научный сотрудник; лаб. моделирования в механике деформируемого твердого тела; e-mail: radayev@ipmnet.ru, y.radayev@gmail.com

Введение и предварительные сведения. Несмотря на многочисленные публикации по теории микрополярных тел и по проблемам распространения гармонических волн в микрополярных упругих средах [1–9], некоторые проблемы, существенные как для теории, так и для прикладных вопросов, до сих пор остаются неисследованными. К указанным проблемам следует отнести следующие.

1. Алгебраические уравнения (дисперсионные соотношения) для волновых чисел в подавляющем большинстве публикаций находятся исключительно для продольных волн. Так, в монографии [5] отсутствуют дисперсионные соотношения для поперечных волн в гемитропной среде.
2. Не исследованы вопросы ориентации в пространстве (поляризаций) для плоских гармонических волн, что препятствует применению теории микрополярной термоупругости в экспериментах и не позволяет говорить о завершенности рассматриваемых исследований.
3. Не освещается в должной мере вопрос распространения волны сколь угодно сложной формы с точки зрения принципа суперпозиции Фурье [10] и интеграла Фурье.
4. Для гемитропной среды не рассматриваются вопросы существования зеркальных мод [11]. Отметим, что в изотропном случае они не образуются и не наблюдаются.

Модели термомеханики упругих полуизотропных микрополярных сред основываются на энергетических квадратичных формах микрополярных упругих потенциалов [5, 12–26]. Представление упругих потенциалов, описывающих деформирование сплошных микрополярных сред, в общем случае может быть выполнено только при использовании формализма псевдотензорной алгебры [28–30], однако в итоговом варианте их в конце концов удастся привести к абсолютной тензорной форме [27]. Следует отметить три принципиально различных способа построения упругих потенциалов.

- Представление (Е) связано с разложением определяющих тензоров/псевдотензоров на симметричную и антисимметричную части и последующим понижением их ранга. Это представление наиболее подходит для конструирования фигур Ная [31–33], позволяющих быстро выяснить количество определяющих констант, установить наличие/отсутствие связей между ними [34–37] и, в конце концов, выделить наборы независимых [37].
- Представление (Н) — наиболее естественное с точки зрения тензорной алгебры [41] и наиболее полезное с точки зрения построения новых моделей анизотропных тел [41–44]. Представление (Н) позволяет сразу же редуцировать анизотропное тело к полуизотропному, ультрагемитропному, изотропному и ультраизотропному.
- Представление (А) основано на системах неприводимых алгебраических рациональных инвариантов [28, 38].

В настоящей статье в рамках развиваемой авторами модели полуизотропного термоупругого микрополярного тела [18–26] исследуются процессы распространения плоских гармонических связанных волн температурного инкремента, трансляционных и спинорных перемещений в полуизотропном термоупругом теле. Вычисляются волновые числа продольных и поперечных

плоских гармонических волн. С помощью системы символьных вычислений *Wolfram Mathematica 13* для волновых чисел поперечных и продольных волн получены алгебраические формы, содержащие многозначные комплексные квадратные и кубические радикалы.

1. Связанные уравнения динамики и уравнение теплопроводности полуизотропной микрополярной термоупругости. Уравнения динамики микрополярного континуума выводятся из вариационного принципа виртуальных перемещений сразу в общей ковариантной форме [13, 24]:

$$\begin{aligned}\nabla_i t^{ik} &= -\rho(f^k - \partial_{..}^2 u^k), \\ \nabla_i \mu_{..k}^i - 2\tau_k &= -\rho(l_k - \mathfrak{I} \partial_{..}^2 \phi_k).\end{aligned}\tag{1}$$

Здесь и далее используются терминология и обозначения, принятые в [13]. Причем $\partial_{..}^2 = (\partial_{..})^2 = \partial.\partial_{..}$.

Определяющие уравнения полуизотропной микрополярной среды записываются в форме [13, 24]:

$$\begin{aligned}t^{(is)} &= 2G \left(\nu(1 - 2\nu)^{-1} g^{is} g^{lm} + g^{il} g^{sm} \right) \epsilon_{(lm)} + \\ &\quad + GL(c_4 g^{is} g_{lm} \kappa^{(lm)} + c_5 \kappa^{(is)}) - 2G \alpha_* \frac{1 + \nu}{1 - 2\nu} g^{is} \theta, \\ \mu_{(is)} &= 2GL^2(c_3 g_{is} g_{lm} + g_{il} g_{sm}) \kappa^{(lm)} + \\ &\quad + GL(c_4 g_{is} g^{lm} \epsilon_{(lm)} + c_5 \epsilon_{(is)}) - 2GL^2 \beta_* g_{is} \theta, \\ \tau_i &= 2G c_1 g_{is} \varphi^s + \frac{1}{2} GL c_6 \kappa_i, \\ \mu^i &= 2GL^2 c_2 g^{is} \kappa_s + \frac{1}{2} GL c_6 \varphi^i,\end{aligned}$$

Возвращаясь к записи в терминах асимметричных тензоров силовых и моментных напряжений, получим

$$\begin{aligned}t_{is} &= G \left[(1 + c_1) \nabla_i u_s + (1 - c_1) \nabla_s u_i + 2\nu(1 - 2\nu)^{-1} g_{is} \nabla_k u^k - \right. \\ &\quad \left. - 2c_1 \epsilon_{isl} \phi^l + L c_4 g_{is} \nabla_l \phi^l + L c_5 \nabla_{[i} \phi_{s]} - \frac{1}{2} L c_6 \nabla_{[i} \phi_{s]} - 2\alpha_* \frac{1 + \nu}{1 - 2\nu} g_{is} \theta \right], \\ \mu_{is} &= GL^2 \left[(1 + c_2) \nabla_i \phi_s + (1 - c_2) \nabla_s \phi_i + 2c_3 g_{is} \nabla_l \phi^l + \right. \\ &\quad \left. + L \left(c_4 g_{is} \nabla_l u^l + c_5 \nabla_{[i} u_{s]} - \frac{1}{2} c_6 \nabla_{[i} u_{s]} + \frac{1}{2} c_6 \epsilon_{isl} \phi^l \right) - 2\beta_* g_{is} \theta \right].\end{aligned}\tag{2}$$

Подставив определяющие уравнения (2) в уравнения динамики (1), дополнив их уравнением теплопроводности [18, 21–26], для полуизотропного микрополярного тела получим замкнутую систему дифференциальных уравнений

с частными производными:

$$\begin{aligned}
 & G[(1+c_1)\nabla^s\nabla_s u^i + (1-c_1+2\nu(1-2\nu)^{-1})\nabla^i\nabla_k u^k + 2c_1\epsilon^{ikl}\nabla_k\phi_l + \\
 & \quad + Lc'_4\nabla^i\nabla_k\phi^k + Lc'_5\nabla^k\nabla_k\phi^i] - 2G\alpha\frac{1+\nu}{*1-2\nu}\nabla_i\theta = \rho(\partial.)^2u^i, \\
 & GL^2[(1+c_2)\nabla^s\nabla_s\phi_i + (1-c_2+2c_3)\nabla_i\nabla_k\phi^k + \\
 & \quad + L^{-1}c'_4\nabla_i\nabla^k u_k + L^{-1}c'_5\nabla^k\nabla_k u_i + L^{-1}c'_6\epsilon_{isl}\nabla^s\phi^l] - \\
 & \quad - 2Gc_1(2\phi_i - e^2\epsilon_{ikl}g^{ks}\nabla_s u^l) - 2GL^2\beta\nabla_i\theta = \rho\mathfrak{I}(\partial.)^2\phi_i, \\
 & \lambda\nabla_s\nabla^s\theta - C\partial.\theta - 2G\alpha\frac{1+\nu}{*1-2\nu}\theta_0\nabla_s\partial.u^s - 2GL^2\beta\theta_0\nabla_s\partial.\phi^s = 0,
 \end{aligned} \tag{3}$$

где приняты следующие обозначения:

$$c'_4 = c_4 + \frac{1}{2}c_5 + \frac{1}{4}c_6, \quad c'_5 = \frac{1}{2}c_5 - \frac{1}{4}c_6, \quad c'_6 = -c_6.$$

Система дифференциальных уравнений (3) ковариантна и, следовательно, пригодна для любой криволинейной координатной системы в трехмерном пространстве; иногда проще оперировать с векторной формой уравнений:

$$\left\{ \begin{aligned}
 & (1+c_1)\nabla \cdot \nabla \mathbf{u} + (1-c_1+2\nu(1-2\nu)^{-1})\nabla\nabla \cdot \mathbf{u} + 2c_1\nabla \times \phi + \\
 & \quad + Lc'_4\nabla\nabla \cdot \phi + Lc'_5\nabla \cdot \nabla \phi - 2\alpha\frac{1+\nu}{*1-2\nu}\nabla\theta = \rho G^{-1}(\partial.)^2\mathbf{u}, \\
 & (1+c_2)\nabla \cdot \nabla \phi + (1-c_2+2c_3)\nabla\nabla \cdot \phi + L^{-1}c'_4\nabla\nabla \cdot \mathbf{u} + \\
 & \quad + L^{-1}c'_5\nabla \cdot \nabla \mathbf{u} + L^{-1}c'_6\nabla \times \phi - 2L^{-2}c_1(2\phi - \nabla \times \mathbf{u}) - \\
 & \quad - 2\beta\nabla\theta = \rho\mathfrak{I}G^{-1}L^{-2}(\partial.)^2\phi, \\
 & \nabla \cdot \nabla\theta - C\lambda^{-1}\partial.\theta - 2G\lambda^{-1}\alpha\frac{1+\nu}{*1-2\nu}\nabla \cdot \partial.\mathbf{u} - 2G\lambda^{-1}L^2\beta\nabla \cdot \partial.\phi = 0,
 \end{aligned} \right. \tag{4}$$

где выполнена замена $C\theta_0^{-1} \rightarrow C$, $\lambda\theta_0^{-1} \rightarrow \lambda$.

Система дифференциальных уравнений в частных производных (4), записанная в терминах вектора трансляционных перемещений $\mathbf{u}$, вектора спинорных перемещений ϕ и температурного инкремента θ , служит основой для исследования сильных и слабых разрывов в микрополярной гемитропной среде, а также волновых процессов, которые в рассматриваемом случае характеризуются одновременным распространением прямых и зеркальных мод.

2. Распространение плоских связанных гармонических волн в полуизотропном термоупругом микрополярном теле. Рассмотрим задачу о распространении связанной гармонической плоской волны с частотой ω . В этом случае поля температурного инкремента, трансляционных и спинорных перемещений можно представить в форме

$$\mathbf{u} = \mathbf{A}\Phi, \quad \phi = \mathbf{S}\Phi, \quad \theta = B\Phi, \quad \Phi = e^{i\text{Arg}\Phi}, \quad \text{Arg}\Phi = \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t, \tag{5}$$

где $\mathbf{k}$ — волновой вектор; $\mathbf{r}$ — радиус-вектор; ω — циклическая частота гармонической волны; $\mathbf{A}$, $\mathbf{S}$ — векторы комплексных амплитуд трансляционных

и спинорных перемещений соответственно; B — (комплексная) амплитуда температурного инкремента; Φ — фазовый множитель; $\text{Arg } \Phi$ — фаза плоской волны. $\text{Arg } \Phi = \text{const}$ — фазовые плоскости. При этом для существования связанной термоупругой волны необходимо выполнение условия

$$B^2 \neq 0.$$

Производные полей температурного инкремента, трансляционных и спинорных перемещений (5) вычисляются согласно соотношениям

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \nabla \mathbf{u} &= -k^2 \mathbf{A} \Phi, & \nabla \cdot \nabla \phi &= -k^2 \mathbf{S} \Phi, \\ \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} &= -\mathbf{k}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{A}) \Phi, & \nabla \nabla \cdot \phi &= -\mathbf{k}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{S}) \Phi, \\ \nabla \times \mathbf{u} &= i\mathbf{k} \times \mathbf{A} \Phi, & \nabla \times \phi &= i\mathbf{k} \times \mathbf{S} \Phi, \\ (\partial.)^2 \mathbf{u} &= -\omega^2 \mathbf{A} \Phi, & (\partial.)^2 \phi &= -\omega^2 \mathbf{S} \Phi, \\ \nabla \cdot \partial. \mathbf{u} &= \omega \mathbf{k} \cdot \mathbf{A} \Phi, & \nabla \cdot \partial. \phi &= \omega \mathbf{k} \cdot \mathbf{S} \Phi, \\ \nabla \cdot \nabla \theta &= -k^2 B \Phi, & \partial. \theta &= -i\omega B \Phi, \end{aligned} \quad (6)$$

где $k^2 = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k}$. Отметим, что $\mathbf{k} = k\mathbf{s}$, k — комплексное число, $\mathbf{s}$ — вещественный вектор.

Учитывая соотношения (6), после ряда преобразований получим систему уравнений, связывающую волновой вектор $\mathbf{k}$, циклическую частоту ω , векторы поляризации плоской волны $\mathbf{A}$, $\mathbf{S}$ и амплитуду B :

$$\begin{cases} [\rho G^{-1} \omega^2 - (1 + c_1)k^2] \mathbf{A} - (1 - c_1 + 2\nu(1 - 2\nu)^{-1}) \mathbf{k}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{A}) + \\ \quad + 2c_1 i \mathbf{k} \times \mathbf{S} - L c'_4 \mathbf{k}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{S}) - L c'_5 k^2 \mathbf{S} - 2\alpha_* \frac{1 + \nu}{1 - 2\nu} i \mathbf{k} B = \mathbf{0}, \\ [\rho \mathfrak{J} G^{-1} L^{-2} \omega^2 - 4L^{-2} c_1 - (1 + c_2)k^2] \mathbf{S} - (1 - c_2 + 2c_3) \mathbf{k}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{S}) - \\ \quad - L^{-1} c'_4 \mathbf{k}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{A}) - L^{-1} c'_5 k^2 \mathbf{A} + L^{-1} c'_6 i \mathbf{k} \times \mathbf{S} + 2L^{-2} c_1 i \mathbf{k} \times \mathbf{A} - \\ \quad - 2\beta i \mathbf{k} B = \mathbf{0}, \\ (C\lambda^{-1} i\omega - k^2) B - 2G\lambda^{-1} \alpha_* \frac{1 + \nu}{1 - 2\nu} \omega(\mathbf{k} \cdot \mathbf{A}) - 2G\lambda^{-1} L^2 \beta \omega(\mathbf{k} \cdot \mathbf{S}) = 0. \end{cases} \quad (7)$$

Представим векторы комплексных амплитуд трансляционных $\mathbf{A}$ и спинорных $\mathbf{S}$ перемещений в виде суммы

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_\perp + A_\parallel \mathbf{k}, \quad \mathbf{S} = \mathbf{S}_\perp + S_\parallel \mathbf{k}, \quad (8)$$

где векторы $\mathbf{A}_\perp$ и $\mathbf{S}_\perp$ лежат в плоскости, перпендикулярной волновому вектору, т.е. в фазовой плоскости.

Подставив представление (8) в систему (7), получим

$$\left\{ \begin{aligned} & [\rho G^{-1} \omega^2 - (1 + c_1) k^2] (\mathbf{A}_\perp + A_\parallel \mathbf{k}) - (1 - c_1 + 2\nu(1 - 2\nu)^{-1}) A_\parallel k^2 \mathbf{k} + \\ & + 2c_1 i \mathbf{k} \times \mathbf{S}_\perp - L c'_4 S_\parallel k^2 \mathbf{k} - L c'_5 k^2 (\mathbf{S}_\perp + S_\parallel \mathbf{k}) - 2\alpha_* \frac{1 + \nu}{1 - 2\nu} i \mathbf{k} B = \mathbf{0}, \\ & [\rho \mathfrak{J} G^{-1} L^{-2} \omega^2 - 4L^{-2} c_1 - (1 + c_2) k^2] (\mathbf{S}_\perp + S_\parallel \mathbf{k}) - (1 - c_2 + 2c_3) S_\parallel k^2 \mathbf{k} - \\ & - L^{-1} c'_4 A_\parallel k^2 \mathbf{k} - L^{-1} c'_5 k^2 (\mathbf{A}_\perp + A_\parallel \mathbf{k}) + L^{-1} c'_6 i \mathbf{k} \times \mathbf{S}_\perp + \\ & + 2L^{-2} c_1 i \mathbf{k} \times \mathbf{A}_\perp - 2\beta_* i \mathbf{k} B = \mathbf{0}, \\ & (C \lambda^{-1} i \omega - k^2) B - 2G \lambda^{-1} \alpha_* \frac{1 + \nu}{1 - 2\nu} \omega A_\parallel k^2 - 2G \lambda^{-1} L^2 \beta_* \omega S_\parallel k^2 = 0. \end{aligned} \right. \quad (9)$$

Система (9) распадается на две независимые системы уравнений.

3. Волновые числа связанной продольной плоской гармонической волны. Проекция уравнений системы (7) на волновой вектор $\mathbf{k}$ представляют собой замкнутую систему трех линейных однородных уравнений:

$$\left\{ \begin{aligned} & \left(\omega^2 - \frac{G(2 - 2\nu)}{\rho(1 - 2\nu)} k^2 \right) A_\parallel - (c'_4 + c'_5) \rho^{-1} G L k^2 S_\parallel - 2\alpha_* \frac{G(1 + \nu)}{\rho(1 - 2\nu)} i B = 0, \\ & [\omega^2 - 4c_1 (\rho \mathfrak{J})^{-1} G - 2(1 + c_3) (\rho \mathfrak{J})^{-1} G L^2 k^2] S_\parallel - \\ & - (c'_4 + c'_5) (\rho \mathfrak{J})^{-1} G L k^2 A_\parallel - 2\beta_* (\rho \mathfrak{J})^{-1} G L^2 i B = 0, \\ & (C \lambda^{-1} i \omega - k^2) B - 2G \lambda^{-1} \alpha_* \frac{1 + \nu}{1 - 2\nu} \omega A_\parallel k^2 - 2G \lambda^{-1} L^2 \beta_* \omega S_\parallel k^2 = 0. \end{aligned} \right. \quad (10)$$

Для существования нетривиального решения алгебраической системы (10) необходимо и достаточно, чтобы ее определитель был равен нулю:

$$\begin{vmatrix} \omega^2 - V_\parallel^2 k^2 & -a_1 k^2 & -i a_2 \\ -a_1 \mathfrak{J}^{-1} k^2 & \omega^2 - \Omega - (V_\parallel^{\mu\mu})^2 k^2 & -i a_3 \\ -a_4 \omega k^2 & -a_5 \omega k^2 & i a_6 \omega - k^2 \end{vmatrix} = 0, \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned} V_\parallel^2 &= \frac{G(2 - 2\nu)}{\rho(1 - 2\nu)}, & (V_\parallel^{\mu\mu})^2 &= \frac{2G L^2 (1 + c_3)}{\rho \mathfrak{J}}, & a_2 &= 2\alpha_* \frac{G(1 + \nu)}{\rho(1 - 2\nu)}, \\ \rho \mathfrak{J} \Omega &= 4c_1 G, & \rho a_1 &= (c'_4 + c'_5) G L, & \rho \mathfrak{J} a_3 &= 2\beta_* G L^2, \\ \lambda a_4 &= 2G \alpha_* \frac{1 + \nu}{1 - 2\nu}, & \lambda a_5 &= 2G L^2 \beta_*, & \lambda a_6 &= C. \end{aligned}$$

Алгебраическое уравнение (11) представляет собой бикубическое уравнение относительно подлежащего определению волнового числа:

$$Q_6 k^6 + Q_4 k^4 + Q_2 k^2 + Q_0 = 0, \quad (12)$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned} Q_6 &= a_1^2 \mathfrak{I} - (V_{\parallel} V^{\mu\mu})^2, & Q_0 &= ia_6 \omega^3 (\omega^2 - \Omega), \\ Q_4 &= (V_{\parallel}^2 + (V_{\parallel}^{\mu\mu})^2) \omega^2 - V_{\parallel}^2 \Omega + i[a_1(a_3 a_4 + a_2 a_5 \mathfrak{I}) - \\ &\quad - (a_6 Q_6 + a_3 a_5 V_{\parallel}^2 + a_2 a_4 (V_{\parallel}^{\mu\mu})^2)] \omega, \\ Q_2 &= \omega^2 \Omega - \omega^4 + i[a_2 a_4 + a_3 a_5 - a_6 (V_{\parallel}^2 + (V_{\parallel}^{\mu\mu})^2)] \omega^3 + \\ &\quad + i(a_6 V_{\parallel}^2 - a_2 a_4) \omega \Omega. \end{aligned}$$

Воспользовавшись заменой

$$k^2 = Y - \frac{Q_4}{3Q_6},$$

бикубическое уравнение (12) можно свести к неполному кубическому уравнению

$$Y^3 + pY + q = 0, \quad (13)$$

где коэффициенты уравнения суть

$$p = \frac{2Q_6 Q_2 - Q_4^2}{Q_6^2}, \quad q = \frac{2Q_4^3 - 9Q_6 Q_4 Q_2 + 27Q_6^2 Q_0}{27Q_6^3}.$$

Уравнение (13) не имеет вещественных корней, т.е. $\text{Im } k \neq 0$. Иначе продольная волна оказалась бы незатухающей.

Решение неполного кубического уравнения (13) можно найти согласно формулам Кардано [39, 40]. Приведем указанное решение в канонической алгебраической форме

$$Y_1 = a + b, \quad Y_{2,3} = -\frac{1}{2}(a + b) \pm i \frac{\sqrt{3}}{2}(a - b), \quad (14)$$

где

$$\begin{aligned} a &= \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\mathfrak{D}_1}}, \quad b = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\mathfrak{D}_1}}, \quad \mathfrak{D}_1 = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}, \\ \text{Re } \mathfrak{D}_1 &= \frac{1}{4}(\text{Re } q)^2 - \frac{1}{4}(\text{Im } q)^2 + \frac{1}{27}(\text{Re } p)^3 - \frac{1}{9}(\text{Re } p)(\text{Im } p)^2, \\ \text{Im } \mathfrak{D}_1 &= \frac{1}{2}(\text{Re } q)(\text{Im } q) + \frac{1}{9}(\text{Re } p)^2(\text{Im } p) - \frac{1}{27}(\text{Im } p)^3. \end{aligned}$$

Достаточно выбрать одно из значений квадратного корня $\sqrt{\mathfrak{D}_1}$. Воспользуемся далее известной формулой для нахождения квадратного корня из комплекснозначного выражения $p = \text{Re } p + i \text{Im } p$. Положив $\sqrt{p} = z = \text{Re } z + i \text{Im } z$, имеем ровно два значения для $\sqrt{p}$, которые вычисляются согласно формулам

$$\sqrt{2} \text{Re } z = \pm \sqrt{\text{Re } p + \sqrt{(\text{Re } p)^2 + (\text{Im } p)^2}}, \quad \text{Im } z = \frac{\text{Im } p}{2 \text{Re } z}.$$

Находим также

$$\begin{aligned}\sqrt{2}\operatorname{Re}\sqrt{\mathfrak{D}_1} &= \sqrt{\operatorname{Re}\mathfrak{D}_1 + \sqrt{(\operatorname{Re}\mathfrak{D}_1)^2 + (\operatorname{Im}\mathfrak{D}_1)^2}}, \\ \operatorname{Im}\sqrt{\mathfrak{D}_1} &= \frac{\operatorname{Im}\mathfrak{D}_1}{2\operatorname{Re}\sqrt{\mathfrak{D}_1}}.\end{aligned}$$

Применяя формулы (14), для каждого из трех значений величины a необходимо подбирать такое значение b , для которого выполняется условие

$$ab = -p/3.$$

Следуя указанной схеме, получаем все три комплексных корня неполного кубического уравнения (13).

Остается разрешить использованную выше подстановку относительно волнового числа и получить окончательные формулы:

$$\begin{aligned}k_{1,2,3} &= \sqrt{Y_{1,2,3} - \frac{Q_4}{3Q_6}}, \\ k_4 &= -k_1, \quad k_5 = -k_2, \quad k_6 = -k_3.\end{aligned}\tag{15}$$

Значения волновых чисел (15), полученные при исследовании бикубического (12) уравнения, можно впоследствии использовать при отделении однозначных ветвей многозначных квадратных и кубических радикалов на комплексной плоскости $k = \operatorname{Re}k + i\operatorname{Im}k$ ($\operatorname{Re}k > 0$).

4. Волновые числа поперечной плоской атермической волны. Рассмотрим проекции системы линейных уравнений (9) в фазовой плоскости. Введем в рассмотрение два единичных взаимно ортогональных вектора $\mathfrak{i}$ и $\mathfrak{j}$, лежащих в фазовой плоскости. Тогда векторы $\mathbf{A}_\perp$ и $\mathbf{S}_\perp$ можно представить в форме

$$\mathbf{A}_\perp = A_{1\perp}\mathfrak{i} + A_{2\perp}\mathfrak{j}, \quad \mathbf{S}_\perp = S_{1\perp}\mathfrak{i} + S_{2\perp}\mathfrak{j}.$$

Проекция системы линейных уравнений (9) на орты $\mathbf{1}$ и $\mathbf{2}$ примут вид

$$\begin{aligned}[\omega^2 - (1 + c_1)G\rho^{-1}k^2]A_{1\perp} - Lc'_5G\rho^{-1}k^2S_{1\perp} - 2ic_1G\rho^{-1}kS_{2\perp} &= 0, \\ [\omega^2 - (1 + c_1)\rho G^{-1}k^2]A_{2\perp} + 2ic_1\rho G^{-1}kS_{1\perp} - Lc'_5\rho G^{-1}k^2S_{2\perp} &= 0, \\ [\omega^2 - 4c_1(\rho\mathfrak{J})^{-1}G - (1 + c_2)L^2(\rho\mathfrak{J})^{-1}Gk^2]S_{1\perp} - \\ - Lc'_5(\rho\mathfrak{J})^{-1}Gk^2A_{1\perp} - iLc'_6(\rho\mathfrak{J})^{-1}GkS_{2\perp} - 2ic_1(\rho\mathfrak{J})^{-1}GkA_{2\perp} &= 0, \\ [\omega^2 - 4c_1(\rho\mathfrak{J})^{-1}G - (1 + c_2)L^2(\rho\mathfrak{J})^{-1}Gk^2]S_{2\perp} - \\ - Lc'_5(\rho\mathfrak{J})^{-1}Gk^2A_{2\perp} + iLc'_6(\rho\mathfrak{J})^{-1}GkS_{1\perp} + 2ic_1(\rho\mathfrak{J})^{-1}GkA_{1\perp} &= 0.\end{aligned}\tag{16}$$

Для существования нетривиального решения системы линейных однородных уравнений (16) необходимо и достаточно, чтобы нижеследующий опре-

делитель был равен нулю:

$$\begin{vmatrix} \omega^2 - (V_\perp^\mu)^2 k^2 & 0 & -a_7 k^2 & -ia_8 k \\ 0 & \omega^2 - (V_\perp^\mu)^2 k^2 & ia_8 k & -a_7 k^2 \\ -a_7 k^2 & -ia_8 k & \omega^2 \mathfrak{I} - 4\Omega_\perp - (V_\perp^{\mu\mu})^2 \mathfrak{I} k^2 & -ia_9 k \\ ia_8 k & -a_7 k^2 & ia_9 k & \omega^2 \mathfrak{I} - 4\Omega - (V_\perp^{\mu\mu})^2 \mathfrak{I} k^2 \end{vmatrix} = 0, \quad (17)$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned} (V_\perp^\mu)^2 &= \frac{G(1+c_1)}{\rho}, & (V_\perp^{\mu\mu})^2 &= \frac{G(1+c_2)}{\rho \mathfrak{I}}, & 4\Omega_\perp &= \mathfrak{I}\Omega, \\ a_7 \rho &= Lc_5' G, & a_8 \rho \mathfrak{I} &= 2c_1 G, & a_9 \rho \mathfrak{I} &= Lc_6' G. \end{aligned}$$

Волновые числа поперечных волн вещественны, что следует из физики плоских поперечных волн. Указанное обстоятельство связано с атермичностью поперечной волны, т.е. с отсутствием потери энергии. В этом случае матрица (17) симметрична комплексно-сопряженной относительно главной диагонали.

Алгебраическое уравнение (17) представляет собой уравнение относительно квадрата волнового числа:

$$\begin{aligned} P_4^2 k^8 + (2P_2 P_4 - P_3^2) k^6 + (P_2^2 - 2P_1 P_3 + 2P_0 P_4) k^4 + \\ + (2P_0 P_2 - P_1^2) k^2 + P_0^2 = 0, \end{aligned} \quad (18)$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned} P_0 &= \omega^2 (\mathfrak{I}\omega^2 - 4\Omega_\perp), & P_1 &= a_9 \Omega_\perp^2, \\ P_4 &= a_7^2 - \mathfrak{I}(V_\perp^\mu)^2 (V_\perp^{\mu\mu})^2, & P_3 &= 2a_7 a_8 - a_9 (V_\perp^\mu)^2, \\ P_2 &= a_8^2 + \mathfrak{I}(V_\perp^\mu)^2 \Omega_\perp^2 + \mathfrak{I}(V_\perp^{\mu\mu})^2 \Omega_\perp^2 - 4(V_\perp^\mu)^2 \Omega_\perp. \end{aligned}$$

Заметим, что уравнение (18) можно представить в виде произведения следующих двух уравнений:

$$(P_4 k^4 + P_3 k^3 + P_2 k^2 + P_1 k + P_0)(P_4 k^4 - P_3 k^3 + P_2 k^2 - P_1 k + P_0) = 0.$$

Корни уравнения (18) вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} k_s &= \pm \frac{P_3}{4P_4} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\mathfrak{P}_5 + \mathfrak{P}_4} \pm \frac{1}{2} \sqrt{2\mathfrak{P}_5 - \mathfrak{P}_4 - \mathfrak{P}_6 (\mathfrak{P}_5 + \mathfrak{P}_4)^{-1/2}}, \\ s &= 1, \dots, 8. \end{aligned} \quad (19)$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned} \mathfrak{P}_1 &= P_2^2 - 3P_1 P_3 + 12P_0 P_4, \\ \mathfrak{P}_2 &= 2P_2^3 - 9P_1 P_2 P_3 + 27P_0 P_3^2 + 27P_1^2 P_4 - 72P_0 P_2 P_4, \\ \mathfrak{P}_3 &= \sqrt[3]{\mathfrak{P}_2 + \sqrt{\mathfrak{P}_2^2 - 4\mathfrak{P}_1^3}}, & \mathfrak{P}_4 &= \frac{\sqrt[3]{2}\mathfrak{P}_1}{3P_4 \mathfrak{P}_3} + \frac{\mathfrak{P}_3}{3\sqrt[3]{2}P_4}, \\ \mathfrak{P}_5 &= \frac{P_3^2}{4P_4^2} - \frac{2P_2}{3P_4}, & \mathfrak{P}_6 &= \frac{4P_2 P_3}{P_4^2} - \frac{P_3^3}{4P_4^3} - \frac{8P_1}{4P_4}. \end{aligned}$$

В формулах (19) знаки “ $\pm$ ” выбираются независимо друг от друга. Формулы (19) позволяют определить вещественные волновые числа поперечной гармонической волны трансляционных и спинорных перемещений.

Заключение. В настоящей работе рассматриваются вопросы распространения плоских гармонических связанных волн температурного инкремента, трансляционных и спинорных перемещений в полуизотропном термоупругом теле.

1. Исследована связанная система дифференциальных уравнений с частными производными, записанная в терминах вектора трансляционных перемещений, вектора спинорных перемещений и температурного инкремента для микрополярного полуизотропного тела.
2. Получены алгебраические уравнения для волновых чисел продольных (бикубическое уравнение) и поперечных связанных волн (уравнение восьмой степени, распадающееся на два уравнения четвертой степени).
3. Волновые числа продольных гармонических волн оказываются комплексными, что соответствует связанности комплексных амплитуд температурного инкремента, трансляционных и спинорных перемещений.
4. Волновые числа поперечных гармонических волн вещественны, что обусловлено атермичностью поперечной волны.
5. Остаются неисследованными вопросы пространственной поляризации гармонических волн. В отличие от изотропного случая векторы поляризации не ортогональны между собой.

Конкурирующие интересы. У нас нет конфликта интересов в отношении авторства и публикации этой статьи.

Авторский вклад и ответственность. Все авторы принимали участие в разработке концепции статьи и в написании рукописи. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

Финансирование. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23–21–00262, <https://rscf.ru/project/23-21-00262/>.

Библиографический список

1. Smith A. C. Elastic wave propagation in noncentrosymmetric, isotropic media: dispersion and field equations // *Int. J. Eng. Sci.*, 1967. vol. 5, no. 10. pp. 741–746. DOI: [https://doi.org/10.1016/0020-7225\(67\)90019-5](https://doi.org/10.1016/0020-7225(67)90019-5).
2. Willson A. J. The micropolar elastic vibrations of a circular cylinder // *Int. J. Eng. Sci.*, 1972. vol. 10, no. 1. pp. 17–22. DOI: [https://doi.org/10.1016/0020-7225\(72\)90071-7](https://doi.org/10.1016/0020-7225(72)90071-7).
3. Achenbach J. D. *Wave Propagation in Elastic Solids*/ North-Holland Series in Applied Mathematics and Mechanics. vol. 16. Amsterdam: North-Holland Publ., 1973. xiv+425 pp.
4. Maugin G. A. Acceleration waves in simple and linear viscoelastic micropolar materials // *Int. J. Eng. Sci.*, 1974. vol. 12, no. 2. pp. 143–157. DOI: [https://doi.org/10.1016/0020-7225\(74\)90013-5](https://doi.org/10.1016/0020-7225(74)90013-5).
5. Nowacki W. *Theory of Asymmetric Elasticity*. Oxford: Pergamon Press, 1986. viii+383 pp.
6. Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. О сильных и слабых разрывах связанного термомеханического поля в термоупругих микрополярных континуумах второго типа // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2014. № 4. С. 85–97. EDN: TTM1UL. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1331>.
7. Ковалев В. А., Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Математическая теория связанных плоских гармонических термоупругих волн в микрополярных континуумах пер-

- вого типа // *Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер.: Математика. Механика. Информатика*, 2014. Т. 14, № 1. С. 77–87. EDN: SCSSSZ. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2014-14-1-77-87>.
8. Kovalev V. A., Murashkin E. V., Radayev Yu. N. On weak discontinuities and jump equations on wave surfaces in micropolar thermoelastic continua // *Izv. Saratov Univ. Math. Mech. Inform.*, 2015. vol. 15, no. 1. pp. 79–89. EDN: TMMCMH. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2015-15-1-79-89>.
 9. Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Термические и атермические плоские гармонические волны в ацентрическом изотропном теле // *Вестн. ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Сер. Механика предельного состояния*, 2023. № 2. С. 99–107. EDN: JKFXAY. DOI: <https://doi.org/10.37972/chgpu.2023.56.2.010>.
 10. Положий Г. Н. *Уравнения математической физики*. Москва: Высш. шк., 1964. 560 с.
 11. Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Прямые, инверсные и зеркальные волновые моды связанных волн перемещений и микровращений в гемитропных микрополярных средах // *Вестн. ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Сер. Механика предельного состояния*, 2021. № 2. С. 115–127. EDN: MGCJDN. DOI: <https://doi.org/10.37972/chgpu.2021.48.2.014>.
 12. Neuber H. On the general solution of linear-elastic problems in isotropic and anisotropic Cosserat continua / *Applied Mechanics*; eds. H. Görtler. Berlin, Heidelberg: Springer, 1966. pp. 153–158. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-662-29364-5_16.
 13. Радаев Ю. Н. Правило множителей в ковариантных формулировках микрополярных теорий механики континуума // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2018. Т. 22, № 3. С. 504–517. EDN: YOYJQD. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1635>.
 14. Радаев Ю. Н., Мурашкин Е. В. Псевдотензорная формулировка механики гемитропных микрополярных сред // *Проблемы прочности и пластичности*, 2020. Т. 82, № 4. С. 399–412. EDN: TODIFV. DOI: <https://doi.org/10.32326/1814-9146-2020-82-4-399-412>.
 15. Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Приведение естественных форм гемитропных энергетических потенциалов к конвенциональным // *Вестн. ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Сер. Механика предельного состояния*, 2022. № 4. С. 108–115. EDN: DTZTJY. DOI: <https://doi.org/10.37972/chgpu.2022.54.4.009>.
 16. Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. О двух основных естественных формах потенциала асимметричных тензоров силовых и моментных напряжений в механике гемитропных тел // *Вестн. ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Сер. Механика предельного состояния*, 2022. № 3. С. 86–100. EDN: YOEHQV. DOI: <https://doi.org/10.37972/chgpu.2022.53.3.010>.
 17. Мурашкин Е. В. О связи микрополярных определяющих параметров термодинамических потенциалов состояния // *Вестн. ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Сер. Механика предельного состояния*, 2022. № 1. С. 110–121. EDN: JXXIAX. DOI: <https://doi.org/10.37972/chgpu.2023.55.1.012>.
 18. Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Теплопроводность микрополярных тел, чувствительных к зеркальным отражениям пространства // *Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки*, 2023. Т. 165, № 4. С. 389–403. EDN: HTQAHJ. DOI: <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2023.4.389-403>.
 19. Murashkin E. V., Radayev Y. N. A negative weight pseudotensor formulation of coupled hemitropic thermoelasticity // *Lobachevskii J. Math.*, 2023. vol. 44, no. 6. pp. 2440–2449. EDN: PINYDI. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1995080223060392>.
 20. Murashkin E. V., Radayev Yu. N. Theory of Poisson's ratio for a thermoelastic micropolar acentric isotropic solid // *Lobachevskii J. Math.*, 2024. vol. 45, no. 5. pp. 2378–2390. EDN: ASGCQB. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1995080224602480>.
 21. Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Связанная термоупругость гемитропных сред. Псевдотензорная формулировка // *Изв. РАН. МТТ*, 2023. № 3. С. 163–176. EDN: JMQVBJ. DOI: <https://doi.org/10.31857/S0572329922600876>.
 22. Murashkin E. V., Radayev Y. N. Heat transfer in anisotropic micropolar solids // *Mech. Solids*, 2023. vol. 58, no. 9. pp. 3111–3119. EDN: WBUGBA. DOI: <https://doi.org/10.3103/S0025654423700255>.

23. Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. К поливариантности основных уравнений связанной термоупругости микрополярного тела // *Вестн. ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Сер. Механика предельного состояния*, 2023. №3. С. 112–128. EDN: RQUKBG. DOI: <https://doi.org/10.37972/chgpu.2023.57.3.010>.
24. Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Мультивесовая термомеханика гемитропных микрополярных тел // *Вестн. ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Сер. Механика предельного состояния*, 2023. №4. С. 86–120. EDN: RQUKBG. DOI: <https://doi.org/10.37972/chgpu.2023.58.4.010>.
25. Murashkin E. V., Radayev Y. N. On algebraic triple weights formulation of micropolar thermoelasticity // *Mech. Solids*, 2024. vol. 59, no. 1. pp. 555–580. EDN: GBHEKM. DOI: <https://doi.org/10.1134/s0025654424700274>.
26. Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Термомеханические состояния гиротропных микрополярных тел // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2023. Т. 27, №4. С. 659–678. EDN: CRRHLO. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu2062>.
27. Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Алгебраический алгоритм систематического приведения одноточечных псевдотензоров к абсолютным тензорам // *Вестн. ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Сер. Механика предельного состояния*, 2022. №1. С. 17–27. EDN: ZJWFGT. DOI: <https://doi.org/10.37972/chgpu.2022.51.1.002>.
28. Gurevich G. B. *Foundations of the Theory of Algebraic Invariants*. Groningen, The Netherlands: P. Noordhoff, 1964. viii+429 pp.
29. Schouten J. A. *Tensor Analysis for Physicist*. Oxford: Clarendon Press, 1951. 434 pp.
30. Synge J. L., Schild A. *Tensor Calculus*. New York: Dover Publ., 1978. xi+324 pp.
31. Nye J. F. *Physical Properties of Crystals. Their Representation by Tensors and Matrices*. Oxford: Clarendon Press, 1957. xv+322 pp.
32. Wooster W. A. *Experimental Crystal Physics*. Oxford: Clarendon Press, 1957. viii+115 pp.
33. Voigt W. *Lehrbuch der Kristallphysik (mit Ausschluß der Kristalloptik)*. Leipzig: B.G. Teubner, 1928. xxvi+978 pp. (In German)
34. Murashkin E. V., Radaev Y. N. Two-dimensional Nye figures for some micropolar elastic solids // *Mech. Solids*, 2023. vol. 58, no. 6. pp. 2254–2268. EDN: AIPHVE. DOI: <https://doi.org/10.3103/s0025654423700243>.
35. Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Двумерные фигуры Ная для гемитропных микрополярных упругих тел // *Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер.: Математика. Механика. Информатика*, 2024. Т. 24, №1. С. 109–122. EDN: FKFRHA. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-1-109-122>.
36. Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Об одном способе построения фигур Ная в асимметричных теориях демитропной микрополярной упругости // *Вестн. ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Сер. Механика предельного состояния*, 2023. №3. С. 100–111. EDN: KSSOKR. DOI: <https://doi.org/10.37972/chgpu.2023.57.3.009>.
37. Krylova E. Yu., Murashkin E. V., Radayev Y. N. The Nye cells and figures for athermic hemitropic, isotropic and ultrasotropic micropolar elastic solids // *Mech. Solids*, 2024. vol. 59, no. 3. pp. 1311–1320. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0025654424603719>.
38. Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Об одном обобщении алгебраической теории Гамильтона–Кэли // *Изв. РАН. МТТ*, 2021. №6. С. 130–138. EDN: VGJNSG. DOI: <https://doi.org/10.31857/S0572329921060106>.
39. Сушкевич А. К. *Основы высшей алгебры*. М.: ОНТИ, 1937. 476 с.
40. Ковалев В. А., Радаев Ю. Н. *Волновые задачи теории поля и термомеханика*. Саратов: Саратов. ун-т, 2010. 328 с.
41. Jeffreys H. *Cartesian Tensors*. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1931. vii+93 pp.
42. Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Ковариантно постоянные тензоры в пространствах Евклида. Элементы теории // *Вестн. ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Сер. Механика предельного состояния*, 2022. №2. С. 106–115. EDN: FQVGRK. DOI: <https://doi.org/10.37972/chgpu.2022.52.2.012>.

43. Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Ковариантно постоянные тензоры в пространствах Евклида. Приложения к механике континуума // *Вестн. ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Сер. Механика предельного состояния*, 2022. № 2. С. 118–127. EDN: ESTJSA. DOI: <https://doi.org/10.37972/chgpu.2022.52.2.013>.
44. Радаев Ю. Н. Тензоры с постоянными компонентами в определяющих уравнениях гемитропного микрополярного тела // *Изв. РАН. МТТ*, 2023. № 5. С. 98–110. EDN: PHNOCG. DOI: <https://doi.org/10.31857/S057232992370006X>.
45. Murashkin E. V., Radayev Yu. N. On a micropolar theory of growing solids // *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2020. vol. 24, no. 3. pp. 424–444. EDN: TYGBER. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1792>.
46. Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. К теории линейных гемитропных микрополярных сред // *Вестн. ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Сер. Механика предельного состояния*, 2020. № 4. С. 16–24. EDN: IZKTBQ. DOI: <https://doi.org/10.37972/chgpu.2020.89.81.031>.

MSC: 15A72, 53A45, 74D05

Wave numbers of harmonic plane waves of translational and spinor displacements in a semiisotropic thermoelastic solid

E. V. Murashkin, Yu. N. Radayev

Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, Russian Academy of Sciences,
101–1, pr. Vernadskogo, Moscow, 119526, Russian Federation.

Abstract

In present paper the propagation of plane harmonic coupled waves of temperature increment, translational and spinor displacements in a semiisotropic thermoelastic solid is discussed. Characteristic equations for the wave numbers of plane harmonic coupled thermoelastic longitudinal (bicubic equation) and transverse waves (biquartic equation that naturally splits into two quartic algebraic equations) are obtained and analyzed. For a longitudinal wave, the complex amplitudes of the temperature increment, translational and spinor displacements are also coupled, contrary to a transverse wave. Algebraic forms containing multivalued complex square and cubic radicals for the wave numbers of transverse waves are derived by using the **Wolfram Mathematica 13** symbolic computing system.

Keywords: micropolar thermoelasticity, semiisotropic solid, translational displacement, spinor displacement, plane harmonic wave, longitudinal wave, transverse wave, wave number, complex amplitude, phase plane, dispersion equation.

Received: 5th March, 2024 / Revised: 15th September, 2024 /

Accepted: 27th September, 2024 / First online: 21st October, 2024

Competing interests. We have no conflict of interest regarding the authorship and publication of this article.

Authors' contributions and responsibilities. All authors participated in the development of the article's concept and in writing the manuscript. The authors bear full

Mechanics of Solids

Research Article

© The Author(s), 2024

© Samara State Technical University, 2024 (Compilation, Design, and Layout)

© The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Please cite this article in press as:

Murashkin E. V., Radayev Yu. N. Wave numbers of harmonic plane waves of translational and spinor displacements in a semiisotropic thermoelastic solid, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2024, vol. 28, no. 3, pp. 445–461. EDN: TYWWKW. DOI: 10.14498/vsgtu2087 (In Russian).

Authors' Details:

Evgenii V. Murashkin  <https://orcid.org/0000-0002-3267-4742>

Cand. Phys. & Math. Sci., PhD, MD; Senior Researcher; Lab. of Modeling in Solid Mechanics; e-mail: murashkin@ipmnet.ru, evmurashkin@gmail.com

Yuri N. Radayev  <https://orcid.org/0000-0002-0866-2151>

D.Sc. (Phys. & Math. Sci.), Ph.D., M.Sc., Professor; Leading Researcher; Lab. of Modeling in Solid Mechanics; e-mail: radayev@ipmnet.ru, y.radayev@gmail.com

responsibility for submitting the final manuscript for publication. The final version of the manuscript was approved by all authors.

Funding. The research was funded by the Russian Science Foundation (project no. 23-21-00262), <https://rscf.ru/en/project/23-21-00262/>.

References

1. Smith A. C. Elastic wave propagation in noncentrosymmetric, isotropic media: dispersion and field equations, *Int. J. Eng. Sci.*, 1967, vol. 5, no. 10, pp. 741–746. DOI: [https://doi.org/10.1016/0020-7225\(67\)90019-5](https://doi.org/10.1016/0020-7225(67)90019-5).
2. Willson A. J. The micropolar elastic vibrations of a circular cylinder, *Int. J. Eng. Sci.*, 1972, vol. 10, no. 1, pp. 17–22. DOI: [https://doi.org/10.1016/0020-7225\(72\)90071-7](https://doi.org/10.1016/0020-7225(72)90071-7).
3. Achenbach J. D. *Wave Propagation in Elastic Solids*, North-Holland Series in Applied Mathematics and Mechanics, vol. 16. Amsterdam, North-Holland Publ., 1973, xiv+425 pp.
4. Maugin G. A. Acceleration waves in simple and linear viscoelastic micropolar materials, *Int. J. Eng. Sci.*, 1974, vol. 12, no. 2, pp. 143–157. DOI: [https://doi.org/10.1016/0020-7225\(74\)90013-5](https://doi.org/10.1016/0020-7225(74)90013-5).
5. Nowacki W. *Theory of Asymmetric Elasticity*. Oxford, Pergamon Press, 1986, viii+383 pp.
6. Murashkin E. V., Radayev Yu. N. On strong and weak discontinuities of the coupled thermo-mechanical field in micropolar thermoelastic type-II continua, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2014, no. 4, pp. 85–97 (In Russian). EDN: TTMIUL. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1331>.
7. Kovalev V. A., Murashkin E. V., Radayev Yu. N. A mathematical theory of plane harmonic coupled thermoelastic waves in type-I micropolar continua, *Izv. Saratov Univ. Math. Mech. Inform.*, 2014, vol. 14, no. 1, pp. 77–87 (In Russian). EDN: SCSSSZ. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2014-14-1-77-87>.
8. Kovalev V. A., Murashkin E. V., Radayev Yu. N. On weak discontinuities and jump equations on wave surfaces in micropolar thermoelastic continua, *Izv. Saratov Univ. Math. Mech. Inform.*, 2015, vol. 15, no. 1, pp. 79–89. EDN: TMMCMH. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2015-15-1-79-89>.
9. Murashkin E. V., Radayev Yu. N. Thermic and athermic plane harmonic waves in acentric isotropic solid, *Vestn. I. Yakovlev Chuvach State Pedagogical Univ. Ser. Mechanics of a Limit State*, 2023, no. 2, pp. 99–107 (In Russian). EDN: JKFXAY. DOI: <https://doi.org/10.37972/chgpu.2023.56.2.010>.
10. Polozhy G. N. *Urvneniia matematicheskoi fiziki* [Equations of Mathematical Physics]. Moscow, Vyssh. Shk., 1964, 560 pp. (In Russian)
11. Murashkin E. V., Radayev Yu. N. Direct, inverse and mirror wave modes of coupled displacements and microrotations monochromatic plane waves in hemitropic micropolar media, *Vestn. I. Yakovlev Chuvach State Pedagogical Univ. Ser. Mechanics of a Limit State*, 2021, no. 2, pp. 115–127 (In Russian). EDN: MGCJDN. DOI: <https://doi.org/10.37972/chgpu.2021.48.2.014>.
12. Neuber H. On the general solution of linear-elastic problems in isotropic and anisotropic Cosserat continua, In: *Applied Mechanics*; eds. H. Görtler. Berlin, Heidelberg, Springer, 1966, pp. 153–158. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-662-29364-5_16.
13. Radayev Yu. N. The Lagrange multipliers method in covariant formulations of micropolar continuum mechanics theories, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2018, vol. 22, no. 3, pp. 504–517 (In Russian). EDN: YOYJQD. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1635>.
14. Radayev Yu. N., Murashkin E. V. Pseudotensor formulation of the mechanics of hemitropic micropolar media, *Problems of Strength and Plasticity*, 2020, vol. 82, no. 4, pp. 399–412 (In Russian). EDN: TODIFV. DOI: <https://doi.org/10.32326/1814-9146-2020-82-4-399-412>.
15. Murashkin E. V., Radayev Yu. N. Reducing natural forms of hemitropic energy potentials to conventional ones, *Vestn. I. Yakovlev Chuvach State Pedagogical Univ. Ser. Mechanics of*

- a *Limit State*, 2022, no. 4, pp. 108–115 (In Russian). EDN: DTZTJY. DOI: <https://doi.org/10.37972/chgpu.2022.54.4.009>.
16. Murashkin E. V., Radayev Yu. N. On two base natural forms of asymmetric force and couple stress tensors of potential in mechanics of hemitropic solids, *Vestn. I. Yakovlev Chuvach State Pedagogical Univ. Ser. Mechanics of a Limit State*, 2022, no. 3, pp. 86–100 (In Russian). EDN: YOEHQV. DOI: <https://doi.org/10.37972/chgpu.2022.53.3.010>.
 17. Murashkin E. V. On the relationship of micropolar constitutive parameters of thermodynamic state potentials, *Vestn. I. Yakovlev Chuvach State Pedagogical Univ. Ser. Mechanics of a Limit State*, 2022, no. 1, pp. 110–121 (In Russian). EDN: JXXIAX. DOI: <https://doi.org/10.37972/chgpu.2023.55.1.012>.
 18. Murashkin E. V., Radayev Y. N. Heat conduction of micropolar solids sensitive to mirror reflections of three-dimensional space, *Uchen. Zap. Kazan. Univ. Ser. Fiz.-Matem. Nauki*, 2023, vol. 165, no. 4, pp. 389–403 (In Russian). EDN: HTQAHJ. DOI: <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2023.4.389-403>.
 19. Murashkin E. V., Radayev Y. N. A negative weight pseudotensor formulation of coupled hemitropic thermoelasticity, *Lobachevskii J. Math.*, 2023, vol. 44, no. 6, pp. 2440–2449. EDN: PINYDI. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1995080223060392>.
 20. Murashkin E. V., Radayev Yu. N. Theory of Poisson's ratio for a thermoelastic micropolar acentric isotropic solid, *Lobachevskii J. Math.*, 2024, vol. 45, no. 5, pp. 2378–2390. EDN: ASGCQB. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1995080224602480>.
 21. Murashkin E. V., Radayev Yu. N. Coupled thermoelasticity of hemitropic media. Pseudotensor formulation, *Mech. Solids*, 2023, vol. 58, no. 3, pp. 802–813. EDN: CISJLW. DOI: <https://doi.org/10.3103/s0025654423700127>.
 22. Murashkin E. V., Radayev Y. N. Heat transfer in anisotropic micropolar solids, *Mech. Solids*, 2023, vol. 58, no. 9, pp. 3111–3119. EDN: WBUGBA. DOI: <https://doi.org/10.3103/S0025654423700255>.
 23. Murashkin E. V., Radayev Yu. N. On the polyvariance of the base equations of coupled micropolar thermoelasticity, *Vestn. I. Yakovlev Chuvach State Pedagogical Univ. Ser. Mechanics of a Limit State*, 2023, no. 3, pp. 112–128 (In Russian). EDN: RQUKBG. DOI: <https://doi.org/10.37972/chgpu.2023.57.3.010>.
 24. Murashkin E. V., Radayev Yu. N. On the polyvariance of the base equations of coupled micropolar thermoelasticity, *Vestn. I. Yakovlev Chuvach State Pedagogical Univ. Ser. Mechanics of a Limit State*, 2023, no. 4, pp. 86–120 (In Russian). EDN: RQUKBG. DOI: <https://doi.org/10.37972/chgpu.2023.58.4.010>.
 25. Murashkin E. V., Radayev Y. N. On algebraic triple weights formulation of micropolar thermoelasticity, *Mech. Solids*, 2024, vol. 59, no. 1, pp. 555–580. EDN: GBHEKM. DOI: <https://doi.org/10.1134/s0025654424700274>.
 26. Murashkin E. V., Radayev Y. N. Thermomechanical states of gyrotropic micropolar solids, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2023, vol. 27, no. 4, pp. 659–678 (In Russian). EDN: CRRHLO. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu2062>.
 27. Murashkin E. V., Radayev Yu. N. Algebraic algorithm for the systematic reduction of one-point pseudotensors to absolute tensors, *Vestn. I. Yakovlev Chuvach State Pedagogical Univ. Ser. Mechanics of a Limit State*, 2022, № 1, C. 17–27 (In Russian). EDN: ZJWFGT. DOI: <https://doi.org/10.37972/chgpu.2022.51.1.002>.
 28. Gurevich G. B. *Foundations of the Theory of Algebraic Invariants*. Groningen, The Netherlands, P. Noordhoff, 1964, viii+429 pp.
 29. Schouten J. A. *Tensor Analysis for Physicist*. Oxford, Clarendon Press, 1951, 434 pp.
 30. Synge J. L., Schild A. *Tensor Calculus*. New York, Dover Publ., 1978, xi+324 pp.
 31. Nye J. F. *Physical Properties of Crystals. Their Representation by Tensors and Matrices*. Oxford, Clarendon Press, 1957, xv+322 pp.
 32. Wooster W. A. *Experimental Crystal Physics*. Oxford, Clarendon Press, 1957, viii+115 pp.

33. Voigt W. *Lehrbuch der Kristallphysik (mit Ausschluß der Kristalloptik)*. Leipzig, B.G. Teubner, 1928, xxvi+978 pp. (In German)
34. Murashkin E. V., Radaev Y. N. Two-dimensional Nye figures for some micropolar elastic solids, *Mech. Solids*, 2023, vol. 58, no. 6, pp. 2254–2268. EDN: AIPHVE. DOI: <https://doi.org/10.3103/s0025654423700243>.
35. Murashkin E. V., Radaev Yu. N. Two-dimensional Nye figures for hemitropic micropolar elastic solids, *Izv. Saratov Univ. Math. Mech. Inform.*, 2024, vol. 24, no. 1, pp. 109–122 (In Russian). EDN: FKFRHA. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-1-109-122>.
36. Murashkin E. V., Radaev Yu. N. On a method of constructing Nye figures for asymmetric theories of micropolar elasticity, *Vestn. I. Yakovlev Chuvach State Pedagogical Univ. Ser. Mechanics of a Limit State*, 2023, no. 3, pp. 100–111 (In Russian). EDN: KSSOKR. DOI: <https://doi.org/10.37972/chgpu.2023.57.3.009>.
37. Krylova E. Yu., Murashkin E. V., Radaev Y. N. The Nye cells and figures for athermic hemitropic, isotropic and ultraisotropic micropolar elastic solids, *Mech. Solids*, 2024, vol. 59, no. 3, pp. 1311–1320. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0025654424603719>.
38. Murashkin E. V., Radaev Yu. N. Generalization of the algebraic Hamilton–Cayley theory, *Mech. Solids*, 2021, vol. 56, no. 6, pp. 996–1003. EDN: KNBMUV. DOI: <https://doi.org/10.3103/S0025654421060145>.
39. Sushkevich A. K. *Osnovy vysshei algebrы* [Fundamentals of Higher Algebra]. Moscow, ONTI, 1937, 476 pp. (In Russian)
40. Kovalev V. A., Radaev Y. N. *Volnovye zadachi teorii polia i termomekhanika* [Wave Problems of Field Theory and Thermomechanics]. Saratov, Saratov Univ., 2010, 328 pp. (In Russian)
41. Jeffreys H. *Cartesian Tensors*. Cambridge, Cambridge Univ. Press, 1931, vii+93 pp.
42. Murashkin E. V., Radaev Yu. N. Covariantly constant tensors in Euclidean spaces. Elements of the theory, *Vestn. I. Yakovlev Chuvach State Pedagogical Univ. Ser. Mechanics of a Limit State*, 2022, no. 2, pp. 106–115 (In Russian). EDN: FQVGRK. DOI: <https://doi.org/10.37972/chgpu.2022.52.2.012>.
43. Murashkin E. V., Radaev Yu. N. Covariantly constant tensors in Euclidean spaces. Applications to continuum mechanics, *Vestn. I. Yakovlev Chuvach State Pedagogical Univ. Ser. Mechanics of a Limit State*, 2022, no. 2, pp. 118–127 (In Russian). EDN: ESTJSA. DOI: <https://doi.org/10.37972/chgpu.2022.52.2.013>.
44. Radaev Yu. N. Tensors with constant components in the constitutive equations of hemitropic micropolar solids, *Mech. Solids*, 2023, vol. 58, no. 5, pp. 1517–1527. EDN: SQQPGJ. DOI: <https://doi.org/10.3103/S0025654423700206>.
45. Murashkin E. V., Radaev Yu. N. On a micropolar theory of growing solids, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2020, vol. 24, no. 3, pp. 424–444. EDN: TYGBER. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1792>.
46. Murashkin E. V., Radaev Yu. N. On the theory of linear hemitropic micropolar media, *Vestn. I. Yakovlev Chuvach State Pedagogical Univ. Ser. Mechanics of a Limit State*, 2020, no. 4, pp. 16–24 (In Russian). EDN: IZKTBQ. DOI: <https://doi.org/10.37972/chgpu.2020.89.81.031>.



УДК 539.3

Упругопластический анализ вращающегося полого цилиндра, жестко посаженного на вал, при наличии температурного градиента

А. Н. Прокудин

Институт машиноведения и металлургии
Хабаровского федерального исследовательского центра ДВО РАН
Россия, 681005, Комсомольск-на-Амуре, ул. Металлургов, 1.

Аннотация

Получено точное решение задачи об упругопластическом деформировании вращающегося цилиндра, жестко посаженного на вал, при наличии температурного градиента между внутренней и внешней поверхностями. Постановка задачи основана на теории малых деформаций, условии пластичности Треска, ассоциированном с ним законе пластического течения и законе линейного изотропного упрочнения.

Предполагается, что в цилиндре присутствует стационарный пологий температурный градиент между внутренней и внешней поверхностями. Механические и теплофизические параметры материала приняты независимыми от температуры. Проведенный анализ ограничен стадией активного нагружения.

Установлено, что в общем случае в цилиндре возможно появление шести пластических областей, соответствующих различным ребрам и граням поверхности текучести Треска, а эволюция пластического течения имеет качественные отличия от изотермического случая. Для каждой пластической области найдено точное решение определяющей системы уравнений. Результаты расчетов показали, что присутствие градиента температуры может приводить к значительному повышению абсолютной величины напряжений и пластических деформаций в цилиндре и снижению критических скоростей вращения, соответствующих началу пластического течения и полному переходу цилиндра в пластическое состояние.

Ключевые слова: вращающийся цилиндр, жесткое включение, упругопластичность, линейное упрочнение, температурные напряжения.

Получение: 31 июля 2023 г. / Исправление: 21 сентября 2024 г. /

Принятие: 27 сентября 2024 г. / Публикация онлайн: 21 октября 2024 г.

Механика деформируемого твердого тела

Научная статья

© Коллектив авторов, 2024

© СамГТУ, 2024 (составление, дизайн, макет)

♾️ Контент публикуется на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

Образец для цитирования

Прокудин А. Н. Упругопластический анализ вращающегося полого цилиндра, жестко посаженного на вал, при наличии температурного градиента // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2024. Т. 28, № 3. С. 462–488. EDN: RQASZT. DOI: 10.14498/vsgtu2050.

Сведения об авторе

Александр Николаевич Прокудин <https://orcid.org/0000-0002-5156-424X>
кандидат технических наук; ведущий научный сотрудник; лаб. проблем создания и обработки материалов и изделий; e-mail: sunbeam_85@mail.ru

Введение. Вращающиеся цилиндры и диски являются важным структурным компонентом многих машин и механизмов. В научной литературе опубликовано множество работ, посвященных расчету прочности и напряженно-деформированного состояния сплошных и полых цилиндров под действием центробежных сил, и интерес российских и зарубежных исследователей к этому направлению остается стабильно высоким. Упругопластический анализ позволяет более точно оценить максимальную скорость вращения цилиндров по сравнению с теорией упругости. Кроме того, расчет недавно предложенной технологии ротационного автофретирования возможен только в рамках теории упругопластичности.

В первом приближении материал цилиндра может рассматриваться как идеальное упругопластическое тело. В рамках такой модели получены аналитические решения упругопластической задачи для сплошного [1–3], полого цилиндра [4–6], а также цилиндра с жестким включением [7] и жесткой внешней стенкой [8]. Остаточные напряжения в цилиндре после его предварительного вращения изучались в работах [6–9] для различных граничных условий. Постановка задач в [1–9] основана на условии пластичности Треска и ассоциированном с ним законе течения. Кроме того, использовалось условие максимальных приведенных напряжений [10–12] и общее кусочно-линейное условие пластичности [13]. Установлено, что напряженно-деформированное состояние во вращающемся цилиндре существенно зависит от граничных и торцевых условий, а также от выбора пластического потенциала.

Реальное поведение материала более адекватно описывают модели изотропного и кинематического упрочнения. В работе [14] на основе условия Треска, теории пластического течения и закона линейного изотропного упрочнения получено аналитическое решение упругопластической задачи во вращающемся сплошном цилиндре. Процесс автофретирования полого цилиндра с закрепленными торцами изучался в работах [15, 16], в которых среди прочего рассматривалось влияние кинематического упрочнения (эффект Баушингера) на распределение остаточных напряжений после предварительного пластического деформирования. Деформационная теория пластичности, условие пластичности Мизеса и закон Свифта использовались для расчета упругопластического отклика [17] и остаточных напряжений [18] во вращающемся сплошном и полом цилиндрах. Авторы [17, 18] разработали численный алгоритм решения на основе метода стрельбы. Работа [19] посвящена расчету вращающегося полого цилиндра из нелинейно упрочняемого материала; постановка задачи основывалась на условии Треска, ассоциированном законе течения и степенном законе упрочнения; для ряда частных случаев степенного параметра получено аналитическое решение. Авторами [20] предложена комбинированная модель изотропно-кинематического упрочнения, параметры которой зависят от величины предварительно накопленной пластической деформации; построенная модель и условие пластичности Треска использовались для расчета ротационного автофретирования полых заготовок с закрепленными торцами. Следует отметить, что упрочнение оказывает существенное влияние на упругопластический отклик вращающегося цилиндра, в особенности на распределение остаточных напряжений.

Одним из способов повышения несущей способности конструкции и снижения ее веса является использование функционально-градиентных материа-

лов. Упругопластический анализ вращающихся полых неоднородных цилиндров с закрепленными торцами представлен в работах [21–23]. Результаты получены на основе условия пластичности Треска, материал цилиндров принимался идеальным, для механических свойств материала использовалась степенная зависимость от радиальной координаты. Вращающийся сплошной функционально-градиентный цилиндр из нелинейно упрочняемого материала изучался в работе [24]. Анализ основан на деформационной теории пластичности, условии пластичности Мизеса и законе упрочнения Свифта. Для модуля Юнга, предела текучести, коэффициента Пуассона и плотности материала использовалась квадратичная зависимость от радиальной координаты. Полученные результаты [21–24] показывают, что неоднородность материала оказывает существенное влияние на напряженное состояние в цилиндре. Более того, подходящим выбором распределений механических свойств материала можно значительно повысить максимальную скорость вращения цилиндра. Влияние размерного эффекта на упругопластический отклик вращающегося полого цилиндра из функционально-градиентного материала изучалось в работе [25] на основе градиентной теории пластичности деформационного типа, условия Мизеса и закона линейного изотропного упрочнения. Установлено, что градиентная теория пластичности предсказывает замедление пластического течения в цилиндре по сравнению с классическими решениями, однако этот эффект проявляется только в микромасштабе, для цилиндров с внутренним радиусом свыше 500 мкм разница между градиентной и классической теориями практически отсутствует.

В ходе эксплуатации вращающиеся элементы механизмов могут подвергаться температурному воздействию. В работах [26, 27] изучалось упругопластическое деформирование полого цилиндра при наличии стационарного температурного градиента, вызванного разницей температур на внутренней и внешней поверхностях, в несвязной постановке. Пластические деформации вычислялись на основе условия Треска, ассоциированного закона течения и модели линейного изотропного упрочнения. Механические и теплофизические параметры материала предполагались не зависящими от температуры. В работах [26, 27] установлено, что температурное поле оказывает существенное влияние на напряженно-деформированное состояние вращающегося цилиндра. В частности, в [26] отмечено, что присутствие положительного градиента температуры приводит к существенному уменьшению скорости начала пластического течения и незначительному увеличению скорости, соответствующей полному переходу цилиндра в пластическое состояние. В то же время цилиндр, предварительно нагруженный отрицательным температурным градиентом практически до предела текучести, способен выдерживать значительные скорости вращения до зарождения пластического течения [27]. Влияние нестационарного температурного поля на упругопластическое деформирование вращающегося сплошного цилиндра рассматривалось в работе [28]. Авторы использовали условие Треска и модель идеального материала, предел текучести которого линейно уменьшается с ростом температуры. Предполагалось, что температура внешней поверхности вначале возрастает до максимальной, затем сохраняет постоянное значение, после чего снижается до исходной. Установлено, что достаточный нагрев внешней поверхности может привести к зарождению пластического течения, даже если скорость

вращения цилиндра не превосходит предельную упругую скорость вращения. Интересно отметить, что пластическое течение появляется уже после того, как температура внешней поверхности начала снижаться. Этот эффект, по всей видимости, объясняется неоднородностью температурного поля и механических свойств цилиндра.

Упругопластическое деформирование полых цилиндров из функционально-градиентных материалов при одновременном воздействии внутреннего давления, центробежных и температурных сил исследовалось в работах [29, 30] на основе условия Треска и ассоциированного закона течения. Авторы использовали степенной закон распределения для всех параметров материала за исключением коэффициента Пуассона. Установлено, что неоднородность свойств материала оказывает значительное влияние на напряженно-деформированное состояние цилиндра и эволюцию пластического течения в нем. Влияние температурного поля на упругопластические деформации конструкции, состоящей из полого вала и предварительно посаженной на него трубы, изучалось в работе [31]. Показано, что использование неоднородного материала трубы позволяет значительно сократить вес трубы при сохранении эксплуатационных характеристик. Термоупругопластическое деформирование двухслойных и многослойных композитных вращающихся труб из неоднородных материалов изучалось в работах [32, 33].

Проведенный обзор показал, что расчет вращающихся цилиндров привлекает значительное внимание исследователей. Как правило, рассматривается сплошной либо полый цилиндр, а другие типы граничных условий, например, цилиндр с жестким включением изучаются значительно реже. Ранее такая задача решалась только в изотермической постановке [7, 11]. Также следует отметить работы, в которых исследовалось упругопластическое деформирование вращающегося диска с жестким включением [34, 35], в том числе и при наличии температурного поля [36, 37]. Настоящая работа призвана заполнить имеющийся пробел в научной литературе и посвящена термоупругопластическому анализу вращающегося цилиндра, жестко посаженного на вал.

1. Постановка задачи. Изучается полый цилиндр, жестко посаженный на вал. Для решения используется цилиндрическая система координат (r, θ, z) . Цилиндр вращается вокруг собственной оси с угловой скоростью ω , которая медленно возрастает со временем, что позволяет пренебречь угловым ускорением. Также в цилиндре присутствует неравномерное стационарное температурное поле, вызванное разностью температур на внутренней и внешней поверхностях. Предполагается, что цилиндр находится в состоянии плоской деформации и сохраняет осевую симметрию в процессе деформирования. При таких ограничениях точки цилиндра движутся только в радиальном направлении и u_r является единственным ненулевым перемещением. Для удобства введены следующие безразмерные переменные:

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{r_{in}}{r_{out}}, & \beta &= \frac{r}{r_{out}}, & \Omega &= \frac{\rho r_{out}^2}{\sigma_0} \omega^2, & \bar{\sigma}_{ij} &= \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_0}, \\ \bar{\sigma}_y &= \frac{\sigma_y}{\sigma_0}, & \bar{H} &= \frac{H}{E}, & \bar{u} &= \frac{E}{\sigma_0} \frac{u_r}{r_{out}}, & \bar{\varepsilon}_{ij} &= \frac{E}{\sigma_0} \varepsilon_{ij}, \\ \bar{\varepsilon}_{ij}^e &= \frac{E}{\sigma_0} \varepsilon_{ij}^e, & \bar{\varepsilon}_{ij}^p &= \frac{E}{\sigma_0} \varepsilon_{ij}^p, & \bar{T} &= \frac{T}{T_0} - 1, & \bar{\alpha} &= \frac{ET_0}{\sigma_0} \alpha. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь r_{in} , r_{out} — внутренний/внешний радиусы цилиндра; ρ — плотность; σ_0 , σ_y — начальный/актуальный предел текучести при одноосном растяжении-сжатии; σ_{ij} — напряжения; H — параметр, характеризующий изотропное упрочнение материала; E — модуль Юнга; ε_{ij} , ε_{ij}^e , ε_{ij}^p — полные, упругие и пластические деформации соответственно; T — температура; T_0 — отсчетная температура; α — коэффициент линейного теплового расширения. Механические и теплофизические параметры материала предполагаются не зависящими от температуры. Материал цилиндра принят однородным и изотропным. Параметр нагружения Ω для удобства называется скоростью вращения. Далее во всех формулах, если не указано иное, используются переменные (1), а знак подчеркивания для краткости опущен.

При сформулированных выше допущениях касательные напряжения в цилиндре отсутствуют, а единственное уравнение равновесия имеет вид

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial \beta} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{\beta} = -\Omega\beta. \quad (2)$$

Предполагается, что максимальная скорость вращения не слишком высока и геометрически линейная теория справедлива с необходимой степенью точности. Кинематические соотношения запишутся следующим образом:

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u}{\partial \beta}, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u}{\beta}, \quad \varepsilon_{zz} = 0. \quad (3)$$

Полные деформации представляют собой сумму упругих, пластических и температурных деформаций

$$\varepsilon_{rr} = \varepsilon_{rr}^e + \varepsilon_{rr}^p + \varepsilon_{rr}^t, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \varepsilon_{\theta\theta}^e + \varepsilon_{\theta\theta}^p + \varepsilon_{\theta\theta}^t, \quad \varepsilon_{zz} = \varepsilon_{zz}^e + \varepsilon_{zz}^p + \varepsilon_{zz}^t. \quad (4)$$

Связь между напряжениями и упругими деформациями имеет вид

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{1}{(1+\nu)(1-2\nu)} ((1-\nu)\varepsilon_{rr}^e + \nu\varepsilon_{\theta\theta}^e + \nu\varepsilon_{zz}^e - (1+\nu)\alpha T), \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{1}{(1+\nu)(1-2\nu)} (\nu\varepsilon_{rr}^e + (1-\nu)\varepsilon_{\theta\theta}^e + \nu\varepsilon_{zz}^e - (1+\nu)\alpha T), \\ \sigma_{zz} &= \nu(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}) - \alpha T. \end{aligned} \quad (5)$$

В (5) ν обозначает коэффициент Пуассона.

В качестве условия пластичности используется условие Треска:

$$\max(|\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}|, |\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{zz}|, |\sigma_{zz} - \sigma_{rr}|) = \sigma_y, \quad (6)$$

где предел текучести определяется линейным законом упрочнения

$$\sigma_y = 1 + H\varepsilon_{eq}^p. \quad (7)$$

Здесь ε_{eq}^p — эквивалентная пластическая деформация.

Пластическая составляющая деформации вычисляется в соответствии с ассоциированным законом пластического течения:

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{df}{d\sigma_{ij}}, \quad (8)$$

где ε_{ij}^p — приращения пластических деформаций; $d\lambda$ — положительный множитель; f — пластический потенциал, соответствующий условию (6).

Если напряженное состояние в пластической области соответствует ребру условия Треска (6), то вместо закона (8) используется его обобщение [38]:

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda_1 \frac{df_1}{d\sigma_{ij}} + d\lambda_2 \frac{df_2}{d\sigma_{ij}}, \quad (9)$$

где $d\lambda_1$ и $d\lambda_2$ — положительные множители; f_1 и f_2 — пластические потенциалы, соответствующие граням условия (6), на пересечении которых лежит рассматриваемое ребро.

Приращение пластической деформации $d\varepsilon_{eq}^p$ определяется законом

$$\sigma_y d\varepsilon_{eq}^p = \sigma_{rr} d\varepsilon_{rr}^p + \sigma_{\theta\theta} d\varepsilon_{\theta\theta}^p + \sigma_{zz} d\varepsilon_{zz}^p. \quad (10)$$

Граничные условия задачи задаются следующим образом:

$$u(\delta) = 0, \quad \sigma_{rr}(1) = 0. \quad (11)$$

В свою очередь, граничные условия по температуре имеют вид

$$T(\delta) = T_{in}, \quad T(1) = T_{out}, \quad T_{out} \geq T_{in}. \quad (12)$$

Решая стационарное уравнение теплопроводности с учетом граничных условий (12), нетрудно получить распределение температуры в цилиндре

$$T(\beta) = T_{in} + \Delta T \left(1 - \frac{\ln \beta}{\ln \delta} \right), \quad (13)$$

где $\Delta T = T_{out} - T_{in}$.

2. Начальное упругое равновесие и зарождение пластического течения. Рассмотрим напряженное состояние в цилиндре до наступления в нем пластического течения ($\varepsilon_{ij}^p = 0$). Соотношения (5) в условиях плоской деформации ($\varepsilon_{zz} = 0$) примут вид

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{1}{(1+\nu)(1-2\nu)} ((1-\nu)\varepsilon_{rr} + \nu\varepsilon_{\theta\theta} - (1+\nu)\alpha T), \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{1}{(1+\nu)(1-2\nu)} (\nu\varepsilon_{rr} + (1-\nu)\varepsilon_{\theta\theta} - (1+\nu)\alpha T), \\ \sigma_{zz} &= \nu(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}) - \alpha T. \end{aligned}$$

Уравнение равновесия (2) с учетом предыдущих соотношений запишется следующим образом:

$$u'' + u'\beta^{-1} - u\beta^{-2} = -\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{(1-\nu)}\Omega\beta + \frac{1+\nu}{1-\nu}\alpha T'.$$

Здесь и далее штрих обозначает производную по координате β . Решая полученное уравнение, найдем упругое решение для произвольного температурного распределения:

$$\begin{aligned} u &= \bar{d}_1 \beta^{-1} + \bar{d}_2 \beta - \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{8(1-\nu)} \Omega \beta^3 + \frac{(1+\nu)}{(1-\nu)} \alpha \beta^{-1} \int_{\delta}^{\beta} \beta T d\beta, \\ \sigma_{rr} &= -d_1 \beta^{-2} + d_2 - \frac{(3-2\nu)}{8(1-\nu)} \Omega \beta^2 - \frac{\alpha}{(1-\nu)} \beta^{-2} \int_{\delta}^{\beta} \beta T d\beta, \\ \sigma_{\theta\theta} &= d_1 \beta^{-2} + d_2 - \frac{(1+2\nu)}{8(1-\nu)} \Omega \beta^2 - \frac{\alpha T(\beta)}{(1-\nu)} + \frac{\alpha}{(1-\nu)} \beta^{-2} \int_{\delta}^{\beta} \beta T d\beta, \\ \bar{d}_1 &= (1+\nu) d_1, \quad \bar{d}_2 = (1+\nu)(1-2\nu) d_2, \end{aligned} \quad (14)$$

где d_1, d_2 — константы интегрирования.

Далее предполагается, что $T_{in} = 0$ (температура на внутренней поверхности совпадает с отсчетной), тогда $\Delta T = T_{out}$. Определенный интеграл, входящий в решение (14), с учетом (13) вычисляется следующим образом:

$$\int_{\delta}^{\beta} \beta T d\beta = \frac{\beta^2 - 2\beta^2 \ln \beta - \delta^2}{4 \ln \delta} \Delta T + \frac{\beta^2 \Delta T}{2}.$$

Константы d_1, d_2 вычисляются из граничных условий (11):

$$\begin{aligned} d_1 &= -\frac{\delta^2(1-2\nu)(3-2\nu-\delta^2)}{4d} \Omega - \frac{\alpha \delta^2}{d \ln \delta} (1-\nu + (1-2\nu) \ln \delta) \Delta T, \\ d_2 &= \frac{3-2\nu + (1-2\nu)\delta^4}{8d} \Omega + \frac{1-\delta^2 + 2 \ln \delta}{4d \ln \delta} \Delta T, \\ d &= (1-\nu)(1 + (1-2\nu)\delta^2). \end{aligned} \quad (15)$$

Найдем значение температурного градиента ΔT_p , соответствующее началу пластического течения, в отсутствие центробежных сил ($\Omega = 0$). Во-первых, докажем, что $\sigma_{rr} > \sigma_{\theta\theta}$. Рассмотрим разность

$$\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} = -\frac{\alpha(\beta^2 - \delta^2 + \delta^2(1-2\nu)(\beta^2 - 2 \ln \delta - 1))}{2\beta^2(1-\nu)(1 + (1-2\nu)\delta^2) \ln \delta} \Delta T.$$

Эта величина положительна, поскольку $\beta^2 - 2 \ln \delta - 1 \geq \delta^2 - \ln \delta^2 - 1 > 0$. Аналогичным образом можно доказать, что $\sigma_{\theta\theta} \geq \sigma_{zz}$, причем равенство достигается только на внутренней поверхности $\beta = \delta$. Из вышеизложенного следует, что напряженное состояние в цилиндре удовлетворяет неравенству $\sigma_{rr} > \sigma_{\theta\theta} \geq \sigma_{zz}$. Теперь необходимо найти точку, в которой разность $\sigma_{rr} - \sigma_{zz}$ достигает наибольшего значения. Приравняем к нулю производную $\partial(\sigma_{rr} - \sigma_{zz})/\partial\beta$:

$$-\alpha \frac{2\delta^2((1-\nu) + (1-2\nu) \ln \delta) + (1 + \delta^2(1-2\nu))\beta^2}{2\beta^3(1-\nu)(1 + \delta^2(1-2\nu)) \ln \delta} \Delta T = 0.$$

Приведенное выше уравнение имеет решение для значения β , удовлетворяющего соотношению

$$\beta^2 = -\frac{2\delta^2((1-\nu) + (1-2\nu)\ln\delta)}{1 + \delta^2(1-2\nu)}.$$

Нетрудно убедиться, что это значение β является минимумом функции $\sigma_{rr} - \sigma_{zz}$. Если указанная точка принадлежит отрезку $[\delta, 1]$, то тогда разность $\sigma_{rr} - \sigma_{zz}$ достигает наибольшего значения на одной из боковых поверхностей цилиндра. В противном случае наибольшее значение — на внешней поверхности цилиндра. Рассмотрим значения $\sigma_{rr} - \sigma_{zz}$ на боковых поверхностях и заметим, что

$$\begin{aligned} (\sigma_{rr} - \sigma_{zz})|_{\beta=1} - (\sigma_{rr} - \sigma_{zz})|_{\beta=\delta} &= \\ &= -\alpha \frac{(1-\delta^2)(1-\nu) - 2(\nu + (1-2\nu)\delta^2)\ln\delta}{2(1-\nu)(1+\delta^2(1-2\nu))\ln\delta} \Delta T > 0, \end{aligned}$$

откуда следует, что разность $\sigma_{rr} - \sigma_{zz}$ имеет большее значение на поверхности $\beta = 1$. Таким образом, при воздействии только температурного градиента пластическое течение зарождается на внешней поверхности цилиндра при $\beta = 1$, а соответствующее значение градиента ΔT_p можно найти из (14) и (15):

$$\Delta T_p = \alpha \frac{2(1-\nu)(1+\delta^2(1-2\nu))\ln\delta}{2(1-\nu+\delta^2(1-2\nu))\ln\delta - \nu(1-\delta^2)}. \quad (16)$$

Далее предполагается, что действия лишь температурного градиента недостаточно для начала течения, т.е. $\Delta T < \Delta T_p$.

Рассмотрим общий случай $\Omega > 0$. В упругом состоянии поле напряжений в цилиндре представляет собой сумму механических и температурных напряжений. В работе [7] показано, что в изотермическом случае цилиндр состоит из трех областей, напряжения в которых удовлетворяют следующим неравенствам (в порядке их расположения в цилиндре):

$$\sigma_{rr} > \sigma_{\theta\theta} \geq \sigma_{zz}, \quad \sigma_{\theta\theta} \geq \sigma_{rr} \geq \sigma_{zz}, \quad \sigma_{\theta\theta} \geq \sigma_{zz} > \sigma_{rr}.$$

С другой стороны, выше было доказано, что температурные напряжения всегда удовлетворяют неравенству $\sigma_{rr} > \sigma_{\theta\theta} \geq \sigma_{zz}$. Очевидно, что при одновременном температурном и механическом воздействии цилиндр в общем случае также состоит из трех указанных выше областей, а с увеличением градиента температуры ΔT в цилиндре последовательно исчезают третья и вторая области. Поэтому условие пластичности Треска (6) может выполняться в одной из следующих форм:

$$\sigma_{rr} - \sigma_{zz} = 1, \quad \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{zz} = 1, \quad \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr} = 1.$$

Определение скорости Ω_p начала пластического течения и соответствующей радиальной координаты сводится к вычислению наибольшего значения каждой из перечисленных выше функций. К сожалению, строгое решение этой

задачи является достаточно сложным и громоздким в силу большого количества параметров и необходимости решать трансцендентные уравнения. Разумеется, для известных значений параметров данная задача может быть решена численно.

Далее покажем, что при определенных условиях пластическое течение в цилиндре всегда начинается в соответствии с уравнением $\sigma_{rr} - \sigma_{zz} = 1$. Во-первых, рассмотрим выражение

$$\begin{aligned} (\sigma_{rr} - \sigma_{zz})|_{\beta=\delta} - (\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr}) &= \\ &= \frac{(1-2\nu)(3-2\nu-\delta^2-(1+(1-2\nu)\delta^2)\beta^2)}{4\beta^2(1-\nu)(1+(1-2\nu)\delta^2)}(\delta^2+\beta^2)\Omega - \\ &\quad - \alpha \frac{\nu(\delta^2+\beta^2)-\delta^2+(1-2\nu)(\delta^2\beta^2-(\delta^2+\beta^2)\ln\delta)}{\beta^2(1-\nu)(1+(1-2\nu)\delta^2)\ln\delta} \Delta T. \end{aligned}$$

Так как предыдущее выражение положительно, условие $\sigma_{rr} - \sigma_{zz} = 1$ выполнится на внутренней поверхности раньше, чем где-либо в цилиндре выполнится условие $\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr} = 1$. Далее предположим, что на внутренней поверхности цилиндра $\beta = \delta$ выполнилось условие $\sigma_{rr} - \sigma_{zz} = 1$. Соответствующая скорость вращения равна

$$\begin{aligned} \Omega_* &= \frac{4(1-\nu)(1+(1-2\nu)\delta^2)}{(1-2\nu)S} - \frac{2\alpha(1-\delta^2+2\ln\delta)}{S\ln\delta} \Delta T, \\ S &= (1-\delta^2)(3-2\nu+(1-2\nu)\delta^2). \end{aligned} \quad (17)$$

Заметим, что Ω_* убывает с увеличением температуры ΔT . Оценим сверху разность напряжений $\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{zz}$. Рассмотрим по отдельности механическую и температурную составляющие напряжений, для которых будем использовать верхние индексы m и t соответственно. В дальнейших рассуждениях используется ряд производных, вычисление которых для краткости пропущено. Используя соотношения (14) и (15), нетрудно убедиться, что разность $\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{zz}$ возрастает с увеличением скорости вращения Ω , максимальное значение которой, в свою очередь, достигается при $\Delta T = 0$. Отсюда следует, что механические напряжения удовлетворяют неравенству

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta\theta}^m - \sigma_{zz}^m &\leq (\sigma_{\theta\theta}^m - \sigma_{zz}^m)|_{\Omega=\Omega_*, \Delta T=0} = \\ &= \frac{(\beta^2 - \delta^2)(3 - 2\nu - \delta^2 - \beta^2(1 + (1 - 2\nu)\delta^2))}{2\beta^2(1 - \delta^2)(3 - 2\nu + (1 - 2\nu)\delta^2)}. \end{aligned}$$

Далее, используя стандартные методы математического анализа, найдем наибольшее значение функции в правой части предыдущего неравенства и получим оценку

$$\sigma_{\theta\theta}^m - \sigma_{zz}^m \leq \frac{(1 + (1 - 2\nu)\delta^2) \left(\delta - \sqrt{\frac{3-2\nu-\delta^2}{1+(1-2\nu)\delta^2}} \right)^2}{2(1 - \delta^2)(3 - 2\nu + (1 - 2\nu)\delta^2)}. \quad (18)$$

Теперь рассмотрим температурную составляющую напряжений. Заметим, что разность $\sigma_{\theta\theta}^t - \sigma_{zz}^t$ растет с увеличением координаты β , следовательно,

$$\sigma_{\theta\theta}^t - \sigma_{zz}^t \leq (\sigma_{\theta\theta}^t - \sigma_{zz}^t)|_{\beta=1} = \alpha \Delta T \frac{1 - \delta^2 + 2 \ln \delta}{2(1 + \delta^2(1 - 2\nu)) \ln \delta}. \quad (19)$$

В итоге условие $\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{zz} < 1$ с помощью неравенств (18), (19) и выражения (16) для ΔT_p преобразуется к виду

$$\begin{aligned} & \frac{(1 + (1 - 2\nu)\delta^2) \left(\delta - \sqrt{\frac{3 - 2\nu - \delta^2}{1 + (1 - 2\nu)\delta^2}} \right)^2}{2(1 - \delta^2)(3 - 2\nu + (1 - 2\nu)\delta^2)} + \\ & + \frac{(1 - \nu)(1 - \delta^2 + 2 \ln \delta)}{2(1 - \nu + (1 - 2\nu)\delta^2) \ln \delta - \nu(1 - \delta^2)} < 1. \end{aligned} \quad (20)$$

Выполнение предыдущего неравенства гарантирует, что пластическое течение начнется в соответствии с условием $\sigma_{rr} - \sigma_{zz} = 1$. С помощью численных расчетов установлено, что при $\delta > 0.245$ неравенство (20) справедливо для любых $\nu > 0$ и $\Delta T < \Delta T_p$. Случай нарушения неравенства (20) подробно не рассматривается, но тестовые расчеты показали, что качественные отличия от нижеизложенного могут проявиться только при $\delta \approx 0$ и $\Delta T \approx \Delta T_p$.

3. Упругопластическое деформирование. В общем случае в цилиндре формируются 6 пластических областей, соответствующих разным граням и ребрам призмы Треска. На эволюцию пластического течения существенное влияние оказывают геометрические и механические параметры, а также величина температурного градиента. Далее предполагается, что параметры ν и δ удовлетворяют неравенству (20), а значит, условие Треска впервые выполняется в форме $\sigma_{rr} - \sigma_{zz} = 1$. Для не слишком высоких значений ΔT пластическое течение начинается на внутренней поверхности цилиндра, а соответствующую скорость Ω_p можно вычислить с помощью (17). В результате на внутренней поверхности цилиндра зарождаются пластические области I и II, напряженное состояние в которых удовлетворяет неравенствам $\sigma_{rr} > \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{zz}$ и $\sigma_{rr} > \sigma_{\theta\theta} > \sigma_{zz}$ соответственно. Разумеется, с увеличением скорости вращения размеры пластических областей увеличиваются, а границы между областями I и II и между областью II и упругой областью движутся в сторону внешней поверхности цилиндра. Далее, если $\nu < \nu_{tr}$, то при $\Omega = \Omega_1$ на внешней поверхности цилиндра зарождается пластическая область VI, соответствующая грани $\sigma_{\theta\theta} > \sigma_{zz} > \sigma_{rr}$ поверхности Треска (6). После этого при $\Omega = \Omega_2$ на упругопластической границе между областью II и упругой областью выполняется равенство $\sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta}$, в результате чего в указанной точке появляются пластические области III и IV, напряженное состояние в которых удовлетворяет неравенствам $\sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta} > \sigma_{zz}$ и $\sigma_{\theta\theta} > \sigma_{rr} > \sigma_{zz}$ соответственно. Наконец, при $\Omega = \Omega_{fp}$ упругая область между областями IV и VI исчезает, а на ее месте формируется пластическая область V, соответствующая ребру $\sigma_{\theta\theta} > \sigma_{rr} = \sigma_{zz}$ поверхности текучести Треска (6). Если же $\nu > \nu_{tr}$, то сначала при $\Omega = \Omega_1$ появляются пластические области III и IV. Далее при $\Omega = \Omega_2$ для $\Delta T < \Delta T_{tr}$ на внешней поверхности цилиндра

появляется пластическая область VI, а в случае $\Delta T \geq \Delta T_{tr}$ упругопластическая граница достигает внешней поверхности и весь цилиндр переходит в пластическое состояние. При скоростях выше Ω_{fp} цилиндр состоит из 6 пластических областей, границы между которыми меняют свое положение, при этом увеличиваются области, соответствующие ребрам призмы Треска. В настоящей работе предполагается, что $\Omega \leq \Omega_{fp}$.

Рассмотрим кратко случай, когда $\Delta T \approx \Delta T_p$. Условие $\sigma_{rr} - \sigma_{zz} = 1$ может впервые выполниться не на внутренней поверхности, а внутри цилиндра. Тогда скорость Ω_p и соответствующая координата могут быть найдены из численного решения оптимизационной задачи

$$\underset{\beta, \Omega}{\operatorname{argmin}} \Omega$$

при ограничениях $\Omega > 0$, $\beta \geq \delta$, $\beta \leq 1$, $\sigma_{rr}(\beta) - \sigma_{zz}(\beta) = 1$.

В результате внутри цилиндра формируется пластическая область II, которая с каждой стороны окружена упругими областями (константы интегрирования в которых, разумеется, различны). С увеличением скорости вращения условие пластичности $\sigma_{rr} - \sigma_{zz} = 1$ выполняется на внутренней поверхности, в результате чего в цилиндре появляются области I и II* (в этой области справедливы те же уравнения, что и в появившейся ранее области II, но константы интегрирования имеют другое значение). При определенной скорости вращения упругая область между областями II* и II исчезает, и указанные области сливаются в одну. В результате в цилиндре остаются пластические области I, II и упругая область, а последующая эволюция пластического течения следует рассмотренным выше закономерностям.

Далее найдем решение определяющей системы уравнений для каждой из пластических областей. Для констант интегрирования введены обозначения $c_1, c_2, \dots, c_{12}$. Решение (14) остается справедливым в упругой области, но константы d_1, d_2 необходимо определять отдельно для каждой стадии упругопластического деформирования.

Пластическая область I соответствует ребру призмы Треска, в котором справедливо неравенство $\sigma_{rr} > \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{zz}$, тогда условие пластичности Треска (6) с учетом (7) примет вид

$$\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{rr} - \sigma_{zz} = 1 + H\varepsilon_{eq}^p.$$

Из предыдущих соотношений с помощью (9) и (10) получим $\varepsilon_{rr}^p = -(\varepsilon_{\theta\theta}^p + \varepsilon_{zz}^p)$, $\varepsilon_{eq}^p = \varepsilon_{rr}^p$. Далее, используя закон Гука (5) и условие пластической несжимаемости, преобразуем условие пластичности к системе

$$\begin{aligned} (1 + H + H\nu)\varepsilon_{rr}^p - \varepsilon_{\theta\theta}^p &= \varepsilon_{rr} - \varepsilon_{\theta\theta} - (1 + \nu), \\ (2 + H + H\nu)\varepsilon_{rr}^p + \varepsilon_{\theta\theta}^p &= \varepsilon_{rr} - (1 + \nu), \end{aligned}$$

решая которую, найдем компоненты пластических деформаций:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr}^p &= \frac{2}{g_1}\varepsilon_{rr} - \frac{1}{g_1}\varepsilon_{\theta\theta} - \frac{2(1 + \nu)}{g_1}, \\ \varepsilon_{\theta\theta}^p &= -\frac{1}{g_1}\varepsilon_{rr} + \frac{g_1 + 1}{2g_1}\varepsilon_{\theta\theta} + \frac{1 + \nu}{g_1}, \end{aligned}$$

где $g_1 = 3 + 2(1 + \nu)H$. С учетом последних соотношений из закона Гука (5) найдем распределение напряжений:

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= \frac{1 + 2(1 - \nu)H}{(1 - 2\nu)g_1} \varepsilon_{rr} + \frac{1 + 2\nu H}{(1 - 2\nu)g_1} \varepsilon_{\theta\theta} - \frac{\alpha T}{1 - 2\nu} + \frac{2}{g_1}, \\ \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{zz} &= \frac{1 + 2\nu H}{(1 - 2\nu)g_1} \varepsilon_{rr} + \frac{1 + H}{(1 - 2\nu)g_1} \varepsilon_{\theta\theta} - \frac{\alpha T}{1 - 2\nu} - \frac{1}{g_1}.\end{aligned}$$

Далее преобразуем уравнение равновесия (2) с учетом полученных выше формул для напряжений к виду

$$\begin{aligned}u'' + u' \beta^{-1} - k_1 u \beta^{-2} &= -3h_1 \beta^{-1} - h_1 g_1 \Omega \beta + \frac{\alpha}{1 - 2\nu} h_1 g_1 T', \\ k_1 &= \frac{1 + H}{1 + 2(1 - \nu)H}, \quad h_1 = \frac{1 - 2\nu}{1 + 2(1 - \nu)H}.\end{aligned}$$

Решение этого уравнения с учетом (13) запишется следующим образом:

$$\begin{aligned}u &= c_1 \beta^{-\sqrt{k_1}} + c_2 \beta^{\sqrt{k_1}} - 3H^{-1} \beta - m_1 \Omega \beta^3 - n_1 \Delta T \beta, \\ m_1 &= \frac{1 - 2\nu}{8 + (17 - 18\nu)H} g_1, \quad n_1 = \frac{\alpha}{H(1 - 2\nu) \ln \delta} g_1.\end{aligned}$$

Рассмотрим **пластическую область II**, в которой напряженное состояние удовлетворяет неравенству $\sigma_{rr} > \sigma_{\theta\theta} > \sigma_{zz}$, а условие Треска (6) выполняется в следующем виде:

$$\sigma_{rr} - \sigma_{zz} = 1 + H \varepsilon_{eq}^p.$$

Из предыдущего условия вместе с (8) и (10) следует, что $\varepsilon_{eq}^p = \varepsilon_{rr}^p$, $\varepsilon_{zz}^p = -\varepsilon_{rr}^p$, $\varepsilon_{\theta\theta}^p = 0$. Далее закон Гука (5) примет вид

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= \frac{1}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} ((1 - \nu) \varepsilon_{rr} + \nu \varepsilon_{\theta\theta} - (1 - 2\nu) \varepsilon_{eq}^p - (1 + \nu) \bar{\alpha} \bar{T}), \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{1}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} (\nu \varepsilon_{rr} + (1 - \nu) \varepsilon_{\theta\theta} - (1 + \nu) \bar{\alpha} \bar{T}), \\ \sigma_{zz} &= \nu(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}) + \varepsilon_{eq}^p - \alpha T.\end{aligned}$$

С помощью полученных соотношений преобразуем условие пластичности и представим пластическую деформацию в виде

$$\varepsilon_{eq}^p = \frac{\varepsilon_{rr} - (1 + \nu)}{2 + (1 + \nu)H}.$$

Уравнение равновесия (2) с учетом закона Гука (5) и предыдущего соотношения запишется следующим образом:

$$\begin{aligned}u'' + u' \beta^{-1} - k_2 u \beta^{-2} &= -h_2 \beta^{-1} - h_2 g_2 \Omega \beta + \alpha \frac{h_2 g_2}{1 - 2\nu} T', \\ k_2 &= \frac{(1 - \nu)g_2}{1 + (1 - \nu^2)H}, \quad h_2 = \frac{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}{1 + (1 - \nu^2)H}, \quad g_2 = 2 + (1 + \nu)H.\end{aligned}$$

Используя (13), найдем решение приведенного выше уравнения:

$$u = c_3\beta^{-\sqrt{k_2}} + c_4\beta^{\sqrt{k_2}} + (1 + \nu)\beta - m_2\Omega\beta^3 + n_2\Delta T\beta,$$

$$m_2 = \frac{(1 + \nu)(1 - 2\nu)g_2}{7 + 2\nu + 8(1 - \nu^2)H}, \quad n_2 = \alpha \frac{(1 + \nu)g_2}{(1 - 2\nu)\ln \delta}.$$

В **пластической области III** справедливо неравенство $\sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta} > \sigma_{zz}$. Условие пластичности Треска (6) с учетом (7) запишется в виде

$$\sigma_{rr} - \sigma_{zz} = \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{zz} = 1 + H\varepsilon_{eq}^p.$$

Из предыдущих соотношений с помощью (9) и (10) получим $\varepsilon_{zz}^p = -(\varepsilon_{rr}^p + \varepsilon_{\theta\theta}^p)$, $\varepsilon_{eq}^p = -\varepsilon_{zz}^p$. Поскольку $\sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta}$, уравнение равновесия (2) легко интегрируется, в результате чего найдем

$$\sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta} = c_6 - \Omega\beta^2/2, \quad \sigma_{zz} = \sigma_{rr} - 1 + H\varepsilon_{zz}^p.$$

Далее преобразуем закон Гука (5) с помощью предыдущих соотношений:

$$\varepsilon_{zz}^p = 2(1 + \nu)\sigma_{rr} - \frac{1}{1 - 2\nu}\varepsilon_{rr} - \frac{1}{1 - 2\nu}\varepsilon_{\theta\theta} + 2\alpha \frac{1 + \nu}{1 - 2\nu},$$

$$\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta} = -\frac{(1 - 2\nu)(1 - (3 + 2H(1 + \nu))\sigma_{rr}) - \alpha(3 + 2H(1 + \nu))T}{1 + H}.$$

Используя (3) и (13), найдем решение второго из представленных выше уравнений относительно неизвестного перемещения в виде

$$u = \frac{c_5}{\beta} + \bar{c}_6\beta - \frac{1 - 2\nu}{8(1 + H)}g_3\Omega\beta^3 + \frac{\alpha}{4(1 + H)\ln \delta}g_3\Delta T(1 - 2\ln \beta)\beta,$$

$$\bar{c}_6 = \frac{1 - 2\nu}{2(1 + H)}\left(g_3\left(c_6 + \frac{\alpha\Delta T}{1 - 2\nu}\right) - 1\right), \quad g_3 = 3 + 2H(1 + \nu).$$

Оставшиеся компоненты пластических деформаций определяются из разделения деформаций (4) и закона, обратного к закону Гука (5):

$$\varepsilon_{rr}^p = \varepsilon_{rr} - (1 - 2\nu)\sigma_{rr} + \nu(H\varepsilon_{zz}^p - 1) - \alpha T,$$

$$\varepsilon_{\theta\theta}^p = \varepsilon_{\theta\theta} - (1 - 2\nu)\sigma_{rr} + \nu(H\varepsilon_{zz}^p - 1) - \alpha T.$$

Напряженное состояние в **пластической области IV** соответствует грани призмы Треска $\sigma_{\theta\theta} > \sigma_{rr} > \sigma_{zz}$, следовательно, условие пластичности (6) примет вид

$$\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{zz} = 1 + H\varepsilon_{eq}^p.$$

Из (8) и (10) следует $\varepsilon_{eq}^p = \varepsilon_{\theta\theta}^p$, $\varepsilon_{zz}^p = -\varepsilon_{\theta\theta}^p$, $\varepsilon_{rr}^p = 0$. Далее закон Гука (5) с учетом предыдущих соотношений преобразуется к следующему виду:

$$\sigma_{rr} = \frac{1}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}((1 - \nu)\varepsilon_{rr} + \nu\varepsilon_{\theta\theta} - (1 + \nu)\alpha T),$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{1}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}(\nu\varepsilon_{rr} + (1 - \nu)\varepsilon_{\theta\theta} - (1 - 2\nu)\varepsilon_{eq}^p - (1 + \nu)\alpha T),$$

$$\sigma_{zz} = \nu(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}) + \varepsilon_{eq}^p - \alpha T.$$

Из полученных выше соотношений и условия пластичности найдем

$$\varepsilon_{\theta\theta}^p = \frac{\varepsilon_{\theta\theta} - (1 + \nu)}{2 + (1 + \nu)H}.$$

Используя закон Гука (5) и последнее выражение, преобразуем уравнение равновесия (2):

$$u'' + u'\beta^{-1} - k_4 u \beta^{-2} = \frac{h_4}{g_4} \beta^{-1} - h_4 \Omega \beta + \alpha \frac{h_4}{1 - 2\nu} T',$$

$$k_4 = \frac{1 + (1 - \nu^2)H}{(1 - \nu)g_4}, \quad h_4 = \frac{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}{(1 - \nu)}, \quad g_4 = 2 + (1 + \nu)H.$$

Решение этого уравнения с учетом (13) запишется в виде

$$u = c_7 \beta^{-\sqrt{k_4}} + c_8 \beta^{\sqrt{k_4}} + (1 + \nu)\beta - m_4 \Omega \beta^3 - n_4 \Delta T \beta,$$

$$m_4 = \frac{(1 - 2\nu)(1 + \nu)}{17 - 18\nu + 8H(1 - \nu^2)} g_4, \quad n_4 = \frac{\alpha(1 + \nu)}{(1 - 2\nu) \ln \delta} g_4.$$

Пластическая область V соответствует ребру призмы Треска, напряженное состояние в котором удовлетворяет неравенству $\sigma_{\theta\theta} > \sigma_{rr} = \sigma_{zz}$. Условие пластичности примет вид

$$\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{zz} = \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr} = 1 + H\varepsilon_{eq}^p.$$

Из предыдущих соотношений с помощью (9) и (10) получим $\varepsilon_{\theta\theta}^p = -(\varepsilon_{rr}^p + \varepsilon_{zz}^p)$, $\varepsilon_{eq}^p = \varepsilon_{\theta\theta}^p$. По аналогии с пластической областью I получим систему линейных относительно неизвестных пластических деформаций:

$$-\varepsilon_{rr}^p + (1 + H + H\nu)\varepsilon_{\theta\theta}^p = -\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta} - (1 + \nu),$$

$$\varepsilon_{rr}^p + (2 + H + H\nu)\varepsilon_{\theta\theta}^p = \varepsilon_{\theta\theta} - (1 + \nu),$$

решение которой имеет вид

$$\varepsilon_{rr}^p = \frac{g_5 + 1}{2g_5} \varepsilon_{rr} - \frac{1}{g_5} \varepsilon_{\theta\theta} + \frac{1 + \nu}{g_5},$$

$$\varepsilon_{\theta\theta}^p = -\frac{1}{g_5} \varepsilon_{rr} + \frac{2}{g_5} \varepsilon_{\theta\theta} - \frac{2(1 + \nu)}{g_5},$$

где $g_5 = 3 + 2(1 + \nu)H$. Используя предыдущие выражения, преобразуем закон Гука (5) к виду

$$\sigma_{rr} = \sigma_{zz} = \frac{1 + H}{(1 - 2\nu)g_5} \varepsilon_{rr} + \frac{1 + 2\nu H}{(1 - 2\nu)g_5} \varepsilon_{\theta\theta} - \frac{\alpha T}{1 - 2\nu} - \frac{1}{g_5},$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{1 + 2\nu H}{(1 - 2\nu)g_5} \varepsilon_{rr} + \frac{1 + 2(1 - \nu)H}{(1 - 2\nu)g_5} \varepsilon_{\theta\theta} - \frac{\alpha T}{1 - 2\nu} + \frac{2}{g_5}.$$

Далее уравнение равновесия (2) с учетом приведенных выше соотношений запишется следующим образом:

$$u'' + u'\beta^{-1} - k_5 u \beta^{-2} = 3h_5 \beta^{-1} - h_5 g_5 \Omega \beta + \frac{\alpha h_5 g_5}{1 - 2\nu} T',$$

$$k_5 = \frac{1 + 2(1 - \nu)H}{1 + H}, \quad h_5 = \frac{1 - 2\nu}{1 + H},$$

а его решение с учетом распределения (13) примет вид

$$u = c_9 \beta^{-\sqrt{k_5}} + c_{10} \beta^{\sqrt{k_5}} - 3H^{-1} \beta - m_5 \Omega \beta^3 + n_5 \Delta T \beta,$$

$$m_5 = \frac{(1 - 2\nu)g_5}{8 + (7 + 2\nu)H}, \quad n_5 = \frac{\alpha g_5}{H(1 - 2\nu) \ln \delta}.$$

В **пластической области VI** напряжения удовлетворяют неравенству $\sigma_{\theta\theta} > \sigma_{zz} > \sigma_{rr}$, следовательно, условие Треска примет вид

$$\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr} = 1 + H\varepsilon_{eq}^p.$$

Из приведенного выше уравнения вместе с (8) и (10) следует, что $\varepsilon_{eq}^p = \varepsilon_{\theta\theta}^p$, $\varepsilon_{\theta\theta}^p = -\varepsilon_{rr}^p$, $\varepsilon_{zz}^p = 0$. Отсюда закон Гука (5) можно преобразовать к виду

$$\sigma_{rr} = \frac{1}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} ((1 - \nu)\varepsilon_{rr} + \nu\varepsilon_{\theta\theta} - (1 - 2\nu)\varepsilon_{eq}^p - (1 + \nu)\alpha T),$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{1}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} (\nu\varepsilon_{rr} + (1 - \nu)\varepsilon_{\theta\theta} + (1 - 2\nu)\varepsilon_{eq}^p - (1 + \nu)\alpha T),$$

$$\sigma_{zz} = \nu(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}) - \alpha T.$$

Из полученных выше соотношений и условия пластичности найдем

$$\varepsilon_{\theta\theta}^p = \frac{-\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta} - (1 + \nu)}{2 + H + H\nu}.$$

Используя закон Гука и выражение для пластической деформации, преобразуем уравнение равновесия (2) к виду

$$u'' + u'\beta^{-1} - u\beta^{-2} = 2h_6 \beta^{-1} - h_6 g_6 \Omega \beta + \alpha \frac{h_6 g_6}{1 - 2\nu} T',$$

$$h_6 = \frac{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}{1 + (1 - \nu^2)H}, \quad g_6 = 2 + H + H\nu.$$

Решение этого уравнения с учетом (13) имеет вид

$$u = c_{11} \beta^{-1} + c_{12} \beta + h_6 \beta \ln \beta - m_6 \Omega \beta^3 + n_6 \Delta T (1 - 2 \ln \beta) \beta,$$

$$m_6 = \frac{h_6 g_6}{8}, \quad n_6 = \frac{\alpha(1 + \nu)g_6}{4(1 + H(1 - \nu^2)) \ln \delta}.$$

4. Вычисление констант интегрирования и переходных скоростей. Процесс упругопластического деформирования разделяется на два или три интервала, в каждом из которых цилиндр состоит из нескольких пластических и упругой областей. Завершающим шагом решения является вычисление неизвестных констант интегрирования и координат границ между областями. С этой целью для каждого интервала формулируется система уравнений, состоящая из граничных условий задачи (11), а также трех условий непрерывности на каждой границе. Такая система является линейной относительно констант интегрирования и нелинейной относительно координат между областями. Часть уравнений системы решается в символьном виде относительно констант интегрирования. Данный шаг может занимать длительное время, однако его достаточно выполнить лишь один раз. Далее полученные выражения вместе с параметрами задачи подставляются в оставшиеся уравнения системы, которые решаются численно относительно неизвестных координат границ. Описанную процедуру удобно выполнять в системах компьютерной алгебры.

Рассмотрим первый интервал $\Omega_p \leq \Omega \leq \Omega_1$. Неизвестными величинами являются константы интегрирования c_1, c_2, c_3, c_4 в пластических областях I и II, d_1, d_2 в упругой области, а также координаты β_1 и β_2 границ между областями. Выражения для констант интегрирования можно получить из решения следующей системы линейных уравнений:

$$\begin{aligned} u^I(\delta) = 0, \quad u^I(\beta_1) = u^{II}(\beta_1), \quad \sigma_{rr}^I(\beta_1) = \sigma_{rr}^{II}(\beta_1), \\ p_{rr}^{II}(\beta_2) = 0, \quad \sigma_{rr}^{El}(\beta_2) - \sigma_{zz}^{El}(\beta_2) = 1, \quad \sigma_{rr}^{El}(1) = 0. \end{aligned} \quad (21)$$

Здесь верхний индекс обозначает область, индекс El соответствует упругой области. Координаты β_1 и β_2 определяются численно из приведенной ниже системы (22) нелинейных уравнений с учетом решения системы (21), численных значений параметров задачи $\delta, \nu, H, \alpha, \Delta T$ и выбранного значения скорости вращения Ω :

$$\sigma_{zz}^I(\beta_1) = \sigma_{zz}^{II}(\beta_1), \quad u^{II}(\beta_2) = u^{El}(\beta_2). \quad (22)$$

Нетрудно убедиться в том, что уравнения (21) и (22) обеспечивают выполнение граничных условий, а также непрерывность всех искомых функций. Переходное значение коэффициента Пуассона ν_{tr} вычисляется с помощью уравнений (22) вместе со следующими условиями:

$$\sigma_{rr}^{II}(\beta_2) = \sigma_{\theta\theta}^{II}(\beta_2), \quad \sigma_{\theta\theta}^{El}(1) - \sigma_{rr}^{El}(1) = 1. \quad (23)$$

В полученной расширенной системе уравнений неизвестными являются $\beta_1, \beta_2, \nu_{tr}, \Omega$. Для вычисления переходной скорости Ω_1 к уравнениям (22) добавляется одно из уравнений (23) в зависимости от выполнения неравенства $\nu < \nu_{tr}$. Заметим, что ν_{tr} зависит от параметров $\delta, H, \alpha, \Delta T$.

На интервале $\Omega_1 \leq \Omega \leq \Omega_2$ цилиндр может состоять из трех или четырех пластических областей. В первом случае неизвестные константы интегрирования определяются из решения системы уравнений:

$$\begin{aligned} u^I(\delta) = 0, \quad u^I(\beta_1) = u^{II}(\beta_1), \quad \sigma_{rr}^I(\beta_1) = \sigma_{rr}^{II}(\beta_1), \\ p_{rr}^{II}(\beta_2) = 0, \quad \sigma_{rr}^{El}(\beta_2) - \sigma_{zz}^{El}(\beta_2) = 1, \\ \sigma_{\theta\theta}^{El}(\beta_3) - \sigma_{rr}^{El}(\beta_3) = 1, \quad p_{\theta\theta}^{VI}(\beta_3) = 0, \quad \sigma_{rr}^{VI}(1) = 0. \end{aligned}$$

В свою очередь, для вычисления границ используются уравнения

$$\sigma_{zz}^I(\beta_1) = \sigma_{zz}^{II}(\beta_1), \quad u^{II}(\beta_2) = u^{El}(\beta_2), \quad u^{El}(\beta_3) = u^{VI}(\beta_3). \quad (24)$$

Для определения переходной скорости Ω_2 уравнения (24) дополняются первым из условий (23). Если $\nu < \nu_{tr}$, то на втором интервале цилиндр состоит из четырех пластических областей. Константы интегрирования вычисляются из следующей системы уравнений

$$\begin{aligned} u^I(\delta) &= 0, \quad u^I(\beta_1) = u^{II}(\beta_1), \quad \sigma_{rr}^I(\beta_1) = \sigma_{rr}^{II}(\beta_1), \\ u^{II}(\beta_2) &= u^{III}(\beta_2), \quad \sigma_{rr}^{II}(\beta_2) = \sigma_{rr}^{III}(\beta_2), \\ \sigma_{rr}^{III}(\beta_3) &= \sigma_{rr}^{IV}(\beta_3), \quad \sigma_{zz}^{III}(\beta_3) = \sigma_{zz}^{IV}(\beta_3), \\ \sigma_{rr}^{IV}(\beta_4) &= \sigma_{rr}^{El}(\beta_4), \quad \sigma_{\theta\theta}^{El}(\beta_4) - \sigma_{zz}^{El}(\beta_4) = 1, \quad \sigma_{rr}^{El}(1) = 0. \end{aligned}$$

Координаты границ определяются численно с помощью системы

$$\begin{aligned} \sigma_{zz}^I(\beta_1) &= \sigma_{zz}^{II}(\beta_1), \quad \sigma_{zz}^{II}(\beta_2) = \sigma_{zz}^{III}(\beta_2), \\ u^{III}(\beta_3) &= u^{IV}(\beta_3), \quad u^{IV}(\beta_4) = u^{El}(\beta_4). \end{aligned} \quad (25)$$

Если $\Delta T = \Delta T_{tr}$, то пластическая область VI зарождается на внешней поверхности цилиндра в момент $\Omega = \Omega_{fp}$ перехода в состояние полной пластичности. Таким образом, для вычисления ΔT_{tr} дополним систему (25) следующими условиями:

$$\beta_4 = 1, \quad \sigma_{\theta\theta}^{El}(1) - \sigma_{rr}^{El}(1) = 1. \quad (26)$$

Заметим, что константы интегрирования в упругой области с учетом условия $\beta_4 = 1$ примут вид

$$d_1 = \frac{(4 - (1 - 2\nu)\Omega) \ln \delta - 2\alpha(1 + 2 \ln \delta) \Delta T_{tr}}{4(1 - \nu) \ln \delta}, \quad d_2 = \frac{2 + \Omega}{4 - 4\nu}.$$

В свою очередь, второе из условий (26) преобразуется следующим образом:

$$d_1 + \frac{(1 - 2\nu)\Omega \ln \delta + 2\alpha \Delta T_{tr}}{4(1 - \nu) \ln \delta} = 1.$$

Из двух последних соотношений нетрудно найти переходное значение градиента температуры:

$$\Delta T_{tr} = \frac{\nu}{\alpha}.$$

Если $\Delta T < \Delta T_{tr}$, то для вычисления Ω_2 система уравнений (25) дополняется вторым условием (26). В противном случае система уравнений (25) решается совместно с первым из уравнений (26) для определения Ω_{fp} . На третьем интервале $\Omega_2 \leq \Omega \leq \Omega_{fp}$ цилиндр состоит из 5 пластических областей. Необходимые системы уравнений на этом интервале формулируются аналогичным образом, а дополнительное условие для вычисления Ω_{fp} имеет вид $\beta_4 = \beta_5$.

5. Результаты. В качестве примера рассмотрим цилиндр, геометрический параметр которого равен $\delta = 0.25$. В качестве отсчетной температуры примем $T_0 = 300$ К. Цилиндр изготовлен из алюминиевого сплава со следующими значениями параметров: $E = 66$ ГПа, $\sigma_0 = 237$ МПа, $H = 6.195$ ГПа, $\alpha = 2.32 \cdot 10^{-5}$ К $^{-1}$, $\nu = 0.33$ [39]. Соответствующие безразмерные величины примут значения $\bar{H} = 0.094$, $\bar{\alpha} = 1.938$. Отсюда максимальное значение температурного градиента $\Delta T_p = 0.4388$; переходное значение температурного градиента $\Delta T_{tr} = 0.1703$. Также отметим, что неравенство (20) выполняется.

Численные зависимости скоростей вращения Ω_p и Ω_{fp} от градиента температуры ΔT представлены на рис. 1. Видно, что и Ω_p , и Ω_{fp} снижаются с увеличением ΔT от 0 до ΔT_p на 34% и 50% соответственно. Следует отметить, что в полном вращающемся цилиндре, боковые поверхности которого свободны от напряжений, наличие положительного температурного градиента также приводит к снижению Ω_p , однако умеренные значения градиента ΔT могут вызвать даже небольшое увеличение критической скорости Ω_{fp} [26]. Скорость начала пластического течения (рис. 1) следует линейной аналитической зависимости (17) практически для всех значений ΔT , лишь для $\Delta T \approx \Delta T_p$ у графика Ω_p появляется небольшой нелинейный участок. Зависимость $\Omega_{fp}(\Delta T)$ состоит из двух практически линейных участков, а для $\Delta T > \Delta T_{tr}$ скорость падения Ω_{fp} увеличивается. Интересно отметить, что для $\Delta T \approx \Delta T_p$ во всем цилиндре еще до начала пластического течения реализуется напряженное состояние, близкое к условию пластичности $\sigma_{rr} - \sigma_{zz} = 1$, откуда можно ожидать, что скорости Ω_p и Ω_{fp} будут практически равны. Однако, как показали расчеты, при таких условиях цилиндр способен выдерживать значительные скорости до полного перехода в пластическое состояние и в нем также появляются пластические области III и IV.

Перейдем к анализу напряженно-деформированного состояния. Не будем подробно останавливаться на каждой стадии процесса упругопластического деформирования. Рассмотрим влияние температурного градиента на распределение и величину напряжений и пластических деформаций в цилиндре. Для сравнения используются следующие значения температурного градиента: $\Delta T = 0.0$ (изотермический случай), $\Delta T = 0.2$, $\Delta T = 0.4$. На рис. 2 представлено распределение напряжений в цилиндре при скорости $\Omega = 2.709$. Данное значение скорости соответствует началу пластического течения в цилиндре при температурном градиенте $\Delta T = 0.4$. Разумеется, для значений градиента $\Delta T = 0.0$ и $\Delta T = 0.2$ цилиндр при такой скорости еще находится в упругом состоянии. Из рис. 2 видно, что наличие температурного градиента приводит к значительному повышению абсолютной величины напряжений во вращающемся цилиндре. Помимо этого происходит и качественное изменение напряженного состояния, в частности, при больших значениях градиента ΔT и скоростях, близких к Ω_p , во всем цилиндре реализуется неравенство $\sigma_{rr} > \sigma_{\theta\theta} > \sigma_{zz}$, однако при дальнейшем увеличении скорости вращения вблизи внешней поверхности цилиндра появится область, в которой $\sigma_{\theta\theta} > \sigma_{rr} > \sigma_{zz}$.

На рис. 3 представлено распределение напряжений и пластических деформаций в цилиндре при скорости $\Omega = 6.428$. Выбранное значение скорости соответствует полному переходу цилиндра в пластическое состояние для значения градиента $\Delta T = 0.4$. При $\Delta T = 0.0$ и $\Delta T = 0.2$ и указанном значении

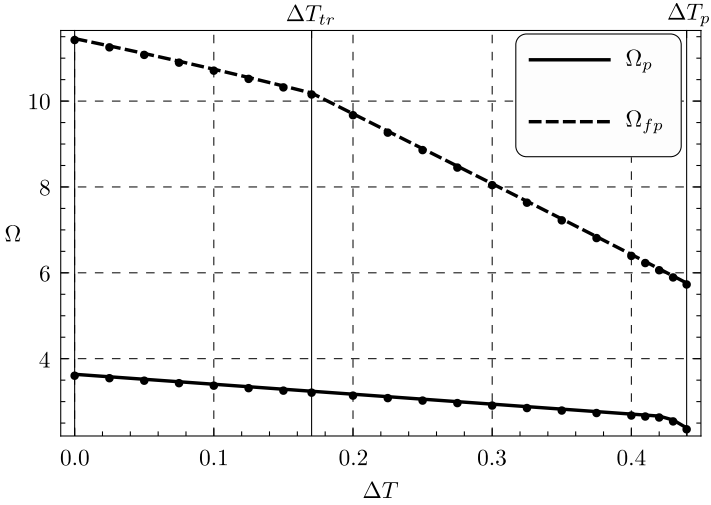


Рис. 1. Скорости начала пластического течения Ω_p и полного перехода в состояние пластичности Ω_{fp} в зависимости от температурного градиента ΔT
 [Figure 1. The elastic limit angular velocity Ω_p and the plastic limit angular velocity Ω_{fp} versus the temperature gradient ΔT]

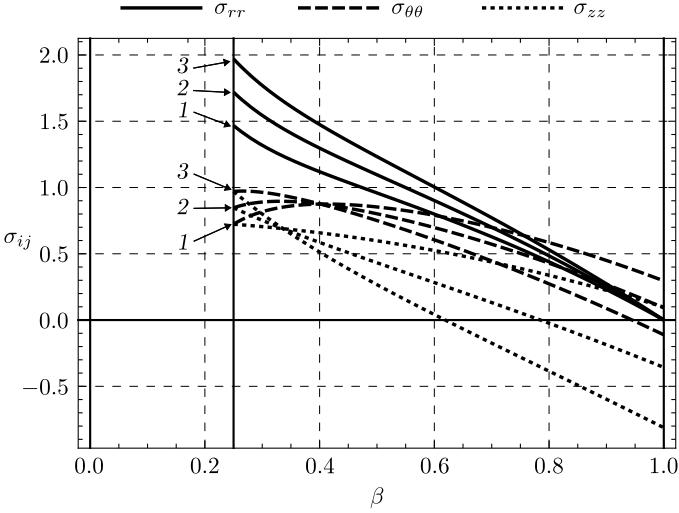


Рис. 2. Распределение упругих напряжений в цилиндре при $\Omega = 2.709$ для различных значений градиента температуры: 1 — $\Delta T = 0.0$, 2 — $\Delta T = 0.2$, 3 — $\Delta T = 0.4$

[Figure 2. Elastic stresses distribution in the cylinder at $\Omega = 2.709$ for different values of the temperature gradient: 1 — $\Delta T = 0.0$, 2 — $\Delta T = 0.2$, 3 — $\Delta T = 0.4$]

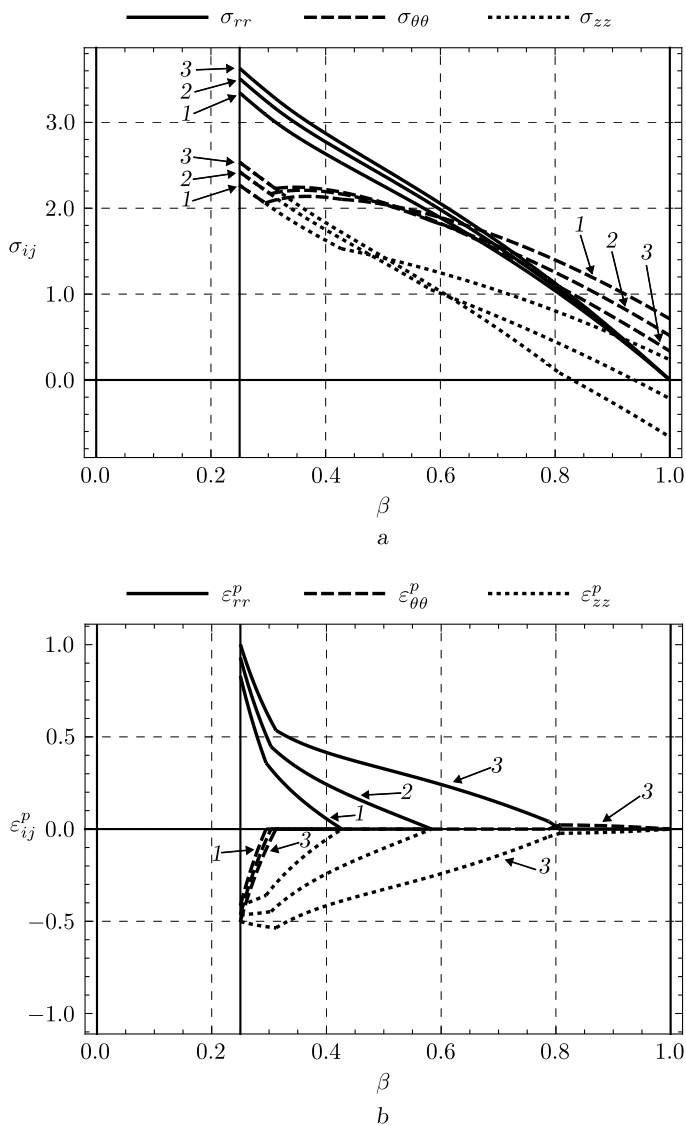


Рис. 3. Распределение напряжений (а) и пластических деформаций (b) при $\Omega = 6.428$ для различных значений градиента температуры: 1 — $\Delta T = 0.0$, 2 — $\Delta T = 0.2$, 3 — $\Delta T = 0.4$

[Figure 3. Stresses (a) and plastic strains (b) distribution at $\Omega = 6.428$ for different values of the temperature gradient: 1 — $\Delta T = 0.0$, 2 — $\Delta T = 0.2$, 3 — $\Delta T = 0.4$]

скорости в цилиндре еще присутствует область чисто упругого деформирования. Сравнивая рис. 2 и 3, отметим, что с ростом скорости вращения напряжения в цилиндре, разумеется, также возрастают. Из рис. 3 видим, что температурный градиент значительно ускоряет распространение пластического течения. Кроме того, как и в чисто упругом состоянии, абсолютная величина напряжений и пластических деформаций существенно возрастает с увеличением температурного градиента. Для достаточно больших значений температурного градиента и скоростей вращения вблизи внешней поверхности цилиндра появляется область отрицательных осевых напряжений, в то время как в изотермическом случае все напряжения в течение процесса остаются положительными.

Закключение. В настоящей работе получено точное решение задачи об упругопластическом деформировании вращающегося цилиндра с жестким включением при наличии температурного градиента между внутренней и внешней поверхностями. Установлено, что температурный градиент приводит к значительному снижению скорости начала пластического течения, а само течение может возникнуть внутри цилиндра, а не на внутренней боковой поверхности, как и в изотермическом случае. Критическая скорость вращения, соответствующая полному переходу цилиндра в пластическое состояние, также заметно снижается с увеличением температурного градиента. Кроме того, наличие градиента температуры приводит к увеличению абсолютной величины напряжений и пластических деформаций в цилиндре. Для дальнейших исследований представляет интерес термоупругопластический анализ вращающегося цилиндра из материала, чьи механические и теплофизические параметры зависят от температуры.

Конкурирующие интересы. Конкурирующих интересов не имею.

Авторский вклад и ответственность. Я несу полную ответственность за предоставление окончательной версии рукописи в печать. Окончательная версия рукописи мною одобрена.

Финансирование. Работа выполнена в рамках госзадания ХФИЦ ДВО РАН.

Библиографический список

1. Gamer U., Sayir M. Elastic-plastic stress distribution in a rotating solid shaft // *ZAMM, Z. Angew. Math. Mech.*, 1984. vol. 35. pp. 601–617. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00952107>.
2. Gamer U., Mack W., Varga I. Rotating elastic-plastic solid shaft with fixed ends // *Int. J. Eng. Sci.*, 1997. vol. 35, no. 3. pp. 253–267. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0020-7225\(96\)00085-7](https://doi.org/10.1016/S0020-7225(96)00085-7).
3. Mack W. The rotating elastic-plastic solid shaft with free ends // *Techn. Mech.*, 1991. vol. 12, no. 2. pp. 119–124.
4. Gamer U., Lance R. H. Stress distribution in a rotating elastic-plastic tube // *Acta Mech.*, 1983. vol. 50. pp. 1–8. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01170437>.
5. Mack W. Rotating elastic-plastic tube with free ends // *Int. J. Solids Struct.*, 1991. vol. 27, no. 11. pp. 1461–1476. DOI: [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(91\)90042-E](https://doi.org/10.1016/0020-7683(91)90042-E).
6. Kamal S. M., Perl M., Bharali D. Generalized plane strain study of rotational autofrettage of thick-walled cylinders — Part I: Theoretical analysis // *J. Pressure Vessel Technol.*, 2019. vol. 141, no. 5, 051201. DOI: <https://doi.org/10.1115/1.4043591>.
7. Prokudin A. N. Exact elastoplastic analysis of a rotating cylinder with a rigid inclusion

- under mechanical loading and unloading // *ZAMM, Z. Angew. Math. Mech.*, 2020. vol. 100, no. 3, e201900213. DOI: <https://doi.org/10.1002/zamm.201900213>.
8. Прокудин А. Н., Фирсов С. В. Упругопластическое деформирование вращающегося полого цилиндра с жестким внешним покрытием // *Вестн. ПНИПУ. Механика*, 2019. №4. С. 120–135. EDN: VUXFSF. DOI: <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2019.4.12>.
 9. Lindner T., Mack W. Residual stresses in an elastic-plastic solid shaft with fixed ends after previous rotation // *ZAMM, Z. Angew. Math. Mech.*, 1998. vol. 78, no. 2. pp. 75–86. DOI: [https://doi.org/10.1002/\(SICI\)1521-4001\(199802\)78:2<75::AID-ZAMM75>3.0.CO;2-V](https://doi.org/10.1002/(SICI)1521-4001(199802)78:2<75::AID-ZAMM75>3.0.CO;2-V).
 10. Прокудин А. Н. Упругопластический анализ вращающегося сплошного цилиндра при условии максимальных приведенных напряжений // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2020. Т. 24, №1. С. 74–94. EDN: LJTYOU. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1737>.
 11. Prokudin A. N. Schmidt–Ishlinskii yield criterion and a rotating cylinder with a rigid inclusion // *J. Appl. Comput. Mech.*, 2021. vol. 7, no. 2. pp. 858–869. EDN: JNCMTU. DOI: <https://doi.org/10.22055/jacm.2020.35648.2704>.
 12. Прокудин А. Н., Фирсов С. В. Упругопластические деформации во вращающемся полом цилиндре с жестким внешним покрытием при условии максимальных приведенных напряжений // *Сиб. журн. индустр. матем.*, 2022. Т. 25, №2. С. 58–82. EDN: DALRRD. DOI: <https://doi.org/10.33048/SIBJIM.2022.25.205>.
 13. Прокудин А. Н., Буренин А. А. Анализ упругопластического деформирования вращающегося сплошного цилиндра при общем кусочно-линейном условии пластичности // *ПМТФ*, 2021. Т. 62, №5. С. 68–79. EDN: TBZEIN. DOI: <https://doi.org/10.15372/PMTF20210507>.
 14. Eraslan A. N. On the linearly hardening rotating solid shaft // *Eur. J. Mec. A – Solids*, 2003. vol. 22, no. 2. pp. 295–307. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0997-7538\(02\)00002-5](https://doi.org/10.1016/S0997-7538(02)00002-5).
 15. Zare H. R., Darijani H. A novel autofrettage method for strengthening and design of thick-walled cylinders // *Materials & Design*, 2019. vol. 105. pp. 366–374. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.matdes.2016.05.062>.
 16. Zare H. R., Darijani H. Strengthening and design of the linear hardening thick-walled cylinders using the new method of rotational autofrettage // *Int. J. Mech. Sci.*, 2017. vol. 124–125. pp. 1–8. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2017.02.015>.
 17. Eraslan A. N. Von Mises' yield criterion and nonlinearly hardening rotating shafts // *Acta Mech.*, 2004. vol. 168, no. 3–4. pp. 129–144. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00707-004-0088-z>.
 18. Eraslan A. N., Mack W. A computational procedure for estimating residual stresses and secondary plastic flow limits in nonlinearly strain hardening rotating shafts // *Forsch. Ingenieurwesen*, 2005. vol. 69. pp. 65–75. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10010-004-0138-7>.
 19. Prokudin A. N. Exact elastoplastic analysis of a rotating hollow cylinder made of power-law hardening material // *Mater. Phys. Mech.*, 2023. vol. 51, no. 2. pp. 96–111. EDN: FEBDDA. DOI: https://doi.org/10.18149/MPM.5122023_9.
 20. Akhavanfar S., Darijani H., Darijani F. Constitutive modeling of high strength steels; application to the analytically strengthening of thick-walled tubes using the rotational autofrettage // *Eng. Struct.*, 2023. vol. 278, 115516. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2022.115516>.
 21. Akis T., Eraslan A.N. Exact solution of rotating FGM shaft problem in the elastoplastic state of stress // *Arch. Appl. Mech.*, 2007. vol. 77, no. 10. pp. 745–765. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00419-007-0123-3>.
 22. Eraslan A. N., Akis T. The stress response of partially plastic rotating FGM hollow shafts: Analytical treatment for axially constrained ends // *Mech. Based Design Struct. Machines*, 2006. vol. 34, no. 3. pp. 241–260. DOI: <https://doi.org/10.1080/15397730600779285>.
 23. Nejad M. Z., Fatehi P. Exact elasto-plastic analysis of rotating thick-walled cylindrical pressure vessels made of functionally graded materials // *Int. J. Eng. Sci.*, 2015. vol. 86. pp. 26–43. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2014.10.002>.

24. Argeso H., Eraslan A. N. A computational study on functionally graded rotating solid shafts // *Int. J. Comput. Methods Eng. Sci. Mech.*, 2007. vol. 8, no. 6. pp. 391–399. DOI: <https://doi.org/10.1080/15502280701577842>.
25. Varmazyari S., Shokrollahi H. Analytical solution for strain gradient plasticity of rotating functionally graded thick cylinders // *Int. J. Appl. Mech.*, 2020. vol. 12, no. 07, 2050082. DOI: <https://doi.org/10.1142/S1758825120500829>.
26. Eraslan A. N., Arslan E., Mack W. The strain hardening rotating hollow shaft subject to a positive temperature gradient // *Acta Mech.*, 2007. vol. 194, no. 1–4. pp. 191–211. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00707-007-0456-6>.
27. Arslan E., Mack W., Eraslan A. N. The rotating elastic-plastic hollow shaft conveying a hot medium // *Forsch. Ingenieurwesen*, 2010. vol. 74. pp. 27–39. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10010-010-0113-4>.
28. Arslan E., Mack W., Eraslan A. N. Effect of a temperature cycle on a rotating elastic-plastic shaft // *Acta Mech.*, 2008. vol. 195, no. 1–4. pp. 129–140. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00707-007-0549-2>.
29. Nejad M. Z., Alamzadeh N., Hadi A. Thermoelastoplastic analysis of FGM rotating thick cylindrical pressure vessels in linear elastic-fully plastic condition // *Compos. B: Eng.*, 2018. vol. 154. pp. 410–422. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2018.09.022>.
30. Ebrahimi T., Nejad M. Z., Jahankoha H., Hadi A. Thermoelastoplastic response of FGM linearly hardening rotating thick cylindrical pressure vessels // *Steel Compos. Struct.*, 2021. vol. 38, no. 2. pp. 189–211. DOI: <https://doi.org/10.12989/scs.2021.38.2.189>.
31. Apatay T., Arslan E., Mack W. Effects of homogeneous and inhomogeneous heating on rotating shrink fits with annular inclusion and functionally graded hub // *J. Thermal Stresses*, 2019. vol. 42, no. 11. pp. 1458–1479. DOI: <https://doi.org/10.1080/01495739.2019.1638856>.
32. Hajisadeghian A., Masoumi A., Parvizi A. Analytical investigation of elastic and plastic behavior of rotating double-walled FGM-homogenous hollow shafts // *Arch. Appl. Mech.*, 2021. vol. 91. pp. 1343–1369. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00419-020-01826-9>.
33. Eldeeb A. M., Shabana Y. M., Elsawaf A. Investigation of the thermoelastoplastic behaviors of multilayer FGM cylinders // *Compos. Struct.*, 2021. vol. 276. pp. 114523. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2021.114523>.
34. Güven U. The fully plastic rotating disk with rigid inclusion // *ZAMM, Z. Angew. Math. Mech.*, 1997. vol. 77, no. 9. pp. 714–716. DOI: <https://doi.org/10.1002/zamm.19970770912>.
35. Güven U. Elastic-plastic rotating disk with rigid inclusion // *Mech. Struct. Machines*, 1999. vol. 27, no. 1. pp. 117–128. DOI: <https://doi.org/10.1080/08905459908915691>.
36. Parmaksizoglu C., Güven U. Plastic stress distribution in a rotating disk with rigid inclusion under a radial temperature gradient // *Mech. Struct. Machines*, 1998. vol. 26, no. 1. pp. 9–20. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00419-020-01826-9>.
37. Eraslan A. N., Akis T. On the elastic-plastic deformation of a rotating disk subjected to a radial temperature gradient // *Mech. Based Design Struct. Machines*, 2003. vol. 31, no. 4. pp. 529–561. DOI: <https://doi.org/10.1081/SME-120023170>.
38. Koiter W. T. Stress-strain relations, uniqueness and variational theorems for elastic-plastic materials with a singular yield surface // *Q. Appl. Math.*, 1953. vol. 11, no. 3. pp. 350–354. DOI: <https://doi.org/10.1090/qam/59769>.
39. Meng Q., Zhao J., Mu Zh., Zhai R., Yu G. Springback prediction of multiple reciprocating bending based on different hardening models // *J. Manufact. Proces.*, 2022. vol. 76. pp. 251–263. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jmapro.2022.01.070>.

MSC: 74C05, 74B05, 74G05

Elastoplastic analysis of a rotating hollow cylinder with a rigid shaft under temperature gradient

A. N. Prokudin

Institute of Machinery and Metallurgy,
Khabarovsk Federal Research Center, Far-East Branch of RAS,
1, Metallurgov st., Komsomolsk-on-Amur, 681005, Russian Federation.

Abstract

The article is devoted to thermoelastoplastic analysis of a rotating cylinder with a rigid shaft and fixed ends. The problem statement is based on the theory of infinitesimal deformations, the Tresca yield condition, the flow rule associated with it and the law of linear isotropic hardening.

It is assumed that the cylinder is subject to stationary positive temperature gradient between the inner and outer surfaces. The mechanical and thermophysical parameters of the material are assumed to be independent of temperature. The performed analysis is limited to the loading stage.

It is found that, in the general case, six plastic regions can appear in a cylinder, corresponding to different edges and faces of the Tresca hexagon, and the evolution of plastic flow has qualitative differences from the isothermal case. For each plastic region, an exact solution of the governing equations is found. It has been established that the temperature gradient leads to a significant increase in the absolute value of stresses and plastic deformations in the cylinder and a decrease in elastic and plastic limit angular velocities.

Keywords: rotating cylinder, rigid inclusion, elastoplasticity, linear hardening, thermal stresses.

Received: 31st July, 2023 / Revised: 21st September, 2024 /

Accepted: 27th September, 2024 / First online: 21st October, 2024

Competing interests. I have no competing interests.

Authors' contributions and responsibilities. I take full responsibility for providing the final version of the manuscript for publication. The final version of the manuscript has been approved by me.

Mechanics of Solids

Research Article

© The Author(s), 2024

© Samara State Technical University, 2024 (Compilation, Design, and Layout)

♾️ The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Please cite this article in press as:

Prokudin A. N. Elastoplastic analysis of a rotating hollow cylinder with a rigid shaft under temperature gradient, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2024, vol. 28, no. 3, pp. 462–488. EDN: RQASZT. DOI: 10.14498/vsgtu2050 (In Russian).

Author's Details:

Aleksandr N. Prokudin  <https://orcid.org/0000-0002-5156-424X>

Cand. Tech. Sci.; Senior Researcher; Lab. of Problems of Materials and Products Construction and Processing; e-mail: sunbeam_85@mail.ru

Funding. The study was performed within the framework of the State Contract of the Khabarovsk Federal Research Center of the Far-East Branch of the Russian Academy of Sciences.

References

1. Gamer U., Sayir M. Elastic-plastic stress distribution in a rotating solid shaft, *ZAMM, Z. Angew. Math. Mech.*, 1984, vol. 35, pp. 601–617. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00952107>.
2. Gamer U., Mack W., Varga I. Rotating elastic-plastic solid shaft with fixed ends, *Int. J. Eng. Sci.*, 1997, vol. 35, no. 3, pp. 253–267. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0020-7225\(96\)00085-7](https://doi.org/10.1016/S0020-7225(96)00085-7).
3. Mack W. The rotating elastic-plastic solid shaft with free ends, *Techn. Mech.*, 1991, vol. 12, no. 2, pp. 119–124.
4. Gamer U., Lance R. H. Stress distribution in a rotating elastic-plastic tube, *Acta Mech.*, 1983, vol. 50, pp. 1–8. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01170437>.
5. Mack W. Rotating elastic-plastic tube with free ends, *Int. J. Solids Struct.*, 1991, vol. 27, no. 11, pp. 1461–1476. DOI: [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(91\)90042-E](https://doi.org/10.1016/0020-7683(91)90042-E).
6. Kamal S. M., Perl M., Bharali D. Generalized plane strain study of rotational autofrettage of thick-walled cylinders — Part I: Theoretical analysis, *J. Pressure Vessel Technol.*, 2019, vol. 141, no. 5, 051201. DOI: <https://doi.org/10.1115/1.4043591>.
7. Prokudin A. N. Exact elastoplastic analysis of a rotating cylinder with a rigid inclusion under mechanical loading and unloading, *ZAMM, Z. Angew. Math. Mech.*, 2020, vol. 100, no. 3, e201900213. DOI: <https://doi.org/10.1002/zamm.201900213>.
8. Prokudin A. N., Firsov S. V. Elastoplastic deformation of a rotating hollow cylinder with a rigid casing, *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2019, no. 4, pp. 120–135 (In Russian). EDN: VUXFSF. DOI: <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2019.4.12>.
9. Lindner T., Mack W. Residual stresses in an elastic-plastic solid shaft with fixed ends after previous rotation, *ZAMM, Z. Angew. Math. Mech.*, 1998, vol. 78, no. 2, pp. 75–86. DOI: [https://doi.org/10.1002/\(SICI\)1521-4001\(199802\)78:2<75::AID-ZAMM75>3.0.CO;2-V](https://doi.org/10.1002/(SICI)1521-4001(199802)78:2<75::AID-ZAMM75>3.0.CO;2-V).
10. Prokudin A. N. Elastic-plastic analysis of rotating solid shaft by maximum reduced stress yield criterion, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2020, vol. 24, no. 1, pp. 74–94 (In Russian). EDN: LJTYOU. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1737>.
11. Prokudin A. N. Schmidt–Ishlinskii yield criterion and a rotating cylinder with a rigid inclusion, *J. Appl. Comput. Mech.*, 2021, vol. 7, no. 2, pp. 858–869. EDN: JNCMTU. DOI: <https://doi.org/10.22055/jacm.2020.35648.2704>.
12. Prokudin A. N., Firsov S. V. Elastoplastic deformation of a rotating hollow cylinder with a rigid casing under maximum reduced stress yield, *J. Appl. Ind. Math.*, 2022, vol. 16, no. 2, pp. 313–332. EDN: KLJMPP. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1990478922020120>.
13. Prokudin A. N., Burenin A. A. Unified yield criterion and elastoplastic analysis of a rotating solid cylinder, *J. Appl. Mech. Techn. Phys.*, 2021, vol. 62, no. 5, pp. 760–770. EDN: CAKHOD. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0021894421050072>.
14. Eraslan A. N. On the linearly hardening rotating solid shaft, *Eur. J. Mec. A – Solids*, 2003, vol. 22, no. 2, pp. 295–307. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0997-7538\(02\)00002-5](https://doi.org/10.1016/S0997-7538(02)00002-5).
15. Zare H. R., Darijani H. A novel autofrettage method for strengthening and design of thick-walled cylinders, *Materials & Design*, 2019, vol. 105, pp. 366–374. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.matdes.2016.05.062>.
16. Zare H. R., Darijani H. Strengthening and design of the linear hardening thick-walled cylinders using the new method of rotational autofrettage, *Int. J. Mech. Sci.*, 2017, vol. 124–125, pp. 1–8. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2017.02.015>.

17. Eraslan A. N. Von Mises' yield criterion and nonlinearly hardening rotating shafts, *Acta Mech.*, 2004, vol.168, no.3–4, pp. 129–144. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00707-004-0088-z>.
18. Eraslan A. N., Mack W. A computational procedure for estimating residual stresses and secondary plastic flow limits in nonlinearly strain hardening rotating shafts, *Forsch. Ingenieurwesen*, 2005, vol. 69, pp. 65–75. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10010-004-0138-7>.
19. Prokudin A. N. Exact elastoplastic analysis of a rotating hollow cylinder made of power-law hardening material, *Mater. Phys. Mech.*, 2023, vol. 51, no. 2, pp. 96–111. EDN: FEBDDA. DOI: https://doi.org/10.18149/MPM.5122023_9.
20. Akhavanfar S., Darijani H., Darijani F. Constitutive modeling of high strength steels; application to the analytically strengthening of thick-walled tubes using the rotational autofretting, *Eng. Struct.*, 2023, vol. 278, 115516. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2022.115516>.
21. Akis T., Eraslan A.N. Exact solution of rotating FGM shaft problem in the elastoplastic state of stress, *Arch. Appl. Mech.*, 2007, vol. 77, no. 10, pp. 745–765. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00419-007-0123-3>.
22. Eraslan A. N., Akis T. The stress response of partially plastic rotating FGM hollow shafts: Analytical treatment for axially constrained ends, *Mech. Based Design Struct. Machines*, 2006, vol. 34, no. 3, pp. 241–260. DOI: <https://doi.org/10.1080/15397730600779285>.
23. Nejad M. Z., Fatehi P. Exact elasto-plastic analysis of rotating thick-walled cylindrical pressure vessels made of functionally graded materials, *Int. J. Eng. Sci.*, 2015, vol. 86, pp. 26–43. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2014.10.002>.
24. Argeso H., Eraslan A. N. A computational study on functionally graded rotating solid shafts, *Int. J. Comput. Methods Eng. Sci. Mech.*, 2007, vol. 8, no. 6, pp. 391–399. DOI: <https://doi.org/10.1080/15502280701577842>.
25. Varmazyari S., Shokrollahi H. Analytical solution for strain gradient plasticity of rotating functionally graded thick cylinders, *Int. J. Appl. Mech.*, 2020, vol. 12, no. 07, 2050082. DOI: <https://doi.org/10.1142/S1758825120500829>.
26. Eraslan A. N., Arslan E., Mack W. The strain hardening rotating hollow shaft subject to a positive temperature gradient, *Acta Mech.*, 2007, vol. 194, no. 1–4, pp. 191–211. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00707-007-0456-6>.
27. Arslan E., Mack W., Eraslan A. N. The rotating elastic-plastic hollow shaft conveying a hot medium, *Forsch. Ingenieurwesen*, 2010, vol. 74, pp. 27–39. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10010-010-0113-4>.
28. Arslan E., Mack W., Eraslan A. N. Effect of a temperature cycle on a rotating elastic-plastic shaft, *Acta Mech.*, 2008, vol. 195, no. 1–4, pp. 129–140. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00707-007-0549-2>.
29. Nejad M. Z., Alamzadeh N., Hadi A. Thermoelastoplastic analysis of FGM rotating thick cylindrical pressure vessels in linear elastic-fully plastic condition, *Compos. B: Eng.*, 2018, vol. 154, pp. 410–422. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2018.09.022>.
30. Ebrahimi T., Nejad M. Z., Jahankoha H., Hadi A. Thermoelastoplastic response of FGM linearly hardening rotating thick cylindrical pressure vessels, *Steel Compos. Struct.*, 2021, vol. 38, no. 2, pp. 189–211. DOI: <https://doi.org/10.12989/scs.2021.38.2.189>.
31. Apatay T., Arslan E., Mack W. Effects of homogeneous and inhomogeneous heating on rotating shrink fits with annular inclusion and functionally graded hub, *J. Thermal Stresses*, 2019, vol. 42, no. 11, pp. 1458–1479. DOI: <https://doi.org/10.1080/01495739.2019.1638856>.
32. Hajisadeghian A., Masoumi A., Parvizi A. Analytical investigation of elastic and plastic behavior of rotating double-walled FGM-homogenous hollow shafts, *Arch. Appl. Mech.*, 2021, vol. 91, pp. 1343–1369. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00419-020-01826-9>.
33. Eldeeb A. M., Shabana Y. M., Elsawaf A. Investigation of the thermoelastoplastic behaviors of multilayer FGM cylinders, *Compos. Struct.*, 2021, vol. 276, pp. 114523. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2021.114523>.

34. Güven U. The fully plastic rotating disk with rigid inclusion, *ZAMM, Z. Angew. Math. Mech.*, 1997, vol. 77, no. 9, pp. 714–716. DOI: <https://doi.org/10.1002/zamm.19970770912>.
35. Güven U. Elastic-plastic rotating disk with rigid inclusion, *Mech. Struct. Machines*, 1999, vol. 27, no. 1, pp. 117–128. DOI: <https://doi.org/10.1080/08905459908915691>.
36. Parmaksizoglu C., Güven U. Plastic stress distribution in a rotating disk with rigid inclusion under a radial temperature gradient, *Mech. Struct. Machines*, 1998, vol. 26, no. 1, pp. 9–20. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00419-020-01826-9>.
37. Eraslan A. N., Akis T. On the elastic-plastic deformation of a rotating disk subjected to a radial temperature gradient, *Mech. Based Design Struct. Machines*, 2003, vol. 31, no. 4, pp. 529–561. DOI: <https://doi.org/10.1081/SME-120023170>.
38. Koiter W. T. Stress-strain relations, uniqueness and variational theorems for elastic-plastic materials with a singular yield surface, *Q. Appl. Math.*, 1953, vol. 11, no. 3, pp. 350–354. DOI: <https://doi.org/10.1090/qam/59769>.
39. Meng Q., Zhao J., Mu Zh., Zhai R., Yu G. Springback prediction of multiple reciprocating bending based on different hardening models, *J. Manufact. Proces.*, 2022, vol. 76, pp. 251–263. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jmapro.2022.01.070>.



УДК 539.43:621.787

Анализ остаточных напряжений в поверхностно упрочненных вращающихся призматических элементах с полукруглыми надрезами в условиях высокотемпературной ползучести

В. П. Радченко¹, М. Н. Саушкин¹, Д. М. Шишкин²

¹ Самарский государственный технический университет,
Россия, 443100, Самара, ул. Молодогвардейская, 244.

² Сызранский филиал Самарского государственного технического университета,
Россия, 446001, Самарская обл., Сызрань, ул. Советская, 45.

Аннотация

Разработан численный метод для расчета релаксации остаточных напряжений во вращающемся поверхностно упрочненном призматическом образце с полукруглым надрезом в условиях высокотемпературной ползучести. Задача моделирует напряженно-деформированное состояние образца, у которого одна грань закреплена на вращающемся с постоянной скоростью диске.

Методика включает в себя следующие этапы:

- реконструкцию полей остаточных напряжений и пластических деформаций после предварительного поверхностного пластического деформирования;
- расчет релаксации остаточных напряжений в процессе ползучести вращающегося призматического стержня.

Выполнен детальный анализ задачи для призматического образца размером 150×10×10 мм из сплава ЭП742. Одна из граней этого образца была упрочнена с помощью механического ультразвукового упрочнения. Решение задачи рассматривалось для образца с полукруглыми

Механика деформируемого твердого тела

Научная статья

© Коллектив авторов, 2024

© СамГТУ, 2024 (составление, дизайн, макет)

♾️ Контент публикуется на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

Образец для цитирования

Радченко В. П., Саушкин М. Н., Шишкин Д. М. Анализ остаточных напряжений в поверхностно упрочненных вращающихся призматических элементах с полукруглыми надрезами в условиях высокотемпературной ползучести // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2024. Т. 28, № 3. С. 489–515. EDN: GOWDBU. DOI: 10.14498/vsgtu2099.

Сведения об авторах

Владимир Павлович Радченко ✉️ <https://orcid.org/0000-0003-4168-9660>

доктор физико-математических наук, профессор; заведующий кафедрой; каф. прикладной математики и информатики; e-mail: radchenko.vp@samgtu.ru

Михаил Николаевич Саушкин <https://orcid.org/0000-0002-8260-2069>

кандидат физико-математических наук, доцент; доцент; каф. прикладной математики и информатики; e-mail: saushkin.mn@samgtu.ru

Дмитрий Михайлович Шишкин <https://orcid.org/0000-0003-3205-2262>

кандидат технических наук; доцент; каф. общетеоретических дисциплин;
e-mail: shishkin.dim@yandex.ru

надрезами радиусами 0.1 и 0.3 мм, расположенными на расстоянии 2 и 75 мм от жестко закрепленной грани.

В области надрезов после опережающего поверхностного пластического деформирования задачи решались как в упругой, так и в упруго-пластической постановках. Полученные начальные поля остаточных напряжений и пластических деформаций использовались в качестве исходных данных для решения задачи ползучести.

Анализ влияния радиусов надрезов, их расположения, угловой скорости и начальных полей остаточных напряжений на релаксацию остаточных напряжений проводился при температуре 650 °С на основе феноменологической теории течения, построенной на известных экспериментальных данных для данного сплава.

Результаты показали, что для определения начального напряженно-деформированного состояния после предварительного пластического деформирования для надреза радиусом 0.1 мм необходимо использовать упруго-пластическое решение, тогда как для радиуса 0.3 мм различия между упругими и упруго-пластическими решениями незначительны.

Исследование релаксации остаточных напряжений проводилось при угловых скоростях 1500 и 2000 об/мин в течение 100 часов. Несмотря на заметную релаксацию остаточных напряжений для образцов с надрезами радиусом 0.1 и 0.3 мм, после полной температурно-силовой разгрузки в области надрезов все же наблюдается значительный уровень остаточных сжимающих напряжений. Это свидетельствует о высокой эффективности поверхностного упрочнения при эксплуатации в условиях высокотемпературной ползучести.

Ключевые слова: остаточные напряжения, опережающее поверхностное пластическое деформирование, полукруглый надрез, вращение призматического образца, ползучесть, релаксация остаточных напряжений.

Получение: 18 июня 2024 г. / Исправление: 12 октября 2024 г. /

Принятие: 21 октября 2024 г. / Публикация онлайн: 21 ноября 2024 г.

Введение. Формирование микроструктуры поверхностного слоя деталей авиационных двигателей при их производстве является сложным процессом, сопровождающимся неоднократным изменением напряженно-деформированного состояния (НДС) на поверхностях заготовок на всех стадиях механической обработки. Процессы резания, такие как токарная обработка и фрезерование, обычно вызывают приповерхностные растягивающие напряжения, которые не всегда полностью исчезают даже на этапах финишной обработки и могут отрицательно влиять на прочность компонентов в процессе эксплуатации.

В инженерной практике такие начальные напряжения на этапе проектирования часто игнорируются, а расчеты на прочность проводятся лишь с учетом эксплуатационных нагрузок в предположении, что первоначальное напряженное состояние невозмущенное. Однако эксплуатационные напряжения комбинируются с неучтенными начальными растягивающими напряжениями, которые могут превышать допустимые предельные значения для материала, что приводит к образованию микротрещин и непрогнозируемым разрушениям.

Другим значительным фактором, способствующим нарушениям целост-

ности конструкций, таких как газотурбинные двигатели (ГТД), является локальное превышение растягивающих напряжений над их допустимыми значениями в местах концентрации напряжений. Концентраторы могут возникать как из-за конструктивных особенностей (например, канавок и пазов), так и из-за эксплуатационных дефектов (например, царапин и вмятин), вызванных столкновением с инородными объектами. Наличие концентраторов напряжений крайне нежелательно, так как они значительно увеличивают вероятность разрушения в условиях эксплуатации, часто приводя к выходу из строя всего агрегата в целом. Ситуация усугубляется высокими рабочими температурами, когда в наиболее подверженных деформации сечениях деталей возникает ползучесть.

На протяжении последних десятилетий наиболее эффективным подходом к повышению прочностных характеристик деталей и изделий в авиадвигателестроении и энергетическом машиностроении стали методы поверхностного пластического деформирования (ППД) [1–7], кавитационного [5], термопластического [8], лазерного [9] упрочнения и другие технологии. Эти методы позволяют значительно улучшить механические свойства упрочненных деталей.

Известно, что применение поверхностного упрочнения позволяет существенно повысить предел выносливости [1, 2, 4, 6, 8, 10, 11], улучшить трибологические характеристики поверхности [6, 12, 13] и увеличить микротвердость поверхностного слоя [14].

С позиции механики упрочнения улучшение показателей надежности деталей достигается за счет формирования тонкого приповерхностного слоя остаточных напряжений (ОН) сжатия, которые компенсируют эксплуатационные растягивающие напряжения. Например, в зависимости от используемого метода ППД толщина упрочненного слоя может варьироваться от 100 до 300 мкм [2, 4, 6, 14–17] при дробеструйной обработке и достигать 1 мм и более при обкатке роликом [15, 17].

Применение методов ППД также положительно влияет и на характеристики надежности деталей с концентраторами напряжений, о чем свидетельствуют результаты многих исследований [2, 6, 15, 18–21, 23–26]. В частности, поверхностное упрочнение деталей, ослабленных концентраторами напряжений, способствует значительному увеличению их предела выносливости [18–20, 24, 26].

Важно отметить, что для снижения интенсивности напряжений в предусмотренных конструкцией концентраторах напряжений применяется метод опережающего поверхностного пластического деформирования (ОППД) [18, 19, 27, 28]. Этот метод заключается в предварительном упрочнении гладкой детали с последующим удалением части материала в зоне соответствующего концентратора.

Несмотря на стабильность процесса ППД деталей и ожидаемую прогнозируемость наведенных упрочнением полей сжимающих ОН, их эффективность и распределение могут значительно снижаться в условиях интенсивного эксплуатационного температурного и температурно-силового воздействия, особенно в условиях ползучести из-за релаксации ОН. Однозначного решения этой проблемы на данный момент не существует, так как решение вопросов, связанных с релаксацией ОН в условиях ползучести, находится на стадии

становления и развития, а требования к материалам и конструктивным решениям из-за увеличения мощностей силовых установок продолжают расти. В связи с этим существует необходимость в подробном исследовании НДС упрочненных и неупрочненных деталей ГТД, работающих в условиях высокотемпературной ползучести [16, 19, 29–32].

Частичное решение упомянутой проблемы отражено в работах, посвященных разработке методов численного расчета релаксации ОН в поверхностно упрочненных гладких «бездефектных» образцах цилиндрического [31] и призматического [32] профиля, функционирующих в условиях высокотемпературной ползучести с учетом силового нагружения в поле массовых сил. Однако для поверхностно упрочненных призматических тел с концентраторами напряжений аналогичного решения задачи в данной постановке не существует. Поэтому настоящая работа посвящена разработке численного метода расчета релаксации остаточных напряжений в условиях высокотемпературной ползучести с учетом силового нагружения, вызванного вращением образца, на примере поверхностно упрочненного призматического образца с полукруглыми надрезами. В области надрезов после ОППД задача решалась как в упругой, так и в упругопластической постановках.

1. Постановка задачи. В декартовой системе координат $x y z$ рассматривается вращающийся поверхностно упрочненный призматический образец размером $150 \times 10 \times 10$ мм из сплава ЭП742 в условиях высокотемпературной ползучести при температуре 650°C в течение 100 часов. Образец ослаблен полукруглыми надрезами радиусом 0.1 и 0.3 мм, расположенными на расстоянии 2 и 75 мм от жестко закрепленной левой торцевой грани в плоскости yz (рис. 1).

Плоскость xz совмещена с верхней упрочненной гранью призматического образца (на рис. 1 показана заливкой темного цвета), которая была подвержена виброударному ультразвуковому поверхностно-пластическому упрочнению дробью (УЗУ) и на которую впоследствии наносился полукруглый надрез радиуса ρ . Закрепление образца осуществлялось консольно (жестко) по левой торцевой грани в плоскости yz , что аналогично стержню квадратного сечения, закрепленному на абсолютно жестком диске радиуса R_1 . Вращение упрочненного образца полагалось относительно вертикальной оси $A_1 A_2$ с постоянной угловой скоростью ω , в результате чего в объеме образца возникает неоднородное осевое напряженное состояние за счет переменной нагрузки $N(x)$ (рис. 1), которая приводит к развитию деформации ползучести в каждом поперечном сечении образца и релаксации наведенных упрочнении-

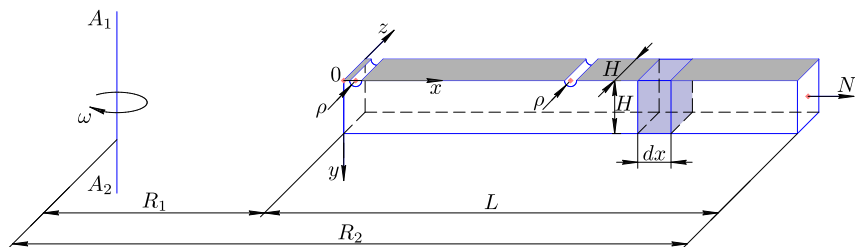


Рис. 1. Схема нагружения поверхностно упрочненного образца с полукруглыми надрезами

[Figure 1. The loading scheme for a surface-hardened sample with semicircular notches]

ем сжимающих ОН. Для дальнейшего исследования введена гипотеза плоских сечений.

Решение представленной задачи строится аналогично решению о вращении гладкого призматического образца [32]. Реализация решения для образца с полукруглым надрезом состоит из следующих расчетных этапов:

- 1) реконструкция полей ОН и пластических деформаций (ПД) после процедуры упрочнения гладкого «бездефектного» призматического образца при нормальной («комнатной») температуре T_0 ;
- 2) формирование поверхностного полукруглого надреза радиуса ρ на упрочненной грани образца в соответствии с технологией ОППД и пересчет полей ОН в упрочненном образце с учетом полукруглого надреза при температуре T_0 ;
- 3) пересчет полей ОН с учетом надреза в условиях температурно-силового нагружения от действия инерционных сил при вращении и изменении температуры со значения T_0 (модуль упругости $E(T_0) = E_0$) до рабочей температуры T_1 ($T_1 > T_0$, модуль упругости $E(T_1) = E_1$) в момент времени $t = 0 - 0$;
- 4) расчет релаксации ОН в поверхностно упрочненном образце с надрезом вследствие ползучести при температуре T_1 для значений времени $t > 0$.

2. Оценка напряженно-деформированного состояния бездефектного образца при вращении. Закон изменения осевого напряжения во вращающемся неупрочненном призматическом образце без надреза от действия центробежной силы, действующей на элементарный объем $H \times H \times dx$ (см. рис. 1), имеет следующий вид:

$$dN = \omega(R_1 + x)\gamma F(x)dx, \quad 0 \leq x \leq L = R_2 - R_1, \quad (1)$$

где ω — угловая скорость, $\gamma = \rho_{\text{сп}}g$ — удельный вес, $\rho_{\text{сп}}$ — плотность сплава ЭП742, g — ускорение свободного падения, $F(x)$ — площадь поперечного сечения образца (в рассматриваемом случае $F(x) = H^2 = \text{const}$). Из (1) получаем

$$N(x) = \gamma\omega^2 \int_x^L (R_1 + \xi)F(\xi)d\xi. \quad (2)$$

Учитывая, что $F(x) = H^2$, из (2) для напряжения $\sigma^0(x) = N(x)/H^2$ имеем

$$\sigma_x^0(x) = \gamma\omega^2 \left[R_1(L - x) + \frac{L^2 - x^2}{2} \right]. \quad (3)$$

Формулу (3) с учетом обозначения $L = R_2 - R_1$ можно представить в виде

$$\sigma_x^0(x) = \frac{1}{2}\gamma\omega^2 R_2^2 \left[1 - \left(\frac{R_1 + x}{R_2} \right)^2 \right], \quad 0 \leq x \leq R_2 - R_1. \quad (4)$$

Из формул (3) и (4) следует, что при $\omega = \text{const}$ осевое напряжение $\sigma_x^0(x)$ при фиксированной величине x не зависит от времени. Другими словами, задачу можно рассматривать независимо для каждого сечения как находящегося под действием растягивающего постоянного осевого напряжения $\sigma_x^0 = \sigma_x^0(x)$.

3. Численный метод расчета полей остаточных напряжений и пластических деформаций в поверхностно упрочненном образце с полукруглым надрезом. Для начала рассмотрим методику численного расчета полей ОН и ПД для гладкого «бездефектного» образца после процедуры ОППД, подробно изложенную в работах [28, 32].

В [28, 32] установлено, что компоненты тензоров ОН и ПД зависят только от координаты y : $\sigma_x = \sigma_x(y)$, $\sigma_z = \sigma_z(y)$, $\sigma_y = \sigma_y(y) = 0$; все недиагональные компоненты ОН и ПД полагаются равными нулю в силу их незначительности. При этом ненулевыми компонентами деформаций являются упругие $e_i = e_i(y)$, пластические $q_i = q_i(y)$ и полные $\varepsilon_i = \varepsilon_i(y)$, $i = x, y, z$, соответственно. Согласно введенной гипотезе плоских сечений для компонент остаточных полных деформаций выполняется условие

$$\varepsilon_x(y) = \varepsilon_z(y) = 0.$$

Для рассматриваемого случая изотропного поверхностного упрочнения (выполняется условие $q_x(y) = q_z(y)$) с учетом условия пластической несжимаемости $q_x + q_y + q_z = 0$, при том, что процесс упрочнения осуществляется в момент времени $t = 0 - 0$ при температуре T_0 , расчетные формулы для ОН и ПД принимают вид [28, 32]

$$\sigma_x(y) = \sigma_z(y), \quad q_x(y) = q_z(y) = -\frac{1-\nu}{E_0}\sigma_x(y), \quad q_y(y) = \frac{2(1-\nu)}{E_0}\sigma_x, \quad (5)$$

где ν — коэффициент Пуассона, E_0 — модуль Юнга (при температуре T_0).

В соответствии с (5) все компоненты тензоров ОН и ПД выражаются через компоненту $\sigma_x(y)$, поэтому для реконструкции НДС упрочненного образца достаточно иметь известную экспериментальную зависимость $\sigma_x = \sigma_x(y)$ в пределах упрочненного слоя (показана точками на рис. 2), после чего необходимо построить аппроксимацию этой зависимости и экстраполировать ее на все значения $0 \leq y \leq H$, где $H = 10$ мм — высота призматического образца.

3.1. Начальный этап численного расчета заключается в аппроксимации известной экспериментальной зависимости для компоненты $\sigma_x = \sigma_x(y)$ по формуле

$$\sigma_x(y) = \sigma_0 - \sigma_1 \exp\left[-\left(\frac{y - y^*}{b}\right)^2\right], \quad (6)$$

где σ_0 , σ_1 , b , y^* — параметры аппроксимации эпюры $\sigma_x = \sigma_x(y)$, методика определения которых подробно изложена в [28, 32]; y — текущее положение координаты.

Для поверхностно упрочненного гладкого призматического образца размером $150 \times 10 \times 10$ мм, изготовленного из сплава ЭП742, параметры аппроксимации в соответствии с [32] имеют следующие значения: $\sigma_0 = 119.2$ МПа, $\sigma_1 = 1230.7$ МПа, $b = 0.097$ мм, $y^* = 0.04$ мм. Полученные результаты расчета ОН для компоненты $\sigma_x = \sigma_x(y)$ по аппроксимации (6) приведены на рис. 2 сплошной линией.

Зависимости (5) и (6) задают исходную информацию для следующего этапа — численного расчета полей ОН и ПД в поверхностно упрочненном призматическом образце с полукруглым надрезом в пакете ANSYS Mechanical APDL.

3.2. На втором этапе определяемые из соотношений (5) компоненты тензора остаточных ПД $q_i = q_i(y)$, $i = x, y, z$, моделируются фиктивными температурными деформациями вида

$$q_i(y) = \beta_i(T(y)) [T(y) - T_0], \quad i = x, y, z, \quad 0 \leq y \leq H, \quad (7)$$

где $\beta_i(T(y))$ — коэффициенты температурного расширения, $T = T(y)$ — неоднородное температурное поле с малым градиентом температур, которое может быть произвольным, $T_* = T(0) = 30^\circ\text{C}$ — значение температуры на упрочненной грани образца (закрашена на рис. 1, $y = 0$), $T_0 = T(H) = 20^\circ\text{C}$ — фиксированное значение температуры на противоположной грани образца (рис. 1) при $y = H$.

При известных из (5) и (6) значениях $q_i(y)$ и заданном распределении температуры $T = T(y)$ по формуле (7) вычисляются коэффициенты температурного расширения $\beta_i(T(y))$, необходимые для численного решения задачи фиктивной термоупругости поверхностно упрочненного гладкого образца на основе метода конечных элементов (МКЭ) с целью определения его начального НДС (на рис. 2 полученный результат соответствует штриховой линии).

Из данных на рис. 2 видно, что расчет МКЭ для задачи термоупругости хорошо согласуется с экспериментальными данными и с расчетом по модели (5) с учетом аппроксимации (6). Это, в частности, подтверждает адекватность расчетов методом конечных элементов на основе начальных температурных деформаций как в отношении экспериментальных данных, так и данных, полученных по модели (5), (6).

3.3. Третий расчетный этап заключается в реализации технологии ОППД. На упрочненный гладкий образец наносится полукруглый надрез методом удаления части материала с наведенными упрочнением ОН и ПД, что приводит поле полных деформаций к неуравновешенному состоянию вблизи надреза. Равновесное состояние достигается за счет перераспределения полей ОН в зоне надреза, которое определяется повторным численным расчетом задачи фиктивной термоупругости в ANSYS.

Как уже было отмечено в [28], при расчете полей ОН в области полукруглого надреза в упругой постановке, когда радиус полукруглого надреза $\rho \leq h$ (где h — толщина упрочненного слоя, зависящая от метода ППД), полученные результаты для компонент ОН $\sigma_i = \sigma_i(y)$, $i = x, y, z$, представляют собой завышенные значения, зачастую превосходящие предел прочно-

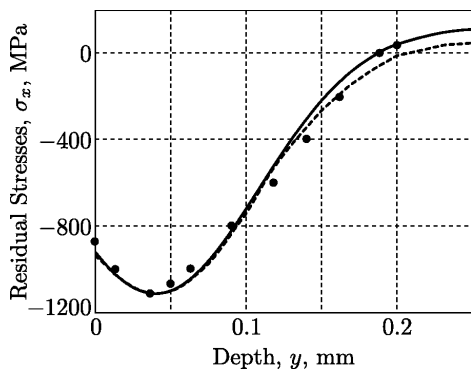


Рис. 2. Данные для компоненты $\sigma_x = \sigma_x(y)$ после УЗУ поверхности призматического образца с размерами $150 \times 10 \times 10$ мм из сплава ЭП742: экспериментальные данные (маркеры) [28, 32], расчетные данные по аппроксимации (6) (сплошная линия) и для термоупругой задачи (штриховая линия)

[Figure 2. Data for the component $\sigma_x = \sigma_x(y)$ after ultrasonic surface hardening of a prismatic sample measuring $150 \times 10 \times 10$ mm made of EP742 alloy: experimental data (markers) [28, 32], calculated data from approximation (6) (solid line), and for the thermoelastic problem (dashed line)]

сти. В этой связи расчет необходимо производить с учетом зоны вторичной пластичности материала упрочненного образца в окрестности надреза, т. е. решать задачу в упругопластической постановке, для чего в программном комплексе ANSYS задается диаграмма упругопластического деформирования в координатах «истинное напряжение – полная деформация» ($\sigma - \varepsilon$) (рис. 3, кривая 3). При этом предполагается, что диаграммы растяжения и сжатия практически одинаковы для рассматриваемого материала (с учетом знака), а уровень образующихся в зоне надреза сжимающих ОН, превышающий предел текучести σ_T , приводит к появлению вторичных пластических деформаций. Согласно [33] пересчет «истинных» напряжений осуществляется из «номинальных» напряжений σ_0 (рис. 3, кривая 2), полученных на основе экспериментальных данных для сплава ЭП742 (рис. 3, кривая 1), с учетом накопления поврежденности по зависимости

$$\sigma = \sigma_0(1 + \omega), \quad \dot{\omega} = \alpha \sigma \dot{q}, \quad (8)$$

где ω — параметр поврежденности, q — деформация пластичности, $\alpha = \text{const}$ — феноменологический параметр, σ_0 и σ — номинальное и истинное напряжения, соответствующие одному и тому же уровню пластической деформации q .

Для жесткого режима нагружения одноосного образца ($\dot{\varepsilon} = \text{const}$) используется неявно заданная зависимость $\sigma_0 = \sigma_0(q)$ [33]:

$$q = c \left[\sigma_0 \exp \left(\int_0^q \alpha \sigma_0(\xi) d\xi \right) - \sigma_T \right]^n, \quad (9)$$

где σ_T — предел текучести (пропорциональности), c и n — параметры аппроксимации начального участка диаграммы упругопластического деформирования степенной зависимостью при $\omega \approx 0$ и $\sigma_0 \approx 0$:

$$q = c(\sigma_0 - \sigma_T)^n. \quad (10)$$

Для построения упругопластической кривой в координатах «истинное напряжение – полная деформация» $\sigma - \varepsilon$ (см. рис. 3) по формулам (8)–(10), представляющей собой монотонно возрастающую функцию, использовались

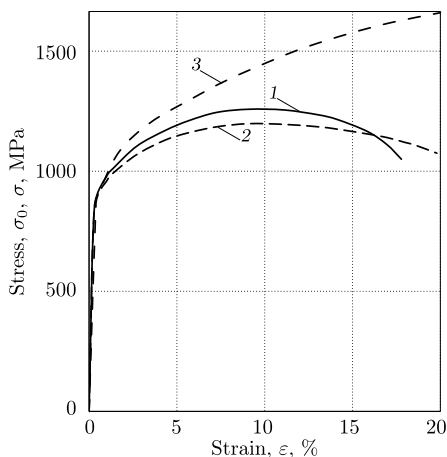


Рис. 3. Кривые упругопластического деформирования сплава ЭП742 при температуре 20 °С: 1 — экспериментальные данные [23], 2 — расчет в координатах $\sigma_0 - \varepsilon$, 3 — расчет в координатах $\sigma - \varepsilon$

[Figure 3. The stress-strain curves of the EP742 alloy under elastic-plastic deformation at a temperature of 20 °С: 1 — experimental data [23], 2 — calculation in coordinates $\sigma_0 - \varepsilon$, 3 — calculation in coordinates $\sigma - \varepsilon$]

следующие параметры [28, 33]: $\sigma_T = 863.3$ МПа, $c = 1.356 \cdot 10^{-6}$ МПа $^{-n}$, $n = 1.776$, $\alpha = 1.916 \cdot 10^{-3}$ МПа $^{-1}$.

Таким образом, решение задачи сводится к определению начального НДС поверхностно упрочненного образца с надрезом либо в упругой постановке, при этом решается фиктивная задача термоупругости, либо в упругопластической постановке на основе задачи термоупругопластичности. Во втором случае для мелких надрезов получаются реалистичные поля ОН по сравнению с решениями задач в упругой постановке [28].

Следует отметить, что полученные результаты распределения ОН в упрочненном образце с надрезом из решения задачи в обеих постановках являются исходными данными при дальнейшем расчете кинетики напряжений в условиях температурно-силового нагружения образца при ползучести.

4. Методика расчета кинетики напряженно-деформированного состояния упрочненных гладких призматических образцов с надрезами при вращении. Изложим методику релаксации ОН во вращающихся гладких образцах и образцах с надрезами с единых позиций с использованием МКЭ в вычислительном комплексе ANSYS. Для образца с надрезами это единственный способ, а численное решение для гладкого образца в дальнейшем будет использоваться для сравнительного анализа решения задачи по МКЭ с решением по методу сеток, методика которого приведена в [32].

4.1. На первом этапе в обоих случаях строится решение после процедуры ППД для гладкого образца или ОППД для образца с надрезами в условиях мгновенного температурного нагружения с температуры упрочненного состояния T_0 до «рабочей» (эксплуатационной) температуры T_1 . В обоих случаях модуль упругости материала уменьшается с величины $E(T_0) = E_0$ до $E(T_1) = E_1$ (в дальнейшем предполагается, что коэффициент Пуассона ν не зависит от температуры), что, в свою очередь, приводит к изменению НДС образцов при переходе от температуры T_0 до T_1 . Тогда для гладкого образца в предположении, что новых пластических деформаций не возникает, по аналогии с (5) в момент времени $t = 0 + 0$ получаем следующее распределение полей ОН и ПД:

$$\sigma_x(y) = -\frac{E_1}{1-\nu}q_x(y), \quad \sigma_z(y) = \sigma_x(y). \quad (11)$$

Из сравнения (5) и (11) следует, что напряжение $\sigma_x(y)$ при температуре «эксплуатации» T_1 можно получить, умножив функцию $\sigma_x(y)$ при температуре упрочнения T_0 на коэффициент E_1/E_0 .

Аналогичная процедура пересчета НДС реализуется и для образца с надрезом: поля распределения ОН, полученные решением задачи в упругой или упругопластической постановке при температуре T_0 , умножаются также на коэффициент E_1/E_0 .

4.2. Следующий шаг силового нагружения связан с вращением нагретого до температуры T_1 упрочненного образца относительно вертикальной оси A_1A_2 с постоянной угловой скоростью ω (рис. 1). Для случая гладкого «бездефектного» образца неоднородность напряженного состояния образца задается продольной компонентой напряжений $\sigma_x^0(x)$ в соответствии с (1) и его стационарностью по координате $x \in [0, L]$ при вращении. Для образца с полукруглыми надрезами радиуса ρ (независимо от их расположения) на-

пряжения $\sigma_x^0(x)$ вычисляются аналогично в программном комплексе ANSYS, но с учетом концентрации напряжений в ослабленных надрезами и близко прилегающих к ним сечениях. Для этой цели достаточно задать удельный вес материала γ и значение угловой скорости ω .

4.3. На следующем этапе в обоих случаях реализуется расчет НДС в условиях ползучести при заданном температурно-силовом нагружении с учетом накопления деформаций ползучести при температуре T_1 в течение заданного времени $t \in [0, t^*]$. В дальнейшем для сплава ЭП742 время расчета на ползучесть образцов при температуре 650°C принималось равным $t^* = 100$ часов. Для реализации расчета нужен выбор конкретной теории ползучести, при этом необходимо ориентироваться на возможности библиотеки соответствующих теорий в вычислительной среде ANSYS Mathematical APDL. Экспериментальные данные по ползучести сплава ЭП742 при температуре 650°C имеются в работе [33, рис. 3.9] на базе до $400 \div 800$ часов. Поэтому для временной базы 100 часов использовались лишь начальные участки экспериментальных кривых ползучести при напряжениях $\sigma = \{588.6; 637.6; 686\}$ МПа, представленных на рис. 4 точками. С учетом характера этих кривых (наличие лишь первой стадии ползучести) для построения модели ползучести выбрана теория течения, которая в одномерном случае с учетом гипотезы подобия кривых имеет вид [34]

$$\dot{p}(t, \sigma) = S(\sigma)\tau(t). \quad (12)$$

Выбирая кривую при $\sigma_* = 637.6$ МПа в качестве базовой кривой ползучести, перепишем (12) для определения функции $\tau(t)$ в виде степенной аппроксимации

$$\dot{p}(t, \sigma) = S\left(\frac{\sigma}{\sigma_*}\right)At^n, \quad (13)$$

где $S(1) = 1$ для кривой ползучести при $\sigma = \sigma_*$. После интегрирования (13) при $\sigma = \sigma_*$ получаем

$$p(t, \sigma_*) = \frac{At^{n+1}}{n+1},$$

где величины n и $A/(n+1)$ находятся методом наименьших квадратов и имеют значения $n+1 = 0.6$, $A/(n+1) = 0.67 \cdot 10^{-3}$, откуда $n = -0.4$. Аппроксимация функции $S(\sigma/\sigma_*)$ также принимается в виде степенной зависимости:

$$S\left(\frac{\sigma}{\sigma_*}\right) = B \cdot \left(\frac{\sigma}{\sigma_*}\right)^m,$$

где параметры B и m находятся с использованием кривых ползучести при напряжениях $\sigma = \{588.6; 637.6; 686\}$ МПа при фиксированных значениях времени t методом наименьших квадратов и имеют следующие значения: $B = 1.04$; $m = 6.82$. Тогда окончательно с учетом всех найденных параметров получаем следующую модель ползучести — теорию течения:

$$\dot{p}(t, \sigma) = 3.4 \cdot 10^{-23} \cdot \sigma^{6.82} \cdot t^{-0.4}, \quad (14)$$

а после интегрирования (14) при $\sigma = \text{const}$ —

$$p(t) = 5.22 \cdot 10^{-23} \cdot \sigma^{6.82} \cdot t^{0.6}. \quad (15)$$

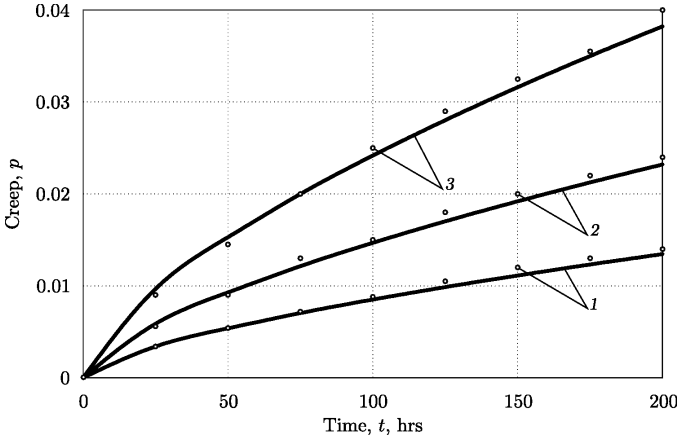


Рис. 4. Экспериментальные (точки) и расчетные (сплошные линии) кривые ползучести сплава ЭП742 при температуре 650 °С: 1 — $\sigma = 588.6$ МПа, 2 — $\sigma = 637.6$ МПа, 3 — $\sigma = 686$ МПа

[Figure 4. Experimental (points) and theoretical (solid lines) creep curves of the EP742 alloy at a temperature of 650 °C: 1 — $\sigma = 588.6$ MPa, 2 — $\sigma = 637.6$ MPa, 3 — $\sigma = 686$ MPa]

Расчетные значения деформации ползучести для сплава ЭП742 при температуре 650 °С на основании зависимости (15) приведены на рис. 4 сплошными линиями. Наблюдается хорошее соответствие данных расчета с экспериментальными данными.

Теория течения в библиотеке моделей ANSYS имеет вид

$$\dot{\epsilon}_{cr} = C_1 \sigma_2^{C_2} t^{C_3} e^{-C_4/T}, \quad (16)$$

где $\dot{\epsilon}_{cr}$ — скорость деформации ползучести, T — температура, C_i — константы модели. Таким образом, сравнивая (14) и (16), для сплава ЭП742 при температуре 650 °С в расчетах достаточно положить $C_1 = 3.4 \cdot 10^{-23}$, $C_2 = 6.82$, $C_3 = -0.4$, $C_4 = 0$.

Согласно настоящей методике, дискретизация по времени t при использовании программного комплекса ANSYS осуществляется заданием временного шага Δt в разделе настроек решателя, где от $t_0 = 0$ до $t_1 = 1$ ч временной шаг интегрирования соответствует $\Delta t_1 = 0.02$ ч, после чего от $t_1 = 1$ ч и до окончания времени t^* температурной выдержки $\Delta t = 1$ ч. Это связано с тем, что в пределах первого часа нагружения скорость релаксации ОН имеет наибольшую величину, поэтому шаг интегрирования в области, прилегающей к $t = 0$, должен быть малым.

5. Расчет релаксации остаточных напряжений во вращающемся упрочненном гладком призматическом образце в условиях высокотемпературной ползучести. В связи с тем, что в работе в дальнейшем сравниваются решения для гладкого вращающегося образца методом конечных элементов на основе фиктивной термоупругой задачи, с решением этой же задачи методом сеток, приведем полностью алгоритм метода сеток, изложенный в [32]. Сначала выполняется дискретизация по переменной x : $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = L$ с постоянным шагом $\Delta x = L/N_1$, где N_1 —

количество отрезков разбиения. В результате упрочненный образец рассматривается как стержень из N элементарных стержней прямоугольного сечения с высотой Δx (см. рис. 1), причем в каждом поперечном сечении осевое растягивающее напряжение $\sigma_x^0(x)$, $x_{i-1} \leq x \leq x_i$, $i = 1, 2, \dots, N_1$, вычисленное по зависимости (4), можно считать постоянным. Поэтому при расчете релаксации ОН в каждом сечении $x = x_k$ вращающегося образца действует постоянное напряжение $\sigma_x^0(x_k)$.

Для каждого элементарного стержня вводится гипотеза плоских сечений в виде

$$\varepsilon_x(y, x_k, t) = \varepsilon_x^0(x_k, t), \quad \varepsilon_z(y, x_k, t) = \varepsilon_z^0(x_k, t).$$

Тогда в любой момент времени справедливы следующие равенства:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x(y, x_k, t) &= e_x(y, x_k, t) + q_x(y) + p_x(y, x_k, t) = \varepsilon_x^0(x_k, t), \\ \varepsilon_z(y, x_k, t) &= e_z(y, x_k, t) + q_z(y) + p_z(y, x_k, t) = \varepsilon_z^0(x_k, t). \end{aligned} \quad (17)$$

Величины $\varepsilon_x^0(x_k, t)$ и $\varepsilon_z^0(x_k, t)$ имеют следующее представление:

$$\varepsilon_x^0(x_k, t) = \frac{1}{E_1} \sigma_x^0(x_k) + p_x^0(x_k, t), \quad \varepsilon_z^0(x_k, t) = -\frac{\nu}{E_1} \sigma_x^0(x_k) + p_z^0(x_k, t). \quad (18)$$

Тогда (17) с учетом (18) преобразуются к виду

$$\begin{aligned} \frac{1}{E_1} [\sigma_x(y, x_k, t) - \nu \sigma_z(y, x_k, t)] + q_x(y) + p_x(y, x_k, t) &= \frac{1}{E_1} \sigma_x^0(x_k) + p_x^0(x_k, t), \\ \frac{1}{E_1} [\sigma_z(y, x_k, t) - \nu \sigma_x(y, x_k, t)] + q_z(y) + p_z(y, x_k, t) &= -\frac{\nu}{E_1} \sigma_x^0(x_k) + p_z^0(x_k, t). \end{aligned}$$

Решая полученную систему относительно $\sigma_x(y, x_k, t)$ и $\sigma_z(y, x_k, t)$, находим

$$\begin{aligned} \sigma_x(y, x_k, t) &= \sigma_x^0(x_k) + \frac{E_1}{1 - \nu^2} [(p_x^0(x_k, t) + \nu p_z^0(x_k, t)) - \\ &\quad - (q_x(y) + \nu q_z(y)) - (p_x(y, x_k, t) + \nu p_z(y, x_k, t))], \\ \sigma_z(y, x_k, t) &= \frac{E_1}{1 - \nu^2} [(p_z^0(x_k, t) + \nu p_x^0(x_k, t)) - \\ &\quad - (q_z(y) + \nu q_x(y)) - (p_z(y, x_k, t) + \nu p_x(y, x_k, t))]. \end{aligned} \quad (19)$$

Однако для реализации расчетов кинетики напряжений $\sigma_x(y, x_k, t)$ и $\sigma_z(y, x_k, t)$ на основании (19) необходимо знать величины $p_z^0(x_k, t)$ и $p_x^0(x_k, t)$, которые изначально неизвестны. Для их определения запишем условия равенства внутренних и внешних сил, действующих в любом сечении, параллельном координатным плоскостям xy и xz :

$$\int_0^H \sigma_x(y, x_k, t) dy = \int_0^H \sigma_x^0(x_k) dy, \quad \int_0^H \sigma_z(y, x_k, t) dy = 0. \quad (20)$$

Подставляя (19) в (20) и учитывая, что при $x = x_k$ величина $\sigma_x^0(x_k) = \text{const}$, решим полученную систему уравнений относительно p_z^0 и p_x^0 и окончательно найдем

$$\begin{aligned} p_x^0(x_k, t) &= \int_0^H [q_x(y) + p_x(y, x_k, t)] dy, \\ p_z^0(x_k, t) &= \int_0^H [q_z(y) + p_z(y, x_k, t)] dy. \end{aligned} \quad (21)$$

Объединяя (19) и (21), получаем систему для расчета кинетики ОН $\sigma_x(y, x_k, t)$ и $\sigma_z(y, x_k, t)$ в процессе ползучести во вращающемся упрочненном гладком призматическом образце. Начальные условия для этой системы следующие: $p_x(y, x_k, 0) = 0$; $p_z(y, x_k, 0) = 0$.

Таким образом, при известных компонентах тензора деформаций ползучести $p_x(y, x_k, t)$ и $p_z(y, x_k, t)$ величины $\sigma_x(y, x_k, t)$ и $\sigma_z(y, x_k, t)$ определяются из системы (19), (21). Компоненты деформации ползучести $p_x(y, x, t)$ и $p_z(y, x, t)$ рассчитываются по теории течения, реологические соотношения которой при сложном напряженном состоянии обобщаются исходя из одноосной модели (16) при $C_4 = 0$ и имеют вид

$$\dot{p}_{ij} = \frac{3}{2}C_1(S^*)^{C_2-1} \left(\sigma_{ij} - \frac{1}{3}\sigma_{kk} \right) t^{C_3}, \quad (22)$$

где S^* — интенсивность напряжений; σ_{ij} и $\dot{p}_{ij}$ — компоненты тензоров напряжений и скоростей деформаций ползучести, по повторяющемуся индексу осуществляется суммирование; константы C_i имеют такие же значения, как и в одноосной модели. Для гладкой детали имеем две компоненты тензора напряжений $\sigma_{11} = \sigma_x$, $\sigma_{22} = \sigma_z$ и три компоненты скоростей деформаций $\dot{p}_{11} = \dot{p}_x$, $\dot{p}_{22} = \dot{p}_z$, $\dot{p}_{33} = \dot{p}_y$, но из условия несжимаемости материала при ползучести величина $\dot{p}_y = -(\dot{p}_x + \dot{p}_z)$, поэтому она не играет никакой роли в процессе релаксации ОН.

Для вычисления σ_x и σ_z из (19), (21) известным методом шагов по времени рассчитываются p_x и p_z . Суть метода состоит в следующем. Сначала осуществляется дискретизация по временной координате $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_K = t^*$ с заданным шагом $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$, $i = 0, 1, \dots, K - 1$, и по пространственной переменной $0 = y_0 < y_1 < \dots < y_M = H$, где H — высота образца, см. рис. 1. Тогда на основании (22) вычисляются приращения компонент деформаций ползучести $\Delta p_x(y_j, x_k, t_i)$, $\Delta p_z(y_j, x_k, t_i)$ за шаг по времени Δt_i , при этом приращения соответствующих величин, входящих в (22), вычисляются, например, по методу Эйлера. Далее находятся значения

$$\begin{aligned} p_x(y_j, x_k, t_{i+1}) &= p_x(y_j, x_k, t_i) + \Delta p_x(y_j, x_k, t_i), \\ p_z(y_j, x_k, t_{i+1}) &= p_z(y_j, x_k, t_i) + \Delta p_z(y_j, x_k, t_i), \end{aligned}$$

а затем по формулам (19), (21) определяются значения величин $\sigma_x(y_j, x_k, t_{i+1})$ и $\sigma_z(y_j, x_k, t_{i+1})$, и процесс итерационно продолжается до достижения значения времени заданного интервала расчета $t = t_N = t^*$. На первом шаге при $\Delta t_0 = t_1 - t_0$ используются начальные условия применяемой теории ползучести (22) и значения напряжений $\sigma_x(y, x_k, 0)$ и $\sigma_z(y, x_k, 0)$ в момент приложения температурно-силового нагружения.

Температурно-силовая разгрузка поверхностно упрочненного гладкого образца после ползучести в момент времени $t = t^* + 0$ осуществляется с учетом предварительно выполненной силовой упругой разгрузки (полагается, что $\omega = 0$). Тогда из соотношений (18) для ОН получаем

$$\begin{aligned} \sigma_x(y, x_k, t^*) &= \frac{E_1}{1 - \nu^2} \left[(p_x^0(x_k, t^*) + \nu p_z^0(x_k, t^*)) - \right. \\ &\quad \left. - (q_x(y) + \nu q_z(y)) - (p_x(y, x_k, t^*) + \nu p_z(y, x_k, t^*)) \right], \\ \sigma_z(y, x_k, t^*) &= \frac{E_1}{1 - \nu^2} \left[(p_z^0(x_k, t^*) + \nu p_x^0(x_k, t^*)) - \right. \\ &\quad \left. - (q_z(y) + \nu q_x(y)) - (p_z(y, x_k, t^*) + \nu p_x(y, x_k, t^*)) \right]. \end{aligned} \quad (23)$$

При этом, чтобы найти ОН после температурной разгрузки с температуры T_1 до температуры T_0 , достаточно в (23) $E(T_1) = E_1$ заменить на $E(T_0) = E_0$.

В качестве замечания отметим, что температурная разгрузка для образца с надрезами осуществляется аналогично формуле (23), но для всех компонент тензора напряжений, сформированных к моменту времени $t = t^*$, умножены фактически на коэффициент E_0/E_1 .

6. Результаты расчетов и их анализ. Численное исследование кинетики ОН при температурно-силовом нагружении поверхностно упрочненного призматического образца размерами $150 \times 10 \times 10$ мм с полукруглыми надрезами радиуса $\rho = \{0.1; 0.3\}$ мм из сплава ЭП742 проводилось при его вращении в условиях высокотемпературной ползучести материала при температуре 650°C . Расположение одиночного полукруглого надреза ρ предполагалось на расстоянии $x = \{2; 75\}$ мм от левой грани призматического образца (см. рис. 1). Рассматриваемый процесс упрочнения осуществлялся при нормальной («комнатной») температуре $T_0 = 20^\circ\text{C}$ (модуль Юнга $E(T_0) = E_0 = 2.21 \cdot 10^5$ МПа). Расчет релаксации ОН проводился при температуре $T_1 = 650^\circ\text{C}$ (модуль Юнга $E(T_1) = E_1 = 1.79 \cdot 10^5$ МПа) при угловой скорости вращения $\omega = \{1500; 2000\}$ об/мин и выдержке при температурно-силовом нагружении 100 ч. Коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$ полагался не зависящим от температуры. Для учета действия массовых сил при вращении упрочненного образца были заданы плотность $\rho_{\text{сп}} = 8320$ кг/м³ для сплава ЭП742 и ускорение свободного падения $g = 9.81$ м/с². Численные значения геометрических параметров (см. рис. 1) следующие: $R_1 = 517$ мм, $R_2 = 667$ мм, $L = 150$ мм, $H = 10$ мм.

Ввиду того, что в рассматриваемой постановке задача представлена впервые, оценка адекватности разработанного метода расчета кинетики ОН в первую очередь осуществлялась на примере упрочненного гладкого «бездефектного» образца, для чего полученные результаты расчета МКЭ сопоставлялись с данными работы [32], полученными методом сеток. Основное внимание было уделено изучению кинетики компоненты $\sigma_x = \sigma_x(h, t)$ при фиксированных значениях $x = 2$ и 7 мм, где $h = y - \rho$ — глубина залегания ОН от дна надреза, т.е. в минимальном сечении образца. На всех последующих рисунках представлена кинетика эпюр ОН $\sigma_x = \sigma_x(h, t)$ для следующих расчетных моментов времени:

- 1) после поверхностного упрочнения образца при температуре $T_0 = 20^\circ\text{C}$ в момент времени $t = 0 - 0$ (данные соответствуют кривой 1);
- 2) после «мгновенного» прогрева упрочненного образца при температуре $T_1 = 650^\circ\text{C}$ в момент времени $t = 0 + 0$ (данные соответствуют кривой 2);
- 3) при силовом нагружении образца от вращения с угловой скоростью ω при температуре $T_1 = 650^\circ\text{C}$ в момент времени $t = 0 + 0$ (данные соответствуют кривой 3);
- 4) при температурно-силовом нагружении образца угловой скоростью ω при температуре $T_1 = 650^\circ\text{C}$ в условиях ползучести в момент времени $t = 100 - 0$ ч (данные соответствуют кривой 4);
- 5) при силовой разгрузке образца при температуре $T_1 = 650^\circ\text{C}$ в момент времени $t = 100 + 0$ ч (данные соответствуют кривой 5);

- 6) при температурной разгрузке образца до температуры $T_0 = 20^\circ\text{C}$ в момент времени $t = 100 + 0$ ч (данные соответствуют кривой 6).

Ниже представлены результаты расчета кинетики ОН в поверхностно упрочненном гладком образце для компоненты σ_x , полученные с помощью МКЭ (рис. 5, а, рис. 6, а) и методом сеток (рис. 5, б, рис. 6, б) для случаев $\omega = 1500$ об/мин в сечении $x = 75$ мм и $\omega = 2000$ об/мин в сечении $x = 0$ соответственно.

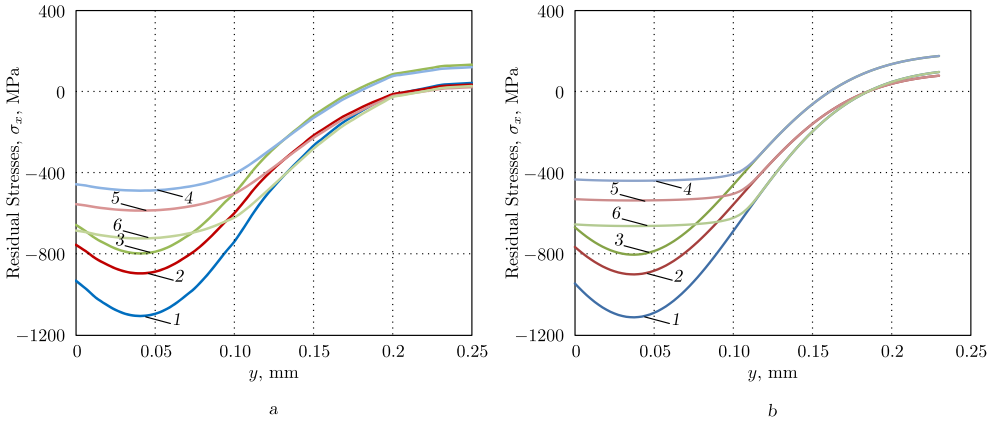


Рис. 5. Данные кинетики компоненты σ_x в условиях ползучести при угловой скорости вращения 1500 об/мин в сечении $x = 75$ мм, полученные для гладкого образца с помощью МКЭ (а) и методом сеток (б) [32]

[Figure 5. The kinetic data for the components σ_x under creep conditions at an angular rotation speed of 1500 RPM in the section $x = 75$ mm, obtained for a smooth sample using FEM (a) and the mesh method (b) [32]. Calculated values: 1 — after the hardening procedure at 20°C at time $t = 0 - 0$; 2 — after temperature loading up to 650°C at time $t = 0 + 0$; 3 — after force loading from rotation at 650°C at time $t = 0 + 0$; 4 — after creep under temperature-force loading at 650°C at time $t = 100 - 0$ h; 5 — after force unloading at 650°C at time $t = 100 + 0$ h; 6 — after temperature unloading to 20°C at time $t = 100 + 0$ h]

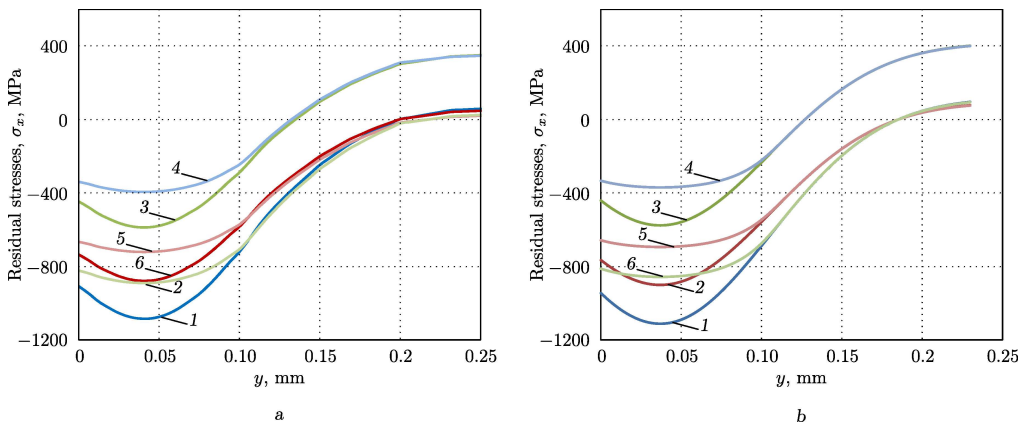


Рис. 6. Данные кинетики компоненты σ_x в условиях ползучести при угловой скорости вращения 2000 об/мин в сечении $x = 0$ мм, полученные для гладкого образца с помощью МКЭ (а) и методом сеток (б) [32]

[Figure 6. The kinetic data for the components σ_x under creep conditions at an angular rotation speed of 2000 RPM in the section $x = 75$ mm, obtained for a smooth sample using FEM (a) and the mesh method (b) [32]. The markers mean the same thing as in Figure 5]

При сравнении представленных графиков можно заметить хорошую согласованность полученных результатов расчета кинетики ОН по обоим методам для гладкого поверхностно упрочненного образца, что в частном случае подтверждает адекватность разработанного численного метода расчета на основе метода конечных элементов.

Дальнейший анализ результатов кинетики ОН осуществлялся для случая температурно-силового нагружения упрочненного призматического образца при наличии концентратора напряжений в виде кругового надреза радиуса $\rho = \{0.1; 0.3\}$ мм при использовании упругой или упругопластической постановки задачи при реконструкции полей ОН после процедуры ОППД и использовании этих ОН как начальных при решении задачи о релаксации ОН в условиях ползучести. Анализ численных результатов кинетики ОН модельных расчетов для компоненты σ_x выполнялся при угловой скорости вращения $\omega = \{1500; 2000\}$ об/мин в двух поперечных сечениях, где располагался полукруглый надрез радиуса ρ : при $x = 2$ мм (сечение, близкое к «корневому» сечению) и при $x = 75$ мм (центральное сечение).

Ниже на рис. 7–14 приведены графики численного расчета кинетики компоненты σ_x , распределенной по глубине h упрочненного образца с надрезом от дна концентратора в упругой (а) и упругопластической (б) постановках при значениях радиуса надреза $\rho = \{0.1; 0.3\}$ мм.

По полученным результатам распределения ОН от дна концентратора по высоте y можно сделать вывод о том, что для компоненты σ_x , когда радиус надреза ρ не превышает толщину упрочненного слоя $h = 250$ мкм ($\rho = 0.1$ мм), решения задачи в упругой и упругопластической постановках имеют серьезные отличия по уровню и характеру распределения этой величины для всех расчетных моментов времени t . Как следует из рис. 7–10, при решении упругой задачи о формировании ОН после ОППД при $\rho = 0.1$ мм наблюдаются далекие от реальности ОН, значения которых в области дна концентратора более чем в два раза превышают предел прочности материала. Это служит обоснованием использования упругопластической постановки задачи после ОППД. При величине надреза $\rho = 0.3$ мм, т. е. когда величина ρ больше толщины области сжатия упрочненного слоя, решения в упругой и упругопластической постановках дают практически близкие результаты (см. рис. 11–14).

Из анализа представленных графиков кинетики компоненты σ_x в поверхностно упрочненном образце с надрезом также видно, что несмотря на наличие надреза (концентратора напряжений) и возникающих вследствие вращения растягивающих напряжений, интенсивность которых доходит до 500 МПа (кривая 4 на рис. 13), при температурно-силовой разгрузке в наименьших поперечных сечениях изучаемого образца все еще наблюдаются сжимающие ОН. Интересный результат получен для распределения ОН при решении задачи в упругопластической постановке для $\rho = 0.1$ мм (см. рис. 7–10 с меткой б). Здесь максимальное по модулю значение ОН после полного цикла «реконструкция ОН после ОППД при температуре 20 °С – температурно-силовая нагрузка – ползучесть в течение $t^* = 100$ час при температуре 650 °С – температурно-силовая разгрузка» наблюдается не на дне концентратора ($h = 0$), а на глубине $h \approx 0.04$ мм. Кроме того, после полного цикла нагружения уровень ОН мало изменился, для этого достаточно сравнить кривые 1 и 6

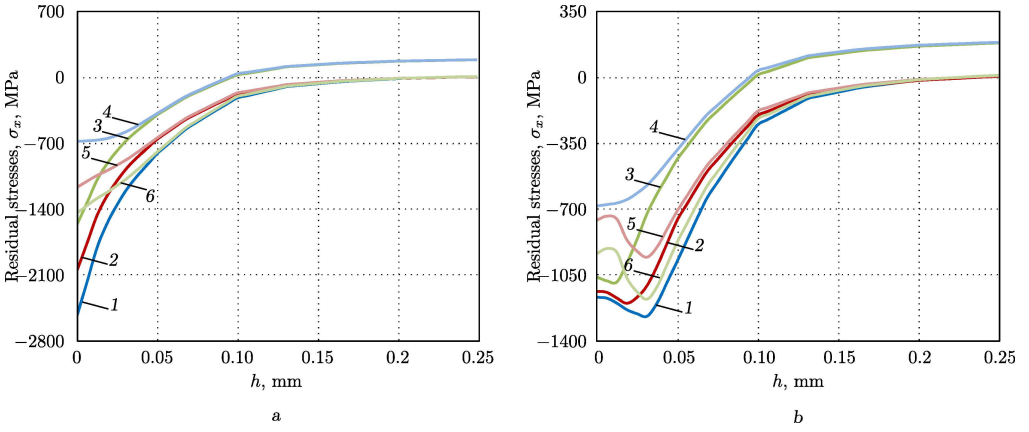


Рис. 7. Данные кинетики компоненты σ_x в условиях ползучести при угловой скорости вращения 1500 об/мин в сечении $x = 2$ мм для $\rho = 0.1$ мм, полученные при упругом (a) и упругопластическом (b) решении

[Figure 7. The kinetic data for the components σ_x under creep conditions at an angular velocity of 1500 RPM in the section $x = 2$ mm for $\rho = 0.1$ mm, obtained from the elastic solution (a) and the elastoplastic solution (b). The markers mean the same thing as in Figure 5]

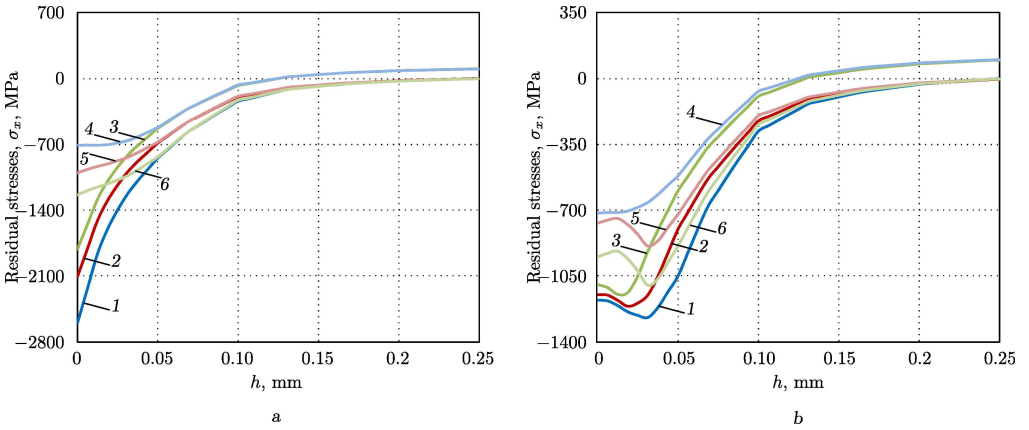


Рис. 8. Данные кинетики компоненты σ_x в условиях ползучести при угловой скорости вращения 1500 об/мин в сечении $x = 75$ мм для $\rho = 0.1$ мм, полученные при упругом (a) и упругопластическом (b) решении

[Figure 8. The kinetic data for the components σ_x under creep conditions at an angular velocity of 1500 RPM in the section $x = 75$ mm for $\rho = 0.1$ mm, obtained from the elastic solution (a) and the elastoplastic solution (b). The markers mean the same thing as in Figure 5]

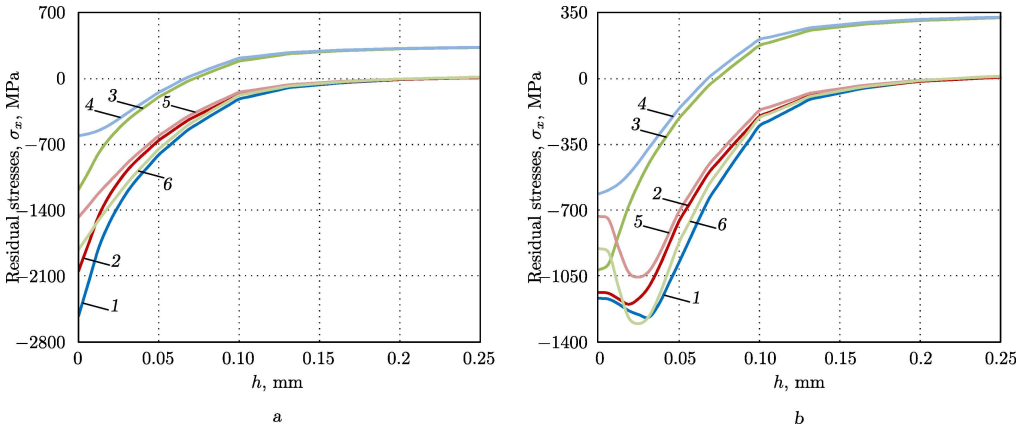


Рис. 9. Данные кинетики компоненты σ_x в условиях ползучести при угловой скорости вращения 2000 об/мин в сечении $x = 2$ мм для $\rho = 0.1$ мм, полученные при упругом (a) и упругопластическом (b) решении

[Figure 9. The kinetic data for the components σ_x under creep conditions at an angular velocity of 2000 RPM in the section $x = 2$ mm for $\rho = 0.1$ mm, obtained from the elastic solution (a) and the elastoplastic solution (b). The markers mean the same thing as in Figure 5]

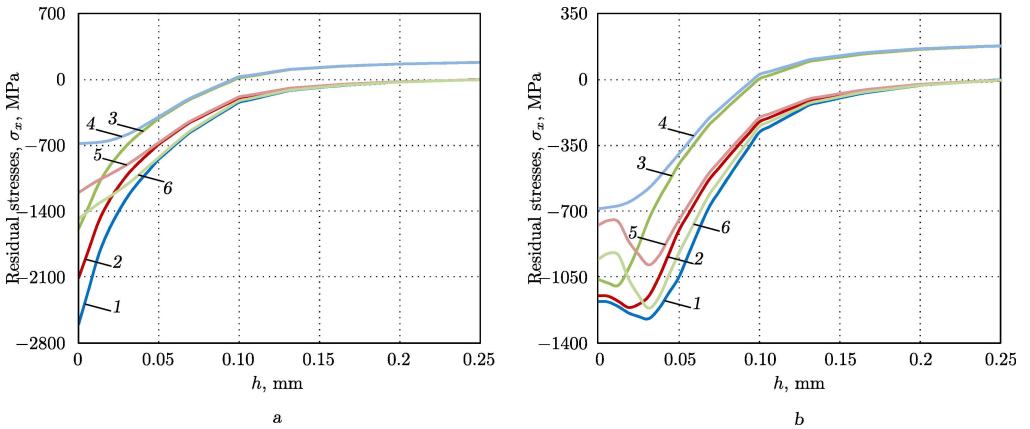


Рис. 10. Данные кинетики компоненты σ_x в условиях ползучести при угловой скорости вращения 2000 об/мин в сечении $x = 75$ мм для $\rho = 0.1$ мм, полученные при упругом (a) и упругопластическом (b) решении

[Figure 10. The kinetic data for the components σ_x under creep conditions at an angular velocity of 2000 RPM in the section $x = 75$ mm for $\rho = 0.1$ mm, obtained from the elastic solution (a) and the elastoplastic solution (b). The markers mean the same thing as in Figure 5]

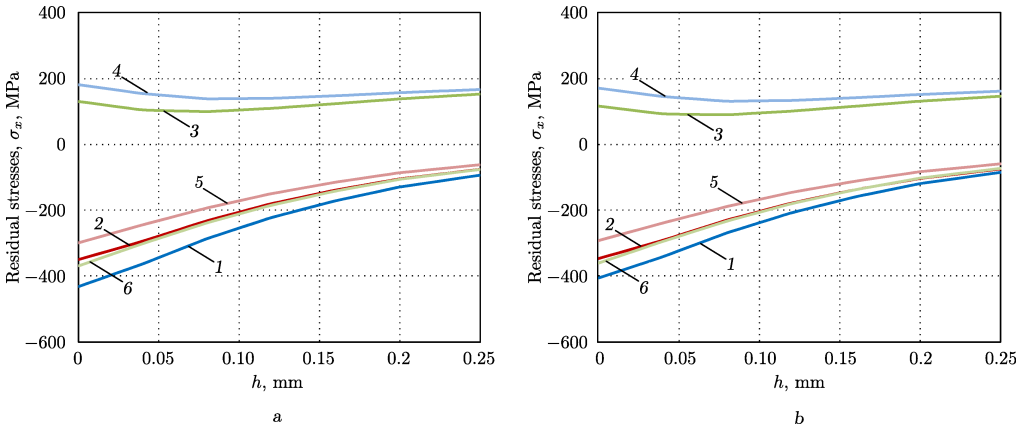


Рис. 11. Данные кинетики компоненты σ_x в условиях ползучести при угловой скорости вращения 1500 об/мин в сечении $x = 2$ мм для $\rho = 0.3$ мм, полученные при упругом (а) и упругопластическом (б) решении

[Figure 11. The kinetic data for the components σ_x under creep conditions at an angular velocity of 1500 RPM in the section $x = 2$ mm for $\rho = 0.3$ mm, obtained from the elastic solution (a) and the elastoplastic solution (b). The markers mean the same thing as in Figure 5]

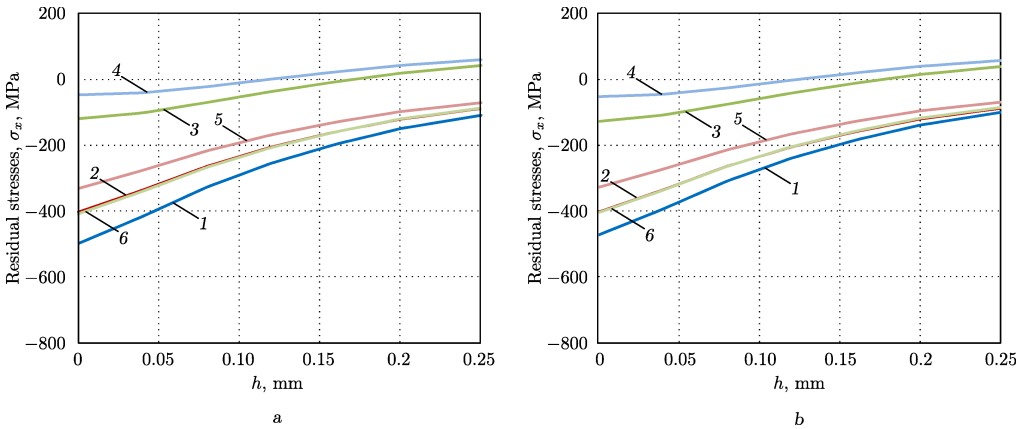


Рис. 12. Данные кинетики компоненты σ_x в условиях ползучести при угловой скорости вращения 1500 об/мин в сечении $x = 75$ мм для $\rho = 0.3$ мм, полученные при упругом (а) и упругопластическом (б) решении

[Figure 12. The kinetic data for the components σ_x under creep conditions at an angular velocity of 1500 RPM in the section $x = 75$ mm for $\rho = 0.3$ mm, obtained from the elastic solution (a) and the elastoplastic solution (b). The markers mean the same thing as in Figure 5]

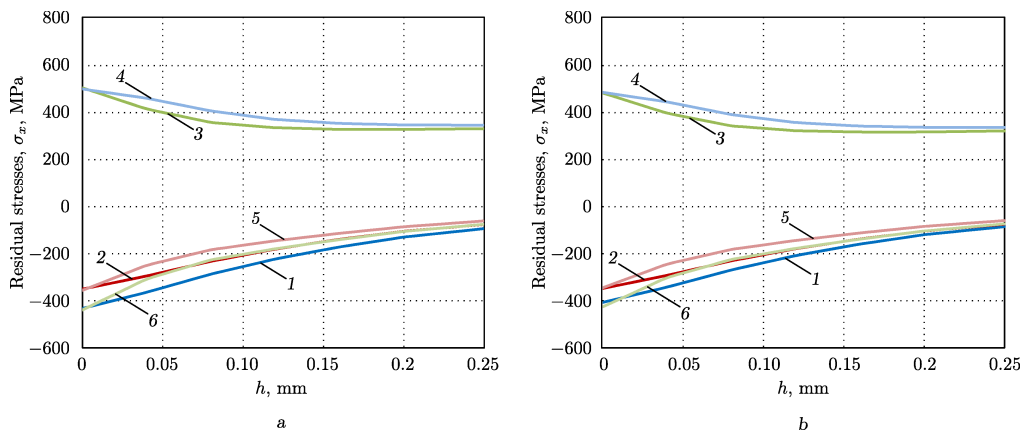


Рис. 13. Данные кинетики компоненты σ_x в условиях ползучести при угловой скорости вращения 2000 об/мин в сечении $x = 2$ мм для $\rho = 0.3$ мм, полученные при упругом (а) и упругопластическом (б) решении

[Figure 13. The kinetic data for the components σ_x under creep conditions at an angular velocity of 2000 RPM in the section $x = 2$ mm for $\rho = 0.3$ mm, obtained from the elastic solution (a) and the elastoplastic solution (b). The markers mean the same thing as in Figure 5]

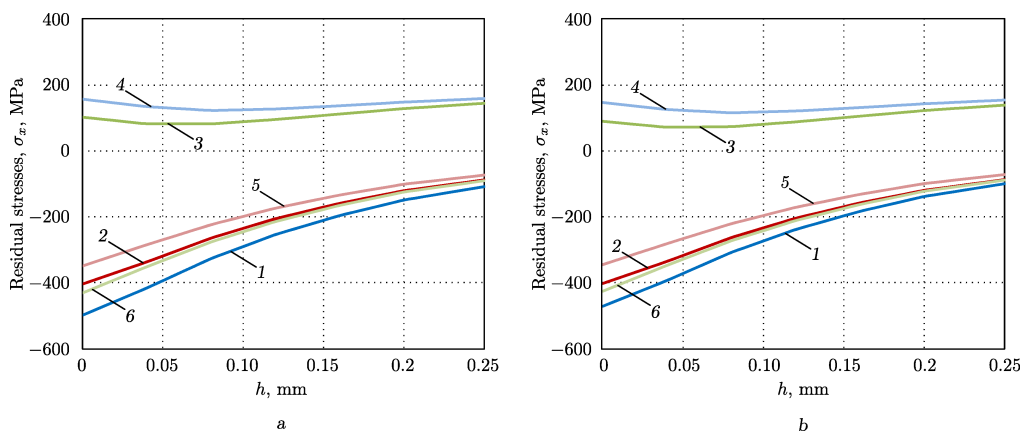


Рис. 14. Данные кинетики компоненты σ_x в условиях ползучести при угловой скорости вращения 2000 об/мин в сечении $x = 75$ мм для $\rho = 0.3$ мм, полученные при упругом (а) и упругопластическом (б) решении

[Figure 14. The kinetic data for the components σ_x under creep conditions at an angular velocity of 2000 RPM in the section $x = 75$ mm for $\rho = 0.3$ mm, obtained from the elastic solution (a) and the elastoplastic solution (b). The markers mean the same thing as in Figure 5]

на рис. 7–10 с меткой b . Аналогичная картина для релаксации остаточных напряжений наблюдается и при $\rho = 0.3$ мм, для этого также достаточно сравнить кривые 1 и 6 на рис. 11–14 с меткой b .

7. Выводы.

1. Разработан численный метод расчета кинетики остаточных напряжений во вращающемся поверхностно упрочненном призматическом образце со сквозным одиночным надрезом полукруглого профиля в условиях высокотемпературной ползучести при температурно-силовом на-

гружении, основанный на известном напряженно-деформированном состоянии для гладкого образца и технологии опережающего поверхностного пластического деформирования.

2. На примере сравнения численных решений задач кинетики остаточных напряжений во вращающемся гладком поверхностно упрочненном призматическом образце методом сеток и методом конечных элементов в условиях температурно-силового нагружения с выдержкой по времени до 100 ч при температуре 650 °C и с его последующей полной разгрузкой обоснована адекватность разработанного метода расчета на основе МКЭ.
3. На основе сравнительного анализа решения задач оценки кинетики остаточных напряжений в упрочненном призматическом образце с надрезом обоснована постановка задачи релаксации ОН в рамках теории упругопластического деформирования после ОППД для радиусов надрезов меньших, чем толщина упрочненного слоя в области сжатия.
4. Показано, что несмотря на существенный процесс релаксации остаточных напряжений для всех рассматриваемых случаев образцов с круговым надрезом радиуса $\rho = \{0.1; 0.3\}$ мм, после полной температурно-силовой разгрузки в них все еще наблюдается значительный уровень остаточных сжимающих напряжений, что свидетельствует об эффективности поверхностного упрочнения и в условиях высокотемпературной ползучести.

Конкурирующие интересы. У нас нет конфликта интересов в отношении авторства и публикации этой статьи.

Авторский вклад и ответственность. Все авторы принимали участие в разработке концепции статьи и в написании рукописи. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

Финансирование. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23–29–00434, <https://rscf.ru/project/23-29-00434/>.

Библиографический список

1. Биргер И. А. *Остаточные напряжения*. М.: Машгиз, 1963. 232 с.
2. Гринченко И. Г. *Упрочнение деталей из жаропрочных и титановых сплавов*. М.: Машиностроение, 1971. 120 с.
3. Иванов С. И., Шатунов М. П., Павлов В. Ф. Влияние остаточных напряжений на выносливость образцов с надрезом / *Вопросы прочности элементов авиационных конструкций*, Вып. 1. Куйбышев: КуАИ, 1974. С. 88–95.
4. Кудрявцев И. В. *Поверхностный наклеп для повышения прочности и долговечности деталей машин поверхностным пластическим деформированием*. М.: Машиностроение, 1969. 100 с.
5. Ножницкий Ю. А., Фишгойт А. В., Ткаченко Р. И., Теплова С. В. Разработка и применение новых методов упрочнение деталей ГТД, основанных на пластическом деформировании поверхностных слоев // *Вестн. двигател.*, 2006. № 2. С. 8–16.
6. Сулима А. М., Шувалов В. А., Ягодкин Ю. Д. *Поверхностный слой и эксплуатационные свойства деталей машин*. М.: Машиностроение, 1988. 240 с.
7. Buchanan D. J., John R. Relaxation of shot-peened residual stresses under creep loading // *Scripta Materialia*, 2008. vol. 59, no. 3. pp. 286–289. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.scriptamat.2008.03.021>.

8. Кравченко Б. А., Круцило В. Г., Гутман Г. Н. *Термопластическое упрочнение — резерв повышения прочности и надежности деталей машин*. Самара: СамГТУ, 2000. 216 с.
9. Hereñú S., Strubbia R., Rubio-González C., et al. High cycle fatigue life improvement of superferritic stainless steel by laser shock peening without coating // *Optics Laser Tech.*, 2022. vol. 152, 108083. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.optlastec.2022.108083>.
10. Chen M., Xing S., Liu H., et al. Determination of surface mechanical property and residual stress stability for shot-peened SAF2507 duplex stainless steel by in situ X-ray diffraction stress analysis // *J. Mater. Res. Technol.*, 2022. vol. 9, no. 4. pp. 7644–7654. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jmrt.2020.05.028>.
11. Peng X., Liang Y., Qin X., Gu J. The effect of ultrasonic surface rolling process on tension-tension fatigue limit of small diameter specimens of Inconel 718 superalloy // *Int. J. Fatigue*, 2022. vol. 162, 106964. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijfatigue.2022.106964>.
12. Zhao J., Zhou W., Tang J., et al. Analytical and experimental study on the surface generation mechanism in shot peening // *Archiv. Civ. Mech. Eng.*, 2022. vol. 22, 111. DOI: <https://doi.org/10.1007/s43452-022-00431-7>.
13. Митряев К. Ф., Егоров В. И., Мальков Г. Ф. [и др.] Повышение усталостной прочности жаропрочных материалов алмазным выглаживанием поверхности детали / *Остаточные напряжения*, Вып. 53. Куйбышев: КуАИ, 1971. С. 151–159.
14. Радченко В. П., Морозов А. П. Экспериментальное исследование влияния пневмодробеструйной обработки, температурных выдержек и многоцикловых усталостных испытаний на физико-механическое состояние упрочнённого слоя цилиндрических образцов из сплавов В95 и Д16Т // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2010. № 5. С. 222–228. EDN: NCTNON. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu829>.
15. Павлов В. Ф., Кирпичев В. А., Иванов В. Б. *Остаточные напряжения и сопротивление усталости упрочненных деталей с концентраторами напряжений*. Самара: Самар. науч. центр РАН, 2008. 64 с.
16. Радченко В. П., Саушкин М. Н. *Ползучесть и релаксация остаточных напряжений в упрочненных конструкциях*. М.: Машиностроение-1, 2005. 226 с. EDN: RXLJLN.
17. Радченко В. П., Павлов В. Ф., Саушкин М. Н. Исследование влияния анизотропии поверхностного пластического упрочнения на распределение остаточных напряжений в полых и сплошных цилиндрических образцах // *Вестн. Перм. нац. иссл. политехн. ун-та. Механика*, 2015. № 1. С. 130–147. EDN: TVSBYV. DOI: <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2015.1.09>.
18. Павлов В. Ф., Букатый А. С., Семенова О. Ю. Прогнозирование предела выносливости поверхностно упрочненных деталей с концентраторами напряжений // *Вестн. машиностроения*, 2019. № 1. С. 3–7. EDN: VTAEPK.
19. Павлов В. Ф., Кирпичев В. А., Вакулюк В. С. *Прогнозирование сопротивления усталости поверхностно упрочненных деталей по остаточным напряжениям*. Самара: Самар. науч. центр РАН, 2012. 125 с.
20. Bag A., Lévesque M., Brochu M. Effect of shot peening on short crack propagation in 300M steel // *Int. J. Fatigue*, 2020. vol. 131, 105346. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijfatigue.2019.105346>.
21. Fleury R., Nowell D. Evaluating the influence of residual stresses and surface damage on fatigue life of nickel superalloys // *Int. J. Fatigue*, 2017. vol. 105. pp. 27–33. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijfatigue.2017.08.015>.
22. Foss B., Gray S., Hardy M., et al. Analysis of shot-peening and residual stress relaxation in the nickel-based superalloy RR1000 // *Acta Materialia*, 2013. vol. 61, no. 7. pp. 2548–2559. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.actamat.2013.01.031>.
23. Soyama H. Comparison between shot peening, cavitation peening, and laser peening by observation of crack initiation and crack growth in stainless steel // *Metals*, 2019. vol. 10, no. 1, 63. DOI: <https://doi.org/10.3390/met10010063>.
24. Takahashi K., Osedo H., Suzuki T., Fukuda S. Fatigue strength improvement of an aluminum alloy with a crack-like surface defect using shot peening and cavitation peening // *Eng. Fract.*

- Mech.*, 2018. vol. 193. pp. 151–161. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2018.02.013>.
25. You C., Achintha M., He B. Y., Reed P. A. S. A numerical study of the effects of shot peening on the short crack growth behaviour in notched geometries under bending fatigue tests // *Int. J. Fatigue*, 2017. vol. 103. pp. 99–111. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijfatigue.2017.05.023>.
26. Zhao X., Sun Z., Xu D., Liu Y. Local fatigue strength evaluation of shot peened 40Cr notched steel // *Metals*, 2018. vol. 8, no. 9, 681. DOI: <https://doi.org/10.3390/met8090681>.
27. Радченко В. П., Шишкин Д. М. Метод реконструкции остаточных напряжений в призматическом образце с надрезом полукруглого профиля после опережающего поверхностного пластического деформирования // *Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика*, 2020. Т. 20, № 4. С. 478–492. EDN: ZPKSUN. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-4-478-492>.
28. Радченко В. П., Шишкин Д. М. Численный метод расчета напряженно-деформированного состояния в призматическом поверхностно упрочненном образце с надрезом в упругой и упругопластической постановках // *Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика*, 2021. Т. 21, № 4. С. 503–519. EDN: KNHHLG. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-4-503-519>.
29. Радченко В. П., Кирпичев В. А., Лунин В. В. Влияние термоэкспозиции на остаточные напряжения образцов из сплава ЭП742 после ультразвукового упрочнения // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Техн. науки*, 2012. № 3. С. 147–154. EDN: PYUQNV.
30. Радченко В. П., Саушкин М. Н., Бочкова Т. И. Математическое моделирование и экспериментальное исследование формирования и релаксации остаточных напряжений в плоских образцах из сплава ЭП742 после ультразвукового упрочнения в условиях высокотемпературной ползучести // *Вестн. Перм. нац. иссл. политехн. ун-та. Механика*, 2016. № 1. С. 93–112. EDN: VQTAHL. DOI: <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2016.1.07>.
31. Радченко В. П., Либерман А. Е., Блохин О. Л. Релаксация остаточных напряжений в поверхностно упрочненном вращающемся цилиндре в условиях ползучести // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2022. Т. 26, № 1. С. 119–139. EDN: GFBZBC. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1884>.
32. Радченко В. П., Бербасова Т. И., Саушкин М. Н., Акинфиева М. М. Релаксация остаточных напряжений в поверхностно упрочненных вращающихся призматических элементах конструкций в условиях ползучести // *Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика*, 2023. Т. 23, № 4. С. 512–530. EDN: TAEGBQ. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-4-512-530>.
33. Радченко В. П., Еремин Ю. А. *Реологическое деформирование и разрушение материалов и элементов конструкций*. М.: Машиностроение-1, 2004. 265 с. EDN: QNATSX.
34. Работнов Ю. Н. *Ползучесть элементов конструкций*. М.: Наука, 1966. 752 с.

MSC: 74A10, 74D10

Residual stress analysis in surface-hardened rotating prismatic elements with semicircular notches under high-temperature creep

V. P. Radchenko¹, M. N. Saushkin¹, D. M. Shishkin²

¹ Samara State Technical University,
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russian Federation.

² Syzran' Branch of Samara State Technical University,
45, Sovetskaya str., Syzran', Samara region, 446001, Russian Federation.

Abstract

A numerical method is developed to calculate the relaxation of residual stresses in a rotating surface-hardened prismatic sample with a semicircular notch under high-temperature creep conditions. The problem models the stressed-deformed state of a sample fixed on a disk rotating at a constant speed.

The methodology includes the following steps:

- reconstruction of residual stress and plastic deformation fields after preliminary surface plastic deformation;
- calculation of residual stress relaxation during creep in a rotating prismatic rod.

A detailed analysis is performed on a prismatic sample measuring $150 \times 10 \times 10$ mm made of EP742 alloy. One face of this sample is hardened using mechanical ultrasonic treatment. The problem is analyzed for samples with semicircular notches of 0.1 mm and 0.3 mm radii, located 2 mm and 75 mm from the fixed edge.

Mechanics of Solids

Research Article

© The Author(s), 2024

© Samara State Technical University, 2024 (Compilation, Design, and Layout)

© The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Please cite this article in press as:

Radchenko V. P., Saushkin M. N., Shishkin D. M. Residual stress analysis in surface-hardened rotating prismatic elements with semicircular notches under high-temperature creep, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2024, vol. 28, no. 3, pp. 489–515. EDN: GOWDBU. DOI: 10.14498/vsgtu2099 (In Russian).

Authors' Details:

Vladimir P. Radchenko ✉ <https://orcid.org/0000-0003-4168-9660>

Dr. Phys. & Math. Sci., Professor; Head of Department; Dept. of Applied Mathematics & Computer Science; e-mail: radchenko.vp@samgtu.ru

Mikhail N. Saushkin <https://orcid.org/0000-0002-8260-2069>

Cand. Phys. & Math. Sci.; Associate Professor; Dept. of Applied Mathematics & Computer Science; e-mail: saushkin.mn@samgtu.ru

Dmitry M. Shishkin <https://orcid.org/0000-0003-3205-2262>

Cand. Techn. Sci.; Associate Professor; Dept. of General Theoretical Disciplines; e-mail: shishkin.dim@yandex.ru

For the notched regions after preliminary surface plastic deformation, the problems are solved in both elastic and elastoplastic formulations. The obtained initial fields of residual stresses and plastic deformations are used as input data for the creep problem.

The analysis of the influence of notch radius, location, angular velocity, and initial residual stress fields on the relaxation of residual stresses is conducted at a temperature of 650 °C based on phenomenological flow theory established from known experimental data for this alloy.

Results show that to determine the initial stressed-deformed state after preliminary plastic deformation for a notch radius of 0.1 mm, an elastoplastic solution is necessary, while for a radius of 0.3 mm, the differences between elastic and elastoplastic solutions are minimal.

The study of residual stress relaxation is conducted at angular velocities of 1500 and 2000 RPM over a period of 100 hours. Despite significant relaxation of residual stresses for samples with notches of radii 0.1 mm and 0.3 mm, a substantial level of residual compressive stresses remains in the notch regions after complete thermal-mechanical unloading. This indicates the high effectiveness of surface hardening under high-temperature creep conditions.

Keywords: residual stresses, preliminary surface plastic deformation, semi-circular notch, rotation of prismatic specimen, creep, relaxation of residual stresses.

Received: 18th June, 2024 / Revised: 12th October, 2024 /

Accepted: 21st October, 2024 / First online: 21st November, 2024

Competing interests. We have no conflict of interest regarding the authorship and publication of this article.

Authors' contributions and responsibilities. All authors participated in the development of the article's concept and in writing the manuscript. The authors bear full responsibility for submitting the final manuscript for publication. The final version of the manuscript was approved by all authors.

Funding. The research was funded by the Russian Science Foundation (project no. 23-29-00434), <https://rscf.ru/en/project/23-29-00434/>.

References

1. Birger I. A. *Ostatochnye napriazheniia* [Residual Stresses]. Moscow, Mashgiz, 1963, 232 pp. (In Russian)
2. Grinchenko I. G. *Uprochnenie detalei iz zharoprochnykh i titanovykh splavov* [The Hardening of Parts of Heat-Resistant and Titanium Alloys]. Moscow, Mashinostroenie, 1971, 120 pp.
3. Ivanov S. I., Shatunov M. P., Pavlov V. F. Influence of residual stresses on notched specimen endurance, In: *Problems of Strength of Aircraft Structure Elements*, Issue 1. Kuibyshev, Kuibyshev Aviation Inst., 1974, pp. 88–95 (In Russian).
4. Kudryavtsev I. V. *Poverkhnostnyi naklep dlia povysheniia prochnosti i dolgovechnosti detalei mashin poverkhnostnym plasticheskim deformirovaniem* [Surface Strain Hardening to Increase the Strength and Durability of Machine Parts]. Moscow, Mashinostroenie, 1969, 100 pp. (In Russian)
5. Nozhnitskii Yu. A., Fishgoit A. V., Tkachenko R. I., Teplova S. V. Development and application of new GTE parts hardening methods based on the plastic deformation of the surface layers, *Vestn. Dvigatel.*, 2006, no. 2, pp. 8–16 (In Russian).

6. Sulima G. N., Shuvalov V. A., Yagodka Yu. D. *Poverkhnostnyi sloi i ekspluatatsionnye svoystva detalei mashin* [Surface Layer and Performance Properties of Machine Parts]. Moscow, Mashinostroenie, 1988, 240 pp. (In Russian)
7. Buchanan D. J., John R. Relaxation of shot-peened residual stresses under creep loading, *Scripta Materialia*, 2008, vol. 59, no. 3, pp. 286–289. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.scriptamat.2008.03.021>.
8. Kravchenko B. A., Krut'silo V. G., Gutman G. N. *Termoplasticheskoe uprochnenie – rezerv povysheniya prochnosti i nadezhnosti detalei mashin* [Thermoplastic Hardening as a Reserve for Increasing the Strength and Reliability of Machine Parts]. Samara, Samara State Technical Univ., 2000, 216 pp. (In Russian)
9. Hereñú S., Strubbia R., Rubio-González C., et al. High cycle fatigue life improvement of superferritic stainless steel by laser shock peening without coating, *Optics Laser Tech.*, 2022, vol. 152, 108083. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.optlastec.2022.108083>.
10. Chen M., Xing S., Liu H., et al. Determination of surface mechanical property and residual stress stability for shot-peened SAF2507 duplex stainless steel by in situ X-ray diffraction stress analysis, *J. Mater. Res. Technol.*, 2022, vol. 9, no. 4, pp. 7644–7654. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jmrt.2020.05.028>.
11. Peng X., Liang Y., Qin X., Gu J. The effect of ultrasonic surface rolling process on tension-tension fatigue limit of small diameter specimens of Inconel 718 superalloy, *Int. J. Fatigue*, 2022, vol. 162, 106964. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijfatigue.2022.106964>.
12. Zhao J., Zhou W., Tang J., et al. Analytical and experimental study on the surface generation mechanism in shot peening, *Archiv. Civ. Mech. Eng.*, 2022, vol. 22, 111. DOI: <https://doi.org/10.1007/s43452-022-00431-7>.
13. Mitryaev K. F., Egorov V. I., Malkov G. F., et al. Improving the fatigue strength of heat-resistant materials by diamond burnishing of the surface of the part, In: *Ostatochnye napriazheniia* [Residual Stresses], Issue 53. Kuibyshev, Kuibyshev Aviation Institute, 1971, pp. 151–159 (In Russian).
14. Radchenko V. P., Morozov A. P. Experimental study of the effect induced by air shot-blasting processing, thermal exposition and high cycle fatigue tests on physical and mechanical condition hardening layer of cylindrical samples of alloys V95 and D16T, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2010, no. 5, pp. 222–228 (In Russian). EDN: NCTNON. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu829>.
15. Pavlov V. F., Kirpichev V. A., Ivanov V. B. *Ostatochnye napriazheniia i soprotivlenie ustalosti uprochnennykh detalei s kontsentratorami napriazhenii* [Residual Stresses and Fatigue Resistance of Hardened Parts with Stress Concentrators]. Samara, Samara Sci. Center of RAS, 2008, 64 pp. (In Russian)
16. Radchenko V. P., Saushkin M. N. *Polzuchest' i relaksatsiia ostatochnykh napriazhenii v uprochnennykh konstruktsiakh* [Creep and Relaxation of Residual Stresses in Hardened Structures]. Moscow, Mashinostroenie-1, 2005, 226 pp. (In Russian). EDN: RXLJLN.
17. Radchenko V. P., Pavlov V. Ph., Saushkin M. N. Investigation of surface plastic hardening anisotropy influence on residual stresses distribution in hollow and solid cylindrical specimens, *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2015, no. 1, pp. 130–147 (In Russian). EDN: TVSBYV. DOI: <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2015.1.09>.
18. Pavlov V. F., Bukaty A. S., Semenova O. Yu. Forecasting of the endurance limit of surface-hardened parts with stress concentrators, *Vestn. Mashinostroeniya*, 2019, no. 1, pp. 3–7 (In Russian). EDN: VTAEPK.
19. Pavlov V. F., Kirpichev V. A., Vakuluk V. S. *Prognozirovanie soprotivleniia ustalosti poverkhnostno uprochnennykh detalei po ostatochnym napriazheniiam* [Prediction of Fatigue Resistance of Surface Reinforced Parts by Residual Stresses]. Samara, Samara Sci. Center of RAS, 2012, 125 pp. (In Russian)
20. Bag A., Lévesque M., Brochu M. Effect of shot peening on short crack propagation in 300M steel, *Int. J. Fatigue*, 2020, vol. 131, 105346. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijfatigue.2019.105346>.

21. Fleury R., Nowell D. Evaluating the influence of residual stresses and surface damage on fatigue life of nickel superalloys, *Int. J. Fatigue*, 2017, vol. 105, pp. 27–33. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijfatigue.2017.08.015>.
22. Foss B., Gray S., Hardy M., et al. Analysis of shot-peening and residual stress relaxation in the nickel-based superalloy RR1000, *Acta Materialia*, 2013, vol. 61, no. 7, pp. 2548–2559. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.actamat.2013.01.031>.
23. Soyama H. Comparison between shot peening, cavitation peening, and laser peening by observation of crack initiation and crack growth in stainless steel, *Metals*, 2019, vol. 10, no. 1, 63. DOI: <https://doi.org/10.3390/met10010063>.
24. Takahashi K., Osedo H., Suzuki T., Fukuda S. Fatigue strength improvement of an aluminum alloy with a crack-like surface defect using shot peening and cavitation peening, *Eng. Fract. Mech.*, 2018, vol. 193, pp. 151–161. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2018.02.013>.
25. You C., Achintha M., He B. Y., Reed P. A. S. A numerical study of the effects of shot peening on the short crack growth behaviour in notched geometries under bending fatigue tests, *Int. J. Fatigue*, 2017, vol. 103, pp. 99–111. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijfatigue.2017.05.023>.
26. Zhao X., Sun Z., Xu D., Liu Y. Local fatigue strength evaluation of shot peened 40Cr notched steel, *Metals*, 2018, vol. 8, no. 9, 681. DOI: <https://doi.org/10.3390/met8090681>.
27. Radchenko V. P., Shishkin D. M. The method of reconstruction of residual stresses in a prismatic specimen with a notch of a semicircular profile after advanced surface plastic deformation, *Izv. Saratov Univ. Math. Mech. Inform.*, 2020, vol. 20, no. 4, pp. 478–492 (In Russian). EDN: ZPKSUN. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-4-478-492>.
28. Radchenko V. P., Shishkin D. M. Numerical method for calculating the stress-strain state in a prismatic surface-hardened specimen with a notch in elastic and elastoplastic formulations, *Izv. Saratov Univ. Math. Mech. Inform.*, 2021, vol. 21, no. 4, pp. 503–519 (In Russian). EDN: KNHHLG. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-4-503-519>.
29. Radchenko V. P., Kirpichev V. A., Lunin V. A. Influence of thermoexposition on residual stresses of specimens from EP742 alloy after the ultrasonic hardening, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Techn. Nauki*, 2012, no. 3, pp. 147–154 (In Russian). EDN: PYUQNV.
30. Radchenko V. P., Saushkin M. N., Bochkova T. I. Mathematical modeling and experimental study of forming and relaxation of the residual stresses in plane samples made of EP742 alloy after the ultrasonic hardening under the hightemperature creep conditions, *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2016, no. 1, pp. 93–112 (In Russian). EDN: VQTAHL. DOI: <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2016.1.07>.
31. Radchenko V. P., Liberman A. E., Blokhin O. L. Relaxation of residual stresses in a surface-hardened rotating cylinder under creep conditions, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2022, vol. 26, no. 1, pp. 119–139 (In Russian). EDN: GFBZBC. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1884>.
32. Radchenko V. P., Berbasova T. I., Saushkin M. N., Akinfieva M. M. Relaxation of residual stresses in surface-hardened rotating prismatic elements of structures under creep conditions, *Izv. Saratov Univ. Math. Mech. Inform.*, 2023, vol. 23, no. 4, pp. 512–530 (In Russian). EDN: TAEGBQ. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-4-512-530>.
33. Radchenko V. P., Eremin Yu. A. *Reologicheskoe deformirovanie i razrushenie materialov i elementov konstruksii* [Rheological Deformation and Fracture of Materials and Structural Elements]. Moscow, Mashinostroenie-1, 2004, 264 pp. (In Russian). EDN: QNATSX.
34. Rabotnov Yu. N. *Creep problems in structural members*, North-Holland Series in Applied Mathematics and Mechanics, vol. 7. Amsterdam, London, North-Holland Publ. Co., 1969, xiv+822 pp.



УДК 539.52

Микроструктурная модель процессов двойникования и раздвойникования мартенситной фазы в сплавах с памятью формы

А. А. Роговой

Институт механики сплошных сред УрО РАН,
Россия, 614018, Пермь, ул. Академика Королева, 1.

Аннотация

В статье на примере сплава с памятью формы Cu–Al–Ni обоснован подход к описанию на микроструктурном уровне процессов двойникования и раздвойникования мартенситной фазы. Согласованная двойниковая мартенситная структура описывается уравнением совместности Адамара для деформаций, решение которого позволило определить поверхности, вдоль которых происходит сдвиг, направления и величину скольжения в орторомбической кристаллической ячейке, соответствующей рассматриваемому материалу в мартенситном состоянии, приводящих к появлению и исчезновению двойниковой структуры. Показано, что в сплаве с памятью формы одновременно и неразрывно существуют двойники двух видов: деформационный и структурный. Первый связан с деформацией простого сдвига, возникающей в соответствии с условием совместности Адамара в мартенситной пластине, что приводит к излому этой прямой пластины и возникновению двух элементов, повернутых на определенный угол друг относительно друга, которые и формируют этот двойник. Структурный двойник формируется из двух частей, в каждой из которых орторомбические кристаллические ячейки мартенсита одинаково ориентированы, но одна из осей этих ячеек меняет свое направление на 90° при переходе в другую часть двойника. Формирование деформационного двойника инициирует возникновение в среде деформации простого сдвига, а структурного двойника — структурной деформации. Показано, что определенное положение структурного двойника в деформационном приводит к равенству этих деформаций.

Ключевые слова: микроструктурное моделирование, анизотропный материал, условие совместности Адамара, поверхности скольжения и направления сдвига.

Механика деформируемого твердого тела Научная статья

© Коллектив авторов, 2024

© СамГТУ, 2024 (составление, дизайн, макет)

Эта статья публикуется на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

Образец для цитирования

Роговой А. А. Микроструктурная модель процессов двойникования и раздвойникования мартенситной фазы в сплавах с памятью формы // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2024. Т. 28, № 3. С. 516–542. EDN: NDDMCS. DOI: 10.14498/vsgtu2089.

Сведения об авторе

Анатолий Алексеевич Роговой <https://orcid.org/0000-0003-1723-0067>

доктор физико-математических наук, профессор; главный научный сотрудник; лаб. нелинейной механики деформируемого твердого тела; e-mail: rogovoy@icmm.ru

Получение: 6 марта 2024 г. / Исправление: 18 сентября 2024 г. /
Принятие: 27 сентября 2024 г. / Публикация онлайн: 28 октября 2024 г.

1. Введение. В статье на примере сплава с памятью формы (СПФ) Cu–Al–Ni обоснован подход к описанию на микроструктурном уровне процессов двойникования и раздвойникования мартенситной фазы. Сплавы этого типа относятся к классу функциональных (интеллектуальных, умных) материалов, которые значительно меняют свою форму и размер под действием внешних силовых полей (деформации могут достигать 6–10 %). С помощью этих полей можно контролировать форму и размер образца, изготовленного из таких материалов, и управлять его геометрией.

Поведение СПФ в силовом поле определяется их структурой, возникшей в результате прямого фазового перехода первого рода, реализуемого только за счет изменения температуры (охлаждения) из аустенитного состояния (высокотемпературная фаза) в мартенситное состояние (низкотемпературная фаза). В таком процессе кубическая кристаллическая ячейка аустенита сплава Cu–Al–Ni с одинаковой длиной ребер преобразуется в шесть вариантов орторомбической ячейки мартенсита (прямоугольный параллелепипед) с ребрами a , b и c . Шесть тензоров второго ранга $\mathbf{U}_i$, $i = 1, 2, \dots, 6$, называемые тензорами деформации Бейна, соответствуют такому преобразованию (см. [1–6]) и могут быть представлены как в ортонормированном базисе $\mathbf{e}_k$, $k = 1, 2, 3$, с векторами, параллельными ребрам кубической ячейки аустенита (исходная конфигурация), так и в ортонормированном базисе $\tilde{\mathbf{e}}_k$, $k = 1, 2, 3$, с векторами, параллельными ребрам прямоугольного параллелепипеда, представляющего собой ячейку мартенсита (текущая конфигурация).

Согласно микроструктурным экспериментальным данным, отдельные тонкие прямоугольные мартенситные пластины (прямоугольные параллелепипеды) с одним из вариантов орторомбической ячейки, который соответствует, например, деформации Бейна $\mathbf{U}_1$, сначала появляются внутри исходной аустенитной фазы монокристалла. При дальнейшем охлаждении в материале, оставшемся еще в аустенитном состоянии, образуются новые мартенситные пластины с другими, в общем случае, вариантами деформации Бейна. Этот процесс продолжается до тех пор, пока все участки аустенита между уже сформированными мартенситными пластинами не перейдут в мартенситную фазу. В ходе такого процесса недеформированный и ненапряженный материал становится деформированным и напряженным. Но в то же время в материале инициируются процессы, направленные на компенсацию результатов этого фазового перехода (принцип Ле Шателье–Брауна), и для компенсации напряжений, возникших в этом случае, сплав образует двойниковую структуру. Такая самоаккомодация приводит лишь к объемной деформации незначительной величины и, как следствие, к минимальному уровню возникающих в этом процессе напряжений.

Теория, описывающая формирование двойников при образовании мартенсита в СПФ, основана на условии совместности Адамара [7], и решение соответствующего этой теории уравнения двойникования позволяет определить поверхности, вдоль которых происходит сдвиг (направление единичной нормали $\mathbf{N}$ к этой поверхности), направление скольжения (единичный вектор $\boldsymbol{\tau}$)

и величину этого скольжения s в кристаллической ячейке, соответствующей рассматриваемому материалу в мартенситном состоянии, приводящих к появлению, развитию и исчезновению двойниковой структуры. Сдвиг же на величину s возникает при приложении к поверхности сдвига касательного усилия p_τ , действующего в направлении вектора скольжения τ и имеющего достаточную величину. Достаточная (критическая) величина этого усилия p_τ разная для разных СПФ и определяется из эксперимента.

Основы микроструктурного моделирования изложены в работах В. А. Лихачева и В. Г. Малинина [8], В. Е. Панина [9,10] и получили дальнейшее развитие в научных школах этих авторов и научной школе П. В. Трусова [11–13]. Подходы микроструктурного моделирования применительно к материалам с памятью формы (и подходы, и такие материалы являются предметом нашего исследования) систематически используются в работах А. Е. Волкова с соавторами (см., например, [14,15])¹. Но по какой-то причине в российских работах, посвященных микроструктурному моделированию поведения материалов с памятью формы, не используется уравнение совместности (или двойникования) Адамара [1, 2]. Решение этого уравнения позволяет определить, как уже отмечалось выше, плоскость скольжения вариантов мартенсита, образующих двойник, направление и величину этого скольжения, т.е. кинематику процесса двойникования.

В работах [16–20] с использованием уравнения совместности Адамара обобщен подход к описанию процессов двойникования и раздвойникования мартенситной структуры в ферромагнитном сплаве Ni_2MnGa с памятью формы, которые могут происходить при определенных условиях только в магнитном поле (поля другой физической природы отсутствуют), а в работе [21] — при совместном действии магнитного и силового полей. В этом материале в мартенситном состоянии возникают тетрагональные кристаллические ячейки, имеющие две оси симметрии второго порядка и одну ось симметрии четвертого порядка. Этим определяются магнитная и механическая анизотропии ячейки. Анизотропия же материала (его представительного объема) определяется взаимным расположением этих ячеек в каждом из элементов двойника. Преобразование кубической ячейки в тетрагональную сопровождается в этом материале возникновением только трех независимых тензоров деформации Бейна. В указанных работах [16–21] дифференциальным уравнениям магнитомеханической задачи поставлены в соответствие вариационные уравнения, для чего использован наиболее общий подход, основанный на процедуре Галеркина (см., например, [22]). Заметим, что построить с помощью этой процедуры вариационное уравнение можно всегда. Но далеко не всегда можно из этого уравнения вывести интегральный функционал, исследование которого на выпуклость и коэрцитивность позволяет сделать вывод о существовании и единственности решения данной краевой задачи. Вариационная постановка позволяет не только на порядок снизить требования к гладкости искомого решения, но и построить определяющее уравнение, описывающее поведение материала, в том числе анизотропное.

В настоящей работе условие совместности Адамара привлекается для опи-

¹Необходимо отметить, что сплавы с памятью формы являются предметом глубокого исследования школы А. А. Мовчана. Но в работах этой школы строится феноменологическая модель на макроуровне, в отличие от рассматриваемого в настоящей статье.

сания кинематики процесса двойникования сплава с памятью формы Cu–Al–Ni. В этом материале в мартенситном состоянии возникают орторомбические кристаллические ячейки, отличные от рассмотренных ранее в указанных предыдущих работах, что приводит к другой анизотропии механических свойств ячейки и материала (представительного объема). Процесс сопровождается возникновением шести независимых тензоров деформации Бейна.

Работа состоит из пяти разделов. В разделе 2 описывается структура сплава с памятью формы Cu–Al–Ni и определяются структурные деформации Бейна, возникающие при переходе этого сплава из аустенитного в мартенситное состояние. В разделе 3 излагаются основные положения теории двойникования, основанной на уравнении совместности Адамара, а в разделе 4 приводится общее решение этого уравнения для СПФ Cu–Al–Ni, имеющего орторомбическую кристаллическую ячейку мартенсита. Решение получено в работах [1–6], с его использованием в разделе 5 анализируются процессы двойникования и раздвойникования в этом сплаве.

В этой статье векторы обозначаются жирным курсивным шрифтом, $\mathbf{A}$, тензоры — жирным прямым шрифтом, $\mathbf{A}$. Скалярное произведение тензоров и/или векторов обозначается как $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$, векторное произведение — как $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ и тензорное произведение, для которого иногда используется обозначение $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$, — как $\mathbf{AB}$. При действии оператора Гамильтона $\nabla = \mathbf{r}^i \partial / \partial q^i$ базисный вектор этого оператора всегда находится на первом месте слева, $\nabla * \mathbf{A} = \mathbf{r}^i * \partial \mathbf{A} / \partial q^i$, где $*$ — скалярное, векторное или тензорное произведение, в отличие от некоторых зарубежных работ, в которых действие оператора Гамильтона представляется в виде $\nabla * \mathbf{A} = \partial \mathbf{A} / \partial q^i * \mathbf{r}^i$. В статье рассматриваются только малые деформации, поэтому между операторами Гамильтона начальной и текущей конфигураций не делается различия и используется оператор, представленный выше. Выражение $\mathbf{A}^T$ означает транспонирование тензора второго ранга $\mathbf{A}$, а $\mathbf{g}$ — единичный тензор второго ранга.

2. Структура сплава с памятью формы Cu–Al–Ni в аустенитном и мартенситном состояниях. Структурные деформации. В процессе получения сплава с памятью формы Cu–Al–Ni происходит ряд полиморфных превращений (фазовых переходов первого рода), приводящих к изменению типа кристаллической решётки. Сначала при охлаждении в области высоких температур (аустенитное состояние сплава) образуется кристаллическая структура в виде объемно-центрированных кубических (ОЦК) ячеек, которая при дальнейшем охлаждении переходит в D0₃ упорядоченную кубическую структуру² [3, 23].

Последующее охлаждение до комнатной температуры переводит D0₃ структуру в орторомбическую ячейку (прямоугольный параллелепипед) мартенсита (низкотемпературное состояние). В результате этого фазового перехода первого рода в мартенситном состоянии при определенных условиях могут образовываться двойники, кинематика возникновения и исчезновения которых и является предметом данного исследования. В связи с этим в аустенитном состоянии рассматривается только кубическая структура D0₃, а в мартенситном — структура, образованная орторомбическими ячейками.

Кубическая структура D0₃ показана на рис. 1 и представляет собой грани-

²Относительно структуры D0₃ см., например, Crystal Structure Descriptions, 2nd edition, <https://som.web.cmu.edu/StructuresAppendix2.pdf>.

и реброцентрированный куб с длиной ребра a_0 , в центре которого расположен объемно-центрированный куб меньшего размера (рис. 1, а). Для наглядности атомы, расположенные в узлах и центре этого малого куба, выделены голубым цветом. Атомная структура на диагональных плоскостях, имеющих длину ребра $\sqrt{2}a_0$ и содержащих векторы $\tilde{e}_1$ и $\tilde{e}_3$ или векторы $\tilde{e}_2$ и $\tilde{e}_3$, показана на рис. 1, б. Расположение атомов химических элементов сплава Cu–Al–Ni в узлах ячейки удовлетворяет всем приведенным ниже условиям симметрии. Поэтому при решении поставленной задачи нет необходимости в их идентификации.

Кубическая ячейка аустенита в сплаве Cu–Al–Ni преобразуется в орторомбическую ячейку мартенсита и, следуя [1, 5], этот процесс удобно продемонстрировать, используя рис. 2. Здесь внутри двух примыкающих друг к другу кубических ячеек структуры D0₃ (тонкие сплошные линии) выделяется тетрагональная ячейка (толстые сплошные линии) и показано расположение атомов в соответствии с рис. 1.

Так как длина любого ребра кубической ячейки a_0 (см. рис. 1), в тетрагональной ячейке длина ребра вдоль вектора $\tilde{e}_3$ (l_3) тоже a_0 , а вдоль векторов $\tilde{e}_1$ и $\tilde{e}_2$ $l_1 = l_2 = (\sqrt{2}/2)a_0$, что равно половине длины диагонали грани куба.

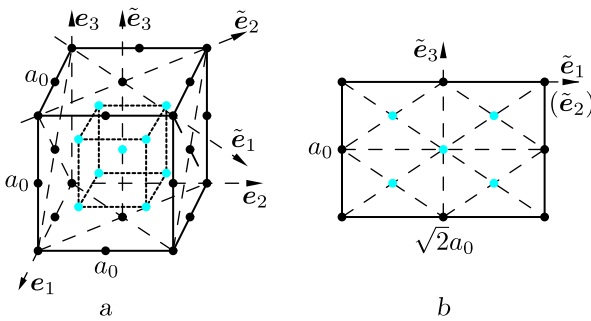


Рис. 1. Кубическая D0₃ ячейка (а) и диагональная плоскость, содержащая векторы $\tilde{e}_1$ и $\tilde{e}_3$ или векторы $\tilde{e}_2$ и $\tilde{e}_3$ (б); атомы показаны не на всех гранях и ребрах рис. (а)

[Figure 1. Cubic D0₃ unit cell (a) and the diagonal plane containing vectors $\tilde{e}_1$ and $\tilde{e}_3$ or vectors $\tilde{e}_2$ and $\tilde{e}_3$ (b); atoms are shown not on all faces and edges in figure (a)]

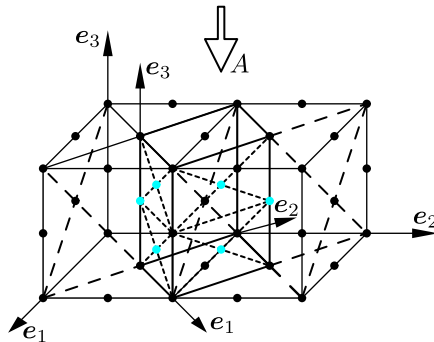


Рис. 2. Расположение тетрагональной кристаллической ячейки в кубических ячейках; атомы показаны не на всех гранях и ребрах кубов тетрагональной ячейки

[Figure 2. The arrangement of the tetragonal crystal cell in cubic cells; atoms are shown not on all faces and edges of the tetragonal cell cubes]

Эти тетрагональные ячейки, у которых длины ребер основания l_1 и l_2 равны, растягиваются или сжимаются вдоль векторов $\tilde{\mathbf{e}}_i$, $i = 1, 2, 3$, на разную величину, превращаясь в орторомбические ячейки. Коэффициент растяжения (сжатия) определяется соотношением $\xi_i = \tilde{l}_i/l_i$, где $\tilde{l}_i$, $i = 1, 2, 3$ — текущие длины элементов ячейки вдоль соответствующих векторов $\tilde{\mathbf{e}}_i$, $i = 1, 2, 3$, а l_i , $i = 1, 2, 3$ — первоначальные длины этих элементов. В литературе (см. [1, 3–6]) приняты следующие обозначения: $\alpha = \xi_1$, $\beta = \xi_3$, $\gamma = \xi_2$. Учитывая первоначальные длины элементов, будем иметь: $\alpha = \sqrt{2}l_1/a_0$, $\beta = \tilde{l}_3/a_0$, $\gamma = \sqrt{2}l_2/a_0$.

Превращение кристаллической ячейки аустенита (куба) в кристаллическую ячейку мартенсита (орторомбическую ячейку для сплава Cu–Al–Ni) описывается тензором второго ранга $\mathbf{U}$, называемым тензором деформации Бейна, который является симметричным положительно определенным тензором чистой деформации в полярном разложении градиента деформации $\mathbf{F} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U}$, где $\mathbf{R}$ — собственно ортогональный тензор.³ В ортонормальном базисе $\tilde{\mathbf{e}}_i$, $i = 1, 2, 3$, связанном с орторомбической ячейкой как показано на рис. 2, этот тензор принимает вид

$$\mathbf{U} = \alpha \tilde{\mathbf{e}}_1 \tilde{\mathbf{e}}_1 + \gamma \tilde{\mathbf{e}}_2 \tilde{\mathbf{e}}_2 + \beta \tilde{\mathbf{e}}_3 \tilde{\mathbf{e}}_3. \quad (1)$$

По данным работ [3, 24], кубическая и орторомбическая ячейки для сплава Cu–Al–Ni имеют следующие размеры для структур, представленных на рис. 1 и 2: $l_1 = l_2 = l_3 = a_0 = 0.2918$ нм, $\tilde{l}_1 = 0.2194$ нм, $\tilde{l}_2 = 0.2111$ нм, $\tilde{l}_3 = 0.2678$ нм, и тогда в выражении (1) $\alpha = 1.0619$, $\beta = 0.9178$, $\gamma = 1.0231$ (коэффициент больше единицы — растяжение, меньше единицы — сжатие). Эти значения полностью соответствуют приведенным в работах [3, 5, 6].

ПРИМЕЧАНИЕ 1. Диады в выражении (1) состоят из одинаковых базисных векторов. Поэтому тензор $\mathbf{U}$ не изменится, если любой из этих векторов заменить на обратный. При этом нужно отслеживать, чтобы полученная тройка векторов была правой, т.к. только тогда будет справедливым известное правило $\varepsilon_{ijk} \tilde{\mathbf{e}}_i = \tilde{\mathbf{e}}_j \times \tilde{\mathbf{e}}_k$, где ε_{ijk} — символ Леви—Чивита.

Тетрагональная ячейка, показанная на рис. 2, может занимать четыре положения относительно фиксированной (основной) кубической. Эти положения показаны на рис. 3, где ситуация под номером [1] соответствует виду по стрелке A на рис. 2 (вид сверху). В ситуациях [2], [3] и [4] положение векторов $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$, связанных с основной кубической ячейкой (толстые сплошные линии), неизменно в пространстве (такое же как в ситуации [1]), а тетрагональная ячейка выделяется из двух кубических ячеек, из которых одна основная, а вторая, ограниченная тонкими сплошными линиями на рис. 3, примыкает к ней сверху в ситуации [2], слева в ситуации [3] и снизу в ситуации [4].

Каждой из этих ситуаций соответствует свой тензор Бейна, записанный в своем локальном базисе, и чтобы иметь возможность оценить или сравнить

³Тензор $\mathbf{Q}$, для которого $\mathbf{Q}^\top = \mathbf{Q}^{-1}$, называется ортогональным тензором. Этот тензор при скалярном умножении на вектор поворачивает последний в пространстве, сохраняя его модуль. При аналогичном воздействии на два вектора он, поворачивая их в пространстве, сохраняет также и угол между ними. Определитель ортогонального тензора равен ± 1 . Определитель собственно ортогонального тензора равен $+1$.

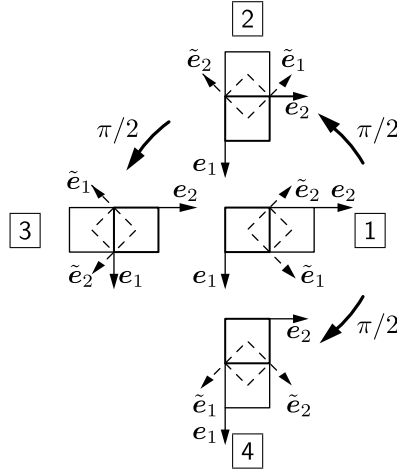


Рис. 3. Расположение тетрагональной кристаллической ячейки относительно фиксированной кубической

[Figure 3. The arrangement of the tetragonal crystal cell relative to a fixed cubic cell]

эти тензоры, их необходимо представить в одном общем базисе, за который удобно принять векторы e_1 , e_2 и e_3 , связанные с основной кубической ячейкой (базис начальной конфигурации). Учитывая, что векторы $\tilde{e}_1$ и $\tilde{e}_2$ направлены по диагоналям грани куба и составляют с его сторонами углы в 45° , для ситуации **1** из рис. 2 и 3 имеем

$$\tilde{e}_1^{(1)} = \frac{\sqrt{2}}{2}(e_1 + e_2), \quad \tilde{e}_2^{(1)} = \frac{\sqrt{2}}{2}(e_1 - e_2), \quad \tilde{e}_3^{(1)} = e_3, \quad (2)$$

и выражение (1) принимает вид

$$U^{(1)} = \zeta e_1 e_1 + \eta(e_1 e_2 + e_2 e_1) + \zeta e_2 e_2 + \beta e_3 e_3, \quad \zeta = \frac{\alpha + \gamma}{2}, \quad \eta = \frac{\alpha - \gamma}{2}. \quad (3)$$

Как следует из рис. 3, векторы $\tilde{e}_1$ и $\tilde{e}_2$ в ситуациях **2**, **3** и **4** повернуты по отношению к этим же векторам в ситуации **1** на углы $\pi/2$, π и $-\pi/2$ соответственно. Вращение осуществляется вокруг оси e_3 , векторы сохраняют свою длину и внутренний угол в 90° . Как известно, такая операция осуществляется собственно ортогональным тензором, который имеет вид (см. [22, 25])

$$O(\varphi, \mathbf{p}) = \mathbf{g} \cos \varphi + \mathbf{p} \mathbf{p} (1 - \cos \varphi) + (\mathbf{p} \times \mathbf{g}) \sin \varphi \quad (4)$$

и осуществляет поворот на угол φ вокруг единичного вектора $\mathbf{p}$ против часовой стрелки, если смотреть с конца вектора $\mathbf{p}$.

В нашем случае $\mathbf{p} = e_3$ и тогда для ситуации **2** из соотношения (4) следует, что

$$O^{(2)}(\pi/2, e_3) = e_3 e_3 + e_2 e_1 - e_1 e_2.$$

Учитывая выражения (2), получаем

$$\tilde{e}_1^{(2)} = O^{(2)} \cdot \tilde{e}_1^{(1)} = -\frac{\sqrt{2}}{2}(e_1 - e_2), \quad \tilde{e}_2^{(2)} = O^{(2)} \cdot \tilde{e}_2^{(1)} = \frac{\sqrt{2}}{2}(e_1 + e_2),$$

$$\tilde{\mathbf{e}}_3^{(2)} = \mathbf{O}^{(2)} \cdot \tilde{\mathbf{e}}_3^{(1)} = \mathbf{e}_3,$$

в результате чего тензор (1) принимает вид

$$\mathbf{U}^{(2)} = \zeta \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 - \eta (\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1) + \zeta \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2 + \beta \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3. \quad (5)$$

Для ситуации $\boxed{3}$ из (4) имеем

$$\mathbf{O}^{(3)}(\pi, \mathbf{e}_3) = -\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3,$$

учитывая (2), получаем

$$\tilde{\mathbf{e}}_1^{(3)} = \mathbf{O}^{(3)} \cdot \tilde{\mathbf{e}}_1^{(1)} = -\frac{\sqrt{2}}{2}(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2), \quad \tilde{\mathbf{e}}_2^{(3)} = \mathbf{O}^{(3)} \cdot \tilde{\mathbf{e}}_2^{(1)} = -\frac{\sqrt{2}}{2}(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2),$$

$$\tilde{\mathbf{e}}_3^{(3)} = \mathbf{O}^{(3)} \cdot \tilde{\mathbf{e}}_3^{(1)} = \mathbf{e}_3,$$

в результате чего соотношение (1) принимает вид

$$\mathbf{U}^{(3)} = \zeta \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 + \eta (\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1) + \zeta \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2 + \beta \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3,$$

что полностью совпадает с $\mathbf{U}^{(1)}$ (см. (3)).

Наконец, в ситуации $\boxed{4}$

$$\mathbf{O}^{(4)}(3\pi/2, \mathbf{e}_3) = \mathbf{O}^{(4)}(-\pi/2, \mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2,$$

тогда

$$\tilde{\mathbf{e}}_1^{(4)} = \mathbf{O}^{(4)} \cdot \tilde{\mathbf{e}}_1^{(1)} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2), \quad \tilde{\mathbf{e}}_2^{(4)} = \mathbf{O}^{(4)} \cdot \tilde{\mathbf{e}}_2^{(1)} = -\frac{\sqrt{2}}{2}(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2),$$

$$\tilde{\mathbf{e}}_3^{(4)} = \mathbf{O}^{(4)} \cdot \tilde{\mathbf{e}}_3^{(1)} = \mathbf{e}_3,$$

и выражение (1) представляется как

$$\mathbf{U}^{(4)} = \zeta \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 - \eta (\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1) + \zeta \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2 + \beta \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3,$$

что полностью совпадает с $\mathbf{U}^{(2)}$ (см. (5)).

В результате независимыми остаются только два тензора деформаций Бейна (3) и (5), которые далее будем обозначать $\mathbf{U}_1$ и $\mathbf{U}_2$:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_1 &= \zeta \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 + \eta (\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1) + \zeta \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2 + \beta \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3, \\ \mathbf{U}_2 &= \zeta \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 - \eta (\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1) + \zeta \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2 + \beta \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3. \end{aligned} \quad (6)$$

Напоминаем, что здесь и далее $\zeta = (\alpha + \gamma)/2$, $\eta = (\alpha - \gamma)/2$.

ПРИМЕЧАНИЕ 2. В соответствии со сказанным в примечании 1, векторы $\tilde{\mathbf{e}}_1$ и $\tilde{\mathbf{e}}_2$, показанные на рис. 3 для каждой из четырех ситуаций, можно одновременно заменить на обратные. Вектор $\tilde{\mathbf{e}}_3$ не меняет своего направления и тройка векторов $\tilde{\mathbf{e}}_i$, $i = 1, 2, 3$, остается правой. Такая замена является еще

одним объяснением совпадения результатов в ситуациях [1] и [3], а также [2] и [4].

В рассмотренных выше и показанных на рис. 2 и 3 расположениях тетрагональной ячейки в двух кубических, вектор $\tilde{e}_3$, связанный с тетрагональной ячейкой, совпадает с вектором e_3 , связанным с кубической ячейкой. Но ситуации, совершенно аналогичные проанализированным, могут возникать, когда вектор $\tilde{e}_3$ совпадает с вектором e_1 или с вектором e_2 . В каждом из этих случаев также существуют два независимых тензора Бейна (будем обозначать их U_3, U_4, U_5, U_6) и, как легко понять, это будут выражения (6), в которых коэффициенты, стоящие при векторах e_1, e_2, e_3 , будут относиться теперь в первом случае к векторам e_2, e_3, e_1 соответственно, а во втором — к векторам e_3, e_1, e_2 :

$$\begin{aligned} U_3 &= \beta e_1 e_1 + \zeta e_2 e_2 + \eta(e_2 e_3 + e_3 e_2) + \zeta e_3 e_3, \\ U_4 &= \beta e_1 e_1 + \zeta e_2 e_2 - \eta(e_2 e_3 + e_3 e_2) + \zeta e_3 e_3, \\ U_5 &= \zeta e_1 e_1 + \eta(e_1 e_3 + e_3 e_1) + \beta e_2 e_2 + \zeta e_3 e_3, \\ U_6 &= \zeta e_1 e_1 - \eta(e_1 e_3 + e_3 e_1) + \beta e_2 e_2 + \zeta e_3 e_3. \end{aligned} \quad (7)$$

ПРИМЕЧАНИЕ 3. Осуществив на рис. 3 замены $e_1 \Rightarrow e_2, e_2 \Rightarrow e_3, e_3 \Rightarrow e_1$ (векторы $\tilde{e}_i, i = 1, 2, 3$, остаются без изменения), приходим к тому, что ситуациям [1] и [3] соответствует тензор U_3 , а ситуациям [2] и [4] — тензор U_4 . Осуществив на рис. 3 замены $e_1 \Rightarrow e_3, e_2 \Rightarrow e_1, e_3 \Rightarrow e_2$ (векторы $\tilde{e}_i, i = 1, 2, 3$, опять остаются без изменения), приходим к тому, что ситуациям [1] и [3] соответствует тензор U_5 , а ситуациям [2] и [4] — тензор U_6 . Сказанное легко проверить, используя соотношение (1) и очевидные для любого из случаев связи векторов $\tilde{e}_i$ и $e_i, i = 1, 2, 3$.

Приведенные выражения (6), (7) для тензоров $U_i, i = 1, 2, 3, \dots, 6$, совпадают (с точностью до нумерации этих тензоров) с соотношениями, представленными в [1, 4–6]. Если $\alpha = \gamma$, т.е. тетрагональная ячейка при деформировании остается тетрагональной, то $\zeta = \alpha, \eta = 0$ и из шести тензоров Бейна независимыми остаются только три. Такая ячейка являлась предметом рассмотрения в упомянутых во введении публикациях [16–21], посвященных описанию процессов двойникования и раздвойникования мартенситной структуры в ферромагнитном сплаве Ni_2MnGa с памятью формы при действии магнитного и/или силового полей.

Симметрия кристалла характеризуется собственно ортогональными тензорами R , описывающими повороты этого кристалла вокруг таких осей и на такие углы, при которых форма кристалла остается неизменной: куб превращается в куб, параллелепипед в точно такой же параллелепипед и т.д. Таких тензоров может быть несколько и они образуют группу вращений $\mathcal{P}$, $R \in \mathcal{P}$. Кристаллическая ячейка сплава $Cu-Al-Ni$ в аустенитном состоянии есть куб и группа вращения $\mathcal{P}_a$ его состоит из 24 ортогональных тензоров $R_a, \mathcal{V}_{\mathcal{P}_a} = 24$ (см. [2, 4, 6]). Куб остается неизменным при $R_a = g$. Куб превращается снова в куб при вращении на углы $\pi/2, \pi, 2\pi/3$ вокруг его различных трех главных осей, проходящих через центры граней и параллельных векторам $e_i, i = 1, 2, 3$, направленным вдоль ребер (см. рис. 1), и образующих ортонормированный базис начальной конфигурации (9 ортогональных тензоров) при вращении вокруг его четырех главных диагоналей на углы $\pm 2\pi/3$

(8 ортогональных тензоров) и при вращении вокруг его двух диагоналей на трех разных поверхностях куба на угол π (6 ортогональных тензоров). Кристаллическая ячейка этого сплава в мартенситном состоянии представляет собой прямоугольный параллелепипед (орторомбическая ячейка) и группа вращения для такой ячейки $\mathcal{P}_m$ состоит из 4 ортогональных тензоров $\mathbf{R}_m$, $\mathcal{V}_{\mathcal{P}_m} = 4$. Прямоугольный параллелепипед остается неизменным при $\mathbf{R}_m = \mathbf{g}$ и при вращениях на угол π вокруг его различных трех главных осей, проходящих через центры граней и параллельных векторам $\hat{\mathbf{e}}_i$, $i = 1, 2, 3$, направленным вдоль ребер и образующим ортонормированный локальный базис, в котором представлена эта ячейка [4]. Количество независимых вариантов мартенсита при фазовом переходе определяется соотношением $\mathcal{V} = \mathcal{V}_{\mathcal{P}_a} / \mathcal{V}_{\mathcal{P}_m}$ и для СПФ Cu–Al–Ni $\mathcal{V} = 6$. Именно для этих шести вариантов и получены тензоры деформации Бейна, представленные соотношениями (6), (7).

3. Уравнение совместности деформаций (уравнение двойникования). Как уже отмечалось во введении, в результате прямого фазового перехода первого рода, который происходит в сплаве Cu–Al–Ni только путем изменения температуры (охлаждения) из аустенитного состояния (высокотемпературная фаза) в мартенситное состояние (низкотемпературная фаза), кубическая кристаллическая ячейка аустенита с одинаковой длиной ребер преобразуется в шесть вариантов орторомбической ячейки мартенсита с ребрами a , b и c . В ходе такого процесса недеформированный и ненапряженный материал становится деформированным и напряженным. Но в то же время в материале инициируются процессы, направленные на компенсацию результатов этого фазового перехода (принцип Ле Шателье–Брауна), и для компенсации напряжений, возникших в этом случае, сплав образует двойниковую структуру.

Кинематика процессов образования двойника и его исчезновения (раздвойникования) описывается условием совместности Адамара, суть которого следующая [7]. Пусть поверхность S является частью внутренней поверхности тела, разделяющей его на объемы (обозначим их V_+ и V_-), в каждом из которых некоторый вектор, обозначим его $\mathbf{a}$, непрерывен и дифференцируем вдоль любого пути, лежащего на S . Тогда существуют непрерывные производные, имеющие в наших обозначениях (см. конец введения) вид $d\mathbf{a}_+ = (\nabla \mathbf{a})_+^\top \cdot d\mathbf{l}$ и $d\mathbf{a}_- = (\nabla \mathbf{a})_-^\top \cdot d\mathbf{l}$, которые характеризуют изменения вектора $\mathbf{a}$ в направлении любого вектора $\mathbf{l}$, лежащего на S при стремлении к поверхности S со стороны объемов V_+ и V_- . Вычитая одно из другого, получаем условие совместности Адамара: $[d\mathbf{a}] = [\nabla \mathbf{a}]^\top \cdot d\mathbf{l}$, где $[d\mathbf{a}] = d\mathbf{a}_+ - d\mathbf{a}_-$ и $[\nabla \mathbf{a}]^\top = (\nabla \mathbf{a})_+^\top - (\nabla \mathbf{a})_-^\top$. Если вектор $\mathbf{a}$ непрерывен в теле, включая поверхность S , то $[d\mathbf{a}] = \mathbf{0}$, из чего следует, что $[\nabla \mathbf{a}]^\top \cdot d\mathbf{l} = \mathbf{0}$, и, как следствие, тензор второго ранга $[\nabla \mathbf{a}]^\top$ должен иметь диадное представление в виде $[\nabla \mathbf{a}]^\top = \mathbf{b} \mathbf{n}$, где $\mathbf{n}$ — нормаль к поверхности S , которую можно положить единичной, а $\mathbf{b}$ является некоторым вектором, определяющим проекцию $[\nabla \mathbf{a}]^\top$ на нормаль, как это следует из условия $[\nabla \mathbf{a}]^\top \cdot \mathbf{n} = \mathbf{b} \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{b}$.

На плоскости, разделяющей два варианта мартенсита с тензорами деформации Бейна $\mathbf{U}_i$ и $\mathbf{U}_j$, это условие совместности Адамара должно выполняться для градиентов деформации $\mathbf{F}_i$ и $\mathbf{F}_j$ [2]:

$$\mathbf{F}_i - \mathbf{F}_j = \mathbf{a} \mathbf{n}. \quad (8)$$

Здесь $\mathbf{F}_k = (\nabla \mathbf{R}_k)^\top$, где ∇ — оператор Гамильтона относительно начальной конфигурации, а $\mathbf{R}_k$ — радиус-вектор положения точки k в текущей конфигурации, $\mathbf{n}$ — единичный вектор нормали к поверхности, разделяющий варианты мартенсита в исходном, недеформированном состоянии, а вектор $\mathbf{a} = (\mathbf{F}_i - \mathbf{F}_j) \cdot \mathbf{n}$ в данном случае представляет собой проекцию на нормаль скачка градиента деформации при прохождении через разделяющую поверхность. Перепишав (8) в виде $\mathbf{R}_i \cdot \mathbf{U}_i - \mathbf{R}_j \cdot \mathbf{U}_j = \mathbf{a} \mathbf{n}$, выполнив скалярное умножение этого выражения слева на $\mathbf{R}_j^\top$ и введя вектор $\hat{\mathbf{a}} = \mathbf{R}_j^\top \cdot \mathbf{a}$, получим

$$\mathbf{R}_{ij} \cdot \mathbf{U}_i - \mathbf{U}_j = \hat{\mathbf{a}} \mathbf{n}, \quad (9)$$

где $\mathbf{R}_{ij} = \mathbf{R}_j^\top \cdot \mathbf{R}_i$. Представляя (9) как

$$\mathbf{R}_{ij} \cdot \mathbf{U}_i = (\mathbf{g} + \hat{\mathbf{a}} \mathbf{n} \cdot \mathbf{U}_j^{-1}) \cdot \mathbf{U}_j, \quad (10)$$

закключаем, что $\det(\mathbf{g} + \hat{\mathbf{a}} \mathbf{n} \cdot \mathbf{U}_j^{-1}) = 1$, так как определитель произведения равен произведению определителей, $\det \mathbf{R}_{ij} = 1$ и $\det \mathbf{U}_i = \det \mathbf{U}_j$ для всех i и j в соотношениях (6), (7). Отсюда следует, что тензор $\mathbf{g} + \hat{\mathbf{a}} \mathbf{n} \cdot \mathbf{U}_j^{-1}$ описывает процессы без изменения объема, а именно простой сдвиг, как показано в [18]. Следуя [1, 2], представим (10) в виде

$$\mathbf{R}_{ij} \cdot \mathbf{U}_i = (\mathbf{g} + s \boldsymbol{\tau} \mathbf{N}) \cdot \mathbf{U}_j, \quad (11)$$

где $s = |\hat{\mathbf{a}}| |\mathbf{U}_j^{-1} \cdot \mathbf{n}|$ — величина сдвига, $\boldsymbol{\tau} = \hat{\mathbf{a}}/|\hat{\mathbf{a}}|$ — единичный вектор направления сдвига и $\mathbf{N} = (\mathbf{U}_j^{-1} \cdot \mathbf{n})/|\mathbf{U}_j^{-1} \cdot \mathbf{n}|$ (суть этого вектора выясним ниже). В последнем выражении симметрия тензора $\mathbf{U}_j^{-1}$ принята во внимание: $\mathbf{U}_j^{-1} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{U}_j^{-1}$. Отметим также, что в левой части этого уравнения тензор $\mathbf{U}_i$ переводит начальную конфигурацию κ_0 в промежуточную κ_i , которая затем переводится в текущую конфигурацию κ тензором $\mathbf{R}_{ij}$. В правой же части тензор $\mathbf{U}_j$ переводит начальную конфигурацию κ_0 в промежуточную κ_j , которая затем переводится в текущую конфигурацию κ тензором, расположенным в круглых скобках. Конфигурации κ_i и κ_j не совпадают в общем случае. Последняя будет использована в следующем абзаце.

Как известно [25], градиент места, описывающий процесс простого сдвига, представляется в виде $\mathbf{g} + s \boldsymbol{\delta}_1 \boldsymbol{\delta}_2$, где s — величина сдвига ($s = \tan \psi$, ψ — угол сдвига), $\boldsymbol{\delta}_1$ — единичный вектор направления сдвига, $\boldsymbol{\delta}_2$ — единичный вектор нормали к поверхности сдвига. Сравнивая это выражение с представленным в правой части (11) в скобках, заключаем, что

$$\boldsymbol{\delta}_1 = \boldsymbol{\tau} = \hat{\mathbf{a}}/|\hat{\mathbf{a}}|, \quad \boldsymbol{\delta}_2 = \mathbf{N} = (\mathbf{U}_j^{-1} \cdot \mathbf{n})/|\mathbf{U}_j^{-1} \cdot \mathbf{n}|, \quad s = |\hat{\mathbf{a}}| |\mathbf{U}_j^{-1} \cdot \mathbf{n}|. \quad (12)$$

Как отмечено ранее, $\boldsymbol{\tau}$ является единичным вектором направления сдвига, и это находится в полном соответствии со смыслом вектора $\boldsymbol{\delta}_1$. Вектор $\mathbf{N} = (\mathbf{U}_j^{-1} \cdot \mathbf{n})/|\mathbf{U}_j^{-1} \cdot \mathbf{n}|$ — единичный вектор нормали к поверхности, на которой градиент места испытывает скачок, но не в начальной конфигурации κ_0 , в которой эта нормаль была $\mathbf{n}$, а в конфигурации κ_j . Действительно, ориентированные элементарные площадки $\mathbf{n} dS_0$ в начальной конфигурации κ_0 и $\mathbf{N} dS$ в какой-либо другой конфигурации κ_* связаны соотношением

$N dS = J \mathbf{n} \cdot \mathbf{F}_*^{-1} dS_0 = J \mathbf{F}_*^{-\top} \cdot \mathbf{n} dS_0$ (см., например, [22, 25]), где $J = I_3(\mathbf{F}_*)$ — третий главный инвариант градиента места $\mathbf{F}_*$, описывающий относительное изменение объема dV_*/dV_0 в конфигурации κ_* . Тогда $|N dS| = J |\mathbf{F}_*^{-\top} \cdot \mathbf{n}| dS_0$, откуда следует, что $\mathbf{N} = N dS/|N dS| = \mathbf{F}_*^{-\top} \cdot \mathbf{n}/|\mathbf{F}_*^{-\top} \cdot \mathbf{n}|$, и полагая, что $\mathbf{F}_* = \mathbf{U}_*$, κ_* совпадает с κ_j ($\mathbf{U}_* = \mathbf{U}_j$) и учитывая симметрию тензора $\mathbf{U}_j$, имеем $\mathbf{N} = \mathbf{U}_j^{-1} \cdot \mathbf{n}/|\mathbf{U}_j^{-1} \cdot \mathbf{n}|$. В общем случае вектор $\mathbf{n}$ не ортогонален вектору $\boldsymbol{\tau}$, в отличие от вектора $\mathbf{N}$. Последнее следует из ортогональности векторов $\boldsymbol{\delta}_1$ и $\boldsymbol{\delta}_2$. Ортогональность векторов $\boldsymbol{\tau}$ и $\mathbf{N}$ будет также продемонстрирована ниже.

4. Общие решения уравнения двойникования. В этом разделе показано, что для пары вариантов мартенсита, рассматриваемых в статье, существует решение уравнения двойникования, в результате чего определяются плоскость сдвига, направление сдвига и величина сдвига, т.е. параметры, характеризующие сдвиг, происходящий в мартенситной пластине при возникновении двойника. Здесь также обсуждается еще одна особенность сплава, которая по какой-то причине почти не нашла отражения в публикациях, а именно расположение орторомбических ячеек в элементах двойника, образованного из мартенситной пластины.

Вернемся к уравнениям (9), (10), которые называются уравнениями совместности деформаций, или уравнениями двойникования. Пара из двух различных вариантов мартенсита с деформациями Бейна $\mathbf{U}_i$ и $\mathbf{U}_j$, образующих двойник, обозначается как $(i : j)$. Причем j — элемент, из которого образуется двойник (формируется элемент i), или к которому присоединяется элемент i , образуя двойник; j — основной, материнский элемент. Если существует симметричный ортогональный тензор $\mathbf{O}$, $\mathbf{O} = \mathbf{O}^\top$, выполняющий вращение на 180° вокруг оси $\mathbf{p}$, $|\mathbf{p}| = 1$, $\mathbf{O} = \mathbf{O}(180^\circ, \mathbf{p})$, и принадлежащий группе симметрии структурной ячейки аустенита $\mathcal{P}_a$, $\mathbf{O} \in \mathcal{P}_a$, такой, что $\mathbf{U}_i = \mathbf{O} \cdot \mathbf{U}_j \cdot \mathbf{O}$ ($\mathbf{U}_j = \mathbf{O} \cdot \mathbf{U}_i \cdot \mathbf{O}$), тогда уравнение двойникования (9) имеет следующие два решения (см. [1, 2]):

$$\mathbf{n} = \mathbf{p}, \hat{\mathbf{a}} = 2 \left(\frac{\mathbf{U}_j^{-1} \cdot \mathbf{p}}{|\mathbf{U}_j^{-1} \cdot \mathbf{p}|^2} - \mathbf{U}_j \cdot \mathbf{p} \right), \mathbf{R}_{ij} = \left[-\mathbf{g} + 2 \frac{(\mathbf{U}_j^{-1} \cdot \mathbf{p})(\mathbf{U}_j^{-1} \cdot \mathbf{p})}{|\mathbf{U}_j^{-1} \cdot \mathbf{p}|^2} \right] \cdot \mathbf{O}, \quad (13)$$

$$\mathbf{n} = \frac{2}{\rho} \left(\mathbf{p} - \frac{\mathbf{U}_j^2 \cdot \mathbf{p}}{|\mathbf{U}_j \cdot \mathbf{p}|^2} \right), \hat{\mathbf{a}} = \rho(\mathbf{U}_j \cdot \mathbf{p}), \mathbf{R}_{ij} = \left[-\mathbf{g} + 2 \frac{(\mathbf{U}_j \cdot \mathbf{p})(\mathbf{U}_j \cdot \mathbf{p})}{|\mathbf{U}_j \cdot \mathbf{p}|^2} \right] \cdot \mathbf{O}. \quad (14)$$

Здесь ρ — константа, определяемая из условия, что вектор $\mathbf{n}$ — единичный вектор. Эти решения единственные с точностью до одновременной замены $\hat{\mathbf{a}}$ на $-\hat{\mathbf{a}}$ и $\mathbf{n}$ на $-\mathbf{n}$. Двойник, описываемый соотношениями (13), называется двойником типа I, а описываемый соотношениями (14) — типа II. Как показано в [26] и отмечено в [1], если существуют два 180° вращения, удовлетворяющих условию $\mathbf{U}_i = \mathbf{O} \cdot \mathbf{U}_j \cdot \mathbf{O}$, то решение первого типа, соответствующее одному вращению, совпадает с решением второго типа, соответствующим другому вращению.

ПРИМЕЧАНИЕ 4. У двойника типа I, который называется нормальным двойником [27], нормаль к плоскости S , разделяющей его элементы, совпадает с осью вращения $\mathbf{p}$ указанного выше тензора $\mathbf{O} = \mathbf{O}(180^\circ, \mathbf{p})$. Кристаллическая ячейка одного элемента двойника преобразуется в кристаллическую

ячейку другого элемента двойника поворотом на 180° вокруг нормали к поверхности, разделяющей эти элементы [5]. У двойника типа II, который называется параллельным двойником [27], ось $\mathbf{p}$ тензора $\mathbf{O}$ параллельна плоскости S . Кристаллическая ячейка одного элемента двойника преобразуется в кристаллическую ячейку другого элемента двойника поворотом на 180° вокруг вектора, параллельного плоскости, разделяющей эти элементы [5]. Если решетки связаны между собой обоими вращениями, то двойник называется смешанным.

В работе [4] приведены тензоры $\mathbf{O} = \mathbf{O}(180^\circ, \mathbf{p})$, преобразующие $\mathbf{U}_i$ в $\mathbf{U}_j$ в соответствии с выражением $\mathbf{U}_i = \mathbf{O} \cdot \mathbf{U}_j \cdot \mathbf{O}$, и ниже они представлены в таблице. Из таблицы следует, что теоретически возможно образование 30 двойников.

Векторы $\mathbf{p}$ и тензоры $\mathbf{O} = \mathbf{O}(180^\circ, \mathbf{p})$, преобразующие $\mathbf{U}_j$ (из заголовка) в $\mathbf{U}_i$ (i — номер в таблице) [Vectors $\mathbf{p}$ and tensors $\mathbf{O} = \mathbf{O}(180^\circ, \mathbf{p})$, transforming $\mathbf{U}_j$ (from the header) into $\mathbf{U}_i$ (i — index in the table)]

$\mathbf{p}$	$\mathbf{O}$	$\mathbf{U}_1$	$\mathbf{U}_2$	$\mathbf{U}_3$	$\mathbf{U}_4$	$\mathbf{U}_5$	$\mathbf{U}_6$
$(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2)/\sqrt{2}$	$\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3\mathbf{e}_3$	1	2	6	5	4	3
$(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2)/\sqrt{2}$	$-\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3\mathbf{e}_3$	1	2	5	6	3	4
$(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3)/\sqrt{2}$	$\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3\mathbf{e}_1$	4	3	2	1	5	6
$(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3)/\sqrt{2}$	$-\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_2\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3\mathbf{e}_1$	3	4	1	2	5	6
$(\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3)/\sqrt{2}$	$-\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3\mathbf{e}_2$	6	5	3	4	2	1
$(\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3)/\sqrt{2}$	$-\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3\mathbf{e}_2$	5	6	3	4	1	2
$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3\mathbf{e}_3$	2	1	3	4	6	5
$\mathbf{e}_2$	$-\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3\mathbf{e}_3$	2	1	4	3	5	6
$\mathbf{e}_3$	$-\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3\mathbf{e}_3$	1	2	4	3	6	5

5. Примеры решения уравнения двойникования.

5.1. Двойник $(i : j) = (3 : 4)$. Рассмотрим двойник $(i : j) = (3 : 4)$ (восьмая после заголовка строка в таблице, шестой столбец) и построим решение первого типа (13). Из выражений (7)

$$\begin{aligned}\mathbf{U}_3 &= \beta \mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 + \zeta \mathbf{e}_2\mathbf{e}_2 + \eta(\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_3\mathbf{e}_2) + \zeta \mathbf{e}_3\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{U}_4 &= \beta \mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 + \zeta \mathbf{e}_2\mathbf{e}_2 - \eta(\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_3\mathbf{e}_2) + \zeta \mathbf{e}_3\mathbf{e}_3;\end{aligned}$$

из выражения (4) ортогональный тензор $\mathbf{O}$, осуществляющий поворот на 180° вокруг вектора $\mathbf{p} = \mathbf{e}_2$, принимает вид $\mathbf{O} = -\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3\mathbf{e}_3$, и тогда тензор $\mathbf{U}_4$ переводится в тензор $\mathbf{U}_3$ соотношением $\mathbf{U}_3 = \mathbf{O} \cdot \mathbf{U}_4 \cdot \mathbf{O}$, что легко показать простой подстановкой. Это полностью соответствует данным, приведенным в указанных выше строке и столбце таблицы. Составляющие $U_{ij}^{(-1)}$ тензора $\mathbf{U}_4^{-1}$, обратного тензору $\mathbf{U}_4$ с составляющими U_{ij} , определяются известным соотношением $U_{ij}^{(-1)} = (1/U)(\partial U / \partial U_{ij})$, где $U = \det U_{ij}$. В нашем случае $U = U_{11}(U_{22}U_{33} - U_{23}U_{32}) = \beta(\zeta^2 - \eta^2)$ и

$$\mathbf{U}_4^{-1} = \frac{1}{\beta} \mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 + \frac{\zeta}{\zeta^2 - \eta^2} \mathbf{e}_2\mathbf{e}_2 + \frac{\eta}{\zeta^2 - \eta^2} (\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_3\mathbf{e}_2) + \frac{\zeta}{\zeta^2 - \eta^2} \mathbf{e}_3\mathbf{e}_3.$$

В результате в (13)⁴

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_4 \cdot \mathbf{p} &= \zeta \mathbf{e}_2 - \eta \mathbf{e}_3, & \mathbf{U}_4^{-1} \cdot \mathbf{p} &= \frac{\zeta}{\zeta^2 - \eta^2} \mathbf{e}_2 + \frac{\eta}{\zeta^2 - \eta^2} \mathbf{e}_3, \\ |\mathbf{U}_4^{-1} \cdot \mathbf{p}| &= \frac{\sqrt{\zeta^2 + \eta^2}}{|\zeta^2 - \eta^2|}, & \hat{\mathbf{a}} &= 4 \frac{\zeta \eta}{\zeta^2 + \eta^2} (-\eta \mathbf{e}_2 + \zeta \mathbf{e}_3), & |\hat{\mathbf{a}}| &= 4 \frac{\zeta |\eta|}{\sqrt{\zeta^2 + \eta^2}} \end{aligned} \quad (15)$$

и, в соответствии с (12),

$$\delta_1 = \tau = \frac{-\eta \mathbf{e}_2 + \zeta \mathbf{e}_3}{\sqrt{\zeta^2 + \eta^2}}, \quad \delta_2 = \mathbf{N} = \frac{\zeta \mathbf{e}_2 + \eta \mathbf{e}_3}{\sqrt{\zeta^2 + \eta^2}}, \quad s = \frac{4\zeta|\eta|}{|\zeta^2 - \eta^2|}.$$

Поскольку $\zeta = (\alpha + \gamma)/2$, $\eta = (\alpha - \gamma)/2$ (см. (3)), эти выражения принимают вид

$$\begin{aligned} \delta_1 = \tau &= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{(\gamma - \alpha) \mathbf{e}_2 + (\alpha + \gamma) \mathbf{e}_3}{\sqrt{\alpha^2 + \gamma^2}}, & \delta_2 = \mathbf{N} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{(\alpha + \gamma) \mathbf{e}_2 + (\alpha - \gamma) \mathbf{e}_3}{\sqrt{\alpha^2 + \gamma^2}}, \\ s &= \frac{|\alpha^2 - \gamma^2|}{\alpha \gamma}. \end{aligned}$$

Учитывая, что начальные длины l_1 и l_2 , к которым относятся конечные длины $\tilde{l}_1$ и $\tilde{l}_2$ для величин $\alpha = \tilde{l}_1/l_1$ и $\gamma = \tilde{l}_2/l_2$, одни и те же ($l_1 = l_2 = l$, см. текст после рис. 2), полученные соотношения можно переписать так:

$$\begin{aligned} \delta_1 = \tau &= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{(\tilde{l}_2 - \tilde{l}_1) \mathbf{e}_2 + (\tilde{l}_1 + \tilde{l}_2) \mathbf{e}_3}{\sqrt{\tilde{l}_1^2 + \tilde{l}_2^2}}, \\ \delta_2 = \mathbf{N} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{(\tilde{l}_1 + \tilde{l}_2) \mathbf{e}_2 + (\tilde{l}_1 - \tilde{l}_2) \mathbf{e}_3}{\sqrt{\tilde{l}_1^2 + \tilde{l}_2^2}}, & s &= \frac{|\tilde{l}_1^2 - \tilde{l}_2^2|}{\tilde{l}_1 \tilde{l}_2}. \end{aligned} \quad (16)$$

Отсюда следует, что плоскость, разделяющая элементы двойника, и кинематика сдвига полностью определяются размерами сечения орторомбической ячейки, перпендикулярного оси $\tilde{\mathbf{e}}_3$. Рис. 4 является повернутой в плоскости частью рис. 3. На нем представлены ситуация [2], но не для тензора $\mathbf{U}_2$, а для тензора $\mathbf{U}_4$, и ситуация [1], но не для тензора $\mathbf{U}_1$, а для тензора $\mathbf{U}_3$. Тензору $\mathbf{U}_4$ здесь соответствует прямоугольное сечение $ABCD$ орторомбической ячейки, а тензору $\mathbf{U}_3$ сечение — $A'B'C'D'$. При этом, согласно сказанному для этих тензоров в примечании 3, осуществлена следующая замена векторов, изображенных на рис. 3: $\mathbf{e}_1 \Rightarrow \mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_2 \Rightarrow \mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}_3 \Rightarrow \mathbf{e}_1$. Векторы $\tilde{\mathbf{e}}_i$, $i = 1, 2, 3$, на рис. 4 не показаны, т.к. согласно примечанию 1 они могут занимать два противоположных направления, но указаны размеры ячейки: $\tilde{l}_1$ — длина вдоль вектора $\tilde{\mathbf{e}}_1$ и $\tilde{l}_2$ — длина вдоль вектора $\tilde{\mathbf{e}}_2$. Тогда, введя в прямоугольнике $ABCD$

⁴Ниже в статье рассматриваются деформации Коши—Грина, при определении которых тензор $\mathbf{R}_{ij}$ не используется (в отличие от деформаций Альманзи). Поэтому конкретное выражение для $\mathbf{R}_{ij}$ в статье не приводится.

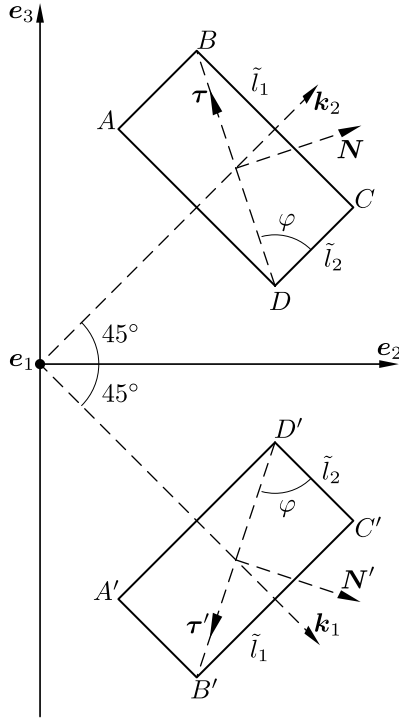


Рис. 4. Положение сечений орторомбических кристаллических ячеек мартенсита относительно сечения кубической ячейки аустенита, нормали к плоскости сдвига и направление вектора сдвига в орторомбических ячейках

[Figure 4. The position of sections of orthorhombic crystal cells of martensite relative to the section of the cubic cell of austenite, the normal to the slip plane, and the direction of the slip vector in orthorhombic cells]

угол φ , получаем, что $\tilde{l}_1/\sqrt{\tilde{l}_1^2 + \tilde{l}_2^2} = \sin \varphi$, $\tilde{l}_2/\sqrt{\tilde{l}_1^2 + \tilde{l}_2^2} = \cos \varphi$, $\tilde{l}_1/\tilde{l}_2 = \operatorname{tg} \varphi$, и выражения (16) принимают вид

$$\delta_1 = \tau = \frac{C-S}{\sqrt{2}} e_2 + \frac{S+C}{\sqrt{2}} e_3, \quad \delta_2 = N = \frac{S+C}{\sqrt{2}} e_2 + \frac{S-C}{\sqrt{2}} e_3, \quad s = 2|\operatorname{ctg} 2\varphi|, \quad (17)$$

где $C = \cos \varphi$, $S = \sin \varphi$.

Отсюда, во-первых, сразу следует, что $\delta_1 \cdot \delta_2 = \tau \cdot N = 0$, т.е. эти векторы ортогональны, а во-вторых, — что вектор $\delta_1 = \tau$ направлен по диагонали прямоугольника $ABCD$ из точки D в точку B . Действительно, учитывая, что показанная на рис. 4 ось прямоугольника (вектор k_2) направлена под углом в 45° к векторам e_2 и e_3 , единичный вектор $\overrightarrow{DB}/|\overrightarrow{DB}|$ можно представить так:

$$\frac{\overrightarrow{DB}}{|\overrightarrow{DB}|} = \cos(45^\circ + \varphi) e_2 + \sin(45^\circ + \varphi) e_3 = \frac{C-S}{\sqrt{2}} e_2 + \frac{S+C}{\sqrt{2}} e_3 = \delta_1 = \tau.$$

Здесь учитываются известные соотношения для $\sin(\theta_1 + \theta_2)$ и $\cos(\theta_1 + \theta_2)$, а также, что $\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = 1/\sqrt{2}$.

Поворачивая единичный вектор $\overrightarrow{DB}/|\overrightarrow{DB}|$ вокруг вектора $\mathbf{e}_1$ на 90° по часовой стрелке, получаем единичный вектор $\delta_2 = \mathbf{N}$. Действительно, из (4) имеем $\mathbf{O}(-90^\circ, \mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_3\mathbf{e}_2$ и тогда $\mathbf{O}(-90^\circ, \mathbf{e}_1) \cdot \boldsymbol{\tau} = \mathbf{N}$.

Как экспериментально обосновано, но без должного математического доказательства, сдвиг в кристалле обычно происходит вдоль атомных плоскостей с наиболее плотной упаковкой атомов, когда действующие на этих плоскостях тангенциальные силы достигают определенных значений. Плоскость, разделяющая элементы двойника (диагональ прямоугольника $ABCD$ на рис. 4), и есть одна из таких плоскостей орторомбической ячейки. Сдвиг произойдет, когда касательное усилие на поверхности с внешней нормалью $\mathbf{N}$ достигнет критической величины, определяемой для конкретного материала из эксперимента, и будет направлено по вектору $\boldsymbol{\tau}$.

Как уже отмечалось ранее, градиент места $\mathbf{f}$, описывающий процесс простого сдвига, представляется в виде $\mathbf{f} = \mathbf{g} + \hat{\mathbf{a}} \mathbf{n} \cdot \mathbf{U}_j^{-1}$ (см. (10)) или в виде $\mathbf{f} = \mathbf{g} + s \boldsymbol{\tau} \mathbf{N}$ (см. (11)), или как $\mathbf{f} = \mathbf{g} + s \delta_1 \delta_2$ (см. абзац перед соотношением (12)). Только первое из этих выражений не содержит модуль величины, что удобно в дальнейших математических преобразованиях. Поэтому при построении тензора деформаций Коши—Грина $\mathbf{E} = (\mathbf{f}^\top \cdot \mathbf{f} - \mathbf{g})/2$ для данного процесса используется именно первое соотношение. Кроме того, для этих математических построений оказалось очень эффективным осуществленное выше введение угла φ , что позволило оперировать с тригонометрическими функциями и известными связями между ними. В результате для присутствующих в (10) величин, определенных выражениями (15), получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{f} &= \mathbf{g} + Ct_2[C_2(-\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3\mathbf{e}_3) + (S - C)^2\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 - (S + C)^2\mathbf{e}_3\mathbf{e}_2], \\ \mathbf{E} &= Ct_2^2(\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3\mathbf{e}_3) - \frac{Ct_2}{S_2}(\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_3\mathbf{e}_2). \end{aligned} \quad (18)$$

Здесь $Ct_2 = \text{ctg } 2\varphi$, $S_2 = \sin 2\varphi$ и, как было введено ранее, $S = \sin \varphi$, $C = \cos \varphi$. Учитывая, что $S = \tilde{l}_1/\sqrt{\tilde{l}_1^2 + \tilde{l}_2^2}$, $C = \tilde{l}_2/\sqrt{\tilde{l}_1^2 + \tilde{l}_2^2}$ (см. текст перед (17)), приходим к тому, что $Ct_2 = (\tilde{l}_2^2 - \tilde{l}_1^2)/(2\tilde{l}_1\tilde{l}_2)$, $Ct_2/S_2 = (\tilde{l}_2^4 - \tilde{l}_1^4)/(4\tilde{l}_1^2\tilde{l}_2^2)$. Тогда тензор деформаций $\mathbf{E}$ в (18) определяется размерами показанного на рис. 4 сечения орторомбической ячейки:

$$\mathbf{E} = \frac{(\tilde{l}_2^2 - \tilde{l}_1^2)^2}{4\tilde{l}_1^2\tilde{l}_2^2}(\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3\mathbf{e}_3) + \frac{(\tilde{l}_1^4 - \tilde{l}_2^4)}{4\tilde{l}_1^2\tilde{l}_2^2}(\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_3\mathbf{e}_2). \quad (19)$$

Эта деформация, полученная в рамках теории двойникового, соответствует простому сдвигу материала среды. Среда же в данном случае состоит из орторомбических ячеек кристалла, изменение положения которых относительно начального и вызывает деформацию. Поэтому, чтобы эта структурная деформация совпадала с деформацией простого сдвига (19), кристалл, в который преобразуется материнский его образ при деформации сдвига, должен занимать определенное положение по отношению к своему начальному образу. Именно такое взаимное расположение кристаллов, привязанное к конкретному пространству, представлено на рис. 4. Здесь кристаллическая орторомбическая ячейка мартенсита — материнская ячейка (прямоугольник $ABCD$) преобразуется в результате простого сдвига в кристаллическую орторомбическую ячейку мартенсита (прямоугольник $A'B'C'D'$). Сдвиг же произойдет,

когда касательное усилие на диагонали прямоугольника $ABCD$ с внешней нормалью $\mathbf{N}$ достигнет определенной величины и будет направлено по вектору $\boldsymbol{\tau}$. Покажем, что тензор деформации при преобразовании орторомбической ячейки $ABCD$ в орторомбическую ячейку $A'B'C'D'$ такой же, как и при простом сдвиге, и представляется выражением (19). Действительно, учитывая показанное на рис. 4 взаимное положение упомянутых двух кристаллических ячеек, вытекающее из сказанного при обсуждении рис. 2 и в примечании 3, а также из того, что прямоугольник $A'B'C'D'$ есть повернутый на 180° вокруг оси $\mathbf{e}_2$ прямоугольник $ABCD$ (вектор $\mathbf{p}$ в соотношениях (15) есть вектор $\mathbf{e}_2$), заключаем, что элементы, которые в материнской ячейке $ABCD$ имели в направлении $\mathbf{k}_1$ длину $\tilde{l}_1$, а в направлении $\mathbf{k}_2$ длину $\tilde{l}_2$, в ячейке $A'B'C'D'$ имеют в тех же направлениях длины $\tilde{l}_2$ и $\tilde{l}_1$, соответственно. Такое изменение в длинах определяет в базисе $\mathbf{k}_i$, $i = 1, 2$, тензор деформации

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \varepsilon_{11}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_1 + \varepsilon_{22}\mathbf{k}_2\mathbf{k}_2, \quad \varepsilon_{11} = \frac{1}{2} \frac{\tilde{l}_2^2 - \tilde{l}_1^2}{\tilde{l}_1^2}, \quad \varepsilon_{22} = \frac{1}{2} \frac{\tilde{l}_1^2 - \tilde{l}_2^2}{\tilde{l}_2^2}. \quad (20)$$

Учитывая, что $\mathbf{k}_1 = (1/\sqrt{2})(\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3)$, $\mathbf{k}_2 = (1/\sqrt{2})(\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3)$, приходим к тому, что в базисе $\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ координатные составляющие тензоров $\boldsymbol{\varepsilon}$ и $\mathbf{E}$ полностью совпадают (тензор $\boldsymbol{\varepsilon}$ принимает вид (19)), т.е. тензоры $\boldsymbol{\varepsilon}$ и $\mathbf{E}$ равны как тензорные объекты.

Из изложенного вытекает, что одновременно и нераздельно в материале существуют два двойника: деформационный, связанный с деформацией простого сдвига, и структурный, связанный со взаимным положением в пространстве ячеек орторомбического кристалла, оси которых (векторы $\mathbf{k}_1$ и $\mathbf{k}_2$, показанные на рис. 4 штриховыми линиями) составляют угол в 90° . Элементы структурного двойника определенным образом должны быть расположены в элементах деформационного двойника. Деформационный же двойник удобно трактовать как излом первоначально прямой мартенситной пластины, направленной вдоль вектора $\mathbf{N}$ (материнской пластины), на угол $\psi = \arctg s$ относительно этого вектора в сторону вектора $\boldsymbol{\tau}$, являющегося границей излома (см. рис. 5). Длины сторон прямоугольника — нужного нам сечения орторомбической ячейки, $\tilde{l}_1 = 0.2194$ нм и $\tilde{l}_2 = 0.2111$ нм (см. текст после соотношения (1)). Тогда (см. (16)) $s = |\tilde{l}_1^2 - \tilde{l}_2^2|/(\tilde{l}_1\tilde{l}_2) = 0.07715$ и излом первоначально прямой мартенситной пластины происходит на угол $\psi \approx 4.4^\circ$, как представлено на рис. 5. Угол излома совпадает с углом сдвига, что, как будет показано ниже, выполняется только для рассматриваемого случая. Деформация, возникающая при этом, определяется соотношением

$$\mathbf{E} = (s/2)(\boldsymbol{\tau}\mathbf{N} + \mathbf{N}\boldsymbol{\tau}) + (s^2/2)\mathbf{N}\mathbf{N} = 0.0386(\boldsymbol{\tau}\mathbf{N} + \mathbf{N}\boldsymbol{\tau}) + 0.003\mathbf{N}\mathbf{N}. \quad (21)$$

Элементами структурного двойника являются прямоугольники (сечения орторомбической ячейки), оси которых повернуты на 90° друг относительно друга. Каждый из этих элементов определенным образом расположен в соответствующем элементе деформационного двойника. Угол, определяющий положение диагонали в прямоугольнике рассматриваемого сечения орторомбической ячейки (см. рис. 4 и 5), определяется из выражения $\tg \varphi = \tilde{l}_1/\tilde{l}_2$. Для указанных выше значений длин $\tg \varphi = 1.0393$ и $\varphi \approx 46.1^\circ$. Это позволяет

ориентировать прямоугольник (вектор $\mathbf{k}_2$, являющийся его осью) относительно вектора $\boldsymbol{\tau}$ (а значит и относительно оси $\mathbf{N}$) в материнской мартенситной пластине. Учитывая, что ось второго элемента структурного двойника $\mathbf{k}_1$ составляет с $\mathbf{k}_2$ угол в 90° в плоскости векторов $\boldsymbol{\tau}$ и $\mathbf{N}$, определяем положение этого элемента структурного двойника во втором элементе деформационного двойника. На рис. 5 показано взаимное расположение элементов этих двух двойников. Соотношением (20) определялся тензор структурной деформации в базисе $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2$. Для указанных значений $\tilde{l}_1$ и $\tilde{l}_2$ этот тензор принимает конкретный вид:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = -0.0371\mathbf{k}_1\mathbf{k}_1 + 0.0401\mathbf{k}_2\mathbf{k}_2. \quad (22)$$

Учитывая, что $\mathbf{k}_1 = \cos 46.1^\circ \mathbf{N} - \sin 46.1^\circ \boldsymbol{\tau} = 0.6934\mathbf{N} - 0.72055\boldsymbol{\tau}$, $\mathbf{k}_2 = \sin 46.1^\circ \mathbf{N} + \cos 46.1^\circ \boldsymbol{\tau} = 0.72055\mathbf{N} + 0.6934\boldsymbol{\tau}$, приходим к тому, что в базисе $\mathbf{N}, \boldsymbol{\tau}$ координатные составляющие тензоров $\boldsymbol{\varepsilon}$ и $\mathbf{E}$ полностью совпадают (тензор $\boldsymbol{\varepsilon}$ принимает вид (21)), т.е. тензоры $\boldsymbol{\varepsilon}$ и $\mathbf{E}$ равны как тензорные объекты.

Главные оси орторомбической ячейки мартенсита (прямоугольного параллелепипеда) являются тремя двукратными осями симметрии данного кристалла. С этим связана анизотропия механических свойств ячейки, девять констант такой анизотропии приведены в [5,6,24,28]. Оси ячеек кристалла по-разному ориентированы в элементах деформационного двойника (см. рис. 5), что приводит к различию в механических свойствах в этих элементах для одного и того же направления в них. Кроме того, ни одна из осей кристалла на рис. 5 не совпадает с главными осями мартенситных пластин, образующих деформационный двойник. На рис. 5 мартенситная пластина была выбрана так, чтобы ее главная ось совпадала с вектором $\mathbf{N}$. Это позволило просто определить угол излома этой пластины и описать формирование деформационного двойника. Выбирая теперь мартенситную пластину так, чтобы ее главная ось совпадала с направлением одной из осей кристалла, как показано на рис. 6, удастся, как нам кажется, упростить решение анизотропной задачи. Это, конечно, непринципиально, но удобно.

В базисе $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2$, показанном на рис. 6, а, структурная деформация $\boldsymbol{\varepsilon}$ определяется соотношением (22). В базисе $\boldsymbol{\tau}, \mathbf{N}$ деформация сдвига определяется соотношением (21). Из выражений, связывающих базисы $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2$ и $\boldsymbol{\tau}, \mathbf{N}$ (см. текст после (22)), имеем $\mathbf{N} = 0.6934\mathbf{k}_1 + 0.72055\mathbf{k}_2$, $\boldsymbol{\tau} = -0.72055\mathbf{k}_1 + 0.6934\mathbf{k}_2$,

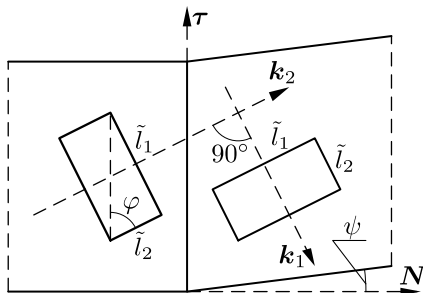


Рис. 5. Деформационный двойник и положение в нем элементов структурного двойника; угол сдвига совпадает с углом излома мартенситной пластины

[Figure 5. Deformation twin and the position of structural twin elements within it; the shear angle coincides with the angle of the martensitic plate's kink]

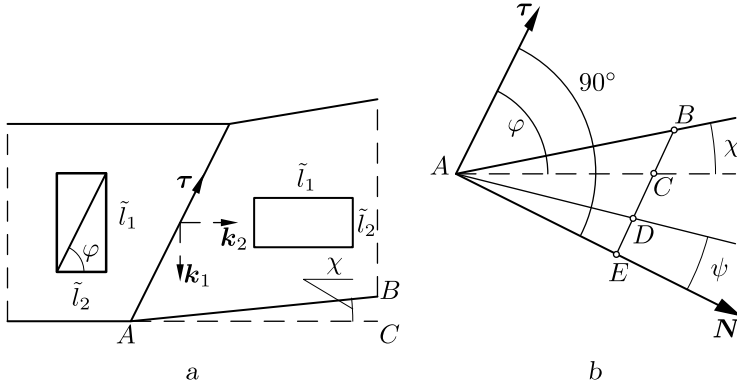


Рис. 6. (а) Деформационный двойник и положение в нем элементов структурного двойника; угол сдвига не совпадает с углом излома мартенситной пластины; (б) к определению связи между углами сдвига и излома; AC на рис. (а) и (б) одна и та же материальная прямая

[Figure 6. (a) Deformation twin and the position of structural twin elements within it; the shear angle does not coincide with the angle of the martensitic plate's kink; (b) Regarding the definition of the relationship between the shear and fracture angles; AC in figures (a) and (b) is the same material line]

и тогда в базисе $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2$ выражение (21) принимает вид (22), что и должно быть (структурная и сдвиговая деформации совпадают). Физический смысл соотношения (22) легко объяснить, используя рис. 6, а. Кристаллические ячейки, которые в материнской мартенситной пластине имели наибольшую длину в вертикальном на рис. 6, а положении, преобразуются в ячейки, имеющие наибольшую длину в горизонтальном положении. Среда, содержащая эти ячейки, испытывает сокращение в вертикальном направлении и удлинение в горизонтальном. Поэтому деформация по оси $\mathbf{k}_1$ отрицательная, а по оси $\mathbf{k}_2$ положительная. Размеры рассматриваемого сечения кристаллической ячейки оказались такими, что в тензоре деформаций (22) $\varepsilon_{11} \approx -3.7\%$, $\varepsilon_{22} \approx 4.0\%$.

Используя рис. 6, б, установим теперь связь между углом сдвига ψ и углом излома мартенситной пластины χ . В базисе $\boldsymbol{\tau}, \mathbf{N}$ простой сдвиг на величину s , которой соответствует угол ψ , приводит к тому, что точка E сдвигается в направлении вектора $\boldsymbol{\tau}$ и переходит в точку D . Отрезки AE и DE , длины которых обозначим как $AE = a$, $DE = b$, образуют прямой угол. Все точки, лежащие на продолжении отрезка DE , смещаются при простом сдвиге вдоль этого отрезка на величину b . В результате точка C переходит в точку B и $BC = b$. Нам необходимо определить угол χ , принадлежащий треугольнику ABC . Обозначив $AB = c$, $AC = d$, используем для этого теорему косинусов для треугольника:

$$b^2 = c^2 + d^2 - 2cd \cos \chi, \quad \text{где } b = a \operatorname{tg} \psi. \quad (23)$$

Из прямоугольного треугольника ACE находим, что $d = a / \cos(\pi/2 - \varphi) = a / \sin \varphi$ и $CE = p = a \operatorname{tg}(\pi/2 - \varphi) = a \operatorname{ctg} \varphi$. Из прямоугольного треугольника ABE имеем $c^2 = a^2 + (b + p)^2$. В результате все величины, входящие в (23), определяются через длину a и известные углы φ и ψ , и из этого выражения

находим $\cos \chi$:

$$\cos \chi = \frac{c^2 + d^2 - b^2}{2cd} = \frac{2 + s \sin 2\varphi}{2\sqrt{1 + s \sin 2\varphi + s^2 \sin^2 \varphi}}. \quad (24)$$

Для значения $s = 0.07715$, соответствующего углу сдвига $\psi \approx 4.4^\circ$ (см. абзац перед соотношением (21)), и значения $\varphi \approx 46.1^\circ$, определяющего плоскость сдвига в кристаллической ячейке (см. абзац после соотношения (21)), $\cos \chi = 0.999254$, и тогда угол излома мартенситной пластины, показанный на рис. 6, а, $\chi \approx 2.2^\circ$.

Определим из выражения (24) длину c , дающую при фиксированных длинах d и b максимальный угол χ (минимум $\cos \chi$). Для этого, продифференцировав (24) по c , $d(\cos \chi)/dc = [1 - (d^2 - b^2)/c^2]/(2d)$, будем иметь уравнение $1 - (d^2 - b^2)/c^2 = 0$, откуда следует, что $c^2 = d^2 - b^2$, или $d^2 = c^2 + b^2$. Так как $d^2(\cos \chi)/dc^2 > 0$, полученное решение соответствует минимуму $\cos \chi$, а значит, максимуму угла χ . При этом отрезок длины b , исходящий на рис. 6, b из точки C , должен быть перпендикулярен отрезку AB . В этой ситуации $\sin \chi = b/d = s \sin \varphi = 0.07715 \cdot 0.72055 = 0.0556$ и $\chi = 3.19^\circ$. Поэтому для расположения отрезка $BC = b$, показанного на рис. 6, b, полученное выше меньшее значение угла χ ($\chi \approx 2.2^\circ$) является в результате проведенного анализа вполне обоснованным.

5.2. Двойник $(i : j) = (4 : 3)$. Рассмотрим теперь двойник $(i : j) = (4 : 3)$ (восьмая после заголовка строка в таблице, пятый столбец) и построим решение первого типа (13). Из выражений (7)

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_3 &= \beta \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 + \zeta \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2 + \eta (\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_2) + \zeta \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3, \\ \mathbf{U}_4 &= \beta \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 + \zeta \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2 - \eta (\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_2) + \zeta \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3, \end{aligned}$$

из выражения (4) ортогональный тензор $\mathbf{O}$, осуществляющий поворот на 180° вокруг вектора $\mathbf{p} = \mathbf{e}_2$, принимает вид $\mathbf{O} = -\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3$, и тогда тензор $\mathbf{U}_3$ переводится в тензор $\mathbf{U}_4$ соотношением $\mathbf{U}_4 = \mathbf{O} \cdot \mathbf{U}_3 \cdot \mathbf{O}$, что легко показать простой подстановкой. Это полностью соответствует данным, приведенным в указанных выше строке и столбце таблицы. Составляющие $U_{ij}^{(-1)}$ тензора $\mathbf{U}_3^{-1}$, обратного тензору $\mathbf{U}_3$ с составляющими U_{ij} , определяем аналогично предыдущему случаю и в результате имеем

$$\mathbf{U}_3^{-1} = \frac{1}{\beta} \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 + \frac{\zeta}{\zeta^2 - \eta^2} \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2 - \frac{\eta}{\zeta^2 - \eta^2} (\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_2) + \frac{\zeta}{\zeta^2 - \eta^2} \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3.$$

Тогда в (13)

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_3 \cdot \mathbf{p} &= \zeta \mathbf{e}_2 + \eta \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{U}_3^{-1} \cdot \mathbf{p} = \frac{\zeta}{\zeta^2 - \eta^2} \mathbf{e}_2 - \frac{\eta}{\zeta^2 - \eta^2} \mathbf{e}_3, \\ |\mathbf{U}_3^{-1} \cdot \mathbf{p}| &= \frac{\sqrt{\zeta^2 + \eta^2}}{|\zeta^2 - \eta^2|}, \quad \hat{\mathbf{a}} = -4 \frac{\zeta \eta}{\zeta^2 + \eta^2} (\eta \mathbf{e}_2 + \zeta \mathbf{e}_3), \quad |\hat{\mathbf{a}}| = 4 \frac{|\zeta \eta|}{\sqrt{\zeta^2 + \eta^2}} \end{aligned}$$

и, в соответствии с (12),

$$\delta_1 = \tau = -\frac{\eta \mathbf{e}_2 + \zeta \mathbf{e}_3}{\sqrt{\zeta^2 + \eta^2}}, \quad \delta_2 = \mathbf{N} = \frac{\zeta \mathbf{e}_2 - \eta \mathbf{e}_3}{\sqrt{\zeta^2 + \eta^2}}, \quad s = \frac{4|\zeta \eta|}{|\zeta^2 - \eta^2|}. \quad (25)$$

На рис. 4 тензору $\mathbf{U}_3$ соответствует сечение $A'B'C'D'$ орторомбической кристаллической ячейки. Чтобы различать векторы $\delta_1 = \boldsymbol{\tau}$ и $\delta_2 = \mathbf{N}$, относящиеся на рис. 4 к ячейкам $ABCD$ и $A'B'C'D'$, будем ниже для последней пометать эти величины штрихами. Вспоминая, что $\zeta = (\alpha + \gamma)/2$, $\eta = (\alpha - \gamma)/2$, учитывая, что начальные длины l_1 и l_2 , к которым относятся конечные длины $\tilde{l}_1$ и $\tilde{l}_2$ для величин $\alpha = \tilde{l}_1/l_1$ и $\gamma = \tilde{l}_2/l_2$, одни и те же ($l_1 = l_2 = l$), и что размер $\tilde{l}_1$ откладывается в направлении вектора $\tilde{\mathbf{e}}_1$, а размер $\tilde{l}_2$ — в направлении вектора $\tilde{\mathbf{e}}_2$, введя в прямоугольнике $A'B'C'D'$ угол φ (который равен такому же углу в прямоугольнике $ABCD$), получаем, что $\tilde{l}_1/\sqrt{\tilde{l}_1^2 + \tilde{l}_2^2} = \sin \varphi$, $\tilde{l}_2/\sqrt{\tilde{l}_1^2 + \tilde{l}_2^2} = \cos \varphi$, $\tilde{l}_1/\tilde{l}_2 = \operatorname{tg} \varphi$, и выражения (25) принимают вид

$$\delta'_1 = \boldsymbol{\tau}' = \frac{C - S}{\sqrt{2}} \mathbf{e}_2 - \frac{S + C}{\sqrt{2}} \mathbf{e}_3, \quad \delta'_2 = \mathbf{N}' = \frac{S + C}{\sqrt{2}} \mathbf{e}_2 - \frac{S - C}{\sqrt{2}} \mathbf{e}_3, \quad s = 2|\operatorname{ctg} 2\varphi|,$$

где $C = \cos \varphi$, $S = \sin \varphi$.

Отсюда, во-первых, сразу следует, что $\delta'_1 \cdot \delta'_2 = \boldsymbol{\tau}' \cdot \mathbf{N}' = 0$, т.е. эти векторы ортогональны, а во-вторых, что вектор $\delta'_1 = \boldsymbol{\tau}'$ направлен по диагонали прямоугольника $A'B'C'D'$ из точки D' в точку B' . Действительно, учитывая, что показанная на рис. 4 ось прямоугольника (вектор $\mathbf{k}_1$) направлена под углом в 45° к векторам $\mathbf{e}_2$ и $-\mathbf{e}_3$, единичный вектор $\overrightarrow{D'B'}/|\overrightarrow{D'B'}|$ можно представить так:

$$\frac{\overrightarrow{D'B'}}{|\overrightarrow{D'B'}|} = \cos(45^\circ + \varphi) \mathbf{e}_2 - \sin(45^\circ + \varphi) \mathbf{e}_3 = \frac{C - S}{\sqrt{2}} \mathbf{e}_2 - \frac{S + C}{\sqrt{2}} \mathbf{e}_3 = \delta'_1 = \boldsymbol{\tau}'.$$

Здесь учитываются известные соотношения для $\sin(\theta_1 + \theta_2)$ и $\cos(\theta_1 + \theta_2)$, а также, что $\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = 1/\sqrt{2}$.

Поворачивая единичный вектор $\overrightarrow{D'B'}/|\overrightarrow{D'B'}|$ вокруг вектора $\mathbf{e}_1$ на 90° против часовой стрелки, получаем единичный вектор $\delta'_2 = \mathbf{N}'$. Действительно, из (4) имеем $\mathbf{O}(90^\circ, \mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_2$ и тогда $\mathbf{O}(90^\circ, \mathbf{e}_1) \cdot \boldsymbol{\tau}' = \mathbf{N}'$.

Деформационный двойник в рассматриваемом случае возникает в результате сдвига, происходящего в плоскости с нормалью $\mathbf{N}'$ в направлении вектора $\boldsymbol{\tau}'$ на величину s . Этому процессу в базисе $\boldsymbol{\tau}'$, $\mathbf{N}'$ соответствует деформация

$$\begin{aligned} \mathbf{E}' &= (s/2)(\boldsymbol{\tau}' \mathbf{N}' + \mathbf{N}' \boldsymbol{\tau}') + (s^2/2) \mathbf{N}' \mathbf{N}' = \\ &= 0.0386(\boldsymbol{\tau}' \mathbf{N}' + \mathbf{N}' \boldsymbol{\tau}') + 0.003 \mathbf{N}' \mathbf{N}' \quad (26) \end{aligned}$$

(сравните это выражение с (21)). Аналогично соотношению (20) построим тензор структурной деформации, соответствующий этому случаю. Теперь материнской является ячейка $A'B'C'D'$, а ее элементы, имевшие в направлении $\mathbf{k}_1$ длину $\tilde{l}_2$, а в направлении $\mathbf{k}_2$ длину $\tilde{l}_1$, в ячейке $ABCD$, образующей структурный двойник, имеют в тех же направлениях длины $\tilde{l}_1$ и $\tilde{l}_2$ соответственно (см. рис. 4). Для указанных в статье значений $\tilde{l}_1$ и $\tilde{l}_2$ такое изменение в длинах определяет в базисе $\mathbf{k}_i$, $i = 1, 2$, тензор деформации

$$\boldsymbol{\varepsilon}' = \varepsilon'_{11} \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_1 + \varepsilon'_{22} \mathbf{k}_2 \mathbf{k}_2, \quad \varepsilon'_{11} = \frac{1}{2} \frac{\tilde{l}_1^2 - \tilde{l}_2^2}{\tilde{l}_2^2} = 0.0401, \quad \varepsilon'_{22} = \frac{1}{2} \frac{\tilde{l}_2^2 - \tilde{l}_1^2}{\tilde{l}_1^2} = -0.0371.$$

Учитывая, что $k_1 = \sin 46.1^\circ N' + \cos 46.1^\circ \tau' = 0.72055N' + 0.6934\tau'$, $k_2 = \cos 46.1^\circ N' - \sin 46.1^\circ \tau' = 0.6934N' - 0.72055\tau'$, приходим к тому, что в базисе N' , τ' координатные составляющие тензоров ϵ' и E' полностью совпадают (тензор ϵ' принимает вид (26)), т.е. тензоры ϵ' и E' равны как тензорные объекты.

Рассмотренные в этом разделе процессы образования двойников $(i : j) = (3 : 4)$ и $(i : j) = (4 : 3)$ показали, что деформации, возникающие в этих процессах как результат изменения микроструктуры материала, являются взаимобратными: инициируемые одним процессом, они полностью ликвидируются другим и материал восстанавливает свою первоначальную форму. Поэтому такие материалы и называются сплавами с памятью формы.

Заключение. В статье на примере сплава с памятью формы Cu–Al–Ni обоснован подход к описанию на микроструктурном уровне процессов двойникования и раздвойникования мартенситной фазы. Математической основой подхода является уравнение совместности Адамара для деформаций. Решение этого уравнения позволило определить поверхности, вдоль которых происходит сдвиг, направления и величину скольжения в орторомбической кристаллической ячейке, соответствующей рассматриваемому материалу в мартенситном состоянии, приводящих к появлению и исчезновению двойниковой структуры. Показано, что в сплаве с памятью формы одновременно и неразрывно существуют два двойника: деформационный и структурный. Первый связан с деформацией простого сдвига, возникающей в соответствии с условием совместности Адамара в мартенситной пластине, что приводит к излому этой прямой пластины и возникновению двух элементов, повернутых на определенный угол друг относительно друга, которые и формируют этот двойник. Структурный двойник формируется одинаково ориентированными орторомбическими кристаллическими ячейками мартенсита, одна из которых ось которых составляет угол в 90° для расположенных в разных элементах структурного двойника ячеек. Формирование деформационного двойника инициирует возникновение в среде деформации простого сдвига, а формирование структурного двойника — структурной деформации. Показано, что определенное положение структурного двойника в деформационном приводит к равенству этих деформаций.

Сдвиг, приводящий к образованию двойников, может осуществиться только когда касательное напряжение на поверхности сдвига достигнет критической величины, определенной экспериментально. Это требует решения краевой задачи механики для представительного объема материала, анизотропия которого определяется ориентацией орторомбических кристаллических ячеек относительно оси мартенситной пластины. Надеюсь, что обозначенное станет предметом следующей публикации.

Конкурирующие интересы. Конкурирующих интересов не имею.

Авторский вклад и ответственность. Я несу полную ответственность за предоставление окончательной версии рукописи в печать. Окончательная версия рукописи мною одобрена.

Финансирование. Работа выполнена в рамках государственного задания ПФИЦ УрО РАН, регистрационный номер темы АААА–А20–120022590044–7.

Библиографический список

1. Bhattacharya K. Wedge-like microstructure in martensites // *Acta Metal. Mater.*, 1991. vol. 39, no. 10. pp. 2431–2444. DOI: [https://doi.org/10.1016/0956-7151\(91\)90023-T](https://doi.org/10.1016/0956-7151(91)90023-T).
2. Hane K. F., Shield T. W. Symmetry and microstructure in martensites // *Philos. Mag. A*, 1998. vol. 78, no. 6. pp. 1215–1252. DOI: <https://doi.org/10.1080/01418619808239984>.
3. Hane K. F., Shield T. W. Microstructure in a copper–aluminium–nickel shape memory alloy // *Proc. R. Soc. Lond. A*, 1999. vol. 455, no. 1991. pp. 3901–3915. DOI: <https://doi.org/10.1098/rspa.1999.0482>.
4. Hane K. F., Shield T. W. Microstructure in a cubic to orthorhombic transition // *J. Elast.*, 2000. vol. 59. pp. 267–318. DOI: <https://doi.org/10.1023/A:1011051204615>.
5. Vedantam S. *Constitutive modeling of Cu–Al–Ni shape memory alloys*: Doctoral Dissertation. Massachusetts: Massachusetts Institute of Technology, 2000. <https://dspace.mit.edu/handle/1721.1/34342>.
6. Vedantama S., Abeyaratne R. A Helmholtz free-energy function for a Cu–Al–Ni shape memory alloy // *Int. J. Non-Linear Mechan.*, 2005. vol. 40. pp. 177–193. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2004.05.005>.
7. Truesdell C. *A First Course in Rational Continuum Mechanics*. vol. 1: General Concepts / Pure and Applied Mathematics. vol. 71. New York: Academic Press, 1977. xxiii+280 pp.
8. Лихачев В. А., Малинин В. Г. *Структурно-аналитическая теория прочности*. СПб.: Наука, 1993. 471 с.
9. Панин В. Е. Основы физической мезомеханики // *Физ. мезомех.*, 1998. Т. 1, № 1. С. 5–22. EDN: KWPHTL.
10. Панин В. Е., Егорушкин В. Е. Основы физической мезомеханики пластической деформации и разрушения твердых тел как нелинейных иерархически организованных систем // *Физ. мезомех.*, 2015. Т. 18, № 5. С. 100–113. EDN: UXWCCP. DOI: <https://doi.org/10.24411/1683-805X-2015-00058>.
11. Трусов П. В., Швейкин А. И. *Многоуровневые модели моно- и поликристаллических материалов: теория, алгоритмы, примеры применения*. Новосибирск: СО РАН, 2019. 605 с. EDN: BCSSTZ.
12. Трусов П. В., Ашихмин В. Н., Волегов П. С., Швейкин А. И. Определяющие соотношения и их применение для описания эволюции микроструктуры // *Физ. мезомех.*, 2009. Т. 12, № 3. С. 61–71. EDN: LAJDAL.
13. Трусов П. В., Швейкин А. И., Кондратьев Н. С., Янц А. Ю. Многоуровневые модели в физической мезомеханике металлов и сплавов: результаты и перспективы // *Физ. мезомех.*, 2020. Т. 23, № 6. С. 33–62. EDN: ZDSCJX. DOI: <https://doi.org/10.24411/1683-805X-2020-16003>.
14. Belyaev F. S., Evard M. E., Volkov A. E. Simulation of the plastic deformation of shape memory alloys considering shear anisotropy on the slip plane // *Mater. Phys. Mech.*, 2023. vol. 51, no. 1. pp. 61–67. EDN: EBDDNG DOI: https://doi.org/10.18149/MPM.5112023_6.
15. Беляев Ф. С., Волков А. Е., Евард М. Е. Микроструктурное моделирование обратимой и необратимой деформации при циклическом термомеханическом нагружении никелида титана // *Вестн. Тамбов. ун-в. Сер. Естествен. и техн. науки*, 2013. Т. 18, № 4. С. 2025–2026. EDN: RAISVF.
16. Роговой А. А., Столбова О. С., Столбов О. В. Численное моделирование эволюции магнитной микроструктуры в сплавах Гейслера // *ПМТФ*, 2021. № 5. С. 195–207. EDN: UBSKYK. DOI: <https://doi.org/10.15372/PMTF20210519>.
17. Rogovoy A. A., Stolbova O. S. Microstructural modeling of the magnetization process in Ni₂MnGa alloy polytwin crystals // *Magnetochem.*, 2022. vol. 8, no. 8, 78. EDN: CUASII. DOI: <https://doi.org/10.3390/magnetochemistry8080078>.
18. Rogovoy A. A., Stolbova O. S. Microstructural model of the behavior of a ferroalloy with shape memory in a magnetic field // *Mech. Adv. Mater. Struct.*, 2022. vol. 31, no. 2. pp. 387–406. EDN: ZAQSCS. DOI: <https://doi.org/10.1080/15376494.2022.2114046>.

19. Rogovoy A. A., Stolbova O. S. Microstructural model of magnetic and deformation behavior of single crystals and polycrystals of ferromagnetic shape memory alloy // *Magnetochem.*, 2023. vol. 9, no. 2, 40. EDN: QIEPUX. DOI: <https://doi.org/10.3390/magnetochemistry9020040>.
20. Rogovoy A. A., Stolbova O. S. Microstructural model of magnetic and deformation behavior of single crystals and polycrystals of ferromagnetic shape-memory alloy / *H. Altenbach, V. Eremeyev (eds). Advances in Linear and Nonlinear Continuum and Structural Mechanics* / Advanced Structured Materials, 198. Cham: Springer. pp. 397–442. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-031-43210-1_23.
21. Rogovoy A. A., Stolbova O. S. An approach to describe the twinning and detwinning processes of the martensitic structure in ferromagnetic alloy with shape memory in magnetic and force fields // *Mech. Adv. Mater. Struct.*, 2024 (to appear). DOI: <https://doi.org/10.1080/15376494.2024.2355627>.
22. Роговой А. А. *Формализованный подход к построению моделей механики деформируемого твердого тела. Часть 1. Основные соотношения механики сплошных сред*. Пермь: УрО РАН, 2020. 288 с. EDN: UTXNLG.
23. Косилов А. Т., Юрьев В. А. Профилированные монокристаллы Cu–Al–Ni с эффектами псевдоупругости и памяти формы // *Междун. научн. ж. Альтернативная энергетика и экология*, 2015. № 3. С. 49–61. EDN: TPPDCP.
24. Otsuka K., Shimizu K. Morphology and crystallography of thermoelastic Cu–Al–Ni martensite analyzed by the phenomenological theory // *Trans. JIM*, 1974. vol. 15, no. 103–108. DOI: <https://doi.org/10.2320/matertrans1960.15.103>.
25. Лурье А. И. *Нелинейная теория упругости*. М.: Наука, 1980. 512 с.
26. James R. D. Finite deformation by mechanical twinning // *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 1981. vol. 77. pp. 143–176. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00250621>.
27. Gurtin M. E. Two-phase deformations of elastic solids // *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 1983. vol. 84. pp. 1–29. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00251547>.
28. Yasunaga M., Funatsu Y., Kojima S., et al. Measurement of elastoc constant // *Scripta Metallurg.*, 1983. vol. 17, no. 9. pp. 1091–1094. DOI: [https://doi.org/10.1016/0036-9748\(83\)90460-X](https://doi.org/10.1016/0036-9748(83)90460-X).

MSC: 74N15

Microstructural model of twinning and detwinning processes of the martensitic phase in shape memory alloys

A. A. Rogovoy

Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS,
1, Academician Korolev str., Perm, 614018, Russian Federation.

Abstract

Using the Cu–Al–Ni shape memory alloy as an example, the article substantiates an approach to describing at the microstructural level the processes of twinning and detwinning of the martensitic phase. The coordinated twinned martensitic structure is described by the Hadamard compatibility equation for deformations, the solution of which made it possible to determine the surfaces along which the shift occurs, the directions and the magnitude of sliding in an orthorhombic crystal cell corresponding to the material under consideration in the martensitic state, leading to the appearance and disappearance of the twin structure. It is shown that two types of twins simultaneously and inseparably exist in an alloy with shape memory: deformation and structural. The first is related to the deformation of a simple shear, that occurs in accordance with the Hadamard compatibility condition in a martensitic plate, which leads to bending this straight plate and the appearance of two elements rotated at a certain angle relative to each other, which form this twin. The structural twin is formed from two parts, in each of which the orthorhombic crystal cells of martensite are identically oriented, but one of the axes of these cells changes its direction by 90° when moving to another part of the twin. The formation of a deformation twin initiates the occurrence of a simple shear strain in the medium, and a structural twin initiates a structural strain. It is shown that a certain position of the structural twin in the deformation one leads to the equality of these strains.

Keywords: microstructural modeling, anisotropic material, Hadamard compatibility condition, sliding surfaces and shear directions.

Received: 6th March, 2024 / Revised: 18th September, 2024 /

Accepted: 27th September, 2024 / First online: 28th October, 2024

Mechanics of Solids

Research Article

© The Author(s), 2024

© Samara State Technical University, 2024 (Compilation, Design, and Layout)

© The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International license (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Please cite this article in press as:

Rogovoy A. A. Microstructural model of twinning and detwinning processes of the martensitic phase in shape memory alloys, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2024, vol. 28, no. 3, pp. 516–542. EDN: NDDMCS. DOI: 10.14498/vsgtu2089 (In Russian).

Authors' Details:

Anatoly A. Rogovoy  <https://orcid.org/0000-0003-1723-0067>

Dr. Phys. & Math. Sci., Professor; Chief Researcher; Lab. of Nonlinear Mechanics of Deformable Solids; e-mail: rogovoy@icmm.ru

Competing interests. I have no competing interests.

Authors' contributions and responsibilities. I take full responsibility for submitting the final version of the manuscript for publication. The final version of the manuscript has been approved by me.

Funding. The work was carried out as part of the state assignment of the Perm Federal Research Center, Ural Branch of RAS, registration number of the topic AAAA-A20-120022590044-7.

References

1. Bhattacharya K. Wedge-like microstructure in martensites, *Acta Metal. Mater.*, 1991, vol. 39, no. 10, pp. 2431–2444. DOI: [https://doi.org/10.1016/0956-7151\(91\)90023-T](https://doi.org/10.1016/0956-7151(91)90023-T).
2. Hane K. F., Shield T. W. Symmetry and microstructure in martensites, *Philos. Mag. A*, 1998, vol. 78, no. 6, pp. 1215–1252. DOI: <https://doi.org/10.1080/01418619808239984>.
3. Hane K. F., Shield T. W. Microstructure in a copper-aluminium-nickel shape memory alloy, *Proc. R. Soc. Lond. A*, 1999, vol. 455, no. 1991, pp. 3901–3915. DOI: <https://doi.org/10.1098/rspa.1999.0482>.
4. Hane K. F., Shield T. W. Microstructure in a cubic to orthorhombic transition, *J. Elast.*, 2000, vol. 59, pp. 267–318. DOI: <https://doi.org/10.1023/A:1011051204615>.
5. Vedantam S. *Constitutive modeling of Cu-Al-Ni shape memory alloys*, Doctoral Dissertation. Massachusetts, Massachusetts Institute of Technology, 2000. <https://dspace.mit.edu/handle/1721.1/34342>.
6. Vedantama S., Abeyaratne R. A Helmholtz free-energy function for a Cu-Al-Ni shape memory alloy, *Int. J. Non-Linear Mech.*, 2005, vol. 40, pp. 177–193. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2004.05.005>.
7. Truesdell C. *A First Course in Rational Continuum Mechanics*, vol. 1: General Concepts, Pure and Applied Mathematics, vol. 71. New York, Academic Press, 1977, xxiii+280 pp.
8. Likhachev V. A., Malinin V. G. *Strukturno-analiticheskaya teoriya prochnosti* [Structural and Analytical Theory of Strength]. St. Petersburg, Nauka, 1993, 471 pp. (In Russian)
9. Panin V. E. Fundamentals of physical mesomechanics, *Fiz. Mezomekh.*, 1998, vol. 1, no. 1, pp. 5–22 (In Russian). EDN: KWPHTL.
10. Panin V. E., Egorushkin V. E. Basic physical mesomechanics of plastic deformation and fracture of solids as hierarchically organized nonlinear systems, *Fiz. Mezomekh.*, 2015, vol. 18, no. 5, pp. 100–113 (In Russian). EDN: UXWCCP. DOI: <https://doi.org/10.24411/1683-805X-2015-00058>.
11. Trusov P. V., Shveikin A. I. *Mnogourovnevnye modeli mono- i polikristallicheskikh materialov: teoriya, algoritmy, primery primeneniya* [Multilevel Models of Mono- and Polycrystalline Materials: Theory, Algorithms, Application Examples]. Novosibirsk, Sibirsk. Otd. RAN, 2019, 605 pp. (In Russian). EDN: BCSSTZ.
12. Trusov P. V., Ashikhmin V. N., Volegov P. S., Shveykin A. I. Constitutive relations and their application to the description of microstructure evolution, *Fiz. Mezomekh.*, 2009, vol. 12, no. 3, pp. 61–71 (In Russian). EDN: LAJDAL.
13. Trusov P. V., Shveykin A. I., Kondratiev N. S., Yants A. Yu. Multilevel models in physical mesomechanics of metals and alloys: Results and prospects, *Fiz. Mezomekh.*, 2020, vol. 23, no. 6, pp. 33–62 (In Russian). EDN: ZDSCJX. DOI: <https://doi.org/10.24411/1683-805X-2020-16003>.
14. Belyaev F. S., Evard M. E., Volkov A. E. Simulation of the plastic deformation of shape memory alloys considering shear anisotropy on the slip plane, *Mater. Phys. Mech.*, 2023, vol. 51, no. 1, pp. 61–67. EDN: EBDDNG DOI: https://doi.org/10.18149/MPM.5112023_6.
15. Belyaev F. S., Volkov A. E., Evard M. E. Microstructural modeling of reversible and irreversible deformation under cyclic thermomechanical loading of titanium nickelide, *Tambov Univ. Reports. Ser. Natural Techn. Sci.*, 2013, vol. 18, no. 4, pp. 2025–2026 (In Russian). EDN: RAISVF.

16. Rogovoy A. A., Stolbova O. S., Stolbov O. V. Numerical simulation of evolution of magnetic microstructure in Heusler alloys, *J. Appl. Mech. Techn. Phys.*, 2021, vol. 62, no. 5, pp. 870–881. EDN: VTJJCS. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0021894421050199>.
17. Rogovoy A. A., Stolbova O. S. Microstructural modeling of the magnetization process in Ni_2MnGa alloy polytwin crystals, *Magnetochem.*, 2022, vol. 8, no. 8, 78. EDN: CUASII. DOI: <https://doi.org/10.3390/magnetochemistry8080078>.
18. Rogovoy A. A., Stolbova O. S. Microstructural model of the behavior of a ferroalloy with shape memory in a magnetic field, *Mech. Adv. Mater. Struct.*, 2022, vol. 31, no. 2, pp. 387–406. EDN: ZAQSCS. DOI: <https://doi.org/10.1080/15376494.2022.2114046>.
19. Rogovoy A. A., Stolbova O. S. Microstructural model of magnetic and deformation behavior of single crystals and polycrystals of ferromagnetic shape memory alloy, *Magnetochem.*, 2023, vol. 9, no. 2, 40. EDN: QIEPUX. DOI: <https://doi.org/10.3390/magnetochemistry9020040>.
20. Rogovoy A. A., Stolbova O. S. Microstructural model of magnetic and deformation behavior of single crystals and polycrystals of ferromagnetic shape-memory alloy, In: *H. Altenbach, V. Eremeyev (eds). Advances in Linear and Nonlinear Continuum and Structural Mechanics*, Advanced Structured Materials, 198. Cham, Springer, pp. 397–442. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-031-43210-1_23.
21. Rogovoy A. A., Stolbova O. S. An approach to describe the twinning and detwinning processes of the martensitic structure in ferromagnetic alloy with shape memory in magnetic and force fields, *Mech. Adv. Mater. Struct.*, 2024 (to appear). DOI: <https://doi.org/10.1080/15376494.2024.2355627>.
22. Rogovoi A. A. *Formalizovannyi podkhod k postroeniiu modelei mekhaniki deformiruemogo tverdogo tela. Chast' 1. Osnovnye sootnosheniia mekhaniki sploshnykh sred* [A Formalized Approach to the Construction of Models of Deformable Solid Mechanics. Part 1. Basic Relations of Continuum Mechanics]. Perm', Uralsk. Otd. RAN, 2020, 288 pp. (In Russian). EDN: UTXNLG.
23. Kosilov A. T., Yuriev V. A. Profiled Cu–Al–Ni single crystals with pseudoelasticity and shape memory effects, *Mezhdun. Nauchn. Zhurn. Alternativn. Energetika Ekologiya*, 2015, no. 3, pp. 49–61 (In Russian). EDN: TPPDCP.
24. Otsuka K., Shimizu K. Morphology and crystallography of thermoelastic Cu–Al–Ni martensite analyzed by the phenomenological theory, *Trans. JIM*, 1974, vol. 15, no. 103–108. DOI: <https://doi.org/10.2320/matertrans1960.15.103>.
25. Lur'e A. I. *Nelineinaya teoriya uprugosti* [Nonlinear Theory of Elasticity]. Moscow, Nauka, 1980, 512 pp. (In Russian)
26. James R. D. Finite deformation by mechanical twinning, *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 1981, vol. 77, pp. 143–176. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00250621>.
27. Gurtin M. E. Two-phase deformations of elastic solids, *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 1983, vol. 84, pp. 1–29. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00251547>.
28. Yasunaga M., Funatsu Y., Kojima S., et al. Measurement of elastoc constant, *Scripta Metallurg.*, 1983, vol. 17, no. 9, pp. 1091–1094. DOI: [https://doi.org/10.1016/0036-9748\(83\)90460-X](https://doi.org/10.1016/0036-9748(83)90460-X).



УДК 539.3

Способ определения параметров электрического сигнала для управления вынужденными установившимися колебаниями электровязкоупругих тел. Приложение к активному демпфированию колебаний

Н. В. Севодина, Н. А. Юрлова, Д. А. Ошмарин

Институт механики сплошных сред УрО РАН,
Россия, 614018, Пермь, ул. Академика Королева, 1.

Аннотация

При реализации активной стратегии управления динамическим поведением конструкций, в состав которых входят элементы, выполненные из пьезоэлектрических материалов, как правило, используют два пьезоэлемента, один из которых выступает в роли сенсора, а другой – актуатора. При этом проблема заключается в определении величины управляющего сигнала, подаваемого на актуатор, и аппаратной реализации необходимого закона управления. В связи с необходимостью формирования сложных электрических цепей, представляющих собой блок управления, привлекательным становится предварительное моделирование механического отклика на тот или иной управляющий сигнал.

В настоящей работе подход, позволяющий на основе решения задачи о собственных колебаниях электровязкоупругой конструкции получить аналитические выражения для определения величины электрического потенциала, генерируемого в момент резонанса на электродированной поверхности пьезоэлемента при его деформировании на рассматриваемой моде при вынужденных установившихся колебаниях, распространен на случай использования двух пьезоэлементов, выполняющих функции сенсора и актуатора и располагающихся соответствующим образом на поверхности конструкции.

Механика деформируемого твердого тела Научная статья

© Коллектив авторов, 2024

© СамГТУ, 2024 (составление, дизайн, макет)

Этот контент публикуется на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

Образец для цитирования

Севодина Н. В., Юрлова Н. А., Ошмарин Д. А. Способ определения параметров электрического сигнала для управления вынужденными установившимися колебаниями электровязкоупругих тел. Приложение к активному демпфированию колебаний // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2024. Т. 28, № 3. С. 543–561. EDN: KRCTOC. DOI: 10.14498/vsgtu2052.

Сведения об авторах

Наталья Витальевна Севодина <https://orcid.org/0000-0001-9374-7135>
кандидат технических наук; научный сотрудник; отд. комплексных проблем механики деформируемых твердых тел; e-mail: natsev@icmm.ru

Наталья Алексеевна Юрлова <https://orcid.org/0000-0003-3497-0358>
кандидат физико-математических наук, доцент; старший научный сотрудник;
e-mail: yurlova@icmm.ru

Дмитрий Александрович Ошмарин <https://orcid.org/0000-0002-9898-4823>
кандидат технических наук; научный сотрудник; отд. комплексных проблем механики деформируемых твердых тел; e-mail: oshmarin@icmm.ru

Выведены аналитические выражения для определения величины управляющего сигнала, который подается на актуатор и обеспечивает демпфирование заданной моды колебаний. Управляющий сигнал формируется путем преобразования сигнала, получаемого от сенсора.

Приемлемость предложенного подхода продемонстрирована на примере консолю защемленной пластинки, выполненной из вязкоупругого материала, механическое поведение которого описывается комплексными динамическими модулями. По обе стороны пластинки размещены пьезоэлементы, играющие роли сенсора и актуатора. Численная реализация предложенного подхода осуществляется методом конечных элементов с использованием пакета прикладных программ ANSYS. Демонстрировано хорошее совпадение результатов, полученных по выведенным формулам, с результатами расчета в ANSYS. Предложенный подход позволяет существенно сократить временные и ресурсные затраты при математическом моделировании активного управления вынужденными установившимися колебаниями электровязкоупругих тел, определить условия, которым должны удовлетворять элементы блока управления при реализации активной стратегии управления динамическим поведением такого рода smart-систем.

Ключевые слова: электровязкоупругость, пьезоэлемент, вынужденные установившиеся колебания, собственные колебания, управление колебаниями, смещения, электрический потенциал, сенсор, актуатор.

Получение: 4 августа 2023 г. / Исправление: 17 сентября 2024 г. /

Принятие: 27 сентября 2024 г. / Публикация онлайн: 31 октября 2024 г.

1. Введение. Колебания при эксплуатации различных конструкций встречаются в огромном множестве ситуаций. При этом иногда они не создают никаких проблем и даже могут вызываться целенаправленно. Однако если они нежелательны, то могут создавать угрозу целостности и плановому функционированию технических объектов. От крупных сооружений, таких как здания и мосты, до небольших сложных систем, таких как беспилотные летательные аппараты и манипуляторы-роботы, — у всех у них нежелательные вибрации требуется тем или иным образом подавлять или демпфировать. Ситуации зачастую осложняются тем, что к ряду конструкций доступ человеку невозможен либо затруднен (космические, подводные и т.п.). При этом становится крайне важным обеспечение управления динамическим поведением таких систем способом, не нарушающим жесткие требования к их весу и габаритам.

Активно развивающиеся в последние годы smart-технологии позволяют эффективно решать проблемы управления механическим поведением такого рода инженерных объектов, например, демпфирование колебаний различной природы или управление геометрией, сбор энергии и так далее.

Smart-системы реализуют smart-технологии, поскольку обладают способностью адаптироваться к изменениям окружающей среды благодаря наличию чувствительных элементов, в качестве которых широко применяются пьезоэлектрические материалы. Они обычно состоят из основной конструкции, объединенной с датчиками и исполнительными механизмами, координируемыми контроллером, входящим в блок управления.

Основные стратегии управления колебаниями с применением пьезоэлектрических материалов можно разделить на активные, полуактивные и пас-

сивные. Среди них активные способы управления, в которых пьезоэлектрические материалы используются в качестве как датчиков (сенсоров), так и исполнительных механизмов (актуаторов) [1–3], обладают преимуществами высокой эффективности и адаптивности к изменяющимся внешним условиям. Однако этот способ требует внешних энергозатрат, что приводит к усложнению реализации управления и специальных решений для обеспечения стабильности систем.

Реализация активной стратегии управления подразумевает использование как минимум двух пьезоэлементов, один из которых является сенсором, регистрирующим отклик конструкции на приложенную нагрузку, а второй — актуатором, формирующим локальное управляющее воздействие на конструкцию и требуемым образом влияющим на ее механическое поведение. В силу того, что прямой и обратный пьезоэффекты не являются взаимно обратимыми, для того чтобы подать на актуатор сигнал, необходимый, например, для восстановления исходной формы конструкции или демпфирования заданной моды колебаний, необходимо некоторым образом преобразовать сигнал, полученный с сенсора.

При реализации активных стратегий управления динамическим поведением smart-конструкций необходимо понимать, как механически отреагирует система на внешнее воздействие, чтобы определить параметры такого воздействия и затем применить их при конструировании исполнительных механизмов (актуаторов) для усиления или нивелирования такого отклика.

Внешние динамические воздействия при эксплуатации ряда конструкций зачастую моделируются как вынужденные установившиеся колебания, заданные моды которых, реализующиеся на определенных частотах, требуется демпфировать.

Как правило, при математическом моделировании демпфирующие свойства объектов оцениваются по величине амплитуды при резонансном режиме или по скорости переходных процессов. В первом случае решается задача о вынужденных установившихся колебаниях, во втором — динамическая задача с начальными условиями. Приложения этих задач для поиска оптимальных параметров рассматриваемых систем сопряжены с рядом проблем. В частности, для получения амплитуд при резонансных режимах на основе решения задачи о вынужденных установившихся колебаниях требуется многократное повторение вычислительной процедуры при различных частотах внешних воздействий. Кроме этого, при использовании задачи о вынужденных установившихся колебаниях или задачи с начальными условиями найденные оптимальные решения связаны с моделируемым вариантом нагружения исследуемой системы.

Практический интерес, в том числе для решения задач оптимизации, представляет постановка задачи о собственных колебаниях системы, позволяющая оценить демпфирующие свойства объекта вне зависимости от внешних силовых, кинематических и других факторов. Поэтому применение задачи о собственных колебаниях при решении такого рода задач является более эффективным. Это определяет привлекательность использования результатов решения задачи о собственных колебаниях электровязкоупругих систем в приложении к активному управлению их динамическим поведением в режиме вынужденных установившихся колебаний, а именно для поиска оптималь-

ной величины потенциала, характеризующего управляющее электрическое воздействие, направленное на демпфирование заданных мод. Понимание того, каким должно быть управляющее электрическое воздействие, позволяет соответствующим образом реализовать на аппаратном уровне блок управления при реализации активного управления динамическим поведением smart-конструкций.

Для таких оценочных решений удобно применять простые аналитические выражения, которые затем могут быть уточнены проведением полномасштабных расчетов. Примером такого рода выражений могут служить формулы определения оптимальных параметров сопротивления и индуктивности резонансной шунтирующей цепи при реализации пассивной стратегии управления динамическим поведением конструкций, предложенные в [4].

Данная работа является продолжением идеи и ее реализации, предложенной в работе [5], суть которой состоит в том, что в момент резонанса при вынужденных гармонических колебаниях конструкции форма колебаний подобна собственной форме колебаний, полученной из решения задачи о собственных колебаниях. В результате некоторых математических преобразований исходных матричных уравнений получены аналитические формулы, которые связывают величины, являющиеся решением задачи о вынужденных колебаниях, с аналогичными величинами в собственных векторах, которые являются решением задачи о собственных колебаниях.

Здесь соотношения, полученные в [5], распространены на случай использования двух пьезоэлементов, выполняющих функции сенсора и актуатора, что позволяет реализовать активное управление динамическим поведением такого рода конструкций, заключающееся в том, что сигнал, регистрируемый на пьезоэлементе-сенсоре, усиливается в блоке управления и затем подается на пьезоэлемент-актуатор для демпфирования заданной моды колебаний. Поскольку в момент резонанса все величины имеют максимальные значения, рассматривается именно момент резонанса.

Применение результатов решения задачи о собственных колебаниях для получения величин, необходимых для управления вынужденными установившимися колебаниями конструкций, имеющих элементы, выполненные из пьезоэлектрических материалов, позволяет существенно сократить время, требуемое для проведения расчетов за счет исключения ряда повторяющихся вычислений. Полученные путем математического моделирования значения коэффициента усиления сигнала, а также потенциала, который должен быть подан на актуатор, позволяют сократить время на разработку блока управления на элементном уровне и программирование контроллеров, осуществляющих преобразование сигнала с сенсора.

2. Математическая формулировка. Рассматриваемые в качестве smart-конструкций объекты — кусочно-однородные электровязкоупругие тела, имеющие в своем составе элементы, выполненные из упругих, вязкоупругих, а также из пьезоэлектрических материалов, присоединенных к поверхности тела.

Математическая постановка задачи подробно приведена в работах [6, 7], поэтому здесь для краткости изложения опущена. Отметим лишь, что вариационное уравнение равновесия кусочно-однородных электровязкоупругих тел формулируется на основе принципа возможных перемещений, дифференци-

альных уравнений Максвелла в квазистатическом приближении и соотношений линейной теории вязкоупругости и имеет вид

$$\int_{V_1} (\sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} - D_i \delta E_i + \rho_1 \ddot{u}_i \delta u_i) dV + \int_{V_2} (\sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} + \rho_2 \ddot{u}_i \delta u_i) dV = \int_{S_q} q_e \delta \phi dS + \int_{S_\sigma} p_i \delta u_i dS. \quad (1)$$

При отсутствии внешних усилий уравнение (1) будет описывать собственные колебания электровязкоупругого тела:

$$\int_{V_1} (\sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} - D_i \delta E_i + \rho_1 \ddot{u}_i \delta u_i) dV + \int_{V_2} (\sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} + \rho_2 \ddot{u}_i \delta u_i) dV = 0.$$

Здесь приняты следующие обозначения [5]: σ_{ij} , ε_{ij} и u_i — компоненты тензоров напряжений Коши и линейных деформаций, а также векторы перемещений соответственно; ρ_1 и ρ_2 — удельные плотности электроупругого материала тела объема V_1 и вязкоупругого материала тела объема V_2 ; ϕ — электрический потенциал; D_i , E_i — компоненты векторов электрической индукции и напряженности электрического поля; φ — электрический потенциал; $V = V_1 + V_2$, при этом V_1 относится к его электроупругой, а V_2 — к вязкоупругой части; $S = S_u + S_\sigma + S_q + S_\varphi + S_{p0}$ — полная поверхность кусочно-однородного тела, ограничивающая объем V . При этом на частях поверхности, ограничивающей объем V_2 , заданы перемещения u_i^0 (на S_u) и поверхностные усилия p_i (на S_σ); на частях поверхности, ограничивающей объем V_1 , заданы поверхностная плотность зарядов q_s (на S_q) и электрический потенциал φ_0 (на S_φ).

Принято, что все части кусочно-однородного тела V идеально скреплены между собой. На электродированных поверхностях пьезоэлектрических частей выполняется условие потенциальности.

Связь между компонентами вектора перемещений и компонентами тензора деформаций описывается дифференциальными соотношениями Коши. Упругие части составного тела удовлетворяют закону Гука, материал пьезоэлектрических частей принят упругим, описывающие его физические соотношения учитывают связь между механическими и электрическими свойствами материала, вязкоупругое поведение соответствующих элементов тела описывается комплексными динамическими модулями в рамках линейной наследственной теории вязкоупругости [6, 8]. Принято, что составляющие комплексных динамических модулей вязкоупругого материала тела не зависят от частоты колебаний в пределах некоторого диапазона, ограниченного окрестностью рассматриваемой собственной или резонансной частоты [5]:

$$\tilde{G} = G_{\text{Re}} + iG_{\text{Im}} = G_{\text{Re}} \left(1 + i \frac{G_{\text{Im}}}{G_{\text{Re}}} \right) = G_{\text{Re}} (1 + i\eta_g),$$

$$\tilde{B} = B_{\text{Re}} + iB_{\text{Im}} = B_{\text{Re}} \left(1 + i \frac{B_{\text{Im}}}{B_{\text{Re}}} \right) = B_{\text{Re}} (1 + i\eta_b).$$

Здесь $\tilde{G}$, $\tilde{B}$ — комплексные динамические модули сдвига и объемного сжатия, в общем случае являющиеся функциями частоты колебаний Ω ; η_g , η_b —

соответствующие тангенсы углов механических потерь; $G_{\text{Re}}, B_{\text{Re}}, G_{\text{Im}}, B_{\text{Im}}$ — значения действительных и мнимых частей комплексных модулей соответственно [5].

При решении задач электровязкоупругости необходимо задать не только механические граничные условия, но и электрические. В качестве механических граничных условий приняты следующие:

$$u_i = u_i^0 \quad \text{на} \quad S_u, \quad \sigma_{ij} n_j = p_i \quad \text{на} \quad S_\sigma.$$

Электрические граничные условия имеют вид

$$\int_{S_q} (\bar{n} \cdot \bar{D}) = -q_s \quad \text{на} \quad S_q, \quad \phi = \phi_0 \quad \text{на} \quad S_\phi.$$

Потенциал ϕ определяется с точностью до аддитивной постоянной, поэтому принимается, что на участке поверхности S_ϕ задан нулевой потенциал, тогда ϕ_0 будет иметь смысл разности потенциалов. При этом рассмотрим ситуацию, когда граничные условия на пьезоэлементе соответствуют режиму холостого хода (open circuit — o/c). Как показано в работах [9–12], при этом условии пьезоэлемент проявляет более высокую жесткость, что способствует рассеянию потенциальной энергии системы. При этом электрические граничные условия примут вид

$$\int_{S_q} (\bar{n} \cdot \bar{D}) = 0 \quad \text{на} \quad S_q, \quad \phi = \phi_0 \quad \text{на} \quad S_\phi.$$

Решение задачи о вынужденных установившихся колебаниях электровязкоупругого тела ищется в виде

$$\bar{u}(x, t) = \bar{u}_0(x) e^{-i\Omega t}, \quad x = (x_1, x_2, x_3),$$

а решение задачи о собственных колебаниях —

$$\bar{u}(x, t) = \bar{u}_0(x) \exp(-i\omega t), \quad x = (x_1, x_2, x_3). \quad (2)$$

Здесь $\bar{u}_0(x) = \{u_1(x), u_2(x), u_3(x), \varphi(x)\}$ — обобщенный вектор состояния, содержащий как компоненты механических перемещений u_1, u_2, u_3 , так и компоненту электрического потенциала φ ; ω — круговая комплексная собственная частота колебаний, $\omega = \omega_{\text{Re}} + i\omega_{\text{Im}}$, при этом ω_{Re} имеет смысл собственной частоты колебаний, а ω_{Im} характеризует скорость их затухания; Ω — круговая частота внешнего возбуждения [5].

Численная реализация осуществляется методом конечных элементов с использованием пакета прикладных программ ANSYS¹. В работе [5] показано, что при использовании метода конечных элементов для численной реализации уравнение собственных колебаний в матричной форме принимает вид

$$(-\omega^2[M] + [K_p] + (1 + i\eta)[K_\nu])\{\delta\} = 0. \quad (3)$$

Здесь $[K] = [K_p] + [K_\nu]$ — матрица жесткости составной конструкции, состоящей из основной конструкции, выполненной из вязкоупругого материала

¹Лицензия Academic Research Mechanical and CFD № 1064623.

и упругого пьезоэлемента; $[K_p]$ — матрица жесткости упругого пьезоэлемента, $[K_\nu]$ — матрица жесткости вязкоупругого материала основной конструкции без учета вязкоупругих свойств; ω — круговая комплексная собственная частота колебаний; $\eta_g = \eta_b = \eta$ — тангенсы углов механических потерь сдвиговой и объемной частей комплексных динамических модулей, принятые равными друг другу; $\{\delta\} = \{u_i, \phi\}$ — вектор узловых переменных.

Для задачи вынужденных установившихся колебаний уравнение в матричной форме принимает вид

$$(-\Omega^2[M] + [K_p] + (1 + 2i\beta)[K_\nu])\{\delta\}_{df} = \{F\},$$

где $\{\delta\}_{df}$ — вектор искомого решения, форма колебаний; $\{F\}$ — вектор внешней силовой нагрузки; $\beta = \eta/2$; Ω — круговая частота внешнего возбуждения.

В работе [5] предложен способ, основанный на математическом преобразовании конечно-элементных матричных уравнений собственных и вынужденных колебаний электровязкоупругих тел, который позволил получить аналитические выражения, связывающие величины, являющиеся решением задачи о вынужденных колебаниях, с аналогичными величинами в собственных векторах, являющихся решением задачи о собственных колебаниях.

Далее в качестве примера рассмотрим консольно защемленную прямоугольную пластину со следующими размерами: длина $l_1 = 500$ мм, ширина $b_1 = 60$ мм, толщина $h_1 = 2$ мм (рис. 1). На основе предложенного в [5] метода аналитические выражения для резонансного смещения $(U_z)_A$ точки слежения A и величины оптимального потенциала V^{opt} , который необходимо подать на единственный пьезоэлемент (играющий роли и сенсора, и актуатора) для демпфирования заданной моды колебаний, имеют вид

$$(U_z)_A = \alpha_{df}(U_0)_A = \frac{Q}{2\omega_{Re}\omega_{Im}}(U_0)_A,$$

$$V^{opt} = -\frac{Q}{2\omega_{Re}\omega_{Im}} \frac{(U_0)_A}{\gamma_u(\xi)}. \quad (4)$$

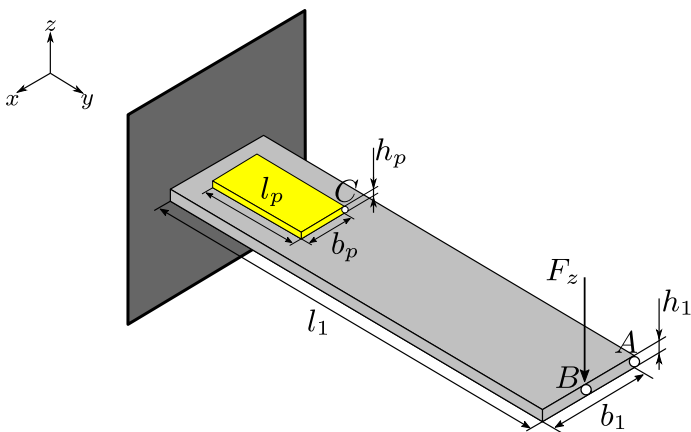


Рис. 1. Схема консольно защемленной пластинки с прикрепленным к ее поверхности пьезоэлементом [5]

[Figure 1. A schematic diagram of a cantilever-clamped plate with a piezoelement attached to its surface [5]]

Здесь приняты следующие обозначения:

- $(U_z)_A$ — смещения точки A в каком-либо направлении (u_x, u_y, u_z) (в данном примере — в направлении действия усилия F_z) в момент резонанса, вызванные действием гармонической силы $\vec{F} = \{0, 0, F_z\}$, приложенной в точке B (в соответствии с обозначениями на рис. 1);
- $(U_0)_A$ — смещение точки A в том же направлении, определенное из вектора собственной формы колебаний для рассматриваемой собственной частоты колебаний, близкой к исследуемому резонансу;
- $\alpha_{df} = Q/(2\omega_{Re}\omega_{Im})$ — коэффициент пропорциональности;
- Q — параметр, который при действии только силы $\vec{F} = \{0, 0, F_z\}$ определяется по формуле $Q = \{\bar{\delta}_0\}^\top \{F\} = F_z \{\bar{\delta}_0\}^\top \{\delta_F\}$, где $\{\delta_F\}$ — вектор, в котором отличны от нуля только те компоненты, которые соответствуют приложенной силе F_z ; произведение $\{\bar{\delta}_0\}^\top \{\delta_F\}$ представляет собой величину смещения точки приложения силы (точки B) $(U_0)_B$ в направлении действия силы F_z , выбранного из вектора собственной формы колебаний;
- $\gamma_u(\xi) = (U_z(\xi))_A|_{V^*=1}$ — коэффициент пропорциональности, который имеет смысл резонансного смещения точки слежения (точки A) при подаче на пьезоэлемент единичного потенциала при решении задачи о колебаниях системы под действием потенциала, подаваемого на электродированную поверхность пьезоэлемента и изменяющегося по гармоническому закону (параметрические колебания системы), и имеет размерность, определяемую отношением смещения к потенциалу [м/В];
- V^{opt} — величина потенциала, подаваемого на пьезоэлемент, оптимальная для демпфирования рассматриваемой моды колебаний в момент резонанса.

Использование найденных зависимостей позволило определить величину электрического потенциала на электродированной поверхности пьезоэлемента-сенсора, генерируемого при деформировании его на рассматриваемой моде при вынужденных установившихся колебаниях. При этом решать задачу о вынужденных установившихся колебаниях для диапазона частот в окрестности исследуемой резонансной частоты не требуется. Достаточно решить задачу о собственных колебаниях исследуемой системы (конструкция с пьезоэлементами), определить спектр собственных частот колебаний и соответствующие им собственные векторы. Алгоритм для получения величины потенциала, который необходимо подать на пьезоэлемент для демпфирования заданной моды колебаний, следующий [5].

1. Получить решение задачи модального анализа — собственную частоту и соответствующий ей вектор собственной формы колебаний, реализующиеся в заданном частотном диапазоне. Частотный диапазон задается из условия близости собственной частоты колебаний к резонансной частоте Ω исследуемой моды колебаний. Из этого вектора определяются величины $(U_0)_A$, $V_{o/c}$, а также параметр Q .
2. Решить задачу параметрических колебаний, вызываемых приложением единичного потенциала к пьезоэлементу $V^* = 1$ В, затем на АЧХ точки слежения найти величину ее смещения $\gamma_u(\xi) = (U_z(\xi))_A|_{V^*=1}$ при исследуемом резонансе. Величины $\gamma_u(\xi)$ можно определять сразу для нескольких резонансных пиков (аналогично тому, как при решении мо-

дальней задачи можно сразу определить несколько собственных частот колебаний).

3. По формуле (4) рассчитать оптимальное значение подаваемого на пьезоэлемент потенциала V^{opt} , позволяющего демпфировать колебания рассматриваемой моды от действия возбуждающих усилий, реализующейся на резонансной частоте, близкой к собственной частоте колебаний.

Отметим, что если рассматриваются вынужденные установившиеся колебания конструкции в некотором диапазоне частот внешнего воздействия и при этом положение возбуждающей силы не меняется, то для определения оптимальных величин потенциала, который должен быть подан на пьезоэлемент для демпфирования различных возникающих в данном случае мод колебаний, никаких других задач, кроме задачи модального анализа для определения всех собственных частот и собственных векторов колебаний, входящих в заданный диапазон частот внешнего воздействия, а также задачи параметрических колебаний от действия единичного потенциала в заданном диапазоне частот внешнего воздействия, решать не требуется.

Принцип активного управления динамическим поведением конструкции в самом общем случае можно описать следующим образом: сигнал, получаемый с пьезоэлемента-сенсора, поступает в блок управления, в котором он усиливается, преобразуется требуемым образом и подается на пьезоэлемент-актуатор. Эффект от такого воздействия может оцениваться по новому сигналу, регистрируемому на пьезоэлемента-сенсоре. Поэтому важно иметь простые аналитические выражения для коэффициента преобразования сигнала в блоке управления (коэффициент усиления) с тем, чтобы анализировать реакцию объекта на управляющий сигнал и решать проблему компоновки блока управления на аппаратном уровне.

Под коэффициентом усиления k_V будем понимать величину, показывающую, во сколько раз необходимо усилить потенциал, регистрируемый на пьезоэлемента-сенсоре в момент резонанса V_{sen} , чтобы получить оптимальный потенциал, подаваемый на пьезоэлемент-актуатор V_{ac}^{opt} для демпфирования, соответствующей данному резонансу моды:

$$k_V = V_{ac}^{opt} / V_{sen}.$$

Для определения коэффициента усиления k_V воспользуемся следующим способом.

Сначала решается задача о собственных колебаниях конструкции, состоящей из вязкоупругого тела, на поверхности которого располагаются два пьезоэлемента — сенсор и актуатор, и для каждой рассматриваемой моды колебаний определяется собственный вектор, в котором есть и величина потенциала на пьезоэлемента-сенсоре $(V_{o/c})_{sen}$, и величина потенциала на пьезоэлемента-актуаторе $(V_{o/c})_{ac}$. Величины потенциалов на пьезоэлементах в момент резонанса на каждой рассматриваемой моде вынужденных колебаний определяются коэффициентом пропорциональности α_{df} [5].

При резонансе на пьезоэлемента-сенсоре генерируется потенциал V_{sen} , величина которого определяется формулой [5]

$$V_{sen} = \frac{Q}{2\omega_{Re}\omega_{Im}} (V_{o/c})_{sen}. \quad (5)$$

Величина же оптимального потенциала, который необходимо подать на актуатор $(V_{o/c})_{ac}$, определяется формулой (3).

Таким образом, окончательно коэффициент усиления определяется следующим образом:

$$k_V = \frac{V_{ac}^{opt}}{V_{sen}} = -\frac{(U_0)_A}{\gamma_u(\xi) \cdot (V_{o/c})_{sen}}. \quad (6)$$

Этот коэффициент не зависит от величины приложенной силы, возбуждающей вынужденные установившиеся колебания, и является характеристикой системы. Однако для каждой моды колебаний коэффициент имеет свое значение.

3. Численная иллюстрация. Как было продемонстрировано в [1], диапазон рабочих частот системы управления динамическим поведением конструкций ограничен точностью модели, так как всегда есть некоторая дестабилизация мод колебаний за пределами рассматриваемого диапазона. Уменьшение возмущенных отклонений внутри диапазона рабочих частот управляемой системы всегда компенсируется возрастанием отклонений за пределами этого диапазона. Одним из путей преодоления этой сложности является использование совместно размещенных пьезоэлектрических датчиков и актуаторов [1, 13, 14]. Такая конструкция позволяет спроектировать системы управления с гарантированной стабильностью, несмотря на наличие динамических возмущений вне рассматриваемого диапазона частот. Поэтому в большом числе работ принято, что пьезоэлементы присоединяются по обеим сторонам к поверхностям основной конструкции (здесь — пластинки) строго друг под другом. В [15, 16] подтверждено экспериментально, что такое расположение пьезоэлементов является оптимальным для реализации активного управления колебаниями конструкции. На основании этого в настоящей работе принято, что пьезоэлементы, выполняющие роль сенсора и актуатора, размещены таким же образом.

В качестве объекта исследования рассматривается консольно защемленная прямоугольная пластина, отличающаяся от представленной на рис. 1 тем, что к ее поверхности прикреплены два пьезоэлемента, расположенные так, как показано на рис. 2. Геометрические размеры пьезоэлементов следующие: длина $l_p = 50$ мм, ширина $b_p = 20$ мм и толщина $h_p = 0.3$ мм. Верхняя и нижняя поверхности пьезоэлементов электродированы. Центры масс пьезоэлементов смещены на 55 мм от заделки и расположены на продольной оси симметрии пластины.

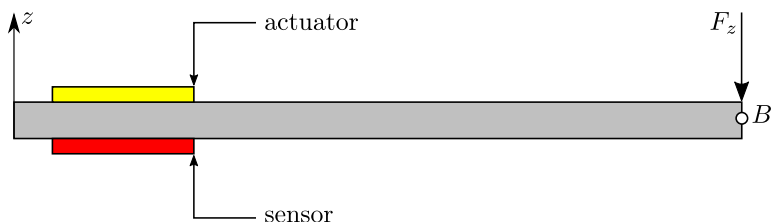


Рис. 2. Схема консольно защемленной пластинки с двумя пьезоэлементами — актуатором и сенсором

[Figure 2. A scheme of the cantilever-clamped plate with two piezoelectric elements — an actuator and a sensor]

Материал пластины обладает вязкоупругими свойствами, которые описываются частотно-независимыми комплексными динамическими модулями сдвига и объемного сжатия, действительные и мнимые компоненты которых следующие: $G_{\text{Re}} = 6.71 \cdot 10^8$ Па, $B_{\text{Re}} = 3.33 \cdot 10^{10}$ Па, $G_{\text{Im}} = 6.71 \cdot 10^7$ Па, $B_{\text{Im}} = 3.33 \cdot 10^9$ Па. Удельная плотность материала $\rho_{el} = 1190$ кг/м³.

Пьезоэлементы выполнены из пьезокерамики ЦТС-19, поляризованной в направлении оси z , со следующими физико-механическими характеристиками: $C_{11} = C_{22} = 10.9 \cdot 10^{10}$ Па, $C_{13} = C_{23} = 5.4 \cdot 10^{10}$ Па, $C_{12} = 6.1 \cdot 10^{10}$ Па, $C_{33} = 9.3 \cdot 10^{10}$ Па, $C_{44} = C_{55} = C_{66} = 2.4 \cdot 10^{10}$ Па, $\beta_{31} = \beta_{23} = -4.9$ Кл/м², $\beta_{33} = -14.9$ Кл/м², $\beta_{51} = \beta_{42} = -10.6$ Кл/м², $e_{11} = e_{22} = 8.2 \cdot 10^{-9}$ Ф/м, $e_{33} = 8.4 \cdot 10^{-9}$ Ф/м, $\rho_p = 7500$ кг/м³, которые являются компонентами матрицы $[D_2]$, представленной в работе [6].

Определим собственные частоты колебаний рассматриваемой системы. Тип первых пяти мод колебаний и собственные частоты, на которых они реализуются, приведены в табл. 1.

Вся конструкция совершает вынужденные установившиеся колебания под действием силы $\vec{F} = \{0, 0, F_z\}$, изменяющейся по гармоническому закону и приложенной в центре торцевой части пластинки (точке B), как показано на рис. 2. Принято, что $F_z = -0.02$ Н.

В режиме вынужденных установившихся колебаний наиболее энергоемкими и реализующимися при таком внешнем воздействии являются первые две изгибные моды колебаний, которые и будем рассматривать в дальнейшем. Комплексные собственные частоты при граничных условиях холостого хода на пьезоэлементах, соответствующие этим модам, следующие:

$$\omega_1^{o/c} = 2.102 + i 0.200, \quad \omega_2^{o/c} = 12.944 + i 1.220.$$

При выбранном расположении, одинаковых размерах и физико-механических характеристиках пьезоэлементов в собственном векторе величина потенциала на поверхности второго пьезоэлемента (сенсора) V_{sen} равна величине потенциала на поверхности первого пьезоэлемента (актуатора) V_{ac} :

$$|V_{ac}| = |V_{sen}|.$$

При действии на конструкцию только внешней гармонической силы, возбуждающей вынужденные установившиеся колебания, величины потенциалов, возникающих на поверхностях пьезоэлементов, также равны между собой.

Таблица 1
Собственные частоты колебаний пластинки с двумя пьезоэлементами
[Eigenfrequencies of the plate with two piezoelectric elements]

The number of the vibration mode, k	Eigenfrequency, $\omega_k^{o/c}$	Type of vibration mode
1	2.102 + i 0.200	bending
2	12.944 + i 1.220	bending
3	28.312 + i 2.743	torsional
4	35.620 + i 3.326	bending
5	51.8198 + i 4.943	planar

В соответствии с предлагаемым подходом находим собственные векторы колебаний, т.е. формы колебаний соответствующих изгибных мод. Далее из найденных векторов определяем значения смещений $(U_0)_A$ в рассматриваемой точке A , значения смещений $(U_0)_B$ в точке приложения силы (в точке B), величины потенциалов на поверхности первого пьезоэлемента-актуатора V_{ac} как значения соответствующих узловых неизвестных в собственном векторе. Затем по формулам (4)–(6) рассчитываем величины оптимального потенциала на актуаторе V_{ac}^{opt} и резонансного потенциала на сенсоре V_{sen}^{opt} , а также коэффициент усиления сигнала k_V , получаемого с сенсора, для подачи его на актуатор.

Для сравнения полученных результатов проводим аналогичные расчеты в ANSYS.

На рис. 3 приведены полученные в первой серии расчетов амплитудно-частотные характеристики (АЧХ) потенциала V_{sen} , регистрируемого на сенсоре в области первого (а) и второго (б) резонансов, который подается в блок управления, а также смещения $|(U_z)_A|_F$ точки A пластинки, совершающей вынужденные установившиеся колебания под действием приложенной возмущающей силы F_z , в области первого (с) и второго (д) резонансов (синие линии).

Вторая серия расчетов — поиск оптимальной величины потенциала, который должен быть подан на пьезоэлемент-актуатор для того, чтобы величина резонансного смещения точки A была минимальной. В этом случае для поиска оптимального значения использовался метод сканирования. Данный подход был реализован следующим образом. Сначала берется максимально широкий диапазон изменения подаваемого на пьезоэлемент-актуатор потенциала с достаточно крупным шагом, и для каждого значения электрического потенциала решается задача о вынужденных установившихся колебаниях. На основе полученных результатов строится зависимость смещения $(U_z)_A$ точки A от величины подаваемого потенциала на пьезоэлемент-актуатор V_{ac} . Границы области изменения кривизны графика данной зависимости и определяют границы диапазона изменения потенциала для следующей серии расчетов с меньшим шагом. Так повторяется до тех пор, пока требуемое значение потенциала не отыщется с требуемой точностью (в рамках данного исследования — с точностью до 10^{-2}).

Следует отметить, что в этой серии расчетов необходимо учитывать знак прикладываемого потенциала, так как заранее знак потенциала, оптимального для демпфирования выбранной моды колебаний, неизвестен [5].

На рис. 4 приведены графики таких зависимостей в окрестности оптимального значения потенциала. Нужно отметить, что графики приведены только для случая $V_{ac} < 0$, поскольку для $V_{ac} > 0$ наблюдается только рост смещения с ростом его величины, что согласовывается с результатами, приведенными в [17]. Минимальное значение смещения и определяет величину оптимального значения потенциала, который необходим для демпфирования выбранной моды колебаний.

В третьей серии расчетов задача о вынужденных установившихся колебаниях решалась для случая силового внешнего воздействия с одновременной подачей на актуатор управляющего потенциала V_{ac}^{opt} , оптимального по величине, для демпфирования соответствующей моды колебаний. Полученные

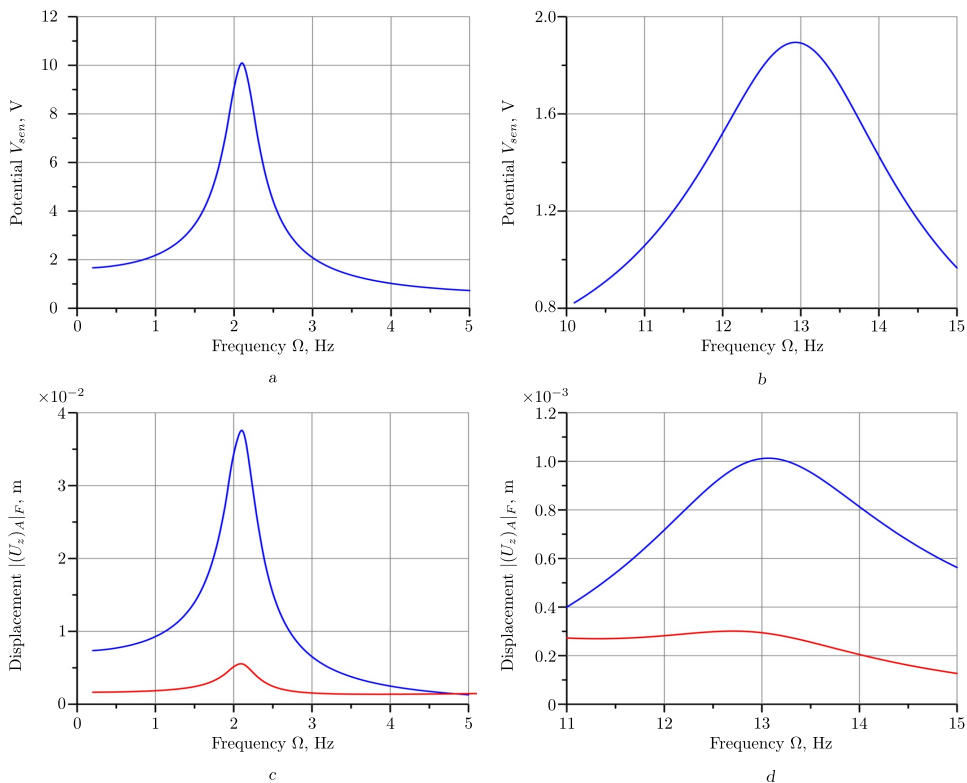


Рис. 3. Амплитудно-частотные характеристики потенциала V_{sens} , регистрируемого на сенсоре в области первого (a) и второго (b) резонансов, который подается в блок управления, и смещения $|(U_z)_A|_F$ точки A пластинки, совершающей вынужденные установившиеся колебания под действием приложенной возмущающей силы F_z , в области первого (c) и второго (d) резонансов (синие линии), и при подаче на актуатор управляющего потенциала, оптимального по величине V_{ac}^{opt} (красные линии)

[Figure 3. The amplitude-frequency characteristics of the potential V_{sens} recorded on the sensor in the region of the first (a) and second (b) resonances, which is input to the control unit, and the displacement $|(U_z)_A|_F$ of point A of the plate, which undergoes forced steady-state vibrations under the influence of the applied disturbing force F_z , in the regions of the first (c) and second (d) resonances (blue lines), and when applying the optimal control potential V_{ac}^{opt} (red lines) to the actuator]

для такого случая АЧХ смещения $(U_z)_A$ точки A на рис. 3, c, d обозначены красной линией.

В табл. 2 приведены результаты решения задач о собственных и о параметрических колебаниях, данные, полученные с помощью предлагаемого подхода, и серии расчетов задачи о вынужденных колебаниях в ANSYS. Если принять величины параметров, определенные при помощи решения цикла задач о вынужденных установившихся колебаниях в ANSYS, за истинные, то для первых двух рассматриваемых изгибных мод колебаний погрешность определения смещения точки A по предложенным формулам не превышает 3.5 %, а по величине оптимального потенциала и коэффициенту усиления — 5 %.

Анализируя полученные результаты, приходим к выводу, что после подачи управляющего сигнала на пьезоэлемент-актуатор по величине смещений точки наблюдения на первых двух модах колебаний можно констатировать

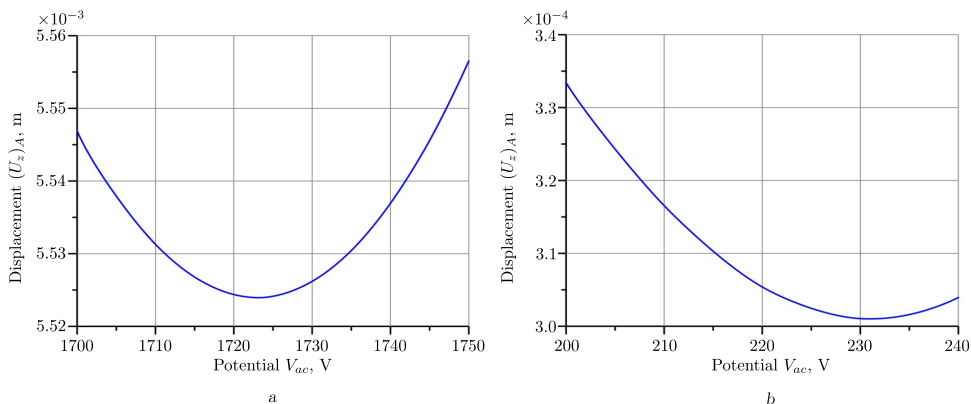


Рис. 4. Амплитудно-частотные характеристики смещения $(U_z)_A$ точки A в области первого (a) и второго (b) резонансов в зависимости от величины подаваемого на актуатор управляющего потенциала V_{ac}

[Figure 4. The amplitude-frequency characteristics of the displacement $(U_z)_A$ at point A in the region of the first (a) and second (b) resonances as a function of the magnitude of the control potential V_{ac} applied to the actuator]

существенное снижение их амплитуды, то есть демпфирование (на первой моде — в 6.7 раз, на второй — в 3.33 раза).

Заключение. В настоящей работе способ, позволяющий на основе решения задачи о собственных колебаниях электровязкоупругой конструкции получить аналитические выражения для определения величины электрического потенциала, генерируемого на электродированной поверхности пьезоэлемента при его деформировании на рассматриваемой моде, реализующейся на частоте, приводящей при вынужденных установившихся колебаниях к возникновению резонанса, предложенный в [5], распространен на случай использования двух пьезоэлементов, выполняющих функции сенсора и актуатора, расположенных друг напротив друга по разные стороны конструкции.

Получены аналитические выражения, позволяющие определить величину управляющего сигнала для демпфирования заданной моды колебаний и коэффициента усиления сигнала, регистрируемого на сенсоре и подаваемого на актуатор.

Приемлемость предложенного подхода продемонстрирована совпадением результатов, полученных с помощью предложенных формул и с использованием ANSYS. Полученные результаты показали, что погрешность определения смещения точки A по предложенным формулам не превышает 3.5 %, а по величинам потенциала и коэффициенту усиления — 5 %.

Это позволяет с приемлемой точностью понять требования, которые должны быть предъявлены к элементам блока управления при реализации активной стратегии демпфирования колебаний smart-систем, формируемым присоединением к основной конструкции пьезоэлементов, выполняющих роль сенсора и актуатора.

Таблица 2

Данные решения задачи о собственных колебаниях и результаты решения серии задач о вынужденных установившихся колебаниях для пластинки с двумя пьезоэлементами [The solutions to the problem of natural vibrations and the results of solving a series of problems on forced steady-state vibrations for a plate with two piezoelectric elements]

	1st mode	2nd mode
Parametric vibrations		
$\gamma_u(\xi)$, м/В	$-3.532 \cdot 10^{-6}$	$-9.697 \cdot 10^{-3}$
Natural vibration		
$(U_0)_A$, м	$7.896 - i 0.0069$	$-7.813 + i 0.022$
$(U_0)_B$, м	$7.896 + i 0.0069$	$7.813 - i 0.022$
V_{sen} , В	$2099.110 + i 45.475$	$15030.87 + i 192.696$
Forced steady-state vibration $ (U_z)_A _F$, м		
Proposed method	$3.756 \cdot 10^{-2}$	$9.799 \cdot 10^{-4}$
ANSYS	$3.760 \cdot 10^{-2}$	$1.013 \cdot 10^{-3}$
Difference, %	0.106	3.267
Optimal potential V^{opt} , В		
Proposed method	-1753.431	242.34
ANSYS	-1723.250	231.00
Difference, %	1.75	4.91
$ (U_z)_A _{V^{opt}}$, м		
ANSYS	$5.52 \cdot 10^{-3}$	$3.01 \cdot 10^{-4}$
Potential on the sensor under the action of force $V_{sen} _F$, В		
Proposed method	-9.987	1.885
ANSYS	-10.092	1.884
Difference, %	1.04	0.05
Gain factors k_V		
Proposed method	175.566	128.560
ANSYS	170.754	122.611
Difference, %	2.82	4.85

Конкурирующие интересы. Конфликты интересов отсутствуют.

Авторский вклад и ответственность. Все авторы принимали участие в разработке концепции статьи и в написании рукописи. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

Финансирование. Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (тема № 124020700047-3 «Комплексные исследования в задачах деформационного мониторинга, аэроупругости, интеллектуальных конструкций, термомеханики»).

Библиографический список

1. Preumont A. *Vibration Control of Active Structures: An Introduction*. Dordrecht: Springer, 2011. xx+436 pp. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-94-007-2033-6>.
2. Lu F., Liu Y., Chen W., et al. Radial disturbance compensation device of cylindrical cantilever beam using embedded piezoelectric ceramics with bending mode // *Mech. Syst. Signal*

- Proc.*, 2022. vol. 172, 109009. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2022.109009>.
3. Zhu X., Chen Z., Jiao Y. Optimizations of distributed dynamic vibration absorbers for suppressing vibrations in plates // *J. Low Freq. Noise, Vibr. Active Contr.*, 2018. vol. 37, no. 4. pp. 1188–1200. DOI: <https://doi.org/10.1177/1461348418794563>.
4. Hagood N., Von Flotow A. Damping of structural vibrations with piezoelectric materials and passive electrical networks // *J. Sound Vibr.*, 1991. vol. 146, no. 2. pp. 243–268. DOI: [https://doi.org/10.1016/0022-460X\(91\)90762-9](https://doi.org/10.1016/0022-460X(91)90762-9).
5. Севодина Н. В., Ошмарин Д. А., Юрлова Н. А. Способ определения параметров электрического сигнала для управления вынужденными установившимися колебаниями электровязкоупругих тел. Математические соотношения // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2023. Т. 27, № 4. С. 679–703. EDN: GHEHRB. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu2025>.
6. Матвеев В. П., Ошмарин Д. А., Севодина Н. В., Юрлова Н. А. Задача о собственных колебаниях электровязкоупругих тел с внешними электрическими цепями и конечно-элементные соотношения для ее численной реализации // *Вычисл. мех. сплош. сред*, 2016. Т. 9, № 4. С. 476–485. EDN: XDDTUB. DOI: <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2016.9.4.40>.
7. Matveenko V. P., Iurlova N. A., Oshmarin D. A., Sevodina N. V. Analysis of dissipative properties of electro-viscoelastic bodies with shunting circuits on the basis of numerical modelling of natural vibrations // *Acta Mech.*, 2023. vol. 234. pp. 261–276. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00707-022-03193-8>.
8. Matveenko V. P., Kligman E. P. Natural vibration problem of viscoelastic solids as applied to optimization of dissipative properties of constructions // *J. Vibr. Control*, 1997. vol. 3, no. 1. pp. 87–102. EDN: LEKWMP. DOI: <https://doi.org/10.1177/10775463970030010>.
9. Clark W.W. Vibration control with state-switched piezoelectric materials // *J. Intel. Mat. Syst. Struct.*, 2000. vol. 11, no. 4. pp. 263–271. DOI: <https://doi.org/10.1106/18ce-77k4-dymg-rkbb>.
10. Qureshi E.M., Shen X., Chen J. Vibration control laws via shunted piezoelectric transducers: A review // *Int. J. Aeronaut. Space Sci.*, 2014. vol. 15, no. 1. pp. 1–19. DOI: <https://doi.org/10.5139/IJASS.2014.15.1.1>.
11. Richard C., Guyomar D., Audigier D., Ching G. Semi-passive damping using continuous switching of a piezoelectric device // *Proc. SPIE*, 1999. vol. 3672. pp. 104–111. DOI: <https://doi.org/10.1117/12.349773>.
12. Ramaratnam A., Jalili N. A switched stiffness approach for structural vibration control: Theory and real time implementation // *J. Sound Vibr.*, 2006. vol. 291, no. 1–2. pp. 259–274. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2005.06.012>.
13. Wang Q., Wang C.M. Optimal placement and size of piezoelectric patches on beams from the controllability perspective // *Smart Mater. Struct.*, 2000. Т. 9, № 4. С. 558–567. DOI: <https://doi.org/10.1088/0964-1726/9/4/320>.
14. Prakash B., Yasin M.Y., Khan A.H., et al. Optimal location and geometry of sensors and actuators for active vibration control of smart composite beams // *Australian J. Mech. Engng.*, 2022. vol. 20, no. 4. pp. 981–999. DOI: <https://doi.org/10.1080/14484846.2020.1767834>.
15. Alam N.M., Rahman N. Active vibration control of a piezoelectric beam using PID controller: Experimental study // *Latin Amer. J. Solids Struct.*, 2012. Т. 9, № 6. С. 657–673. DOI: <https://doi.org/10.1590/S1679-78252012000600003>.
16. Williams D., Haddad K.H., Jiffri S., Yang C. Active vibration control using piezoelectric actuators employing practical components // *J. Vibr. Control*, 2019. vol. 25, no. 21–22. pp. 2784–2798. DOI: <https://doi.org/10.1177/1077546319870933>.
17. Юрлова Н. А., Ошмарин Д. А., Севодина Н. В. Численный анализ вынужденных установившихся колебаний электровязкоупругой системы при совместном воздействии механических и электрических нагрузок // *Вестн. Пермского нац. иссл. политехн. ун-та. Механика*, 2022. № 4. С. 67–79. EDN: JVSTMA. DOI: <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2022.4.07>.

MSC: 74S05

Method for determining the parameters of an electrical signal for controlling forced steady-state vibrations of electroviscoelastic bodies.

Application to active vibration damping

N. V. Sevodina, N. A. Iurlova, D. A. Oshmarin

Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS,
1, Academician Korolev str., Perm, 614018, Russian Federation.

Abstract

As a rule, two piezoelectric elements are used in case of implementing an active strategy for controlling the dynamic behavior of structures that include elements made of piezoelectric materials. One of them acts as a sensor and the other one acts as an actuator. In this case, the key problem is in determining the magnitude of the control signal applied to the actuator, and the hardware implementation of the established control law. Due to the need of constructing of complex electrical circuits representing a control unit, preliminary modeling of the mechanical response to a particular control signal becomes attractive. In this paper, the earlier developed approach was extended to the case of using two piezoelectric elements that perform the functions of a sensor and an actuator, and are located accordingly on the surface of the structure.

This approach allows us to obtain expressions for determining the magnitude of the electric potential generated at the moment of resonance on the electroded surface of a piezoelectric element when it is deformed at the vibration mode under consideration in case of forced steady-state vibrations. All the derivations are performed on the basis of solving the problem of natural vibrations of an electro-viscoelastic structure.

Mechanics of Solids

Research Article

© The Author(s), 2024

© Samara State Technical University, 2024 (Compilation, Design, and Layout)

♾️ The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Please cite this article in press as:

Sevodina N. V., Iurlova N. A., Oshmarin D. A. Method for determining the parameters of an electrical signal for controlling forced steady-state vibrations of electroviscoelastic bodies. Application to active vibration damping, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2024, vol. 28, no. 3, pp. 543–561. EDN: KRCTOC. DOI: 10.14498/vsgtu2052 (In Russian).

Authors' Details:

Natalya V. Sevodina  <https://orcid.org/0000-0001-9374-7135>

Cand. Techn. Sci.; Researcher; Dept. of Complex Problems of Deformable Solids Mechanics;
e-mail: natsev@icmm.ru

Nataliya A. Iurlova   <https://orcid.org/0000-0003-3497-0358>

Cand. Phys. & Math. Sci., Associate Professor; Senior Researcher; e-mail: yurlova@icmm.ru

Dmitrii A. Oshmarin  <https://orcid.org/0000-0002-9898-4823>

Cand. Techn. Sci.; Researcher; Dept. of Complex Problems of Deformable Solids Mechanics;
e-mail: oshmarin@icmm.ru

Analytical expressions are derived to determine the magnitude of the control signal which is applied to the actuator and provides damping of a given vibration mode. The control signal is generated by converting the signal received from the sensor.

The applicability of the proposed approach is demonstrated at the example of a cantilever plate made of viscoelastic material, the mechanical behavior of which is described by complex dynamic moduli. Piezoelectric elements acting as a sensor and an actuator are placed on both sides of the plate. Numerical implementation of the proposed approach is carried out based on the finite element method using the ANSYS application software package. A good concordance of the results obtained by the derived formulas with the results of the calculation in ANSYS is demonstrated. The proposed approach makes it possible to significantly reduce time and resource costs in case of mathematical modeling of active control of forced steady-state vibrations of electro-viscoelastic bodies, to determine the conditions that the elements of the control unit must satisfy when implementing an active strategy for controlling the dynamic behavior of such smart systems.

Keywords: electroviscoelasticity, piezoelectric element, forced steady-state vibrations, natural vibrations, vibration control, displacements, electric potential, sensor, actuator.

Received: 4th August, 2023 / Revised: 17th September, 2024 /

Accepted: 27th September, 2024 / First online: 31st October, 2024

Competing interests. Authors have no competing interests.

Authors' contributions and responsibilities. All authors participated in developing the concept of the article and in writing the manuscript. The authors take full responsibility for submitting the final manuscript for publication. The final version of the manuscript was approved by all authors.

Funding. The work was carried out within the framework of the state assignment of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (topic no. 124020700047-3 "Comprehensive research in problems of deformation monitoring, aeroelasticity, intelligent structures, thermomechanics").

References

1. Preumont A. *Vibration Control of Active Structures: An Introduction*. Dordrecht, Springer, 2011, xx+436 pp. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-94-007-2033-6>.
2. Lu F., Liu Y., Chen W., et al. Radial disturbance compensation device of cylindrical cantilever beam using embedded piezoelectric ceramics with bending mode, *Mech. Syst. Signal Proc.*, 2022, vol. 172, 109009. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2022.109009>.
3. Zhu X., Chen Z., Jiao Y. Optimizations of distributed dynamic vibration absorbers for suppressing vibrations in plates, *J. Low Freq. Noise, Vibr. Active Contr.*, 2018, vol. 37, no. 4, pp. 1188–1200. DOI: <https://doi.org/10.1177/1461348418794563>.
4. Hagood N., Von Flotow A. Damping of structural vibrations with piezoelectric materials and passive electrical networks, *J. Sound Vibr.*, 1991, vol. 146, no. 2, pp. 243–268. DOI: [https://doi.org/10.1016/0022-460X\(91\)90762-9](https://doi.org/10.1016/0022-460X(91)90762-9).
5. Sevodina N. V., Oshmarin D. A., Iurlova N. A. Method for determining the parameters of an electrical signal for controlling forced steady-state vibrations of electroviscoelastic bodies. Mathematical relations, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2023, vol. 27, no. 4, pp. 679–703 (In Russian). EDN: GHEHRB. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu2025>.

6. Matveenko V. P., Oshmarin D. A., Sevodina N. V., Iurlova N. A. Problem on natural vibrations of electroviscoelastic bodies with external electric circuits and finite element relations for its implementation, *Comput. Cont. Mech.*, 2016, vol. 9, no. 4, pp. 476–485 (In Russian). EDN: XDDTUB. DOI: <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2016.9.4.40>.
7. Matveenko V. P., Iurlova N. A., Oshmarin D. A., Sevodina N. V. Analysis of dissipative properties of electro-viscoelastic bodies with shunting circuits on the basis of numerical modelling of natural vibrations, *Acta Mech.*, 2023, vol. 234, pp. 261–276. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00707-022-03193-8>.
8. Matveenko V. P., Kligman E. P. Natural vibration problem of viscoelastic solids as applied to optimization of dissipative properties of constructions, *J. Vibr. Control*, 1997, vol. 3, no. 1, pp. 87–102. EDN: LEKWMP. DOI: <https://doi.org/10.1177/10775463970030010>.
9. Clark W.W. Vibration control with state-switched piezoelectric materials, *J. Intel. Mat. Syst. Struct.*, 2000, vol. 11, no. 4, pp. 263–271. DOI: <https://doi.org/10.1106/18ce-77k4-dyng-rkbb>.
10. Qureshi E.M., Shen X., Chen J. Vibration control laws via shunted piezoelectric transducers: A review, *Int. J. Aeronaut. Space Sci.*, 2014, vol. 15, no. 1, pp. 1–19. DOI: <https://doi.org/10.5139/IJASS.2014.15.1.1>.
11. Richard C., Guyomar D., Audigier D., Ching G. Semi-passive damping using continuous switching of a piezoelectric device, *Proc. SPIE*, 1999, vol. 3672, pp. 104–111. DOI: <https://doi.org/10.1117/12.349773>.
12. Ramaratnam A., Jalili N. A switched stiffness approach for structural vibration control: Theory and real time implementation, *J. Sound Vibr.*, 2006, vol. 291, no. 1–2, pp. 259–274. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2005.06.012>.
13. Wang Q., Wang C.M. Optimal placement and size of piezoelectric patches on beams from the controllability perspective, *Smart Mater. Struct.*, 2000, T. 9, № 4, C. 558–567. DOI: <https://doi.org/10.1088/0964-1726/9/4/320>.
14. Prakash B., Yasin M.Y., Khan A.H., et al. Optimal location and geometry of sensors and actuators for active vibration control of smart composite beams, *Australian J. Mech. Engng.*, 2022, vol. 20, no. 4, pp. 981–999. DOI: <https://doi.org/10.1080/14484846.2020.1767834>.
15. Alam N.M., Rahman N. Active vibration control of a piezoelectric beam using PID controller: Experimental study, *Latin Amer. J. Solids Struct.*, 2012, T. 9, № 6, C. 657–673. DOI: <https://doi.org/10.1590/S1679-78252012000600003>.
16. Williams D., Haddad K.H., Jiffri S., Yang C. Active vibration control using piezoelectric actuators employing practical components, *J. Vibr. Control*, 2019, vol. 25, no. 21–22, pp. 2784–2798. DOI: <https://doi.org/10.1177/1077546319870933>.
17. Iurlova N. A., Oshmarin D. A., Sevodina N. V. A numerical analysis of forced steady-state vibrations of an electro-viscoelastic system in case of a joint impact of electrical and mechanical loads, *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2022, no. 4, pp. 67–79 (In Russian). EDN: JVSTMA. DOI: <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2022.4.07>.



УДК 539.4

Уточненная модель термовязкоупругопластического динамического деформирования армированных гибких пологих оболочек

А. П. Янковский

Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН,
Россия, 630090, Новосибирск, ул. Институтская, 4/1.

Аннотация

Сформулирована задача термовязкоупругопластического деформирования армированных пологих оболочек при динамическом нагружении. При этом использована уточненная теория их изгиба, простейшим вариантом которой является теория Амбарцумяна. Геометрическая нелинейность учитывается в приближении Кармана. Неупругое поведение материалов фаз композиции описывается уравнениями теории пластического течения; вязкоупругое их деформирование описывается соотношениями модели Максвелла–Больцмана. Температура в трансверсальном направлении аппроксимирована полиномами высоких порядков. Численное интегрирование связанной нелинейной термомеханической задачи осуществляется с использованием явной схемы шагов по времени. Исследовано вязкоупругопластическое изгибающее поведение цилиндрической панели из стеклопластика с ортогональной 2D-структурой армирования. Конструкция кратковременно нагружается в поперечном направлении давлением высокой интенсивности. Проведен сравнительный анализ расчетов, выполненных с учетом и без учета температурного отклика в полой оболочке. Дополнительно исследованы случаи предварительного нагрева панели со стороны одной из лицевых поверхностей. Показано, что для расчета термовязкоупругопластического поведения стеклопластиковых искривленных панелей следует применять уточненную теорию изгиба, а не традиционно используемую теорию Амбарцумяна, которая существенно искажает форму расчетного остаточного прогиба и поля остаточных деформаций компонентов композиции. Продemonстрировано, что учет температурного отклика в

Механика деформируемого твердого тела Научная статья

© Коллектив авторов, 2024

© СамГТУ, 2024 (составление, дизайн, макет)

♾️ Контент публикуется на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

Образец для цитирования

Янковский А. П. Уточненная модель термовязкоупругопластического динамического деформирования армированных гибких пологих оболочек // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2024. Т. 28, № 3. С. 562–585. EDN: LBASMU. DOI: 10.14498/vsgtu2079.

Сведения об авторе

Андрей Петрович Янковский ✉️ <https://orcid.org/0000-0002-2602-8357>

доктор физико-математических наук; ведущий научный сотрудник; лаб. физики быстропротекающих процессов; e-mail: yankovsky_ap@itam.nsc.ru

пологой армированной оболочке может привести не только к количественно, но и качественно неверному представлению о расчетной форме ее остаточного прогиба. Наличие предварительного нагрева стеклопластиковой панели приводит к заметному изменению ее остаточного прогиба. При этом важную роль играет то обстоятельство, со стороны какой именно лицевой поверхности осуществляется дополнительный нагрев или охлаждение тонкостенной конструкции.

Ключевые слова: пологие оболочки, геометрическая нелинейность, армирование волокнами, связанная термовязкоупругопластичность, уточненная теория изгиба, неупругая динамика, остаточное состояние, явный метод шагов по времени.

Получение: 19 января 2024 г. / Исправление: 12 сентября 2024 г. /

Принятие: 21 октября 2024 г. / Публикация онлайн: 29 октября 2024 г.

Введение. Изделия из композиционных материалов (КМ) часто подвергаются интенсивному термосиловому нагружению [1–8], при котором материалы фаз композиции могут деформироваться пластически [1–3, 5–7, 9, 10]. Следовательно, актуальна проблема математического моделирования неупругого деформирования анизотропных и композитных тонкостенных элементов конструкций, которая на данный момент времени находится в стадии становления [5–7, 9–24]. Так, в работе [22] была разработана структурная модель неизо-термического вязкоупругопластического деформирования многонаправленно армированного материала и проведены соответствующие расчеты неупругой динамики гибких КМ-пластин, по толщине которых температурное поле аппроксимировалось традиционно полиномом второго порядка. Однако в [23, 24] на примерах изгибного динамического поведения армированных пластин и пологих оболочек было показано, что для более точного определения теплового отклика в таких тонкостенных гибких КМ-конструкциях температуру в поперечном направлении нужно аппроксимировать полиномами 6–7-го порядков.

Для моделирования волновых процессов в динамически деформируемых тонкостенных элементах КМ-конструкций и учета их ослабленного сопротивления поперечным сдвигам традиционно используют простейшие неклассические теории Тимошенко—Рейсснера [5, 7, 16, 25–27], Амбарцумяна [22, 24, 28] и Редди—Немировского [29, 30], а также теории более высоких порядков [5, 16, 23, 31, 32], как правило, базирующиеся на гипотезе ломаной линии [5, 16, 31, 32]. В работе [23] было показано, что термоупругопластическую динамику армированных пологих оболочек следует описывать более точными соотношениями изгиба, простейшим вариантом которых является теория Амбарцумяна. Однако в [23] не учитывались вязкие свойства компонентов композиции при их упругом деформировании, поэтому разработанная в [23] теория не позволяет определять в рамках уточненной теории изгиба остаточные прогибы и остаточные деформированные состояния фаз композиции после прекращения осцилляций таких КМ-конструкций.

Нелинейные задачи динамики тонкостенных элементов, как правило, интегрируют численно с использованием явных [5, 22–24] или неявных [6, 33] схем.

На основании вышеизложенного в данной работе моделируется неізотермическая вязкоупругопластическая динамика гибких, многонаправленно армированных пологих оболочек при использовании уточненной теории их изгиба [23] и аппроксимации температуры в поперечном направлении полиномами высоких порядков [23, 24]. Численное решение этой связанной нелинейной термомеханической задачи строится с применением явной пошаговой схемы [5, 22–24].

1. Постановка начально-краевой задачи и метод ее решения. Рассматривается гибкая пологая оболочка толщиной $2h$. Ортогональная система координат x_i введена так, что срединная поверхность конструкции — отсчетная ($|x_3| \leq h$); координатные линии x_1, x_2 — линии главной кривизны поверхности $x_3 = 0$ (рис. 1, на котором искривленность оболочки в силу ее малости не изображена). Панель усилена N семействами непрерывных волокон с плотностями армирования ω_k ($1 \leq k \leq N$). По толщине конструкции структура перекрестного армирования однородна и в общем случае может быть пространственной [4].

С каждым k -м семейством арматуры связана локальная ортогональная система координат $x_i^{(k)}$, в которой ось $x_1^{(k)}$ направлена вдоль траектории волокна, а ее ориентация в пространстве $Ox_1x_2x_3$ задается углами сферической системы координат θ_k, φ_k (рис. 2). Направляющие косинусы $l_{ij}^{(k)}$ между осями $x_i^{(k)}$ и x_j ($i, j = \overline{1, 3}, 1 \leq k \leq N$) вычисляются по формулам [23]:

$$\begin{aligned} l_{11}^{(k)} &= \sin \theta_k \cos \varphi_k, & l_{12}^{(k)} &= \sin \theta_k \sin \varphi_k, & l_{13}^{(k)} &= \cos \theta_k, \\ l_{21}^{(k)} &= -\sin \varphi_k, & l_{22}^{(k)} &= \cos \varphi_k, & l_{23}^{(k)} &= 0, \\ l_{31}^{(k)} &= -\cos \theta_k \cos \varphi_k, & l_{32}^{(k)} &= -\cos \theta_k \sin \varphi_k, & l_{33}^{(k)} &= \sin \theta_k, \quad 1 \leq k \leq N. \end{aligned} \quad (1)$$

Распределенными касательными напряжениями на лицевых поверхностях КМ-конструкции традиционно пренебрегаем [5–7, 16, 22–32]. В случае про-

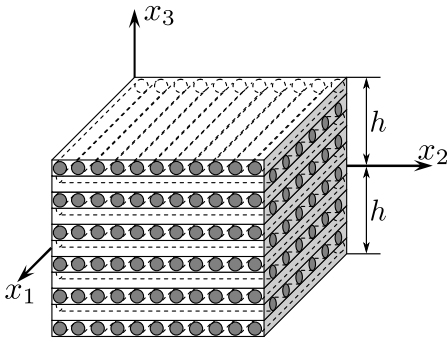


Рис. 1. Элемент пологой оболочки с 2D-структурой армирования [Figure 1. Element of a shallow shell with a 2D reinforcement structure]

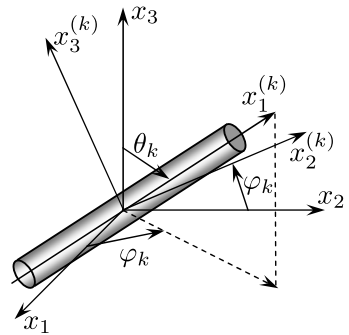


Рис. 2. Взаимная ориентация глобальной и локальной (связанной с волокном k -го семейства) систем координат [Figure 2. The mutual orientation of the global and local (associated with the k -th family of fibers) coordinate systems]

пространственной структуры армирования предполагаем: если арматура некоторого k -го семейства наклонна ($0 < \theta_k < \pi/2$; см. рис. 2 и равенства (1)), то обязательно имеется другое m -е семейство наклонных волокон, изготовленных из того же материала, параметры армирования которого таковы: $\theta_m = \pi - \theta_k$, $\varphi_m = \varphi_k$ и $\omega_m = \omega_k$ ($1 \leq k, m \leq N$, $m \neq k$). Структуры с таким пространственным армированием часто реализуются на практике [4]. Плоско-перекрестные структуры армирования (см. рис. 1) автоматически удовлетворяют этому требованию (в этом случае следует формально принять $\omega_m = \omega_k \equiv 0$).

При выполнении приведенных выше условий перемещения точек гибкой искривленной панели U_i и осредненные деформации ее композиции ε_{ij} в рамках уточненной теории изгиба аппроксимируются так (геометрическая нелинейность моделируется в приближении Кармана) [23]:

$$U_i(t, \mathbf{r}) = u_i(t, \mathbf{x}) - x_3 \partial_i w(t, \mathbf{x}) + 2 \sum_{m=0}^M \frac{x_3^{m+1}}{h^2} \left(\frac{h^2}{m+1} - \frac{x_3^2}{m+3} \right) \bar{\varepsilon}_{i3}^{(m)}(t, \mathbf{x}), \quad i = 1, 2, \quad (2)$$

$$U_3(t, \mathbf{r}) = w(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2), \quad \mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3);$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij}(t, \mathbf{r}) = & \frac{1}{2}(\partial_i u_j + \partial_j u_i) - x_3 \partial_i \partial_j w + \\ & + \sum_{m=0}^M \frac{x_3^{m+1}}{h^2} \left(\frac{h^2}{m+1} - \frac{x_3^2}{m+3} \right) (\partial_i \bar{\varepsilon}_{j3}^{(m)} + \partial_j \bar{\varepsilon}_{i3}^{(m)}) + \\ & + \frac{\delta_{ij} w}{R_i} + \frac{1}{2} \partial_i w \partial_j w, \quad i, j = 1, 2, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\varepsilon_{i3}(t, \mathbf{r}) = \frac{h^2 - x_3^2}{h^2} \sum_{m=0}^M x_3^m \bar{\varepsilon}_{i3}^{(m)}(t, \mathbf{x}), \quad i = 1, 2, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad |x_3| \leq h, \quad t \geq t_0,$$

где u_i — тангенциальные перемещения точек срединной поверхности ($x_3 = 0$) в направлениях x_i ; w — прогиб; R_i — главные радиусы кривизны отсчетной поверхности; t_0 — начальный момент времени t ; δ_{ij} — символ Кронекера; ∂_i — частная производная по переменной x_i ; Ω — область, занимаемая конструкцией в плане; M — целое число, задающее количество слагаемых в степенных разложениях по переменной x_3 . В случае $M = 0$ из равенств (2), (3) получаем кинематические соотношения теорий изгиба Амбарцумяна [28] и Редди — Немировского [29, 30]. В выражениях (2) и (3) определению подлежат нестационарные двумерные функции w , u_i и $\bar{\varepsilon}_{i3}^{(m)}$ ($i = 1, 2$, $0 \leq m \leq M$).

В настоящей работе изучается неупругая динамика искривленной КМ-панели как гибкой тонкостенной механической системы, поэтому нормальное напряжение $\sigma_{33}(t, \mathbf{r})$ с приемлемой для практических приложений точностью по толщине оболочки можно аппроксимировать формулой [23, 27]:

$$\begin{aligned} \sigma_{33}(t, \mathbf{r}) = & \frac{\sigma_{33}^{(+)}(t, \mathbf{x}) - \sigma_{33}^{(-)}(t, \mathbf{x})}{2h} x_3 + \\ & + \frac{\sigma_{33}^{(+)}(t, \mathbf{x}) + \sigma_{33}^{(-)}(t, \mathbf{x})}{2}, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad |x_3| \leq h, \quad t \geq t_0, \end{aligned} \quad (4)$$

где $\sigma_{33}^{(\pm)}(t, \mathbf{x}) \equiv \sigma_{33}(t, \mathbf{x}, \pm h)$ — известные из силовых граничных условий напряжения на нижней (−) и верхней (+) лицевых поверхностях оболочки.

Как уже отмечалось во введении, решение рассматриваемой задачи будем строить, используя явную численную схему [22–24]. Согласно этому искомые функции будем вычислять в дискретные моменты времени $t_{n+1} = t_n + \Delta$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), где $\Delta = \text{const} > 0$ — шаг по времени. Как и в [22], предполагаем, что при $t = t_{n-1}, t_n$ уже определены следующие функции:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^{(k)}(\mathbf{r}) &\equiv \sigma_{ij}^{(k)}(t_m, \mathbf{r}), & \dot{\sigma}_{ij}^{(k)}(\mathbf{r}) &\equiv \dot{\sigma}_{ij}^{(k)}(t_{n-1}, \mathbf{r}), \\ \Theta(\mathbf{x}) &\equiv \Theta(t_m, \mathbf{x}), & \dot{\Theta}(\mathbf{x}) &\equiv \dot{\Theta}(t_{n-1}, \mathbf{x}), \\ i, j &= \overline{1, 3}, m = n - 1, n, & 0 \leq k \leq N, \mathbf{x} \in \Omega, |\mathbf{x}_3| \leq h, \end{aligned} \quad (5)$$

где $\sigma_{ij}^{(k)}$ — напряжения в k -м компоненте композиции ($k = 0$ — связующее, $k \geq 1$ — арматура k -го семейства); Θ — температура КМ-конструкции; точка сверху — частная производная по времени t . Тогда в текущий момент времени t_n определяющие соотношения для k -го материала композиции, связывающие скорости его деформаций $\dot{\varepsilon}_{ij}^{(k)}$, скорости напряжений $\dot{\sigma}_{ij}^{(k)}$ и температуру Θ , при учете обозначений, аналогичных (5), можно записать в следующей матричной форме [22]:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}_k = \mathbf{B}_k \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_k + \mathbf{p}_k, \quad 0 \leq k \leq N, \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}_k &= (\sigma_1^{(k)} \sigma_2^{(k)} \sigma_3^{(k)} \sigma_4^{(k)} \sigma_5^{(k)} \sigma_6^{(k)})^\top \equiv (\sigma_{11}^{(k)} \sigma_{22}^{(k)} \sigma_{33}^{(k)} \sigma_{23}^{(k)} \sigma_{31}^{(k)} \sigma_{12}^{(k)})^\top, \\ \boldsymbol{\varepsilon}_k &= (\varepsilon_1^{(k)} \varepsilon_2^{(k)} \varepsilon_3^{(k)} \varepsilon_4^{(k)} \varepsilon_5^{(k)} \varepsilon_6^{(k)})^\top \equiv (\varepsilon_{11}^{(k)} \varepsilon_{22}^{(k)} \varepsilon_{33}^{(k)} 2\varepsilon_{23}^{(k)} 2\varepsilon_{31}^{(k)} 2\varepsilon_{12}^{(k)})^\top; \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_k &\equiv \bar{\mathbf{V}}_k^{-1} (\bar{\mathbf{Z}}_k - \bar{\bar{\mathbf{Z}}}_k), \\ \mathbf{p}_k &\equiv \bar{\mathbf{V}}_k^{-1} \left[\mathbf{V}_k^{n-1/2} \boldsymbol{\sigma}_k + \frac{2}{\Delta} (\bar{\Theta} - \bar{\Theta}^{n-1/2}) \boldsymbol{\beta}_k \right], \\ \bar{\mathbf{V}}_k &\equiv \mathbf{I} - \frac{\Delta}{2} \mathbf{V}_k; \end{aligned} \quad (8)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_k^{n-1/2} = \boldsymbol{\sigma}_k^{n-1} + \frac{\Delta}{2} \dot{\boldsymbol{\sigma}}_k^{n-1}, \quad \bar{\Theta}^{n-1/2} \equiv \bar{\Theta}^{n-1} + \frac{\Delta}{2} \dot{\bar{\Theta}}^{n-1}, \quad 0 \leq k \leq N; \quad (9)$$

$\mathbf{I}$ — единичная 6×6 -матрица; $\bar{\mathbf{V}}_k^{-1}$ — матрица, обратная $\bar{\mathbf{V}}_k$; $\bar{\mathbf{Z}}_k = (\bar{z}_{ij}^{(k)})$, $\bar{\bar{\mathbf{Z}}}_k = (\bar{\bar{z}}_{ij}^{(k)})$ и $\mathbf{V}_k = (v_{ij}^{(k)})$ — симметричные матрицы; $\boldsymbol{\beta}_k = (\beta_i^{(k)})$ ($i, j = \overline{1, 6}$) — вектор-столбец, ненулевые элементы которых определяются так:

$$\begin{aligned} \bar{z}_{ij}^{(k)} &= 2\delta_{ij} G_k + \bar{\lambda}_k, \quad \bar{z}_{ll}^{(k)} = G_k, \\ v_{ij}^{(k)} &= \frac{1}{3} \left[\frac{G_k}{\eta_k} \left(1 - \frac{\gamma_k}{1 + g_k} \right) - \frac{K_k}{\mu_k} \right] - \delta_{ij} \frac{G_k}{\eta_k} \left(1 - \frac{\gamma_k}{1 + g_k} \right), \\ v_{ll}^{(k)} &= -\frac{G_k}{\eta_k} \left(1 - \frac{\gamma_k}{1 + g_k} \right), \\ \beta_i^{(k)} &= \frac{\gamma_k \tau_\Theta^{(k)} s_i^{(k)}}{\tau_s^{(k)} (1 + g_k)} - 3\alpha_k K_k, \quad \beta_l^{(k)} = \frac{\gamma^{(k)} \tau_\Theta^{(k)} s_l^{(k)}}{\tau_s^{(k)} (1 + g_k)}, \quad i, j = \overline{1, 3}, l = \overline{4, 6}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bar{z}_{ij}^{(k)} &= \frac{\gamma_k G_k s_i^{(k)} s_j^{(k)}}{\tau_s^{(k)2} (1 + g_k)}, \quad i, j = \overline{1, 6}; \\
 G_k &= \frac{E_k}{2(1 + \nu_k)}, \quad K_k = \frac{E_k}{3(1 - 2\nu_k)}, \\
 \bar{\lambda}_k &= \frac{\nu_k E_k}{(1 + \nu_k)(1 - 2\nu_k)}, \quad g_k = \frac{\bar{G}_k}{G_k}, \\
 \gamma_k &= \begin{cases} 0 & \text{при } T_k < \tau_s^{(k)}(\chi_k, \Theta) \text{ или } T_k = \tau_s^{(k)}(\chi_k, \Theta), W_k \leq 0, \\ 1 & \text{при } T_k = \tau_s^{(k)}(\chi_k, \Theta), W_k > 0, \end{cases} \\
 W_k &\equiv \mathbf{s}_k^\top \dot{\mathbf{e}}_k - \frac{\tau_s^{(k)2}(\chi_k, \Theta)}{\eta_k} - \frac{\tau_s^{(k)}(\chi_k, \Theta) \tau_\Theta^{(k)}(\chi_k, \Theta)}{G_k} \dot{\Theta}, \quad \tau_\Theta^{(k)} \equiv \frac{\partial \tau_s^{(k)}}{\partial \Theta}, \\
 \bar{G}_k &\equiv \frac{\partial \tau_s^{(k)}}{\partial \chi_k}, \quad T_k^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 (s_i^{(k)})^2 + \sum_{i=4}^6 (s_i^{(k)})^2, \quad \chi_k = \int_{t_0}^t \sqrt{2 \sum_{i,j=1}^3 \dot{p}_{ij}^{(k)} \dot{p}_{ij}^{(k)}} dt, \\
 \dot{p}_{ij}^{(k)} &= \frac{s_{ij}^{(k)} W_k}{\tau_s^{(k)2} (1 + g_k)}, \quad s_{ij}^{(k)} = \sigma_{ij}^{(k)} - \frac{\delta_{ij}}{3} \sum_{m=1}^3 \sigma_{mm}^{(k)}, \quad i, j = \overline{1, 3}, \\
 \mathbf{s}_k &= (s_1^{(k)} s_2^{(k)} s_3^{(k)} s_4^{(k)} s_5^{(k)} s_6^{(k)})^\top \equiv (s_{11}^{(k)} s_{22}^{(k)} s_{33}^{(k)} s_{23}^{(k)} s_{31}^{(k)} s_{12}^{(k)})^\top;
 \end{aligned}
 \tag{10}$$

$E_k = E_k(\Theta)$, $\nu_k = \nu_k(\Theta)$ — модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала k -й фазы композиции; $\eta_k = \eta_k(\Theta)$, $\mu_k = \mu_k(\Theta)$ — коэффициенты линейной сдвиговой и объемной вязкости (предполагается: вязкоупругое поведение компонентов композиции описывается соотношениями модели Максвелла — Больцмана; см. (2) в [22]); $\alpha_k = \alpha_k(\Theta)$ — коэффициент линейного температурного расширения; $\tau_s^{(k)}(\chi_k, \Theta)$ — предел текучести при чистом сдвиге, который при активном пластическом деформировании равен интенсивности касательных напряжений T_k и зависит от параметра упрочнения χ_k и температуры Θ ; $\dot{p}_{ij}^{(k)}$ — скорости пластических деформаций; γ_k — параметр переключения, задающий при $\gamma_k = 0$ термовязкоупругое деформирование, нейтральное нагружение или разгрузку, а при $\gamma_k = 1$ — активное нагружение k -го материала композиции при его пластическом деформировании; индекс $\top$ — операция транспонирования. В соотношениях (10) по повторяющемуся индексу l суммирования нет; в выражении для W_k скорость температуры $\dot{\Theta}$ при $t = t_n$ следует заменить ее конечно-разностным аналогом, полученным на основе формулы трапеций [22]:

$$\dot{\Theta} \approx \frac{\dot{\Theta}}{\Delta} \left(\Theta - \Theta^{n-1/2} \right), \quad n = 1, 2, 3, \dots
 \tag{11}$$

Согласно формулам (9) и предположениям (5), в момент времени t_n в соотношениях (8) и (11) уже известны значения функций $\sigma_k^{n-1/2}$ и $\Theta^{n-1/2}$.

Как видно из выражений (10), элементы матриц $\bar{\mathbf{Z}}_k$, $\mathbf{V}_k$, $\bar{\mathbf{V}}_k$ и вектора β_k (а в случае термочувствительности материалов композиции и матрицы $\bar{\mathbf{Z}}_k$) зависят от решения задачи, поэтому определяющие соотношения (6) при учете (8) и (10) являются нелинейными. Линеаризуем равенства (6), применяя

итерационный процесс, который аналогичен методу переменных параметров упругости [34]. Используя линейаризованные соотношения (6) при учете (8)–(11) и повторяя рассуждения из [22], в рассматриваемый момент времени t_n на текущей итерации получим линейное определяющее уравнение, записанное в матричной форме и характеризующее неизотермическое вязкоупруго-пластическое поведение КМ:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} \equiv \mathbf{B} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \mathbf{p}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &\equiv \left(\omega_0 \mathbf{B}_0 + \sum_{k=1}^N \omega_k \mathbf{B}_k \mathbf{E}_k \right) \mathbf{H}^{-1}, \quad \mathbf{p} \equiv \mathbf{f} - \mathbf{B} \mathbf{g}, \quad \mathbf{f} \equiv \omega_0 \mathbf{p}_0 + \sum_{k=1}^N \omega_k (\mathbf{p}_k + \mathbf{B}_k \mathbf{r}_k), \\ \mathbf{H} &\equiv \omega_0 \mathbf{I} + \sum_{k=1}^N \omega_k \mathbf{E}_k, \quad \mathbf{g} \equiv \sum_{k=1}^N \omega_k \mathbf{r}_k, \quad \omega_0 \equiv 1 - \sum_{k=1}^N \omega_k, \quad \mathbf{r}_k \equiv \mathbf{D}_k^{-1} \boldsymbol{\varsigma}_k, \quad (13) \\ \mathbf{E}_k &\equiv \mathbf{D}_k^{-1} \mathbf{C}_k, \quad 1 \leq k \leq N; \end{aligned}$$

$\dot{\boldsymbol{\sigma}}, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ — шестикомпонентные векторы-столбцы скоростей усредненных напряжений $\dot{\sigma}_{ij}$ и деформаций $\dot{\varepsilon}_{ij}$ в композиции, по структуре аналогичные (7); $\mathbf{B}, \mathbf{E}_k$ и $\mathbf{C}_k$ — 6×6 -матрицы; $\mathbf{D}_k^{-1}$ и $\mathbf{H}^{-1}$ — матрицы, обратные 6×6 -матрицам $\mathbf{D}_k$ и $\mathbf{H}$; $\mathbf{p}, \mathbf{f}, \mathbf{g}, \mathbf{r}_k$ и $\boldsymbol{\varsigma}_k$ — шестикомпонентные векторы-столбцы; ω_0 — относительное объемное содержание связующего в репрезентативной ячейке КМ. Элементы вектора $\boldsymbol{\varsigma}_k = (\varsigma_i^{(k)})$ и матриц $\mathbf{C}_k = (c_{ij}^{(k)})$, $\mathbf{D}_k = (d_{ij}^{(k)})$ вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} c_{1j}^{(k)} &= d_{1j}^{(k)} = q_{1j}^{(k)}, \quad c_{ij}^{(k)} = \sum_{l=1}^6 g_{il}^{(k)} b_{lj}^{(0)}, \quad d_{ij}^{(k)} = \sum_{l=1}^6 g_{il}^{(k)} b_{lj}^{(k)}, \\ \varsigma_1^{(k)} &= 0, \quad \varsigma_i^{(k)} = \sum_{l=1}^6 g_{il}^{(k)} (p_l^{(0)} - p_l^{(k)}), \quad i = \overline{2, 6}, \quad j = \overline{1, 6}, \quad 1 \leq k \leq N, \end{aligned} \quad (14)$$

где

$$\begin{aligned} g_{11}^{(k)} &= q_{11}^{(k)} = l_{11}^{(k)} l_{11}^{(k)}, \quad g_{12}^{(k)} = q_{12}^{(k)} = l_{12}^{(k)} l_{12}^{(k)}, \quad \dots, \\ g_{16}^{(k)} &= 2q_{16}^{(k)} = 2l_{12}^{(k)} l_{11}^{(k)}, \quad \dots, \\ 2g_{61}^{(k)} &= q_{61}^{(k)} = 2l_{21}^{(k)} l_{11}^{(k)}, \quad \dots, \\ g_{66}^{(k)} &= q_{66}^{(k)} = l_{11}^{(k)} l_{22}^{(k)} + l_{12}^{(k)} l_{21}^{(k)}, \quad 1 \leq k \leq N; \end{aligned} \quad (15)$$

$b_{lj}^{(k)}$ и $p_l^{(k)}$ ($l, j = \overline{1, 6}$) — линейаризованные элементы матриц $\mathbf{B}_k$ и векторов $\mathbf{p}_k$ ($0 \leq k \leq N$) в равенствах (6); направляющие косинусы $l_{ij}^{(k)}$ ($i, j = \overline{1, 3}$) определены в (1). Не выписанные в явном виде в (15) элементы 6×6 -матриц $\mathbf{G}_k = (g_{ij}^{(k)})$, $\mathbf{Q}_k = (q_{ij}^{(k)})$ приведены в табл. (21.40), (21.44) в [26]. Эти матрицы соответственно определяют преобразования векторов $\dot{\boldsymbol{\sigma}}_k$ и $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_k$ (см. (6), (7)) при переходе от глобальной системы x_j к локальной $x_i^{(k)}$ (см. рис. 2). Попутно при выводе соотношений (12) и (13) получаются матричные зависимости

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_0 = \mathbf{H}^{-1} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \mathbf{H}^{-1} \mathbf{g}, \quad \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_k = \mathbf{E}_k \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_0 + \mathbf{r}_k, \quad 1 \leq k \leq N, \quad (16)$$

которые позволяют последовательно определить скорости деформаций связующего материала $\dot{\epsilon}_0$ и армирующих волокон k -го семейства $\dot{\epsilon}_k$ через скорости деформаций КМ $\dot{\epsilon}$. Используя же (6) и (16), можно через $\dot{\epsilon}$ выразить и скорости напряжений в компонентах композиции $\dot{\sigma}_k$ ($0 \leq k \leq N$).

Согласно структуре вектор-столбцов $\dot{\sigma}$ и $\dot{\epsilon}$, из третьего уравнения линеаризованной системы (12) можно определить скорость линейной поперечной деформации:

$$\dot{\epsilon}_{33} = b_{33}^{-1}(\dot{\sigma}_{33} - p_3 - b_{31}\dot{\epsilon}_{11} - b_{32}\dot{\epsilon}_{22} - 2b_{34}\dot{\epsilon}_{23} - 2b_{35}\dot{\epsilon}_{31} - 2b_{36}\dot{\epsilon}_{12}). \quad (17)$$

Здесь b_{3i} ($i = \overline{1,6}$) и p_3 — элементы матрицы $\mathbf{B}$ и вектора $\mathbf{p}$ в определяющем соотношении (12). Значение скорости $\dot{\sigma}_{33}$ в (17) определяется за счет дифференцирования по времени аппроксимации (4), а скорости деформаций $\dot{\epsilon}_{ij}$ в правой части (17) — путем дифференцирования по t кинематических соотношений (3), т. е. в конечном итоге выражаются через искомые функции w , $\dot{w}$, $\dot{u}_i$ и $\dot{\epsilon}_{i3}^{(m)}$, $i = 1, 2$, $0 \leq m \leq M$. (В соотношениях (10), (13), (14), (16) и (17) опущен верхний индекс n , означающий текущий дискретный момент времени t_n .)

Как и в [22–24], температуру в поперечном направлении оболочки аппроксимируем полиномом порядка L :

$$\Theta(t, \mathbf{r}) - \Theta^0 = \sum_{l=0}^L \Theta_l(t, \mathbf{x}) x_3^l, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad |x_3| \leq h, \quad t \geq t_0, \quad (18)$$

где Θ_l ($0 \leq l \leq L$) — неизвестные двумерные нестационарные функции; $\Theta^0 = \text{const}$ — температура естественного состояния КМ-конструкции.

К указанным выше соотношениям необходимо присоединить приведенные уравнения динамического равновесия пологой оболочки, соответствующие уточненной теории изгиба, и уравнения теплового баланса, соответствующие разложению (18). (Их конечно-разностные аналоги по времени выписаны ниже.) А также нужно использовать начальные и краевые механические и тепловые граничные условия, соответствующие этим двумерным нестационарным уравнениям [23].

Как уже ранее отмечалось (см. (5)), численное решение сформулированной нелинейной начально-краевой задачи будем строить, используя явную схему по времени. Согласно этому предполагаем, что при $t = t_m$ кроме значений функций (5) уже определены или заданы значения следующих функций [22–24]:

$$\begin{aligned} \overset{m}{w}(\mathbf{x}) &\equiv w(t_m, \mathbf{x}), \quad \overset{m}{u}_l^{(p)}(\mathbf{x}) \equiv u_l^{(p)}(t_m, \mathbf{x}), \quad \overset{m}{\sigma}_{ij}(\mathbf{r}) \equiv \sigma_{ij}(t_m, \mathbf{r}), \\ \overset{m}{\sigma}_{33}^{(\pm)}(\mathbf{x}) &\equiv \sigma_{33}^{(\pm)}(t_m, \mathbf{x}), \quad \overset{n}{U}(\mathbf{r})(x) \equiv U(\mathbf{r})(t_n, \mathbf{x}), \quad \overset{n}{q}_i(\mathbf{r}) \equiv q_i(t_n, \mathbf{r}), \\ \overset{m}{\Theta}_s(\mathbf{x}) &\equiv \Theta_s(t_m, \mathbf{x}), \quad \overset{n-1}{\dot{\Theta}}_s(\mathbf{x}) \equiv \dot{\Theta}_s(t_{n-1}, \mathbf{x}), \quad \overset{n}{q}_\infty^{(\pm)}(\mathbf{x}) \equiv q_\infty^{(\pm)}(t_n, \mathbf{x}), \\ \overset{m}{\varepsilon}_{ij}^{(k)}(\mathbf{r}) &\equiv \varepsilon_{ij}^{(k)}(t_m, \mathbf{r}), \quad \overset{m}{e}_{ij}^{(k)}(\mathbf{r}) \equiv e_{ij}^{(k)}(t_m, \mathbf{r}), \quad \overset{m}{\chi}_k(\mathbf{r}) \equiv \chi_k(t_m, \mathbf{r}), \\ l &= 1, 2, \quad i, j = \overline{1, 3}, \quad m = n - 1, n, \quad 0 \leq p \leq M + 1, \quad 0 \leq r \leq L - 2, \\ 0 &\leq s \leq L, \quad 0 \leq k \leq N, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad |x_3| \leq h, \end{aligned} \quad (19)$$

где

$$\begin{aligned} u_l^{(p)}(t, \mathbf{x}) &\equiv \int_{-h}^h U_l(t, \mathbf{r}) x_3^p dx_3, \quad U^{(r)}(t, \mathbf{x}) \equiv \int_{-h}^h U(t, \mathbf{r}) x_3^r dx_3, \\ \sigma_{ij}(t, \mathbf{r}) &= \sum_{k=0}^N \omega_k(\mathbf{x}) \sigma_{ij}^{(k)}(t, \mathbf{r}), \quad \varepsilon_{ij}(t, \mathbf{r}) = \sum_{k=0}^N \omega_k(\mathbf{x}) \varepsilon_{ij}^{(k)}(t, \mathbf{r}), \\ i, j &= \overline{1, 3}, \quad l = 1, 2, \quad 0 \leq p \leq M+1, \quad 0 \leq r \leq L-2; \end{aligned} \quad (20)$$

U — удельная внутренняя энергия КМ; $e_{ij}^{(k)}$ — упругие деформации k -го материала композиции; q_i — компоненты усредненного вектора теплового потока в КМ, связанные с $\text{grad } \Theta$ законом Фурье для армированной среды [22, 24]; $q_{\infty}^{(\pm)}$ — известные тепловые потоки через верхнюю (+) и нижнюю (−) лицевые поверхности конструкции. В выражениях (2), (3) неизвестные функции u_i , $\bar{\varepsilon}_{i3}^{(m)}$ ($i = 1, 2, 0 \leq m \leq M$) связаны с $\text{grad } w$ и новыми кинематическими переменными $u_l^{(p)}$ (см. (20)) известными матричными соотношениями [23]. Из предположений (19) при учете (18) следуют два последних предположения (5).

Для интегрирования двумерных уравнений движения пологой КМ-оболочки используем численную схему типа «крест», тогда их конечно-разностные аналоги в рамках уточненной теории изгиба будут иметь вид [23]:

$$\begin{aligned} \frac{2h\rho}{\Delta^2} ({}^{n+1}w - 2{}^nw + {}^{n-1}w) &= \\ &= \sum_{j=1}^2 \partial_j \left(M_{j3}^{(0)} + \sum_{i=1}^2 M_{ji}^{(0)} \partial_i {}^nw \right) - \sum_{i=1}^2 R_i^{-1} M_{ii}^{(0)} + \sigma_{33}^{(+)} - \sigma_{33}^{(-)}, \\ \frac{\rho}{\Delta^2} ({}^{n+1}u_i^{(l)} - 2{}^nu_i^{(l)} + {}^{n-1}u_i^{(l)}) &= \sum_{j=1}^2 \partial_j (M_{ij}^{(l)} - M_{j3}^{(l)} \partial_i {}^nw) - \\ &- h^l [\sigma_{33}^{(+)} - (-1)^l \sigma_{33}^{(-)}] \partial_i {}^nw - l M_{i3}^{(l-1)} + l M_{33}^{(l-1)} \partial_i {}^nw + R_i^{-1} M_{i3}^{(l)}, \\ \mathbf{x} \in \Omega, \quad i &= 1, 2, \quad 0 \leq l \leq M+1, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \end{aligned} \quad (21)$$

где

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{x}) &\equiv \sum_{k=0}^N \rho_k \omega_k(\mathbf{x}), \quad M_{ij}^{(l)}(t, \mathbf{x}) \equiv \int_{-h}^h \sigma_{ij}(t, \mathbf{r}) x_3^l dx_3, \quad i, j = \overline{1, 3}, \\ l M_{33}^{(l-1)}(t, \mathbf{x}) &\equiv l \int_{-h}^h \sigma_{33}(t, \mathbf{r}) x_3^{l-1} dx_3 = \\ &= \frac{h^l}{2} \left[(\sigma_{33}^{(+)} + \sigma_{33}^{(-)}) (1 - (-1)^l) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{l}{l+1} (\sigma_{33}^{(+)} - \sigma_{33}^{(-)}) (1 + (-1)^l) \right], \quad 0 \leq l \leq M+1; \end{aligned} \quad (22)$$

ρ_k — объемная плотность материала k -го компонента композиции. По формулам (21) при учете выражений (22) и предположений (19) можно определить значения неизвестных функции ${}^{n+1}w$ и $u_i^{(l)}$ в следующий момент времени t_{n+1} .

Нестационарные двумерные уравнения теплопроводности пологой КМ-оболочки также интегрируются по явной схеме с шагом вперед. Дискретные по времени аналоги этих уравнений имеют вид [23, 24]:

$$\frac{\rho}{\Delta}(U^{(m)} - U^{(m)}) = -\partial_1 Q_1^{(m)} - \partial_2 Q_2^{(m)} - \bar{Q}_3^{(m)} + W^{(m)}, \quad (23)$$

$$\mathbf{x} \in \Omega, \quad 0 \leq m \leq L-2, \quad n = 0, 1, 2, \dots;$$

$$-\sum_{l=0}^L (-1)^l h^{l-1} (l\lambda_{33}^{(-)} + h\alpha^{(-)}) \Theta_l(t, \mathbf{x}) = \alpha^{(-)} (\Theta_\infty^{(-)} - \Theta^0) + q_\infty^{(-)}(t, \mathbf{x}),$$

$$\sum_{l=0}^L h^{l-1} (l\lambda_{33}^{(+)} + h\alpha^{(+)}) \Theta_l(t, \mathbf{x}) = \alpha^{(+)} (\Theta_\infty^{(+)} - \Theta^0) - q_\infty^{(+)}(t, \mathbf{x}), \quad (24)$$

$$\mathbf{x} \in \Omega, \quad t \geq t_0;$$

$$C_0 \sum_{i=0}^L H(i+m) \Theta_i + \frac{C_1}{2} \sum_{i=0}^L \sum_{j=0}^L H(i+j+m) \Theta_i \Theta_j +$$

$$+ \frac{C_2}{3} \sum_{i=0}^L \sum_{j=0}^L \sum_{l=0}^L H(i+j+l+m) \Theta_i \Theta_j \Theta_l = U^{(m)}(t, \mathbf{x}), \quad (25)$$

$$\mathbf{x} \in \Omega, \quad t \geq t_0, \quad 0 \leq m \leq L-2.$$

Здесь

$$H(s) \equiv \frac{h^{s+1}}{s+1} [1 - (-1)^{s+1}], \quad Q_i^{(m)}(t, \mathbf{x}) \equiv \int_{-h}^h q_i(t, \mathbf{r}) x_3^m dx_3, \quad i = \overline{1, 3},$$

$$\bar{Q}_3^{(m)}(t, \mathbf{x}) \equiv \int_{-h}^h \partial_3 q_3(t, \mathbf{r}) x_3^m dx_3 = h^m [q_3^{(+)} - (-1)^m q_3^{(-)}] - m Q_3^{(m-1)}(t, \mathbf{x}), \quad (26)$$

$$W^{(m)}(t, \mathbf{x}) \equiv \int_{-h}^h \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} x_3^m dx_3, \quad C_l(\mathbf{x}) \equiv \frac{1}{\rho} \sum_{k=0}^K c_l^{(k)} \rho_k \omega_k(\mathbf{x}), \quad l = 0, 1, 2,$$

$$\lambda_{33}^{(\pm)} \equiv \lambda_{33}|_{\Theta=\Theta(t, \mathbf{x}, \pm h)}, \quad q_3^{(\pm)} \equiv q_3(t, \mathbf{x}, \pm h) = q_\infty^{(\pm)}(t, \mathbf{x});$$

$\Theta_\infty^{(\pm)}$ — температура окружающей среды со стороны верхней (+) и нижней (−) лицевой поверхности конструкции; $\alpha^{(\pm)}$ — коэффициент теплоотдачи на той же поверхности; λ_{33} — коэффициент теплопроводности КМ в направлении x_3 , рассчитанный по формулам (51) из [22]. Предполагается, что в случае учета термочувствительности k -го компонента композиции его удельную теплоемкость c_k можно аппроксимировать следующей зависимостью от температуры [22–24]:

$$c_k(\Theta - \Theta^0) = c_0^{(k)} + c_1^{(k)} \cdot (\Theta - \Theta^0) + c_2^{(k)} \cdot (\Theta - \Theta^0)^2, \quad 0 \leq k \leq N, \quad (27)$$

где $c_l^{(k)}$ — известные характеристики материала. Коэффициенты разложения (27) использованы для вычисления величин C_l ($l = 0, 1, 2$) в равенстве (25) (см. выражения (26)).

Напомним, что равенства (23) — двумерные уравнения теплового баланса, соотношения (24) — граничные условия общего вида на лицевых поверхностях КМ-панели, равенства (25) выражают двумерные функции $U^{(m)}$ (см.

(20)) через коэффициенты аппроксимации температуры (18) при учете разложения (27).

По формулам (23) при учете (26) и предположений (19) по явной схеме можно рассчитать значения функций $U^{(m)}$ в момент времени t_{n+1} . После этого при $t = t_{n+1}$ из замкнутой системы нелинейных уравнений (24) и (25) определяются коэффициенты Θ_l^{n+1} ($0 \leq l \leq L$) в полиномиальном представлении температуры (18). На каждом шаге по времени сначала интегрируется теплофизическая составляющая рассматриваемой задачи (см. (23)–(25) при учете (26) и (27)), а затем при уже известной температуре Θ^{n+1} — механическая составляющая задачи (см. (21) при учете (3), (12)–(17) и (22)). В остальном эта численная схема реализуется так же, как описано в [22–24].

2. Анализ результатов расчетов. Рассмотрим неизотермическое вязкоупругопластическое изгибное динамическое поведение пологой цилиндрической КМ-оболочки толщиной $2h = 2$ см, которая в плане имеет прямоугольную удлиненную форму (Ω : $|x_1| \leq a$, $|x_2| \leq b$, $a = 3b$; $1/R_1 \equiv 0$, $R_2 \equiv R = \text{const}$; $b = 50$ см). Стрела подъема срединной поверхности f над продольными кромками ($x_2 = \pm b$) равна 10 см. Радиус кривизны R при этом выражается так [23]: $R = (b^2 + f^2)/(2f)$. Конструкция жестко закреплена по всем кромкам: $u_i^{(m)} = 0$, $w = 0$, $\mathbf{x} \in \Gamma$ и $t \geq t_0$ (см. (20) и (21)), где Γ — контур, ограничивающий область Ω . До момента времени $t = t_0 = 0$ искривленная панель покоится ($u_i^{(m)} = 0$, $w = 0$, $\mathbf{x} \in \Omega$, $t \leq t_0$, $i = 1, 2$, $0 \leq m \leq M + 1$) либо при температуре естественного состояния $\Theta = \Theta^0 = 20^\circ\text{C}$ ($\mathbf{x} \in \Omega$, $|x_3| \leq h$ и $t \leq t_0$), либо предварительно нагрета со стационарным распределением температуры (подробнее см. ниже).

При $t = t_0 = 0$ пологая КМ-оболочка начинает испытывать механическое нагружение со стороны верхней или нижней лицевой поверхности, которое условно соответствует давлению в воздушной взрывной волне [33]:

$$p(t) = \begin{cases} p_{\max} t / t_{\max}, & 0 \leq t \leq t_{\max}, \\ p_{\max} \exp[-\beta(t - t_{\max})], & t > t_{\max}, \end{cases} \quad (28)$$

$$\sigma_{33}^{(-)}(t) = \begin{cases} -p(t), & p_{\max} > 0, \\ 0, & p_{\max} < 0, \end{cases} \quad \sigma_{33}^{(+)}(t) = \begin{cases} 0, & p_{\max} > 0, \\ p(t), & p_{\max} < 0. \end{cases}$$

Здесь

$$\beta = -\ln(0.01)/(t_{\min} - t_{\max}) > 0, \quad t_{\min} \gg t_{\max}; \quad (29)$$

$t_{\max}$ — время, при котором $|p(t)|$ достигает максимума $|p_{\max}|$; $t_{\min}$ — время, при превышении которого уже можно не учитывать $|p(t)|$ по сравнению с $|p_{\max}|$ (выражение (29) получено при условии $p(t_{\min}) = 0.01p_{\max}$). Согласно равенствам (28), при $p_{\max} > 0$ КМ-конструкция испытывает нагружение со стороны нижней лицевой поверхности, которая вогнута, а при $p_{\max} < 0$ — со стороны верхней поверхности. Исходя из экспериментальных данных [33] примем $t_{\max} = 0.1$ мс, $t_{\min} = 2$ мс, $|p_{\max}| = 6$ МПа.

Конструкция изготовлена из эпоксисвязующего [2] и усилена стекловолоконками [3]. Диаграмма мгновенного упругопластического активного дефор-

мирования k -го компонента композиции при постоянной температуре Θ аппроксимируется билинейной зависимостью:

$$\sigma = \begin{cases} E_k \varepsilon, & |\varepsilon| \leq \varepsilon_s^{(k)} = \sigma_s^{(k)} / E_k, \\ \text{sign}(\varepsilon) \sigma_s^{(k)} + E_s^{(k)} (\varepsilon - \text{sign}(\varepsilon) \varepsilon_s^{(k)}), & |\varepsilon| > \varepsilon_s^{(k)}, \quad 0 \leq k \leq N, \end{cases}$$

где σ и ε — напряжение растяжения–сжатия и соответствующая деформация; $E_s^{(k)} = E_s^{(k)}(\Theta)$ и $\sigma_s^{(k)} = \sigma_s^{(k)}(\Theta)$ — модуль линейного упрочнения и предел текучести. Физико-механические характеристики материалов композиций представлены в табл. 1, где λ_k — коэффициент теплопроводности k -го компонента. (Объемная вязкость фаз композиции не учитывается: $\mu_k \rightarrow \infty$, $0 \leq k \leq N$; см. (10).) В расчетах использовались линейные зависимости этих характеристик от температуры Θ , аппроксимированные по данным, приведенным в табл. 1.

Таблица 1

Физико-механические характеристики компонентов композиции [2, 3]

[Physical and mechanical characteristics of the composition components [2, 3]]

Material Characteristics	Epoxy Binder ($k = 0$)		Glass Fibers ($k = 1, 2$)	
	$\Theta = 20^\circ\text{C}$	$\Theta = 100^\circ\text{C}$	$\Theta = 20^\circ\text{C}$	$\Theta = 100^\circ\text{C}$
$\rho_k, \text{kg/m}^3$	1210.0	1208.0	2520.0	2519.6
E_k, GPa	2.8	2.6	86.8	86.5
ν_k	0.330	0.333	0.250	0.254
$\eta_k, \text{MPa} \cdot \text{s}$	340	300	1250	1200
$\sigma_s^{(k)}, \text{MPa}$	20	15	4500	4400
$E_s^{(k)}, \text{GPa}$	1.114	0.763	6.230	6.079
$\lambda_k, \text{W/m} \cdot \text{K}$	0.243	0.236	0.89	0.86
$\alpha_k \cdot 10^6, \text{K}^{-1}$	68.1	73.2	2.5	2.6
$c_k, \text{kJ/kg} \cdot \text{K}$	1.54	1.71	0.80	0.84

Панель армирована по ортогональным направлениям x_1, x_2 двумя ($N = 2$) семействами стеклянных волокон (см. рис. 1) с плотностями армирования $\omega_1 = 0.1$ и $\omega_2 = 0.3$ соответственно. В этом случае углы армирования (см. рис. 2) имеют следующие значения: $\theta_1 = \theta_2 = \pi/2$, $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = \pi/2$.

На кромках КМ-панели поддерживается температура Θ^0 . Через лицевые поверхности теплообмен с окружающей средой осуществляется в условиях естественной конвекции ($q_\infty^{(\pm)} \equiv 0$ и $\alpha^{(\pm)} = 30 \text{ Вт/м} \cdot \text{K}$ [35]) при температуре воздуха $\Theta_\infty^{(\pm)} = \Theta^0$ (см. (24)). Кроме того, дополнительно оболочка может быть предварительно нагрета внешним стационарным тепловым потоком через нижнюю ($x_3 = -h$: $q_\infty^{(-)} = 3 \text{ кВт/м}^2$, $q_\infty^{(+)} \equiv 0$) или верхнюю ($x_3 = h$: $q_\infty^{(+)} = -3 \text{ кВт/м}^2$, $q_\infty^{(-)} \equiv 0$) лицевую поверхность. В этих случаях предполагается, что при $t < t_0$ конструкция квазистатически деформируется под действием только теплового нагружения и к моменту времени $t = t_0 = 0$ достигает стационарного состояния. Предварительное термомеханическое состояние при этом можно определить, используя, например, метод установления. Так как рассматриваемая конструкция является относительно тонкой ($h/b = 1/50$) и ее искривленность мала, при таком предварительном

нагреве к моменту времени $t = t_0 = 0$ за пределами пограничных слоев, которыми здесь пренебрегаем, стационарная температура по толщине панели изменяется практически по линейному закону. При этом наибольшее значение температуры $\Theta_{\max}^0 \approx 93^\circ\text{C}$ достигается на той лицевой поверхности, через которую подается тепловой поток, а наименьшее значение $\Theta_{\min}^0 \approx 47^\circ\text{C}$ — в точках противоположной лицевой поверхности. Таким образом, при наличии дополнительного теплового потока через лицевые поверхности пологой КМ-оболочки предварительно наведенное температурное поле существенно неоднородно по ее толщине.

Дискретизация задачи по координатам x_1 и x_2 проводилась с использованием равномерной сетки с шагами $\Delta x_1 = \Delta x_2 = b/50 = 1$ см, шаг же по времени $\Delta = 1$ мкс. При этом необходимые условия устойчивости используемой численной схемы (условия Куранта) выполняются с запасом (см. (82) в [22]).

На основании результатов работ [23, 24] порядок полинома в аппроксимации температуры (18) принят равным $L = 7$ (при $L \geq 8$ линеаризованная система (24) и (25) плохо обусловлена, поэтому решение задачи расходится). В настоящем исследовании изучается влияние применения уточненной теории изгиба (см. (2), (3) и (21) при $M \neq 0$ [23]) на результаты расчета остаточного термомеханического состояния гибкой пологой КМ-оболочки после окончания ее осцилляций, вызванных приложением кратковременной, но интенсивной динамической нагрузки. Поэтому на рис. 3 представлены зависимости от времени наибольших значений температуры $\Theta_m(t; M) = \max_r \Theta(t, \mathbf{r}; M)$ ($|x_1| \leq a$, $|x_2| \leq b$ и $|x_3| \leq h$) в рассматриваемой конструкции при отсутствии (рис. 3, а и 3, b: $q_\infty^{(\pm)} \equiv 0$) и наличии дополнительного теплового потока через верхнюю лицевую поверхность (рис. 3, с: $q_\infty^{(+)} = -3$ кВт/м², $q_\infty^{(-)} \equiv 0$). Кривые 1 и 2 получены соответственно при $M = 7$ (уточненная теория изгиба) и при $M = 0$ (теория Амбарцумяна). Выбор значения $M = 7$ в соотношениях (2), (3) и (21) в рамках использования уточненной теории изгиба обоснован в [23]. Зависимости $\Theta_m(t; M)$ на рис. 3, а соответствуют случаю, когда искривленная панель нагружается снизу ($p_{\max} = 6$ МПа; см. (28), (29)) — со стороны вогнутой лицевой поверхности, а на рис. 3, b и 3, с — случаям нагружения сверху ($p_{\max} = -6$ МПа). Из поведения кривых на рис. 3 видно, что осцилляции максимальных значений температуры Θ_m к моменту времени $t = 100$ мс существенно уменьшаются, а при $t \approx 200$ мс их можно считать полностью затухшими (см. рис. 3 в [22]). Кривые 1 и 2 на рис. 3 заметно различаются, особенно при нагружении КМ-панели давлением (28) сверху (см. рис. 3, b и 3, с), т. е. использование уточненной теории изгиба (кривые 1) действительно приводит к уточнению температурного отклика в пологой армированной оболочке. Кривые на рис. 3, а в основном расположены ниже аналогичных кривых на рис. 3, b. Следовательно, температурный отклик в рассматриваемой конструкции является более интенсивным при ее механическом нагружении со стороны выпуклой лицевой поверхности. В частности, при $p_{\max} = -6$ МПа дополнительный нагрев искривленной панели может превышать 12°C (см. кривые на рис. 3, b и 3, с при $t \approx 9.8$ мс), а при $p_{\max} = 6$ МПа не превышает 7°C (см. кривые на рис. 3, а при $t \approx 12.4$ мс).

Несмотря на то, что температурный отклик в исследуемой стеклопластиковой оболочке при рассматриваемом ее динамическом нагружении невелик

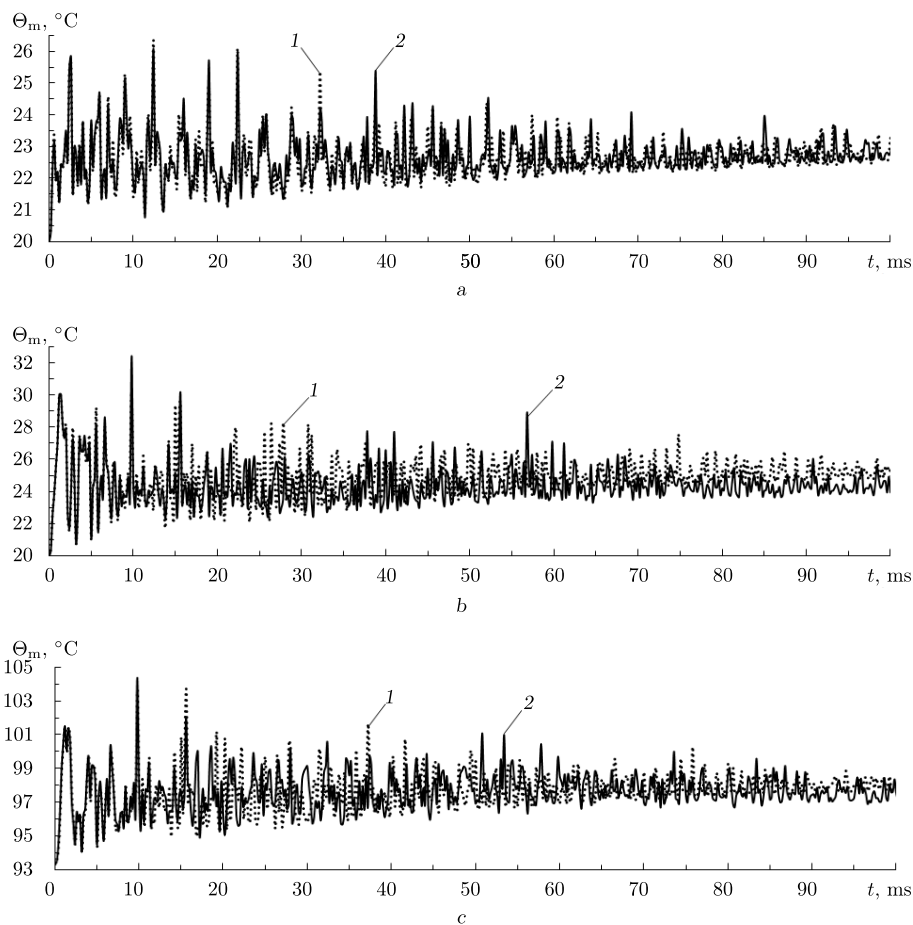


Рис. 3. Зависимость от времени наибольших значений температуры в полой оболочке из стеклопластика: а — случай $q_\infty^{(\pm)} \equiv 0$ и $p_{\max} > 0$; б — случай $q_\infty^{(\pm)} \equiv 0$ и $p_{\max} < 0$; в — случай $q_\infty^{(+)} = -3 \text{ кВт/м}^2$, $q_\infty^{(-)} \equiv 0$ и $p_{\max} < 0$

[Figure 3. Time dependence of the highest temperature values in a shallow fiberglass shell: а — case $q_\infty^{(\pm)} \equiv 0$ and $p_{\max} > 0$; б — case $q_\infty^{(\pm)} \equiv 0$ and $p_{\max} < 0$; в — case $q_\infty^{(+)} = -3 \text{ kW/m}^2$, $q_\infty^{(-)} \equiv 0$ and $p_{\max} < 0$]

(дополнительный нагрев в отдельных точках не превосходит $7 \div 12 ^\circ\text{C}$), он все же может оказывать заметное влияние на остаточный прогиб такой КМ-панели. Так, на рис. 4 представлены зависимости от переменной x_2 прогиба w в центральном сечении удлиненной конструкции ($x_1 = 0$), рассчитанные при отсутствии (рис. 4, а) и наличии дополнительного теплового потока через одну из лицевых поверхностей: верхнюю (рис. 4, б) или нижнюю (рис. 4, в). Кривые на рис. 4 получены при $t = 500 \text{ мс}$, когда осцилляции полой КМ-оболочки практически прекратились.

Кривые с номерами 1 (со штрихами и без них) на рис. 4 соответствуют случаям механического нагружения панели (28) со стороны вогнутой лицевой поверхности, а кривые с номерами 2 — со стороны выпуклой поверхности. Кривые с номерами без штрихов рассчитаны по уточненной теории изгиба, а кривые, номера которых помечены одним штрихом, — по теории Амбарцумяна. Кривые 1'' и 2'' на рис. 4, а рассчитаны при тех же условиях, что

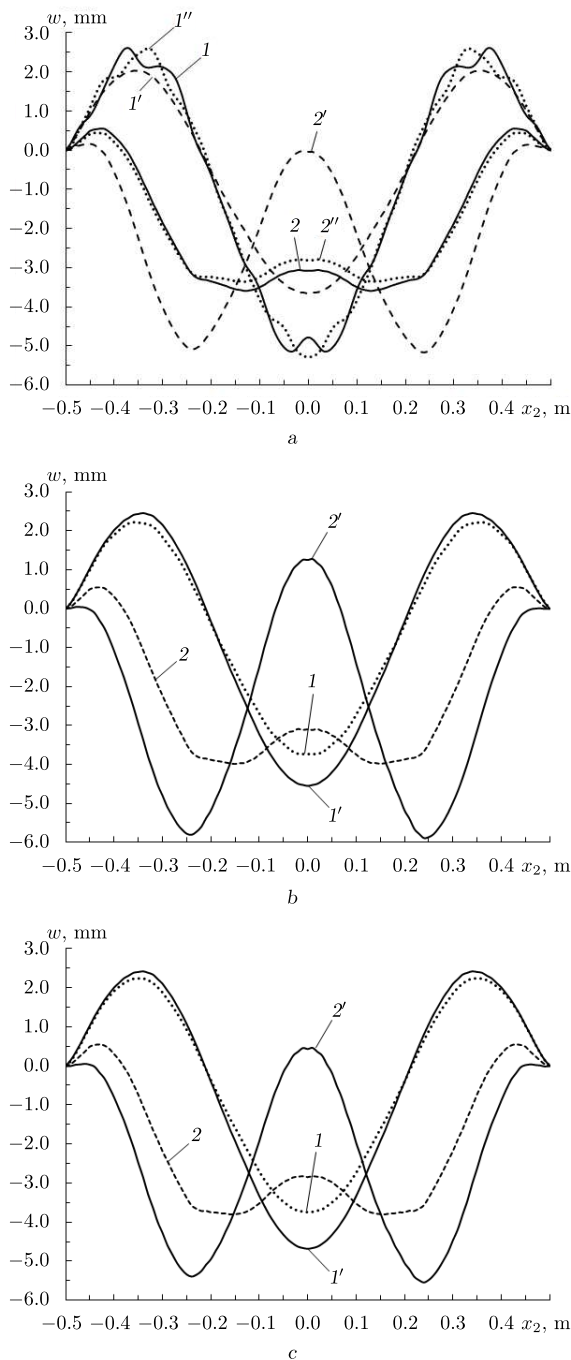


Рис. 4. Зависимости остаточных прогибов от координаты x_2 в центральном сечении $x_1 = 0$ стеклопластиковой панели: а — случай $q_{\infty}^{(\pm)} \equiv 0$; б — случай $q_{\infty}^{(+)} = -3 \text{ кВт/м}^2$ и $q_{\infty}^{(-)} \equiv 0$; в — случай $q_{\infty}^{(-)} = 3 \text{ кВт/м}^2$, $q_{\infty}^{(+)} \equiv 0$

[Figure 4. Dependences of residual deflections on coordinate x_2 in the central section $x_1 = 0$ of a fiberglass panel: а — case $q_{\infty}^{(\pm)} \equiv 0$; б — $q_{\infty}^{(+)} = -3 \text{ кВт/м}^2$ and $q_{\infty}^{(-)} \equiv 0$; в — case $q_{\infty}^{(-)} = 3 \text{ кВт/м}^2$ and $q_{\infty}^{(+)} \equiv 0$]

и кривые 1 и 2, но без учета температурного отклика в армированной панели (вязкоупругопластическое деформирование).

Кривые 1 и 2 на рис. 4 существенно отличаются от кривых 1' и 2' соответственно. Следовательно, использование простейшей традиционной неклассической теории изгиба Амбарцумяна (кривые 1' и 2') приводит к существенному искажению расчетного остаточного прогиба рассматриваемой КМ-оболочки по сравнению с расчетом по уточненной теории изгиба (кривые 1 и 2). Сравнение кривых 2 и 2' на рис. 4 свидетельствует о том, что это искажение носит не только количественный, но и качественный характер. Этот вывод относится и к кривым 1, 1' на рис. 4, а. Кривые на рис. 4, b и 4, c существенно отличаются от кривых с такими же номерами на рис. 4, а. А значит, дополнительное тепловое воздействие немеханического происхождения значительно влияет на величину остаточного прогиба рассматриваемой искривленной панели. Кроме того, сравнение кривых 2 на рис. 4, b и 4, c показывает, что при механическом нагружении полой оболочки сверху на ее остаточный прогиб заметное влияние оказывает и выбор лицевой поверхности, через которую к КМ-конструкции подводится дополнительный тепловой поток. Так, максимальные по модулю ординаты точек на кривой 2 рис. 4, b на 5.9 % больше аналогичных величин на кривой 2 рис. 4, c. Сравнение же максимальных по модулю ординат точек на кривых 1 на рис. 4, b и 4, c показывает, что они различаются всего на 0.1 %. Следовательно, при нагружении искривленной панели избыточным давлением снизу выбор лицевой поверхности, через которую подводится дополнительный тепловой поток, в рассматриваемой задаче практически не оказывает влияния на форму и величину ее остаточного прогиба.

Сопоставление кривых 1 и 1'' на рис. 4, а демонстрирует, что неучет теплового отклика в КМ-конструкции (кривая 1'') может привести к качественно неверному представлению о форме остаточного прогиба полой стеклопластиковой оболочки. Так, кривая 1 на рис. 4, а в центральной точке ($x_2 = 0$) выпукла вверх, а кривая 1'' — вниз, хотя максимальные по модулю прогибы при этом различаются незначительно (всего на 2.7 %). Сравнение же кривых 2 и 2'' на рис. 4, а показывает, что при механическом нагружении искривленной панели сверху неучет температурного отклика в ней (кривая 2'') приводит к качественно верному представлению о форме ее остаточного прогиба, однако дает значительную ошибку при оценке максимального прогиба. Так, наибольшие по модулю значения ординат точек на кривых 2 и 2'' рис. 4, а различаются уже на 7.2 %.

Использование теории изгиба Амбарцумяна может приводить не только к существенному искажению расчетного остаточного прогиба полой КМ-оболочки, но и к значительному искажению представления о деформированном состоянии компонентов ее композиции. С целью демонстрации этого факта были рассмотрены зависимости от времени максимальных значений интенсивности деформаций $\varepsilon_*^{(k)}$ в k -х фазах композиции стеклопластиковой панели ($\varepsilon_m^{(k)}(t; M) = \max_r \varepsilon_*^{(k)}(t, \mathbf{r}; M)$, $|x_1| \leq a$, $|x_2| \leq b$, $|x_3| \leq h$, $k = 0, 1, 2$). В табл. 2 приведены некоторые характерные значения величин $\varepsilon_m^{(k)}$ для эпоксисвязывающего ($k = 0$) и волокон второго семейства ($k = 2$), которые в процессе осцилляций КМ-конструкции испытывают наиболее интенсивное деформиро-

Таблица 2

Характерные наибольшие значения интенсивности деформаций некоторых компонентов композиции [Characteristic maximum values of the intensity of deformations of some components of the composition]

nos.	$q_{\infty}^{(-)}$, kW/m ²	$q_{\infty}^{(+)}$, kW/m ²	$p_{\max}$, МПа	M	L	$\varepsilon_{\max}^{(0)}$, %	$\varepsilon_{0.5}^{(0)}$, %	$\varepsilon_{\max}^{(2)}$, %	$\varepsilon_{0.5}^{(2)}$, %
1	0	0	6	0	7	5.16	1.69	2.55	0.493
2	0	0	6	7	7	5.16	1.79	2.83	0.731
3	0	0	6	7	0	5.16	1.83	2.83	0.736
4	0	0	−6	0	7	6.48	2.18	3.53	0.644
5	0	0	−6	7	7	6.19	2.25	4.00	0.673
6	0	0	−6	7	0	6.17	2.34	3.96	0.654
7	3	—	6	0	7	5.31	1.87	2.58	0.596
8	3	—	6	7	7	5.08	1.77	2.84	0.731
9	3	—	−6	0	7	6.54	2.23	3.39	0.779
10	3	—	−6	7	7	6.24	2.27	3.89	0.711
11	—	−3	6	0	7	5.32	1.87	2.58	0.549
12	—	−3	6	7	7	5.22	1.86	2.80	0.699
13	—	−3	−6	0	7	6.90	2.14	3.43	0.698
14	—	−3	−6	7	7	6.38	2.33	3.84	0.674

вание. В табл. 2 приняты следующие обозначения: $\varepsilon_{\max}^{(k)}(M) = \max_{t \geq 0} \varepsilon_m^{(k)}(t; M)$ и $\varepsilon_{0.5}^{(k)}(M) = \varepsilon_m^{(k)}(0.5; M)$, т. е. величины $\varepsilon_{0.5}^{(k)}$ можно трактовать как максимальные значения интенсивности остаточных деформаций, так как они соответствуют значениям $\varepsilon_m^{(k)}$ ($k = 0, 2$), полученным в момент времени $t = 500$ мс, когда осцилляции искривленной панели практически полностью прекратились. Данные, представленные в табл. 2 при $L = 0$, соответствуют случаям, когда температурный отклик в конструкции не учитывается (вязкоупруго-пластический расчет).

Сравнение значений $\varepsilon_{\max}^{(2)}$ в расчетах с номерами 4 и 5 (см. табл. 2) показывает, что использование теории Амбарцумяна в этом случае приводит к занижению максимальной величины интенсивности деформаций второго семейства волокон на 11.3%, в расчетах 13 и 14 — на 12%, а в расчетах 9 и 10 — на 14.7%. В еще большей степени теория Амбарцумяна может приводить к искажению расчетного остаточного деформированного состояния фаз композиции. Так, значение $\varepsilon_{0.5}^{(2)}$ в расчете 1 на 48.3% меньше, чем в расчете 2.

Сравнение величин $\varepsilon_{\max}^{(k)}$ и $\varepsilon_{0.5}^{(k)}$ ($k = 0, 2$) в расчетах 2, 3 и 5, 6 демонстрирует, что учет теплового отклика в полой КМ-оболочке (см. расчеты 3 и 6) не оказывает существенного влияния на изменение этих величин, в отличие от его влияния на величину и форму остаточного прогиба. Так, значения $\varepsilon_{0.5}^{(0)}$ в расчетах 5 и 6 различаются всего на 4%, а остальные величины $\varepsilon_{\max}^{(k)}$ и $\varepsilon_{0.5}^{(k)}$ в указанных расчетах различаются менее чем на 3%.

Закключение. Разработанная теория термовязкоупруго-пластического деформирования гибких пологих армированных оболочек позволяет с разной степенью точности определять их температурный и механический отклик при интенсивном кратковременном динамическом нагружении, в том чис-

ле и остаточные состояния после полного затухания осцилляций таких конструкций.

Полученные результаты показали, что, как и в [23], для расчета неизотермического вязкоупругопластического динамического поведения искривленных стеклопластиковых панелей необходимо использовать уточненную теорию их изгиба. Использование же простейшего варианта этой теории — традиционной неклассической теории Амбарцумяна [22, 24, 28] — может привести к существенному как количественному, так и качественному искажению расчетного остаточного прогиба и, в еще большей степени, расчетного остаточного деформированного состояния компонентов композиции по сравнению с расчетами, выполненными по уточненной теории изгиба [23].

Продemonстрировано, что учет температурного отклика в динамически изгибаемых стеклопластиковых пологих оболочках после их неупругого деформирования может привести к заметному искажению представления об остаточном прогибе такой КМ-конструкции, причем это искажение может носить как количественный, так и качественный характер.

Дополнительное тепловое воздействие немеханического происхождения также может оказывать значительное влияние на остаточное состояние стеклопластиковых искривленных панелей. При этом существенным является то, к какой именно лицевой поверхности подводится дополнительный тепловой поток.

Прямоугольные, удлинённые в плане цилиндрические панели из стеклопластика после затухания неупругих колебаний приобретают гофрированную остаточную форму со складками, которые ориентированы в продольном направлении. Форма остаточного прогиба существенно зависит от того, с какой стороны (выпуклой или вогнутой лицевой поверхности) нагружается избыточным динамическим давлением пологая КМ-оболочка.

Конкурирующие интересы. У меня нет конфликта интересов в авторстве и публикации этой статьи.

Авторская ответственность. Я несу полную ответственность за предоставление окончательной версии рукописи в печать. Окончательная версия рукописи мною одобрена.

Финансирование. Работа выполнена в рамках государственного задания (№ госрегистрации 121030900260-6).

Библиографический список

1. *Composites: State of Art* / ed. L. W. Weeton, E. Scala. New York: Metallurgical Society of AIME, 1974. 365 pp.
2. *Handbook of Composites* / ed. G. Lubin. New York: Van Nostrand Reinhold, 1982. 786 pp.
3. *Композиционные материалы: Справочник* / ред. Д. М. Карпинос. Киев: Наук. думка, 1985. 592 с.
4. Тарнопольский Ю. М., Жигун И. Г., Поляков В. А. *Пространственно-армированные композиционные материалы: Справочник*. М.: Машиностроение, 1987. 224 с.
5. Абросимов Н. А., Баженов В. Г. *Нелинейные задачи динамики композитных конструкций*. Н. Новгород: ННГУ, 2002. 400 с.
6. Kazanci Z. Dynamic response of composite sandwich plates subjected to time-dependent pressure pulses // *Int. J. Non-Linear Mech.*, 2011. vol. 46, no. 5. pp. 807–817. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2011.03.011>.
7. Соломонов Ю. С., Георгиевский В. П., Недбай А. Я., Андришин В. А. *Прикладные*

- задачи механики композитных цилиндрических оболочек. М.: Физматлит, 2014. 408 с. EDN: UGLCQJ.
8. Димитриенко Ю. И. *Механика композитных конструкций при высоких температурах*. М.: Физматлит, 2019. 448 с.
 9. Yonezu A., Yoneda K., Hirakata H., et al. A simple method to evaluate anisotropic plastic properties based on dimensionless function of single spherical indentation – Application to SiC whisker-reinforced aluminum alloy // *Mat. Sci. Eng. A*, 2010. vol. 527, no. 29–30. pp. 7646–7657. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.msea.2010.08.014>.
 10. He G., Liu Y., Hammi Y., Bammann D. J., Horstemeyer M. F. A combined viscoelasticity-viscoplasticity-anisotropic damage model with evolving internal state variables applied to fiber reinforced polymer composites // *Mech. Adv. Mater. Struct.*, 2020. vol. 28, no. 17. pp. 7646–7657. DOI: <https://doi.org/10.1080/15376494.2019.1709673>.
 11. Yu M.-h. Advances in strength theories for materials under complex stress state in the 20th century // *Appl. Mech. Rev.*, 2002. vol. 55, no. 3. pp. 169–218. DOI: <https://doi.org/10.1115/1.1472455>.
 12. Qatu M. S., Sullivan R. W., Wang W. Recent research advances on the dynamic analysis of composite shells: 2000–2009 // *Comp. Struct.*, 2010. vol. 93, no. 1. pp. 14–31. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2010.05.014>.
 13. Morinière F. D., Alderliesten R. C., Benedictus R. Modelling of impact damage and dynamics in fibre-metal laminates — A review // *Int. J. Impact Eng.*, 2014. vol. 67. pp. 27–38. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijimpeng.2014.01.004>.
 14. Vena P., Gastaldi D., Contro R. Determination of the effective elastic-plastic response of metal-ceramic composites // *Int. J. Plasticity*, 2008. vol. 24, no. 3. pp. 483–508. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2007.07.001>.
 15. Brassart L., Stainier L., Doghri I., Delannay L. Homogenization of elasto-(visco) plastic composites based on an incremental variational principle // *Int. J. Plasticity*, 2012. vol. 36. pp. 86–112. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2012.03.010>.
 16. Vasiliev V. V., Morozov E. *Advanced Mechanics of Composite Materials and Structural Elements*. Amsterdam: Elsevier, 2013. xii+412 pp. EDN: UERHDX. DOI: <https://doi.org/10.1016/C2011-0-07135-1>.
 17. Gibson R. F. *Principles of Composite Material Mechanics*. Boca Raton: CRC Press, 2016. xxiii+700 pp. DOI: <https://doi.org/10.1201/b19626>.
 18. Ахундов В. М. Инкрементальная каркасная теория сред волокнистого строения при больших упругих и пластических деформациях // *Мех. композ. матер.*, 2015. Т. 51, № 3. С. 539–558.
 19. Rajhi W., Saanouni K., Sidhom H. Anisotropic ductile damage fully coupled with anisotropic plastic flow: Modeling, experimental validation, and application to metal forming simulation // *Int. J. Damage Mech.*, 2014. vol. 23, no. 8. pp. 1211–1256. DOI: <https://doi.org/10.1177/1056789514524076>.
 20. Lee E.-H., Stoughton T. B., Yoon J. W. A yield criterion through coupling of quadratic and non-quadratic functions for anisotropic hardening with non-associated flow rule // *Int. J. Plasticity*, 2017. vol. 99. pp. 120–143. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2017.08.007>.
 21. Nizolek T. J., Pollock T. M., McMeeking R. M. Kink band and shear band localization in anisotropic perfectly plastic solids // *J. Mech. Phys. Solids*, 2021. vol. 146, 104183. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jmps.2020.104183>.
 22. Янковский А. П. Моделирование неизотермического вязкоупругопластического поведения гибких армированных пластин // *Вычисл. мех. сплош. сред*, 2020. Т. 13, № 3. С. 350–370. EDN: MZKPHT. DOI: <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2020.13.3.28>.
 23. Янковский А. П. Моделирование неизотермического упругопластического поведения армированных пологих оболочек в рамках уточненной теории изгиба // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2023. Т. 27, № 1. С. 119–141. EDN: YRWNPW. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1958>.

24. Янковский А. П. Моделирование термоупруговязкопластического деформирования гибких армированных пластин // *ПММ*, 2022. Т. 86, № 1. С. 121–150. EDN: EKGCRN. DOI: <https://doi.org/10.31857/S003282352201009X>.
25. Reissner E. On transverse vibrations of thin shallow elastic shells // *Quart. Appl. Math.*, 1955. vol. 13, no. 2. pp. 169–176. DOI: <https://doi.org/10.1090/qam/69715>.
26. Малмейстер А. К., Тамуж В. П., Тетерс Г. А. *Сопротивление жестких полимерных материалов*. Рига: Зинатне, 1972. 500 с.
27. Богданович А. Е. *Нелинейные задачи динамики цилиндрических композитных оболочек*. Рига: Зинатне, 1987. 295 с.
28. Амбарцумян С. А. *Общая теория анизотропных оболочек*. М.: Наука, 1974. 446 с.
29. Reddy J. N. *Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells. Theory and Analysis*. Boca Raton: CRC Press, 2004. xxiii+831 pp. DOI: <https://doi.org/10.1201/b12409>.
30. Андреев А. *Упругость и термоупругость слоистых композитных оболочек. Математическая модель и некоторые аспекты численного анализа*. Saarbrücken: Palmarium Academic Publ., 2013. 93 с. EDN: QZAPNP.
31. Болотин В. В., Новичков Ю. Н. *Механика многослойных конструкций*. М.: Машиностроение, 1980. 375 с.
32. Куликов Г. М. Термоупругость гибких многослойных анизотропных оболочек // *Изв. РАН. МТТ*, 1994. № 2. С. 33–42. EDN: SLRUCB.
33. Houlston R., DesRochers C. G. Nonlinear structural response of ship panels subjected to air blast loading // *Comp. Struct.*, 1987. vol. 26, no. 1–2. pp. 1–15. DOI: [https://doi.org/10.1016/0045-7949\(87\)90232-X](https://doi.org/10.1016/0045-7949(87)90232-X).
34. Хажинский Г. М. *Модели деформирования и разрушения металлов*. М.: Научный мир, 2011. 231 с.
35. Луканин В. Н., Шатров М. Г., Камфер Г. М. [и др.] *Теплотехника* / ред. В. Н. Луканин. М.: Высш. шк., 2003. 671 с. EDN: QMHYSH.

MSC: 74K20

Refined model of thermo-visco-elastic-plastic dynamic deformation of reinforced flexible shallow shells

A. P. Yankovskii

Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics,
Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences,
4/1, Institutskaya st., Novosibirsk, 630090, Russian Federation.

Abstract

The problem of thermo-visco-elastic-plastic deformation of reinforced shallow shells under dynamic loading is formulated. In this case, a refined theory of their bending is used, the simplest version of which is the Ambartsumyan theory. Geometric nonlinearity is taken into account in the Karman approximation. The inelastic behavior of the materials of the composition phases is described by the equations of the theory of plastic flow; their viscoelastic deformation is described by the relations of the Maxwell–Boltzmann model. Temperature in the transversal direction is approximated by high-order polynomials. Numerical integration of the coupled nonlinear thermomechanical problem is carried out using an explicit time-stepping scheme. The visco-elastic-plastic flexural behavior of a cylindrical fiberglass panel with an orthogonal 2D-reinforcement structure is studied. The structure is briefly loaded in the transverse direction with high-intensity pressure. A comparative analysis of calculations performed with and without taking into account the temperature response in a shallow shell is carried out. Additionally, cases of preheating the panel from one of the front surfaces are studied. It is shown that to calculate the thermo-visco-elastic-plastic behavior of fiberglass curved panels, a refined theory of bending should be used, rather than the traditionally used Ambartsumyan theory, which significantly distorts the shape of the calculated residual deflection and the field of residual deformations of the components of the composition. It is demonstrated that failure to take into account the temperature response in a shallow reinforced shell can lead not only to a quantitative, but also a qualitatively incorrect idea of the calculated form of its residual deflection. The presence of preheating of the fiberglass panel leads to a noticeable change in its residual deflection. In this case, an important role is played by the

Mechanics of Solids

Research Article

© The Author(s), 2024

© Samara State Technical University, 2024 (Compilation, Design, and Layout)

© The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Please cite this article in press as:

Yankovskii A. P. Refined model of thermo-visco-elastic-plastic dynamic deformation of reinforced flexible shallow shells, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2024, vol. 28, no. 3, pp. 562–585. EDN: LBASMU. DOI: 10.14498/vsgtu2079 (In Russian).

Author's Details:

Andrei P. Yankovskii  <https://orcid.org/0000-0002-2602-8357>

Dr. Phys. & Math. Sci.; Leading Research Scientist; Lab. of Fast Processes Physics;

e-mail: yankovsky_ap@itam.nsc.ru

fact from which particular front surface additional heating or cooling of the thin-walled structure is carried out.

Keywords: shallow shells, geometric nonlinearity, fiber reinforcement, coupled thermo-visco-elastic-plasticity, refined bending theory, inelastic dynamics, residual state, explicit time step method.

Received: 19th January, 2024 / Revised: 12th September, 2024 /

Accepted: 21st October, 2024 / First online: 29th October, 2024

Competing interests. I have no conflicts of interest regarding the authorship and publication of this article.

Author responsibility. I take full responsibility for providing the final version of the manuscript for publication. The final version of the manuscript has been approved by me.

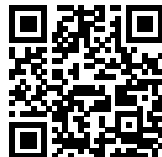
Funding. The research was carried out within the state assignment of Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (project no. 121030900260-6).

References

1. *Composites: State of Art*, ed. L. W. Weeton, E. Scala. New York, Metallurgical Society of AIME, 1974, 365 pp.
2. *Handbook of Composites*, ed. G. Lubin. New York, Van Nostrand Reinhold, 1982, 786 pp.
3. *Kompozitsionnye materialy: Spravochnik* [Composite Materials: Handbook], ed. D. M. Karpinos. Kiev, Nauk. Dumka, 1985, 592 pp. (In Russian)
4. Tarnopol'sky Yu. M., Zhigun I. G., Polyakov V. A. *Prostranstvenno-armirovannye kompozitsionnye materialy: Spravochnik* [Spatially Reinforced Composite Materials: Handbook]. Moscow, Mashinostroenie, 1987, 224 pp. (In Russian)
5. Abrosimov N. A., Bazhenov V. G. *Nelineinye zadachi dinamiki kompozitnykh konstruksii* [Nonlinear Problems of Dynamics Composites Designs]. Nizhniy Novgorod, Nizhniy Novgorod State Univ., 2002, 400 pp. (In Russian)
6. Kazanci Z. Dynamic response of composite sandwich plates subjected to time-dependent pressure pulses, *Int. J. Non-Linear Mech.*, 2011, vol. 46, no. 5, pp. 807–817. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2011.03.011>.
7. Solomonov Yu. S., Georgievskii V. P., Nedbai A. Ya., Andryushin V. A. *Prikladnye zadachi mekhaniki kompozitnykh tsilindricheskikh obolochek* [Applied Problems of Mechanics of Composite Cylindrical Shells]. Moscow, Fizmatlit, 2014, 408 pp (In Russian). EDN: UGLCQJ.
8. Dimitrienko Yu. I. *Mekhanika kompozitnykh konstruksii pri vysokikh temperaturakh* [Mechanics of Composite Structures under High Temperatures]. Moscow, Fizmatlit, 2019, 448 pp. (In Russian)
9. Yonezu A., Yoneda K., Hirakata H., et al. A simple method to evaluate anisotropic plastic properties based on dimensionless function of single spherical indentation – Application to SiC whisker-reinforced aluminum alloy, *Mat. Sci. Eng. A*, 2010, vol. 527, no. 29–30, pp. 7646–7657. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.msea.2010.08.014>.
10. He G., Liu Y., Hammi Y., Bammann D. J., Horstemeyer M. F. A combined viscoelasticity-viscoplasticity-anisotropic damage model with evolving internal state variables applied to fiber reinforced polymer composites, *Mech. Adv. Mater. Struct.*, 2020, vol. 28, no. 17, pp. 7646–7657. DOI: <https://doi.org/10.1080/15376494.2019.1709673>.
11. Yu M.-h. Advances in strength theories for materials under complex stress state in the 20th century, *Appl. Mech. Rev.*, 2002, vol. 55, no. 3, pp. 169–218. DOI: <https://doi.org/10.1115/1.1472455>.
12. Qatu M. S., Sullivan R. W., Wang W. Recent research advances on the dynamic analysis of composite shells: 2000–2009, *Comp. Struct.*, 2010, vol. 93, no. 1, pp. 14–31. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2010.05.014>.

13. Morinière F. D., Alderliesten R. C., Benedictus R. Modelling of impact damage and dynamics in fibre-metal laminates — A review, *Int. J. Impact Eng.*, 2014, vol. 67, pp. 27–38. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijimpeng.2014.01.004>.
14. Vena P., Gastaldi D., Contro R. Determination of the effective elastic-plastic response of metal-ceramic composites, *Int. J. Plasticity*, 2008, vol. 24, no. 3, pp. 483–508. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2007.07.001>.
15. Brassart L., Stainier L., Doghri I., Delannay L. Homogenization of elasto-(visco) plastic composites based on an incremental variational principle, *Int. J. Plasticity*, 2012, vol. 36, pp. 86–112. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2012.03.010>.
16. Vasiliev V. V., Morozov E. *Advanced Mechanics of Composite Materials and Structural Elements*. Amsterdam, Elsever, 2013, xii+412 pp. EDN: UERHXD. DOI: <https://doi.org/10.1016/C2011-0-07135-1>.
17. Gibson R. F. *Principles of Composite Material Mechanics*. Boca Raton, CRC Press, 2016, xxiii+700 pp. DOI: <https://doi.org/10.1201/b19626>.
18. Akhundov V. M. Incremental carcass theory of fibrous media under large elastic and plastic deformations, *Mech. Compos. Mater.*, 2015, vol. 51, no. 3, pp. 383–396. EDN: MCFUEJ. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11029-015-9509-4>.
19. Rajhi W., Saanouni K., Sidhom H. Anisotropic ductile damage fully coupled with anisotropic plastic flow: Modeling, experimental validation, and application to metal forming simulation, *Int. J. Damage Mech.*, 2014, vol. 23, no. 8, pp. 1211–1256. DOI: <https://doi.org/10.1177/1056789514524076>.
20. Lee E.-H., Stoughton T. B., Yoon J. W. A yield criterion through coupling of quadratic and non-quadratic functions for anisotropic hardening with non-associated flow rule, *Int. J. Plasticity*, 2017, vol. 99, pp. 120–143. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2017.08.007>.
21. Nizolek T. J., Pollock T. M., McMeeking R. M. Kink band and shear band localization in anisotropic perfectly plastic solids, *J. Mech. Phys. Solids*, 2021, vol. 146, 104183. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jmps.2020.104183>.
22. Yankovskii A. P. Modeling of non-isothermic viscoelastic-plastic behavior of flexible reinforced plates, *Comput. Cont. Mech.*, 2020, vol. 13, no. 3, pp. 350–370 (In Russian). EDN: MZKPHT. DOI: <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2020.13.3.28>.
23. Yankovskii A. P. Modeling of non-isothermal elastic-plastic behavior of reinforced shallow shells in the framework of a refined bending theory, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2023, vol. 27, no. 1, pp. 119–141 (In Russian). EDN: YRWNPW. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1958>.
24. Yankovskii A. P. Modeling of thermoelastic-visco-plastic deformation of flexible reinforced plates, *Mech. Solids*, 2022, vol. 57, no. 7, pp. 111–133. DOI: <https://doi.org/10.3103/S0025654422070184>.
25. Reissner E. On transverse vibrations of thin shallow elastic shells, *Quart. Appl. Math.*, 1955, vol. 13, no. 2, pp. 169–176. DOI: <https://doi.org/10.1090/qam/69715>.
26. Malmeister A. K., Tamuzh V. P., Teters G. A. *Soprotivlenie zhestkikh polimernykh materialov* [Resistance of Rigid Polymeric Materials]. Riga, Zinatne, 1972, 500 pp. (In Russian)
27. Bogdanovich A. E. *Nelineinye zadachi dinamiki tsilindricheskikh kompozitnykh obolochek* [Nonlinear Problems of the Dynamics of Cylindrical Composite Shells]. Riga, Zinatne, 1987, 295 pp. (In Russian)
28. Ambartsumian S. A. *Obshchaia teoriia anizotropnykh obolochek* [The General Theory of Anisotropic Shells]. Moscow, Nauka, 1974, 446 pp. (In Russian)
29. Reddy J. N. *Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells. Theory and Analysis*. Boca Raton, CRC Press, 2004, xxiii+831 pp. DOI: <https://doi.org/10.1201/b12409>.
30. Andreev A. *Uprugost' i termouprugost' sloistykh kompozitnykh obolochek. Matematicheskaya model' i nekotorye aspekty chislennogo analiza* [Elasticity and Thermoelasticity of Layered Composite Shells. Mathematical Model and Some Aspects of Numerical Analysis]. Saarbrücken, Palmarium Academic Publ., 2013, 93 pp (In Russian). EDN: QZAPNP.

31. Bolotin V. V., Novichkov Yu. N. *Mekhanika mnogosloinykh konstrukttsii* [Mechanics of Multilayer Structures]. Moscow, Mashinostroenie, 1980, 375 pp. (In Russian)
32. Kulikov G. M. Thermoelasticity of flexible multilayer anisotropic shells, *Mech. Solids*, 1994, vol. 29, no. 2, pp. 27–35. EDN: TVBRLF.
33. Houlston R., DesRochers C. G. Nonlinear structural response of ship panels subjected to air blast loading, *Comp. Struct.*, 1987, vol. 26, no. 1–2, pp. 1–15. DOI: [https://doi.org/10.1016/0045-7949\(87\)90232-X](https://doi.org/10.1016/0045-7949(87)90232-X).
34. Khazhinskii G. M. *Modeli deformirovaniia i razrusheniia metallov* [The Models of Metal Deformation and Destruction]. Moscow, Nauchnyi Mir, 2011, 231 pp. (In Russian)
35. Lukanin V. N., Shatrov M. G., Kamfer G. M., et al. *Teplotekhnika* [Heat Engineering], ed. V. N. Lukanin. Moscow, Vyssh. Shk., 2003, 671 pp. (In Russian). EDN: QMHYSH.



УДК 519.862.53

Разработка и сравнительный анализ математических моделей функционирования региональной энергосистемы Самарской области

В. Е. Зотеев, Л. А. Сагитова, А. А. Гаврилова

Самарский государственный технический университет,
Россия, 443100, Самара, ул. Молодогвардейская, 244.

Аннотация

Системные исследования деятельности региональной энергосистемы с целью повышения эффективности управления энергетическим комплексом с учетом вклада используемых ресурсов принципиально невозможны без совершенствования математических моделей и методов их идентификации на основе статистических данных.

В статье приводятся результаты анализа известного математического описания функционирования региональной энергосистемы, на основе которого отмечаются существенные недостатки, негативно влияющие как на достоверность оценок основных показателей эффективности энергетического комплекса, так и на точность прогноза, сделанного на основе построенной модели.

В работе рассматриваются и систематизируются по трем основным группам как различные трехфакторные регрессионные модели, так и ковариационно-стационарные модели временных рядов на основе линейной и нелинейной регрессии. Описаны алгоритмы численных методов среднеквадратического оценивания параметров этих моделей на основе результатов наблюдений.

Приведены результаты математического моделирования динамики выпуска продукции энергосистемы на основе статистических данных, публикуемых в ежегодной отчетности региональных министерств и энергетических компаний. Проведен статистический анализ полученных результатов. Сравнительный анализ разработанных математических мо-

Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ
Научная статья

© Коллектив авторов, 2024

© СамГТУ, 2024 (составление, дизайн, макет)

♾️ Контент публикуется на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

Образец для цитирования

Зотеев В. Е., Сагитова Л. А., Гаврилова А. А. Разработка и сравнительный анализ математических моделей функционирования региональной энергосистемы Самарской области // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2024. Т. 28, № 3. С. 586–608. EDN: IWFHMA. DOI: 10.14498/vsgtu2091.

Сведения об авторах

Владимир Евгеньевич Зотеев <https://orcid.org/0000-0001-7114-4894>
доктор технических наук, доцент; профессор; каф. прикладной математики и информатики; e-mail: zoteev.ve@samgtu.ru

Ляйсан Акзамовна Сагитова <https://orcid.org/0000-0002-0833-983X>
старший преподаватель; каф. теплогазоснабжения и вентиляции; e-mail: 10410@mail.ru

Анна Александровна Гаврилова <https://orcid.org/0000-0001-6598-6518>
кандидат технических наук, доцент; каф. управления и системного анализ тепло-энергетических и социотехнических комплексов; e-mail: a.a.gavrilova@mail.ru

делей на основе оценки погрешности прогноза позволил выбрать из рассматриваемой совокупности моделей наиболее эффективную математическую модель с минимальной ошибкой прогноза на период времени от одного года до пяти лет.

Ключевые слова: региональная энергосистема, мультипликативно-степенная производственная функция, факторная эластичность, ковариационно-стационарные модели временных рядов, авторегрессионные модели, статистический анализ.

Получение: 10 марта 2024 г. / Исправление: 16 сентября 2024 г. /

Принятие: 27 сентября 2024 г. / Публикация онлайн: 5 ноября 2024 г.

Введение. В условиях изменения внешней среды возникает необходимость изменения методов организации и управления энергетическими предприятиями, что требует системных исследований производственно-экономических взаимосвязей региональных энергосистем с промышленными предприятиями, путей повышения эффективности используемых ресурсов.

В работах, посвященных системному анализу эффективности региональной энергетики, особое внимание уделяется построению и идентификации математических моделей, как основы анализа эффективности функционирования энергетических производств и разработки систем поддержки принятия решений, построенных с использованием необходимого модельного обеспечения [1–8]. Для исследования энергопроизводств актуально направление, связанное с совершенствованием математических моделей и методов их идентификации на основе статистических данных, что подтверждается, во-первых, задачей выявления из большого числа действующих факторов тех, которые существенно влияют на протекание производственных процессов. Во-вторых, проблемой достоверной оценки основных показателей эффективности функционирования реальных производств, таких как средняя и предельная производительность ресурсов, эластичность выпуска используемого ресурса. В-третьих, при решении задач оптимизации энергопроизводства планирование деятельности энергосистем начинается с прогнозов потребления электрической и тепловой энергии, выявления основных тенденций развития процессов энергопроизводств, оценки границ диапазонов возможных значений параметров производственного плана.

1. Анализ известного математического описания функционирования региональной энергосистемы. В известных подходах к математическому моделированию функционирования энергетических систем в качестве исследовательского аппарата широкое распространение получили мультипликативно-степенные модели в виде производственных функций [9, 10]. В частности, в работах [1–3, 5, 7, 11], посвященных синтезу математических моделей региональной энергосистемы как многомерных производственных функций, используется нелинейная трехфакторная степенная зависимость вида

$$Y_s(t) = AK^\alpha(t)L^\beta(t)B^\gamma(t), \quad (1)$$

где $Y_s(t)$ — выпуск электрической и тепловой энергии; $K(t)$, $L(t)$ и $B(t)$ — капитальные, трудовые и топливные ресурсы соответственно.

Оценка параметров этой зависимости, прогноз и вычисление доверительных интервалов для результатов расчета в этих работах проводились на основе среднеквадратического оценивания коэффициентов линейной регрессионной модели

$$\ln y_k = \ln A + \alpha \ln x_{1k} + \beta \ln x_{2k} + \gamma \ln x_{3k} + \eta_k, \quad \|\hat{\eta}\|^2 = \sum_{k=0}^{31} \hat{\eta}_k^2 \rightarrow \min, \quad (2)$$

аппроксимирующей нелинейную зависимость (1), где y_k — статистические данные по выпуску энергии; x_{1k} , x_{2k} и x_{3k} — статистические данные по динамике капитальных, трудовых и топливных ресурсов соответственно за период наблюдений с 1990 по 2021 годы в Самарской области.

Применяемые в этих работах методы математического моделирования имеют ряд существенных недостатков, негативно влияющих как на достоверность оценок основных показателей эффективности функционирования региональной энергосистемы, так и на точность прогноза, сделанного на основе построенной модели. Во-первых, недостаточно обоснован выбор вида и формы математической модели — линейной регрессионной трехфакторной модели (2), построенной на основе аппроксимации мультипликативно-степенной производственной функции (1). Для такой функциональной зависимости факторные эластичности

$$E_K = \frac{K(t)}{Y_s(t)} \cdot \frac{\partial Y_s}{\partial K} = \alpha, \quad E_L = \frac{L(t)}{Y_s(t)} \cdot \frac{\partial Y_s}{\partial L} = \beta, \quad E_B = \frac{B(t)}{Y_s(t)} \cdot \frac{\partial Y_s}{\partial B} = \gamma$$

являются параметрами модели, величинами априори постоянными, не изменяющимися на промежутке наблюдений, равном 31 году, что вызывает сомнение и требует подтверждения на основе статистических методов обработки результатов наблюдений [11].

Применение методов прикладного регрессионного анализа в задаче оценки параметров мультипликативно-степенной производственной функции (1) основано на минимизации среднеквадратичного отклонения результатов вычислений по модели $\hat{y}_k$ от результатов наблюдений y_k в точках t_k [11–14]:

$$\sum_{k=0}^{31} (y_k - \hat{y}_k)^2 = \|y - \hat{y}\|^2 = \|e\|^2 \rightarrow \min. \quad (3)$$

Использование линейной аппроксимации на основе логарифмирования трехфакторной степенной зависимости (1) в регрессии (2) и критерий среднеквадратичного оценивания $\|\hat{\eta}\|^2 = \sum_{k=0}^{31} \hat{\eta}_k^2 \rightarrow \min$ вносят смещение в оценки параметров α , β и γ , величина которого может оказаться недопустимо большой. В работах [1–8] эта проблема не исследуется.

Во-вторых, статистические данные, публикуемые в ежегодной отчетности региональных министерств и энергетических компаний, на основе которых строится математическая модель динамики выпуска продукции энергосистемы, представляют собой временной ряд наблюдений y_k , $k = 0, 1, 2, \dots, 31$, за период времени с 1990 по 2021 годы. Следовательно, для описания исследуемой динамики целесообразно выбирать модель из класса ковариационно-

стационарных моделей временных рядов в форме стохастических разностных уравнений [16–20].

В-третьих, в работах [1–7] отсутствуют в необходимом объеме элементы статистического анализа результатов построения математической модели (1), а также выводы, сделанные на их основе. В частности, среднеквадратичное оценивание на основе минимизации суммы квадратов остатков $\|y - \hat{y}\|^2 = \|e\|^2 \rightarrow \min$ для регрессионной модели дает наилучшие оценки только при выполнении условий теоремы Гаусса—Маркова [12, 14]. Если эти условия не выполняются, например, имеет место сильная корреляция между элементами вектора случайной помехи ε_k и $\varepsilon_{k \pm p}$, $p \neq 0$, то применение метода наименьших квадратов (МНК) приводит к существенному занижению результатов расчета дисперсий и ковариаций среднеквадратичных оценок коэффициентов модели по сравнению с действительными значениями. Кроме того, оценки σ_ε^2 по остаточной сумме квадратов оказываются смещенными [12]. При этом создается ложное впечатление не только о точности оценок, но и о целесообразности проведения статистического анализа результатов оценивания, так как нет уверенности в корректности уровней значимости t - и F -критериев. Поэтому анализ остатков, выявление в них корреляции, например, на основе критерия Дарбина—Уотсона, является важнейшим элементом статистического анализа при построении математических моделей [13, 21]. Однако в работах [1–6] результаты таких исследований не приведены, что является серьезным недостатком.

Также можно отметить отсутствие в этих работах интервальных оценок прогноза и параметров модели, определяющих точность расчетов основных показателей эффективности функционирования энергосистемы. Отсутствие проверки значимости параметров модели на основе статистического анализа результатов расчета может привести к снижению эффективности среднеквадратичных оценок, завышению доверительных интервалов, а также исключает возможность упрощения модели, сделав ее более надежной и устойчивой.

В-четвертых, при использовании методов математического моделирования в опубликованных работах [1–6], посвященных системному анализу функционирования региональной энергосистемы, отсутствуют какие-либо исследования, связанные с проблемой мультиколлинеарности в регрессионном анализе [12, 14]. Игнорирование этой проблемы может привести к неустойчивости среднеквадратичных оценок, увеличению их дисперсий и, как следствие, к резкому снижению точности результатов расчета параметров модели и точности предсказания по модели.

Таким образом, завершая анализ известного математического описания функционирования региональной энергосистемы, можно сделать два основных вывода. Во-первых, принятая математическая модель в форме мультипликативно-степенной трехфакторной регрессии не учитывает в полной мере стохастического характера временного ряда статистических данных, публикуемых в ежегодной отчетности региональных министерств и энергетических компаний.

Во-вторых, при математическом моделировании эффективности функционирования энергосистемы отсутствует полнота статистического анализа результатов расчета и полезных практических выводов на его основе.

2. Постановка задачи исследования и методы ее решения. Для устранения этих серьезных недостатков в данной работе рассматривается применение в задаче моделирования функционирования региональной энергосистемы ковариационно-стационарных моделей временных рядов. Проводится их сравнительный анализ, в том числе с известной регрессионной моделью на основе мультипликативно-степенной производственной функции (1), а также с учетом этой регрессии строятся новые математические модели в форме стохастических разностных уравнений с детерминированным трендом.

При описании динамики выпуска продукции региональной энергосистемы может быть использована ковариационно-стационарная модель временного ряда в форме стохастического разностного уравнения в виде [20]

$$y_k = \sum_{j=1}^p \lambda_j y_{k-j} + \sum_{j=p+1}^{m+p+1} \lambda_j t_k^{j-(p+1)} + u(x_{1k}, x_{2k}, x_{3k}, \bar{a}) + \varepsilon_k, \quad (4)$$

где $y_k = \sum_{j=1}^p \lambda_j y_{k-j} + \varepsilon_k$ — стохастическое разностное уравнение в форме модели авторегрессии порядка p ; $P_m(t_k) = \sum_{j=p+1}^{m+p+1} \lambda_j t_k^{j-(p+1)}$ — детерминированный тренд в форме многочлена степени m относительно временной переменной t_k ; $u(x_{1k}, x_{2k}, x_{3k}, \bar{a})$ — детерминированная трехфакторная функция с вектором параметров $\bar{a} = (\lambda_{m+p+2}, \lambda_{m+p+3}, \dots, \lambda_n)^\top$, ε_k — последовательность независимых случайных величин с нулевым математическим ожиданием и одинаковыми дисперсиями σ_ε^2 :

$$M[\varepsilon_k] = 0, \quad \text{cov}[\varepsilon_k, \varepsilon_{k \pm p}] = \begin{cases} 0, & p \neq 0; \\ \sigma_\varepsilon^2, & p = 0. \end{cases}$$

При нелинейной зависимости $u(x_{1k}, x_{2k}, x_{3k}, \bar{a})$ на основе ее линеаризации в окрестности точки $\bar{a}^{(i)} = (\hat{\lambda}_{m+p+2}^{(i)}, \hat{\lambda}_{m+p+3}^{(i)}, \dots, \hat{\lambda}_n^{(i)})^\top$:

$$u(x_{1k}, x_{2k}, x_{3k}, \bar{a}) \approx u_k^{(i)} + \sum_{j=m+p+2}^n \frac{\partial u_k^{(i)}}{\partial \lambda_j} (\lambda_j - \hat{\lambda}_j^{(i)}),$$

где $u_k^{(i)} = (x_{1k}, x_{2k}, x_{3k}, \hat{\lambda}_{m+p+2}^{(i)}, \hat{\lambda}_{m+p+3}^{(i)}, \dots, \hat{\lambda}_n^{(i)})^\top$, ковариационно-стационарную модель временного ряда (4) можно привести к линейному виду $z_k^{(i)} = \lambda^\top f_k^{(i)} + \varepsilon_k$ или

$$z^{(i)} = F^{(i)} \lambda + \varepsilon, \quad (5)$$

где

$$z_k^{(i)} = y_k - u_k^{(i)} + \sum_{j=m+p+2}^n \frac{\partial u_k^{(i)}}{\partial \lambda_j} \hat{\lambda}_j^{(i)}$$

— k -тый элемент вектора $z^{(i)}$;

$$f_k^{(i)} = \left(y_{k-1}, y_{k-2}, \dots, y_{k-p}, 1, t_k, t_k^2, \dots, t_k^m, \frac{\partial u_k^{(i)}}{\partial \lambda_{m+p+2}}, \dots, \frac{\partial u_k^{(i)}}{\partial \lambda_n} \right)$$

— k -тая строка матрицы $F^{(i)}$;

$$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p, \lambda_{p+1}, \dots, \lambda_{p+m+1}, \lambda_{p+m+2}, \dots, \lambda_n)^\top$$

— вектор искомых коэффициентов линейной регрессионной модели (5) при $k = p, p+1, \dots, N-1$, где N — объем выборки результатов наблюдений.

С учетом критерия среднеквадратичного оценивания (3) новое уточненное значение вектора $\hat{\lambda}^{(i+1)}$ оценок коэффициентов разностного уравнения (4) находится по формуле

$$\hat{\lambda}^{(i+1)} = [F^{(i)\top} F^{(i)}]^{-1} F^{(i)\top} z^{(i)}, \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (6)$$

Рассматриваемые в данной работе математические модели, описывающие процессы энергопроизводства для задач системного анализа эффективности функционирования региональной энергосистемы, систематизированы по трем группам.

К первой группе относятся наиболее простые трехфакторные регрессионные модели, образованные на основе производственных функций: линейной и мультипликативно-степенной:

- трехфакторная линейная регрессионная модель, построенная на основе линейной производственной функции (модель 1):

$$y_k = \lambda_1 x_{1k} + \lambda_2 x_{2k} + \lambda_3 x_{3k} + \varepsilon_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1; \quad (7)$$

- трехфакторная нелинейная регрессионная модель, построенная на основе нелинейной мультипликативно-степенной производственной функции (модель 2):

$$y_k = \lambda_1 x_{1k}^{\lambda_2} x_{2k}^{\lambda_3} x_{3k}^{\lambda_4} + \varepsilon_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1. \quad (8)$$

Вторую группу образуют ковариационно-стационарные модели (4) в форме стохастических разностных уравнений временных рядов, включающие детерминированный полиномиальный тренд $P_m(t_k)$ и, в общем случае, нелинейную функцию входных воздействий (факторов) $u(x_{1k}, x_{2k}, x_{3k})$:

- ковариационно-стационарная стохастическая модель в форме разностного уравнения с полиномиальным трендом второго порядка (модель 3):

$$y_k = \lambda_1 y_{k-1} + \lambda_2 y_{k-2} + \lambda_3 + \lambda_4 t_k + \lambda_5 t_k^2 + \varepsilon_k, \quad k = 2, 3, 4, \dots, N-1; \quad (9)$$

- ковариационно-стационарная стохастическая модель в форме разностного уравнения с полиномиальным трендом нулевого порядка и линейной функцией входных воздействий/факторов (модель 4):

$$y_k = \lambda_1 y_{k-1} + \lambda_2 + \lambda_3 x_{1k} + \lambda_4 x_{2k} + \lambda_5 x_{3k} + \varepsilon_k, \quad k = 1, 2, 3, \dots, N-1; \quad (10)$$

- ковариационно-стационарная стохастическая модель в форме разностного уравнения с нелинейным трендом в форме мультипликативно-степенной трехфакторной функции (модель 5):

$$y_k = \lambda_1 y_{k-1} + \lambda_2 y_{k-2} + \lambda_3 x_{1k}^{\lambda_4} x_{2k}^{\lambda_5} x_{3k}^{\lambda_6} + \varepsilon_k, \quad k = 2, 3, 4, \dots, N-1. \quad (11)$$

Третью группу образуют ковариационно-стационарные стохастические модели временных рядов, построенные на основе регрессионных моделей вида $y_k = u(x_{1k}, x_{2k}, x_{3k}) + \eta_k$, в которых $u(x_{1k}, x_{2k}, x_{3k})$ — производственная функция (линейная или мультипликативно-степенная) [10], а случайное возмущение η_k описывается авторегрессионной моделью временного ряда первого или второго порядков соответственно:

$$\eta_k = \lambda_1 \eta_{k-1} + \varepsilon_k, \quad \eta_k = \lambda_1 \eta_{k-1} + \lambda_2 \eta_{k-2} + \varepsilon_k.$$

3. Разработка ковариационно-стационарных моделей временных рядов на основе линейной и нелинейной регрессии. При описании случайного возмущения моделью авторегрессии первого порядка имеем систему уравнений

$$\begin{cases} y_k = u(x_{1k}, x_{2k}, x_{3k}) + \eta_k, & k = 1, 2, 3, \dots, N-1; \\ \eta_k = \lambda_1 \eta_{k-1} + \varepsilon_k, & |\lambda_1| < 1, \quad k = 1, 2, 3, \dots, N-1. \end{cases} \quad (12)$$

Второе уравнение в (12) можно доопределить для η_0 . Найдем дисперсию σ_η^2 . С учетом стационарности процесса и очевидных условий $M[\eta_k] = 0$ и $M[\eta_{k-1}\varepsilon_k] = 0$ имеем

$$\begin{aligned} \sigma_\eta^2 = \sigma^2[\eta_k] &= M[(\eta_k - M[\eta_k])^2] = M[\eta_k^2] = M[(\lambda_1 \eta_{k-1} + \varepsilon_k)^2] = \\ &= \lambda_1^2 M[\eta_{k-1}^2] + 2\lambda_1 M[\eta_{k-1}\varepsilon_k] + M[\varepsilon_k^2] = \lambda_1^2 \sigma_\eta^2 + \sigma_\varepsilon^2. \end{aligned}$$

Отсюда $\sigma_\eta^2 = \sigma_\varepsilon^2 / (1 - \lambda_1^2)$. Величину η_0 будем искать из равенства $\mu\eta_0 = \varepsilon_0$ с учетом формулы $\sigma^2[\mu\eta_0] = \mu^2 \sigma^2[\eta_0] = \sigma^2[\varepsilon_0]$. Отсюда $\mu^2 = \sigma_\varepsilon^2 / \sigma_\eta^2 = 1 - \lambda_1^2$, $\sqrt{1 - \lambda_1^2} \eta_0 = \varepsilon_0$.

Тогда из соотношений

$$\begin{cases} \sqrt{1 - \lambda_1^2} \eta_0 = \varepsilon_0; \\ y_0 - u(x_{10}, x_{20}, x_{30}) = \eta_0, & k = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} \eta_k - \lambda_1 \eta_{k-1} = \varepsilon_k; \\ \eta_k = y_k - u(x_{1k}, x_{2k}, x_{3k}); \\ \eta_{k-1} = y_{k-1} - u(x_{1,k-1}, x_{2,k-1}, x_{3,k-1}), & k = 1, 2, 3, \dots, N-1, \end{cases}$$

получаем систему уравнений, описывающую временной ряд наблюдений:

$$\begin{cases} y_0 = y_0 - \sqrt{1 - \lambda_1^2} [y_0 - u(x_{10}, x_{20}, x_{30})] + \varepsilon_0; \\ y_k = u(x_{1k}, x_{2k}, x_{3k}) + \\ + \lambda_1 [y_{k-1} - u(x_{1,k-1}, x_{2,k-1}, x_{3,k-1})] + \varepsilon_k, & k = 1, 2, 3, \dots, N-1. \end{cases} \quad (13)$$

Аналогично можно сформировать систему уравнений при описании случайного возмущения моделью авторегрессии второго порядка:

$$\begin{cases} y_k = u(x_{1k}, x_{2k}, x_{3k}) + \eta_k, & k = 0, 1, 2, \dots, N-1; \\ \eta_k = \lambda_1 \eta_{k-1} + \lambda_2 \eta_{k-2} + \varepsilon_k, & |\lambda_2| < 1, \quad k = 2, 3, 4, \dots, N-1. \end{cases} \quad (14)$$

Найдем дисперсию σ_η^2 и ковариацию $\text{cov}[\eta_k, \eta_{k-1}]$. С учетом стационарности процесса и очевидных условий $M[\eta_k] = 0$, $M[\eta_{k-1}\varepsilon_k] = 0$ и $M[\eta_{k-2}\varepsilon_k] = 0$ имеем

$$\begin{aligned}\text{cov}[\eta_{k-1}, \eta_{k-2}] &= M[\eta_{k-1}\eta_{k-2}] = M[(\lambda_1\eta_{k-2} + \lambda_2\eta_{k-3} + \varepsilon_{k-1})\eta_{k-2}] = \\ &= \lambda_1\sigma_\eta^2 + \lambda_2M[\eta_{k-2}\eta_{k-3}] + M[\eta_{k-2}\varepsilon_{k-1}] = \lambda_1\sigma_\eta^2 + \lambda_2\text{cov}[\eta_{k-2}, \eta_{k-3}].\end{aligned}$$

Отсюда $\text{cov}[\eta_{k-1}, \eta_{k-2}] = \lambda_1\sigma_\eta^2/(1 - \lambda_2)$. Тогда

$$\begin{aligned}\sigma_\eta^2 &= M[\eta_k^2] = M[(\lambda_1\eta_{k-1} + \lambda_2\eta_{k-2} + \varepsilon_k)^2] = \\ &= \lambda_1^2\sigma_\eta^2 + \lambda_2^2\sigma_\eta^2 + \sigma_\varepsilon^2 + 2\lambda_1\lambda_2M[\eta_{k-1}\eta_{k-2}] + \\ &+ 2\lambda_1M[\eta_{k-1}\varepsilon_k] + 2\lambda_2M[\eta_{k-2}\varepsilon_k] = \lambda_1^2\sigma_\eta^2 + \lambda_2^2\sigma_\eta^2 + \sigma_\varepsilon^2 + \frac{2\lambda_1^2\lambda_2}{1 - \lambda_2}\sigma_\eta^2.\end{aligned}$$

Отсюда после простых алгебраических преобразований получаем

$$\sigma_\eta^2 = \frac{(1 - \lambda_2)\sigma_\varepsilon^2}{(1 + \lambda_2)[(1 - \lambda_2)^2 - \lambda_1^2]}.$$

Доопределим систему уравнений (14) для η_0 и η_1 , которые будем искать из соотношений

$$\begin{cases} \mu_{11}\eta_0 = \varepsilon_0; \\ \mu_{21}\eta_0 + \mu_{22}\eta_1 = \varepsilon_1. \end{cases} \quad (15)$$

Из первого уравнения системы (15) получаем $\sigma^2[\mu_{11}\eta_0] = \mu_{11}^2\sigma^2[\eta_0] = \sigma^2[\varepsilon_0]$. Отсюда $\mu_{11}^2 = \sigma_\varepsilon^2/\sigma_\eta^2 = (1 + \lambda_2)[(1 - \lambda_2)^2 - \lambda_1^2]/(1 - \lambda_2)$, следовательно,

$$\mu_{11} = \sqrt{(1 + \lambda_2)[(1 - \lambda_2)^2 - \lambda_1^2]/(1 - \lambda_2)}. \quad (16)$$

Элементы μ_{21} и μ_{22} найдем из системы равенств

$$\begin{cases} \sigma^2[\mu_{21}\eta_0 + \mu_{22}\eta_1] = \sigma^2[\varepsilon_1]; \\ \text{cov}[\varepsilon_0, \varepsilon_1] = 0. \end{cases}$$

Из первого равенства получаем $\mu_{21}^2\sigma_\eta^2 + 2\mu_{21}\mu_{22}\text{cov}[\eta_0, \eta_1] + \mu_{22}^2\sigma_\eta^2 = \sigma_\varepsilon^2$. Из второго — $\text{cov}[\varepsilon_0, \varepsilon_1] = \text{cov}[\mu_{11}\eta_0, \mu_{21}\eta_0 + \mu_{22}\eta_1] = \mu_{11}\mu_{21}\sigma_\eta^2 + \mu_{11}\mu_{22}\text{cov}[\eta_0, \eta_1] = 0$. Отсюда имеем

$$\begin{aligned}\mu_{21} &= -\frac{\text{cov}[\eta_0, \eta_1]}{\sigma_\eta^2}\mu_{22} = -\frac{\lambda_1}{1 - \lambda_2}\mu_{22}, \\ \frac{\lambda_1^2}{(1 - \lambda_2)^2}\mu_{22}^2\sigma_\eta^2 - \frac{2\lambda_1}{1 - \lambda_2}\mu_{22}^2\frac{\lambda_1}{1 - \lambda_2}\sigma_\eta^2 + \mu_{22}^2\sigma_\eta^2 &= \sigma_\varepsilon^2, \\ \left[1 - \frac{\lambda_1^2}{(1 - \lambda_2)^2}\right]\mu_{22}^2 &= \frac{\sigma_\varepsilon^2}{\sigma_\eta^2} = \frac{(1 + \lambda_2)[(1 - \lambda_2)^2 - \lambda_1^2]}{1 - \lambda_2},\end{aligned}$$

$$\mu_{22} = \sqrt{1 - \lambda_2^2}, \quad \mu_{21} = -\frac{\lambda_1}{1 - \lambda_2} \mu_{22} = -\lambda_1 \frac{\sqrt{1 + \lambda_2}}{\sqrt{1 - \lambda_2}}. \quad (17)$$

Тогда из соотношений

$$\begin{cases} \mu_{11}\eta_0 = \varepsilon_0; & y_0 - u(x_{10}, x_{20}, x_{30}) = \eta_0, & k = 0; \\ \mu_{21}\eta_0 + \mu_{22}\eta_1 = \varepsilon_1; & y_1 - u(x_{11}, x_{21}, x_{31}) = \eta_1, & k = 1; \\ \eta_k - \lambda_1\eta_{k-1} - \lambda_2\eta_{k-2} = \varepsilon_k; & \eta_k = y_k - u(x_{1k}, x_{2k}, x_{3k}); \\ \eta_{k-1} = y_{k-1} - u(x_{1,k-1}, x_{2,k-1}, x_{3,k-1}); \\ \eta_{k-2} = y_{k-2} - u(x_{1,k-2}, x_{2,k-2}, x_{3,k-2}), & k = 2, 3, \dots, N-1, \end{cases}$$

получаем систему уравнений, описывающую временной ряд наблюдений:

$$\begin{cases} y_0 = y_0 - \mu_{11}[y_0 - u(x_{10}, x_{20}, x_{30})] + \varepsilon_0; \\ y_1 = y_1 - \mu_{21}[y_0 - u(x_{10}, x_{20}, x_{30})] - \mu_{22}[y_1 - u(x_{11}, x_{21}, x_{31})] + \varepsilon_1; \\ y_k = u(x_{1k}, x_{2k}, x_{3k}) + \lambda_1[y_{k-1} - u(x_{1,k-1}, x_{2,k-1}, x_{3,k-1})] + \\ + \lambda_2[y_{k-2} - u(x_{1,k-2}, x_{2,k-2}, x_{3,k-2})] + \varepsilon_k, \quad k = 2, 3, \dots, N-1, \end{cases} \quad (18)$$

в которой зависимости $\mu_{11}(\lambda_1, \lambda_2)$, $\mu_{21}(\lambda_1, \lambda_2)$ и $\mu_{22}(\lambda_2)$ определяются формулами (16) и (17).

При линейной $u(x_1, x_2, x_3) = \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3$ и мультипликативно-степенной $u(x_1, x_2, x_3) = Ax_1^\alpha x_2^\beta x_3^\gamma$ производственных функциях системы уравнений (13) и (18) принимают следующий вид (модели 7–9):

$$\begin{cases} y_0 = y_0 - \sqrt{1 - \lambda_1^2}(y_0 - \lambda_2 x_{10} - \lambda_3 x_{20} - \lambda_4 x_{30}) + \varepsilon_0; \\ y_k = \lambda_2 x_{1k} + \lambda_3 x_{2k} + \lambda_4 x_{3k} + \\ + \lambda_1(y_{k-1} - \lambda_2 x_{1,k-1} - \lambda_3 x_{2,k-1} - \lambda_4 x_{3,k-1}) + \varepsilon_k, \\ k = 1, 2, 3, \dots, N-1, \end{cases} \quad (19)$$

$$\begin{cases} y_0 = y_0 - \sqrt{1 - \lambda_1^2}(y_0 - \lambda_2 x_{10}^{\lambda_3} x_{20}^{\lambda_4} x_{30}^{\lambda_5}) + \varepsilon_0; \\ y_k = \lambda_2 x_{1k}^{\lambda_3} x_{2k}^{\lambda_4} x_{3k}^{\lambda_5} + \lambda_1(y_{k-1} - \lambda_2 x_{1,k-1}^{\lambda_3} x_{2,k-1}^{\lambda_4} x_{3,k-1}^{\lambda_5}) + \varepsilon_k, \\ k = 1, 2, 3, \dots, N-1, \end{cases} \quad (20)$$

$$\begin{cases} y_0 = y_0 - \mu_{11}(y_0 - \lambda_3 x_{10} - \lambda_4 x_{20} - \lambda_5 x_{30}) + \varepsilon_0; \\ y_1 = y_1 - \mu_{21}(y_0 - \lambda_3 x_{10} - \lambda_4 x_{20} - \lambda_5 x_{30}) - \\ - \mu_{22}(y_1 - \lambda_3 x_{11} - \lambda_4 x_{21} - \lambda_5 x_{31}) + \varepsilon_1; \\ y_k = \lambda_3 x_{1k} + \lambda_4 x_{2k} + \lambda_5 x_{3k} + \\ + \lambda_1(y_{k-1} - \lambda_3 x_{1,k-1} - \lambda_4 x_{2,k-1} - \lambda_5 x_{3,k-1}) + \\ + \lambda_2(y_{k-2} - \lambda_3 x_{1,k-2} - \lambda_4 x_{2,k-2} - \lambda_5 x_{3,k-2}) + \varepsilon_k, \\ k = 2, 3, 4, \dots, N-1, \end{cases} \quad (21)$$

$$\begin{cases} y_0 = y_0 - \mu_{11}(y_0 - \lambda_3 x_{10}^{\lambda_4} x_{20}^{\lambda_5} x_{30}^{\lambda_6}) + \varepsilon_0; \\ y_1 = y_1 - \mu_{21}(y_0 - \lambda_3 x_{10}^{\lambda_4} x_{20}^{\lambda_5} x_{30}^{\lambda_6}) - \\ - \mu_{22}(y_1 - \lambda_3 x_{11}^{\lambda_4} x_{21}^{\lambda_5} x_{31}^{\lambda_6}) + \varepsilon_1; \\ y_k = \lambda_3 x_{1k}^{\lambda_4} x_{2k}^{\lambda_5} x_{3k}^{\lambda_6} + \lambda_1(y_{k-1} - \lambda_3 x_{1,k-1}^{\lambda_4} x_{2,k-1}^{\lambda_5} x_{3,k-1}^{\lambda_6}) + \\ + \lambda_2(y_{k-2} - \lambda_3 x_{1,k-2}^{\lambda_4} x_{2,k-2}^{\lambda_5} x_{3,k-2}^{\lambda_6}) + \varepsilon_k, \\ k = 2, 3, 4, \dots, N-1, \end{cases} \quad (22)$$

где зависимости $\mu_{11}(\lambda_1, \lambda_2)$, $\mu_{21}(\lambda_1, \lambda_2)$ и $\mu_{22}(\lambda_2)$ также определяются формулами (16) и (17).

Ковариационно-стационарные модели временных рядов в форме разностных уравнений (19)–(22) образуют третью группу математических моделей, описывающих процессы энергопроизводства при системном анализе эффективности функционирования региональной энергосистемы.

Модели (7), (9) и (10) — линейные, а модели (8), (11), (19)–(22) — нелинейные относительно параметров, подлежащих оценке на основе результатов наблюдений в форме статистических данных, публикуемых в ежегодной отчетности региональных министерств и энергетических компаний. Отметим также, что во всех представленных выше моделях (7)–(11), (19)–(22) предполагается, что случайные возмущения ε_k , $k = 0, 1, 2, \dots, N - 1$, в результатах наблюдений имеют нулевое математическое ожидание и не коррелируют друг с другом:

$$M[\varepsilon_k] = 0, \quad M[\varepsilon_k \varepsilon_{k \pm s}] = \begin{cases} \sigma_\varepsilon^2, & s = 0; \\ 0, & s \neq 0. \end{cases}$$

Поэтому в качестве критерия среднеквадратичного оценивания параметров моделей используется минимизация суммы квадратов остатков (3). Проверка обоснованности выбора такого критерия строится на основе анализа остатков, выявления в них корреляции и статистики Дарбина—Уотсона [13, 21].

Применение методов регрессионного анализа позволяет находить, а для нелинейных моделей уточнять оценки коэффициентов математической модели по формуле (6). При этом элементы вектора z и элементы $f_{k,j}$ вектора-строки f_k матрицы F описываются следующими соотношениями.

1. Для трехфакторной линейной регрессионной модели (7), построенной на основе линейной производственной функции:

$$\begin{cases} z_k = y_{k-1}; \\ f_k = (x_{1,k-1}, x_{2,k-1}, x_{3,k-1}), \quad k = 1, 2, 3, \dots, N. \end{cases}$$

2. Для трехфакторной линейной регрессионной модели (8), построенной на основе мультипликативно-степенной производственной функции:

$$\begin{cases} u_k^{(i)} = \lambda_1^{(i)} x_{1k}^{\lambda_2^{(i)}} x_{2k}^{\lambda_3^{(i)}} x_{3k}^{\lambda_4^{(i)}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N - 1; \\ z_k^{(i)} = y_{k-1} + u_{k-1}^{(i)} (\lambda_2^{(i)} \ln x_{1,k-1} + \lambda_3^{(i)} \ln x_{2,k-1} + \lambda_4^{(i)} \ln x_{3,k-1}); \\ f_k^{(i)} = u_{k-1}^{(i)} ((\lambda_1^{(i)})^{-1}, \ln x_{1,k-1}, \ln x_{2,k-1}, \ln x_{3,k-1}), \quad k = 1, 2, 3, \dots, N. \end{cases}$$

3. Для линейной ковариационно-стационарной модели (9) в форме разностного уравнения с полиномиальным трендом второго порядка:

$$\begin{cases} z_k = y_{k+1}; \\ f_k = (y_k, y_{k-1}, 1, t_{k+1}, t_{k+1}^2), \quad k = 1, 2, 3, \dots, N - 2. \end{cases}$$

4. Для ковариационно-стационарной модели (10) в форме разностного уравнения с полиномиальным трендом нулевого порядка и линейной функ-

цией входных воздействий (факторов):

$$\begin{cases} z_k = y_k; \\ f_k = (y_{k-1}, 1, x_{1k}, x_{2k}, x_{3k}), \quad k = 1, 2, 3, \dots, N-1. \end{cases}$$

5. Для ковариационно-стационарной модели (11) в форме разностного уравнения с нелинейным трендом в форме мультипликативно-степенной трехфакторной функции:

$$\begin{cases} u_k^{(i)} = \lambda_3^{(i)} x_{1k}^{(i)} x_{2k}^{(i)} x_{3k}^{(i)}, & k = 2, 3, 4, \dots, N-1; \\ z_k^{(i)} = y_{k+1} + u_{k+1}^{(i)} (\lambda_4^{(i)} \ln x_{1,k+1} + \lambda_5^{(i)} \ln x_{2,k+1} + \lambda_6^{(i)} \ln x_{3,k+1}); \\ f_k^{(i)} = (y_k, y_{k-1}, u_{k+1}^{(i)} / \lambda_3^{(i)}, u_{k+1}^{(i)} \ln x_{1,k+1}, u_{k+1}^{(i)} \ln x_{2,k+1}, u_{k+1}^{(i)} \ln x_{3,k+1}), \\ & k = 1, 2, 3, \dots, N-2. \end{cases}$$

6. Для ковариационно-стационарной модели (19), построенной на основе линейной регрессионной модели со случайным возмущением, описываемым авторегрессией первого порядка:

$$\begin{cases} u_k^{(i)} = \lambda_2^{(i)} x_{1k} + \lambda_3^{(i)} x_{2k} + \lambda_4^{(i)} x_{3k}, & k = 0, 1, 2, \dots, N-2; \\ z_k^{(i)} = y_k - \lambda_1^{(i)} u_{k-1}^{(i)}; \\ f_k^{(i)} = (y_{k-1} - u_{k-1}^{(i)}, x_{1k} - \lambda_1^{(i)} x_{1,k-1}, x_{2k} - \lambda_1^{(i)} x_{2,k-1}, x_{3k} - \lambda_1^{(i)} x_{3,k-1}), \\ & k = 1, 2, 3, \dots, N-1. \end{cases}$$

7. Для ковариационно-стационарной модели (20), построенной на основе нелинейной регрессионной модели со случайным возмущением, описываемым авторегрессией первого порядка:

$$\begin{cases} u_k^{(i)} = \lambda_2^{(i)} x_{1k}^{(i)} x_{2k}^{(i)} x_{3k}^{(i)}, & k = 0, 1, 2, \dots, N-1; \\ z_k^{(i)} = y_k + u_k^{(i)} (\lambda_3^{(i)} \ln x_{1k} + \lambda_4^{(i)} \ln x_{2k} + \lambda_5^{(i)} \ln x_{3k}) - \\ & - \lambda_1^{(i)} u_{k-1}^{(i)} (1 + \lambda_3^{(i)} \ln x_{1,k-1} + \lambda_4^{(i)} \ln x_{2,k-1} + \lambda_5^{(i)} \ln x_{3,k-1}); \\ f_k^{(i)} = (y_{k-1} - u_{k-1}^{(i)}, (u_k^{(i)} - \lambda_1^{(i)} u_{k-1}^{(i)}) / \lambda_2^{(i)}, \\ & u_k^{(i)} \ln x_{1k} - \lambda_1^{(i)} u_{k-1}^{(i)} \ln x_{1,k-1}, u_k^{(i)} \ln x_{2k} - \lambda_1^{(i)} u_{k-1}^{(i)} \ln x_{2,k-1}, \\ & u_k^{(i)} \ln x_{3k} - \lambda_1^{(i)} u_{k-1}^{(i)} \ln x_{3,k-1}), \\ & k = 1, 2, 3, \dots, N-1. \end{cases}$$

8. Для ковариационно-стационарной модели (21), построенной на основе линейной регрессионной модели со случайным возмущением, описываемым авторегрессией второго порядка:

$$\begin{cases} u_k^{(i)} = \lambda_3^{(i)} x_{1k} + \lambda_4^{(i)} x_{2k} + \lambda_5^{(i)} x_{3k}, & k = 0, 1, 2, \dots, N-2; \\ z_k^{(i)} = y_{k+1} - \lambda_1^{(i)} u_k^{(i)} - \lambda_2^{(i)} u_{k-1}^{(i)}; \\ f_k^{(i)} = (y_k - u_k^{(i)}, y_{k-1} - u_{k-1}^{(i)}, x_{1,k+1} - \lambda_1^{(i)} x_{1,k} - \lambda_2^{(i)} x_{1,k-1}, \\ & x_{2,k+1} - \lambda_1^{(i)} x_{2,k} - \lambda_2^{(i)} x_{2,k-1}, x_{3,k+1} - \lambda_1^{(i)} x_{3,k} - \lambda_2^{(i)} x_{3,k-1}), \\ & k = 1, 2, 3, \dots, N-2. \end{cases}$$

9. Для ковариационно-стационарной модели (22), построенной на основе нелинейной регрессионной модели со случайным возмущением, описываемым авторегрессией второго порядка:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_k^{(i)} = \lambda_3^{(i)} x_{1k}^{(i)} x_{2k}^{(i)} x_{3k}^{(i)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1; \\ z_k^{(i)} = y_{k+1} + u_{k+1}^{(i)} (\lambda_4^{(i)} \ln x_{1,k+1} + \lambda_5^{(i)} \ln x_{2,k+1} + \lambda_6^{(i)} \ln x_{3,k+1}) - \\ \quad - \lambda_1^{(i)} u_k^{(i)} (1 + \lambda_4^{(i)} \ln x_{1,k} + \lambda_5^{(i)} \ln x_{2,k} + \lambda_6^{(i)} \ln x_{3,k}) - \\ \quad - \lambda_2^{(i)} u_{k-1}^{(i)} (1 + \lambda_4^{(i)} \ln x_{1,k-1} + \lambda_5^{(i)} \ln x_{2,k-1} + \lambda_6^{(i)} \ln x_{3,k-1}); \\ f_k^{(i)} = (y_k - u_k^{(i)}, y_{k-1} - u_{k-1}^{(i)}, (u_{k+1}^{(i)} - \lambda_1^{(i)} u_k^{(i)} - \lambda_2^{(i)} u_{k-1}^{(i)}) / \lambda_3^{(i)}, \\ \quad u_{k+1}^{(i)} \ln x_{1,k+1} - \lambda_1^{(i)} u_k^{(i)} \ln x_{1,k} - \lambda_2^{(i)} u_{k-1}^{(i)} \ln x_{1,k-1}, \\ \quad u_{k+1}^{(i)} \ln x_{2,k+1} - \lambda_1^{(i)} u_k^{(i)} \ln x_{2,k} - \lambda_2^{(i)} u_{k-1}^{(i)} \ln x_{2,k-1}, \\ \quad u_{k+1}^{(i)} \ln x_{3,k+1} - \lambda_1^{(i)} u_k^{(i)} \ln x_{3,k} - \lambda_2^{(i)} u_{k-1}^{(i)} \ln x_{3,k-1}), \\ \quad k = 1, 2, 3, \dots, N-2. \end{array} \right.$$

4. Результаты математического моделирования динамики выпуска продукции энергосистемы на основе результатов наблюдений. На основе статистических данных, публикуемых в ежегодной отчетности региональных министерств и энергетических компаний за период времени с 1990 по 2021 годы, с учетом представленных выше соотношений по алгоритму, описанному формулой (6), построены девять математических моделей динамики выпуска продукции энергосистемы. Результаты расчета параметров математических моделей представлены в табл. 1.

В последних четырех столбцах табл. 1 приведены следующие значения: $Q_{res} = \|y - \hat{y}\|^2$ — сумма квадратов отклонений результатов расчета $\hat{y}_k$ по модели от результатов наблюдений; $s = (\|y - \hat{y}\| / \|y\|) \cdot 100\%$ — оценка относительного отклонения модели от эксперимента; $cond$ — число обусловленности матрицы нормальной системы уравнений $F^{(i)\top} F^{(i)}$, характеризующее устойчивость вычисления среднеквадратичных оценок параметров модели; $DW = 2(1 - r)$ — статистика Дарбина—Уотсона, на основе которой можно сделать вывод о наличии автокорреляции первого порядка в случайном возмущении ε_k , где r — выборочный коэффициент корреляции.

Статистический анализ полученных результатов, приведенных в табл. 1, позволяет сделать следующие выводы.

Во-первых, построенные модели 4–9 (см. формулы (10), (11), (19)–(22)) с достаточно высокой степенью адекватности аппроксимируют результаты наблюдений. Причем графики функций, описывающих динамику выпуска продукции энергопроизводств, построенные на основе моделей 4 и 5 (сплошная линия на рис. 1) и моделей 6–9 (штриховая линия на рис. 1), практически совпадают. Точки на рис. 1 отображают статистические данные выпуска продукции энергопроизводств в относительных единицах.

Во-вторых, с учетом плохой обусловленности матрицы нормальной системы уравнений $F^{(i)\top} F^{(i)}$ при вычислении среднеквадратичных оценок параметров математической модели (9) в форме разностного уравнения с полиномиальным трендом второго порядка можно сделать вывод о наличии мультиколлинеарности, отрицательные последствия которой проявляются в виде неустойчивости как оценок, так и самой процедуры оценивания, а также

Таблица 1

Результаты расчета параметров математических моделей
 [Results of the calculation of mathematical model parameters]

Model		Model coefficients						Q_{res}	s , %	cond	DW
nos.	Eq.	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6				
1	(7)	-0.038	-0.048	1.103				0.022	4.2	214	0.8
2	(8)	1.008	-0.167	-0.058	1.035			0.017	3.7	71	1.0
3	(9)	0.921	-0.199	108.2	-0.1064	$2.6 \cdot 10^{-5}$		0.032	5.5	$1.5 \cdot 10^7$	2.2
4	(10)	0.276	0.070	-0.047	-0.053	0.750		0.011	3.2	4535	1.6
5	(11)	0.314	-0.038	0.730	-0.158	-0.099	1.071	0.011	3.3	2469	1.6
6	(19)	0.785	-0.009	0.009	0.953			0.013	3.4	170	1.9
7	(20)	0.684	0.965	-0.128	0.016	0.945		0.012	3.3	77	1.9
8	(21)	0.885	-0.123	0.0099	0.017	0.894		0.013	3.5	769	2.1
9	(22)	0.818	-0.108	0.900	-0.063	0.037	0.853	0.012	3.4	203	2.1

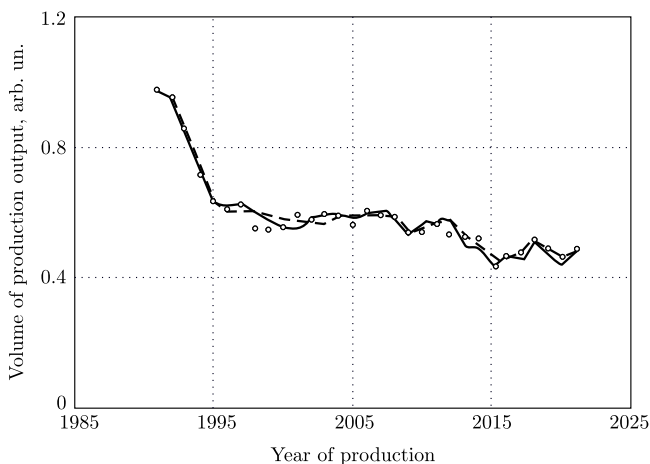


Рис. 1. Графики функций, описывающих динамику выпуска продукции энергопроизводств: точки — статистические данные выпуска продукции; сплошная линия — данные на основе моделей 4 и 5 (формулы (10) и (11)); штриховая линия — данные на основе моделей 6–9 (формулы (19)–(22))

[Figure. 1. Plots of functions describing the dynamics of production output in energy industries: points — statistical data on production output; solid line — data based on models 4 and 5 (Eqs. (10) and (11)); dashed line — data based on models 6–9 (Eqs. (19)–(22))]

в резком увеличении дисперсии оценок параметров и уменьшении точности предсказания по модели [12, 14]. Вследствие этого данная модель не может быть рекомендована к практическому применению при описании динамики выпуска продукции региональной энергосистемы и достоверного прогноза на ее основе.

В-третьих, из анализа остатков $e = y_k - \hat{y}_k$, $k = 0, 1, 2, \dots, 31$, и оценки DW следует, что практически во всех моделях временного ряда наблюдений (из первой и второй групп по описанной выше систематизации) имеет место автокорреляция между элементами случайной величины ε_k . В связи с этим среднеквадратичное оценивание параметров модели на основе классического метода наименьших квадратов (МНК): $\|e\|^2 = \|y - \hat{y}\|^2 \rightarrow \min$ приводит не только к неэффективности этих оценок, но и к существенному занижению оценок дисперсий результатов расчета, в силу чего оценки дисперсии σ_ε^2 оказываются смещенными и создается неверное впечатление о точности прогноза по модели [12, 14].

В-четвертых, статистический анализ построенных моделей (19)–(22) из третьей группы показал нецелесообразность использования при описании временного ряда случайных возмущений в результатах наблюдений модели авторегрессии второго порядка $\eta_k = \lambda_1 \eta_{k-1} + \lambda_2 \eta_{k-2} + \varepsilon_k$, а вполне достаточно ограничиться авторегрессией первого порядка $\eta_k = \lambda_1 \eta_{k-1} + \varepsilon_k$. То есть отдается предпочтение моделям (19) и (20).

Окончательный выбор математической модели, наиболее эффективно аппроксимирующей результаты наблюдений в форме статистических данных, публикуемых в ежегодной отчетности региональных министерств и энергетических компаний, может быть сделан на основе анализа погрешности прогноза по соответствующей модели на один или несколько лет вперед.

5. Сравнительный анализ разработанных математических моделей на основе оценки погрешности прогноза. Сравнительный анализ исследуемых моделей был выполнен на основе данных, собранных за 20 лет ($N = 20$). Прогнозы были рассчитаны на сроки $p = 1, 2, 3, 4$ и 5 лет, начиная с 2010 года и до 2022 – p года. Усредненные результаты погрешностей прогнозирования представлены в табл. 2. Анализ ошибок прогнозов при использовании моделей 1–9 позволяет сделать выбор в пользу модели 7, описываемой формулой (20).

Результаты сравнения точности прогноза на основе известной [1–3] мультипликативно-степенной модели (модель 2, формула (8)) и модели временного ряда в форме разностного уравнения (модель 7, формула (20)) представлены на рис. 2. Видно, что погрешность прогноза δ , сделанного на основе модели 7, существенно меньше (в среднем на 27%) погрешности прогноза, сделанного на основе модели 2. Также видно, что из-за некорректности применения классического метода наименьших квадратов при оценке параметров модели 2 вследствие смещения оценки дисперсии случайного возмущения в результатах наблюдения величина оценки относительной предельной погрешности прогноза Δ (доверительный интервал) оказывается завышенной.

При выборе формы трехфакторной функциональной зависимости (1), описывающей динамику выпуска продукции региональной энергосистемы, предполагалось, что факторные эластичности для наблюдаемого процесса есть величины постоянные, равные параметрам модели α, β и γ . Однако это предположение ни в одной из работ [1–8] не было обосновано.

Для устранения этого недостатка и обоснования независимости от времени факторных эластичностей построенной модели

$$y_k = \lambda_2 x_{1k}^{\lambda_3} x_{2k}^{\lambda_4} x_{3k}^{\lambda_5} + \lambda_1 (y_{k-1} - \lambda_2 x_{1,k-1}^{\lambda_3} x_{2,k-1}^{\lambda_4} x_{3,k-1}^{\lambda_5}) + \varepsilon_k$$

рассмотрим аппроксимацию зависимостей $\alpha(t)$, $\beta(t)$ и $\gamma(t)$ многочленами нулевой степени α_0, β_0 и γ_0 и проверим гипотезу об адекватности таких моделей результатам расчетов, представленных во втором, четвертом и шестом столбцах табл. 3 соответственно.

Обозначим в общем виде факторную эластичность через $p \in \{\alpha, \beta, \gamma\}$ и рассмотрим регрессионную модель в виде многочлена нулевой степени

$$p_k = c_0 + \eta_k, \quad k = \overline{1, n_p}, \quad (23)$$

Таблица 2

Погрешности прогноза выпуска продукции энергопроизводств, сделанного на основе исследуемых математических моделей (в процентах) [Forecast errors in the production output of energy industries based on the studied mathematical models (in percent)]

Number of years for which the forecast has been made	Model numbers								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	7.6	4.9	6.8	4.4	4.5	4.9	3.7	5.8	5.4
2	9.1	7.3	9.8	7.2	7.0	7.4	5.5	7.9	7.9
3	10.3	9.6	11.6	10.1	9.1	9.5	7.2	10.6	9.8
4	9.9	11.0	15.5	12.7	11.4	11.1	9.2	11.3	11.0
5	9.0	12.1	15.2	15.1	13.4	12.1	11.2	12.1	12.5

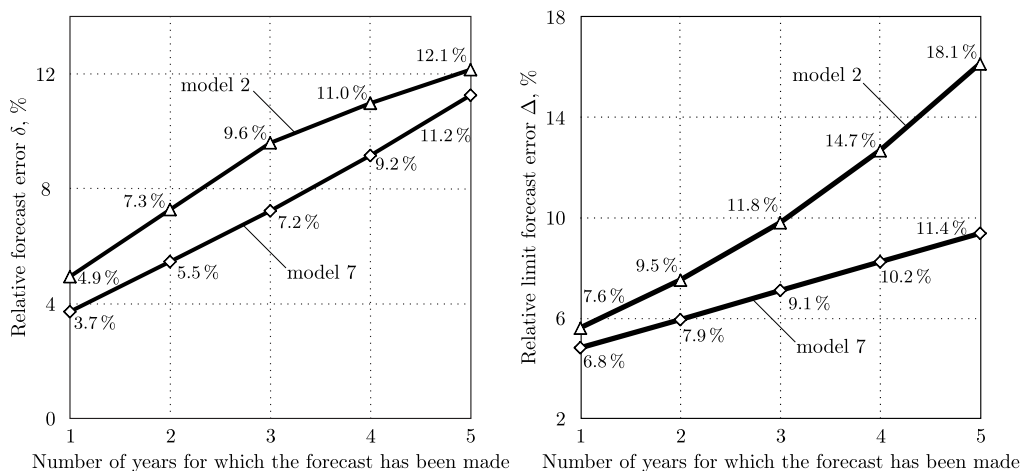


Рис. 2. Относительная ошибка прогноза δ (%) и относительная предельная ошибка прогноза Δ (%) объемов производства в отраслях энергетики, рассчитанных по моделям 2 и 7

[Figure. 2. Relative forecast error δ (%) and relative limit forecast error Δ (%) of production output in energy industries calculated by models 2 and 7]

Таблица 3

Результаты расчетов коэффициентов эластичности и оценки точности этих расчетов
[Results of the calculations of elasticity coefficients and evaluation of the accuracy of these calculations]

Observation period	α	$s[\alpha]$	β	$s[\beta]$	γ	$s[\gamma]$
1991–2011	0.093	0.198	0.061	0.110	0.881	0.258
1992–2012	0.159	0.181	0.105	0.110	0.658	0.298
1993–2013	0.155	0.181	0.102	0.110	0.681	0.258
1994–2014	0.210	0.176	0.142	0.113	0.562	0.238
1995–2015	0.188	0.136	0.118	0.095	0.548	0.225
1996–2016	0.226	0.109	0.106	0.073	0.457	0.207
1997–2017	0.103	0.136	0.107	0.075	0.499	0.189
1998–2018	−0.072	0.085	0.110	0.085	0.650	0.166
1999–2019	−0.116	0.059	0.122	0.065	0.700	0.143
2000–2020	−0.109	0.066	0.121	0.060	0.688	0.124
2001–2021	−0.167	0.064	0.195	0.077	0.673	0.120

где $n_p = 11$ — число точек, по которым строится данная модель, то есть по которым находится оценка $\hat{c}_0$ аппроксимации временной зависимости факторной эластичности p многочленом нулевой степени.

В третьем, пятом и последнем столбцах табл. 3 приведены оценки $s[p_k] = s[\eta_k]$ среднеквадратичного отклонения результатов расчета p_k , $k = \overline{1, n_p}$. Так как очевидно, что эти результаты не являются равноточными, при оценке единственного параметра c_0 модели (23) можно воспользоваться взвешенным методом наименьших квадратов [12–15]. В качестве весов ω_k примем величины $\omega_k = s_k^2 = (s[p_k])^2$.

С учетом соотношения $\eta_k = \sqrt{\omega_k} \cdot \varepsilon_k$, где ε_k — случайная величина, удовлетворяющая условиям теоремы Гаусса–Маркова [14], регрессию (23) пре-

образуем к виду

$$\frac{p_k}{s_k} = \frac{1}{s_k} c_0 + \varepsilon_k, \quad k = \overline{1, np}. \quad (24)$$

Заметим, что при этом из соотношения $s^2[\eta_k] = \omega_k s_\varepsilon^2 = s_k^2$, где $s^2[\eta_k]$ и s_ε^2 — оценки дисперсии случайных величин η_k и ε_k , следует, что $s_\varepsilon^2 = s^2[\eta_k]/s_k^2 = 1$, то есть при выбранных весах $\omega_k = s_k^2$ происходит нормирование оценки дисперсии случайного возмущения в регрессии (24).

Отсюда на основе минимизации $\|\varepsilon\|^2 \rightarrow \min$ получаем оценку

$$\hat{c}_0 = \sum_{k=1}^{n_p} p_k s_k^{-2} / \sum_{k=1}^{n_p} s_k^{-2}. \quad (25)$$

Оценку s_{res}^2 дисперсии σ_ε^2 для модели (24) можно найти по формуле

$$s_{res}^2 = \frac{1}{n_p - 1} \sum_{k=1}^{n_p} s_k^{-2} (p_k - \hat{c}_0)^2. \quad (26)$$

Во втором, третьем и четвертом столбцах табл. 4 приведены результаты расчетов оценок $\hat{c}_0$, $\sum_{k=1}^{n_p} s_k^{-2}$ и s_{res}^2 по описанным выше формулам (25) и (26) для факторных эластичностей α , β и γ соответственно.

Таблица 4

Анализ зависимости факторных эластичностей от времени [Analysis of the dependence of factor elasticities on time]

Factor elasticities, p	$\hat{c}_0 \in \{\hat{\alpha}_0, \hat{\beta}_0, \hat{\gamma}_0\}$	$\sum_{k=1}^{n_p} s_k^{-2}$	s_{res}^2	$s[c_0]$	t
α	-0.046	1215.0	2.15	0.029	1.61
β	0.120	1623.0	0.14	0.025	4.85
γ	0.645	349.6	0.29	0.053	12.06

Проверку гипотезы об адекватности модели (24), то есть о корректности аппроксимации результатов расчета p_k , $k = \overline{1, n_p}$, описывающих временную зависимость факторной эластичности, константой $\hat{c}_0$, можно выполнить на основе распределения Фишера $F = s_{res}^2/s_\varepsilon^2$ [12]. При нормированной оценке дисперсии $s_\varepsilon^2 = 1$ имеем $F = s_{res}^2$ (четвертый столбец табл. 4). Сравнивая эти значения с $F_{cr} = F(0.05, 10, 18) = 2.48$, имеем $F < F_{cr}$ для каждого параметра α , β и γ . Отсюда можно сделать вывод о правомерности выбора математической модели, описывающей динамику выпуска продукции региональной энергосистемы, в форме нелинейной трехфакторной степенной зависимости (1), факторные эластичности которой не меняются за период времени с 1990 по 2021 год.

Среднеквадратичное отклонение оценок $\hat{c}_0$, вычисленных по формуле (25) с учетом известных $s^2[p_k] = s_k^2$, можно найти на основе соотношений

$$s^2[\hat{c}_0] = \frac{\sum_{k=1}^{n_p} (s_k^{-2})^2 s^2[p_k]}{(\sum_{k=1}^{n_p} s_k^{-2})^2} = \frac{\sum_{k=1}^{n_p} s_k^{-2}}{(\sum_{k=1}^{n_p} s_k^{-2})^2} = \frac{1}{\sum_{k=1}^{n_p} s_k^{-2}}.$$

Отсюда имеем, что

$$s[\hat{c}_0] = \left(\sum_{k=1}^{n_p} s_k^{-2} \right)^{-1/2}. \quad (27)$$

Среднеквадратичные оценки $s[\hat{\alpha}_0]$, $s[\hat{\beta}_0]$ и $s[\hat{\gamma}_0]$, найденные по формуле (27), представлены в пятом столбце табл. 4. На их основе можно выдвинуть гипотезу о значимости параметра $\hat{c}_0$ [12]. Для проверки этой гипотезы вычисляется статистика $t = |\hat{c}_0|/s[\hat{c}_0]$, значения которой для различных факторных эластичностей приведены в последнем столбце табл. 4. Сравнивая эти значения с критическим значением из таблицы распределения Стьюдента $t_{cr} = t(0.05, 10) = 2.23$, можно сделать вывод о незначимости параметра α в нелинейной трехфакторной степенной зависимости (1). Это может служить поводом для упрощения модели (1), исключив из нее фактор $K(t)$, описывающий капитальные ресурсы. Однако из-за корреляции оценок параметров проверка значимости может оказаться не слишком точной, а упрощение модели — ненадежным. Как следствие, оценки прогноза получаются смещенными, и лучше оставить в модели незначимые параметры, чем отбросить значимые [12].

Таким образом, с учетом результатов проведенных численно-аналитических исследований и сравнительного анализа различных моделей функционирования региональной энергосистемы к практическому применению при решении задач оптимизации и планирования деятельности региональных энергопроизводств на основе системного анализа эффективности региональной энергетики можно рекомендовать ковариационно-стационарную модель временного ряда в форме разностного уравнения с мультипликативно-степенным трендом

$$y_k = \lambda_2 x_{1k}^{\lambda_3} x_{2k}^{\lambda_4} x_{3k}^{\lambda_5} + \lambda_1 (y_{k-1} - \lambda_2 x_{1,k-1}^{\lambda_3} x_{2,k-1}^{\lambda_4} x_{3,k-1}^{\lambda_5}) + \varepsilon_k, \quad k = 1, 2, 3, \dots, N-1.$$

Применение такой модели позволяет обеспечить высокую точность оценок ее параметров: факторных эластичностей, а также достоверность прогнозов выпуска продукции энергопроизводств на достаточно длительный промежуток времени.

Заключение. Проведен анализ математического описания функционирования региональной энергосистемы и численных методов параметрической идентификации трехфакторной мультипликативно-степенной модели в виде производственной функции.

С учетом выявленных недостатков предложены и систематизированы ковариационно-стационарные модели в форме разностных уравнений с детерминированными трендами в виде линейных и нелинейных трехфакторных зависимостей, учитывающие стохастический характер временного ряда результатов наблюдений.

На основе статистического анализа результатов параметрической идентификации, в том числе анализа остатков, сделаны выводы об устойчивости используемых алгоритмов численных методов, а также о целесообразности применения моделей временных рядов при описании случайного возмущения в регрессионных моделях.

По результатам сравнительного анализа на основе оценок погрешности прогноза из рассматриваемой совокупности моделей выбрана наиболее эффективная математическая модель с минимальной ошибкой прогноза выпуска продукции энергосистемы на период времени от одного года до пяти лет.

Конкурирующие интересы. Конкурирующих интересов не имеется.

Авторский вклад и ответственность. Все авторы принимали участие в разработке концепции статьи и в написании рукописи. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

Финансирование. Исследование выполнялось без финансирования.

Библиографический список

1. Гаврилова А. А., Цапенко М. В. Синтез математических моделей региональной энергосистемы как многомерных производственных функций // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Техн. науки*, 2002. № 14. С. 126–192.
2. Колмыков Д. С., Гаврилова А. А. Модельный анализ эффективности функционирования региональных энергопроизводств / *Труды Третьей Всероссийской научной конференции* (29–31 мая 2006 г.). Часть 2: Моделирование и оптимизация динамических систем и систем с распределенными параметрами / Матем. моделирование и краев. задачи. Самара: СамГТУ, 2006. С. 93–96.
3. Дилигенский Н. В., Гаврилова А. А., Салов А. Г., Гаврилов В. К. Модельный анализ эффективности совместного производства тепловой и электрической энергии региональной энергосистемой // *Изв. высш. учебн. завед. Северо-Кавказск. регион. Техн. науки*, 2008. № 5. С. 37–40. EDN: JUPXNJ.
4. Салов А. Г., Гаврилова А. А. Системный анализ и моделирование деятельности энергетических генерирующих предприятий с целью оценки эффективности их функционирования в условиях становления рыночных отношений // *Вестн. Саратов. гос. техн. ун-та*, 2008. Т. 1, № 1. С. 86–91. EDN: JUIJHL.
5. Салов А. Г., Гаврилова А. А., Иванова Д. В. Исследование экономических характеристик регионального промышленного комплекса методами статистического и модельного анализа // *Научное обозрение*, 2015. № 15. С. 327–332. EDN: UXSICN.
6. Салов А. Г., Гаврилова А. А., Князев П. А., Круглов В. А. Имитационное моделирование деятельности генерирующего комплекса на основе трехфакторной производственной функции // *Градостроительство и архитектура*, 2016. № 3. С. 140–145. EDN: WW0JDJ. DOI: <https://doi.org/10.17673/Vestnik.2016.03.23>.
7. Ivanova D. V., Salov A. G., Gavrilova A. A. Control algorithms development for manufacturing and economic systems activity // *J. Phys.: Conf. Ser.*, 2018. vol. 1111, 012073. EDN: VZIFDX. DOI: <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1111/1/012073>.
8. Гаврилова А. А., Салов А. Г. *Системная методология анализа и моделирования энергоэффективности генерирующих компаний*. Самара: Научно-технический центр, 2021. 277 с. EDN: ZZZXNK.
9. Абрамов А. П., Бессонов В. А., Никифоров Л. Т., Свириденко К. С. *Исследование динамики макроэкономических показателей методом производственных функций*. М.: ВЦ АН СССР, 1987. 62 с.
10. Замков О. О., Толстопятенко А. В., Черемных Ю. Н. *Математические методы в экономике*. М.: МГУ, 1997. 368 с.
11. Зотеев В. Е., Башкинова Е. В., Староквашева П. В. Математическое моделирование функционирования энергетической системы Самарской области / *Перспективные информационные технологии (ПИТ 2020): Труды Международной научно-технической конференции*. Самара: Сам. научн. центр РАН, 2020. С. 361–365. EDN: KVSXGT.
12. Вучков И., Бояджиева Л., Солаков О. *Прикладной линейный регрессионный анализ*. М.: Финансы и статистика, 1987. 238 с.

13. Draper N. R., Smith H. *Applied Regression Analysis* / Wiley Series in Probability and Statistics. New York: John Wiley and Sons, 1998. xvii+706 pp. DOI: <https://doi.org/10.1002/9781118625590>.
14. Демиденко Е. З. *Линейная и нелинейная регрессии*. М.: Финансы и статистика, 1981. 302 с.
15. Seber G. A. F., Lee A. J. *Linear Regression Analysis* / Wiley Series in Probability and Statistics. Hoboken, NJ: Wiley, 2003. xvi+557 pp.
16. Box G. E. P., Jenkins G. M.; Reinsel G. C., Ljung G. M. *Time Series Analysis. Forecasting and Control* / Wiley Series in Probability and Statistics. Hoboken, NJ: John Wiley and Sons, 2016. 712 pp.
17. Anderson T. W. *The Statistical Analysis of Time Series* / Wiley Classics Library. Chichester: John Wiley and Sons, 1994. xiv+704 pp.
18. Kendall M. G., Stuart A. *The Advanced Theory of Statistics*. vol. 3: Design and Analysis, and Time-Series. London: Charles Griffin, 1976. x+585 pp.
19. Otnes R. K., Enochson L. *Applied Time Series Analysis*. vol. 1: Basic Techniques. New York: John Wiley and Sons, 1978. xiv+449 pp.
20. Kashyap R. L., Ramachandra Rao A. *Dynamic Stochastic Models from Empirical Data* / Mathematics in Science and Engineering. vol. 122. New York: Academic Press, 1976. xvi+334 pp. DOI: [https://doi.org/10.1016/s0076-5392\(08\)x6016-3](https://doi.org/10.1016/s0076-5392(08)x6016-3).
21. Durbin J., Watson G. S Testing for serial correlation in least squares regression: I // *Biometrika*, 1950. vol. 37, no. 3/4. pp. 409–428. DOI: <https://doi.org/10.2307/2332391>.
22. Грановский В. А., Сирая Т. Н. *Методы обработки экспериментальных данных при измерениях*. Л.: Энергоатомиздат, 1990. 288 с.
23. Зотеев В. Е. Численный метод нелинейного оценивания на основе разностных уравнений // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2018. Т. 22, № 4. С. 669–701. EDN: YSDYZN. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1643>.

MSC: 91B84, 91B82

Development and comparative analysis of mathematical models for the functioning of the regional power system of the Samara region

V. E. Zoteev, L. A. Sagitova, A. A. Gavrilova

Samara State Technical University,
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russian Federation.

Abstract

Systematic research into the operations of the regional power system aimed at improving the efficiency of energy complex management, taking into account the contribution of utilized resources, is fundamentally impossible without the enhancement of mathematical models and methods for their identification based on statistical data.

This article presents the results of an analysis of a well-known mathematical description of the functioning of the regional power system, highlighting significant shortcomings that negatively impact both the reliability of assessments of key performance indicators of the energy complex and the accuracy of forecasts made based on the constructed model.

The study examines and systematizes various three-factor regression models and covariance-stationary time series models based on linear and nonlinear regression into three main groups. Algorithms for numerical methods of least squares estimation of the parameters of these models based on observational results are described.

Results of mathematical modeling of the dynamics of energy system output based on statistical data published in the annual reports of regional ministries and energy companies are provided. A statistical analysis of the

Mathematical Modeling, Numerical Methods and Software Complexes Research Article

© The Author(s), 2024

© Samara State Technical University, 2024 (Compilation, Design, and Layout)

♾️ © ⓘ ⓘ The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Please cite this article in press as:

Zotееv V. E., Sagitova L. A., Gavrilova A. A. Development and comparative analysis of mathematical models for the functioning of the regional power system of the Samara region, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2024, vol. 28, no. 3, pp. 586–608. EDN: IWFHMA. DOI: 10.14498/vsgtu2091 (In Russian).

Author's Details:

Vladimir E. Zoteev  <https://orcid.org/0000-0001-7114-4894>

Dr. Techn. Sci., Professor; Professor; Dept. of Applied Mathematics and Computer Science;
e-mail: zoteev.ve@samgtu.ru

Lyajsan A. Sagitova  <https://orcid.org/0000-0002-0833-983X>

Senior Lecturer; Dept. of Heat and Gas Supply and Ventilation; e-mail: 10410@mail.ru

Anna A. Gavrilova  <https://orcid.org/0000-0002-0833-983X>

Cand. Techn. Sci., Associate Professor; Associate Professor; Dept. of Control and System Analysis of Thermal Power and Sociotechnical Complexes; e-mail: a.a.gavrilova@mail.ru

obtained results is conducted. A comparative analysis of the developed mathematical models based on forecast error assessment allowed for the selection of the most effective mathematical model with minimal forecasting error from the considered set of models over a time period ranging from one to five years.

Keywords: regional energy system, multiplicative power-law production function, factor elasticity, covariance-stationary time series models, autoregressive models, statistical analysis.

Received: 10th March, 2024 / Revised: 16th September, 2024 /

Accepted: 27th September, 2024 / First online: 5th November, 2024

Competing interests. We have no competing interests.

Author contributions and responsibility. All authors participated in the development of the article's concept and in writing the manuscript. The authors bear full responsibility for submitting the final manuscript for publication. The final version of the manuscript was approved by all authors.

Funding. The research was conducted without funding.

References

1. Gavrilova A. A., Capenko M. V. Synthesis of mathematical models of the regional energy system as multidimensional production functions, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Techn. Nauki*, 2002, no. 14, pp. 126–192 (In Russian).
2. Kolmykov D. S., Gavrilova A. A. Model analysis of the operating efficiency of regional energy production, In: *Proceedings of the Third All-Russian Scientific Conference* (29–31 May 2006). Part 2, Matem. Mod. Kraev. Zadachi. Samara, Samara State Technical Univ., 2006, pp. 93–96 (In Russian).
3. Diligensky N. V., Gavrilova A. A., Salov A. G., Gavrilov V. K. Modeling performance analysis of combined generation of heat and power energy of regional power system, *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Severo-Kavkazsk. Region. Tekhn. Nauki*, 2008, no. 5, pp. 37–40 (In Russian). EDN: JUPXNJ.
4. Salov A. G., Gavrilova A. A. System analysis and modeling of the activities of energy generating enterprises in order to assess the efficiency of their functioning in the context of the formation of market relations, *Vestn. Saratov. Gos. Tekhn. Univ.*, 2008, vol. 1, no. 1, pp. 86–91 (In Russian). EDN: JUIJHL.
5. Salov A. G., Gavrilova A. A., Ivanova D. V. Study of the economic characteristics of the regional industrial complex using statistical and modeling analysis methods, *Nauchnoe Obozrenie*, 2015, no. 15, pp. 327–332 (In Russian). EDN: UXSICN.
6. Salov A. G., Gavrilova A. A., Knyazev P. A., Kruglov V. A. Simulation model of region energy system on the base of three-factor production function, *Urban Construction and Architecture*, 2016, no. 3, pp. 140–145 (In Russian). EDN: WWOJDJ. DOI: <https://doi.org/10.17673/Vestnik.2016.03.23>.
7. Ivanova D. V., Salov A. G., Gavrilova A. A. Control algorithms development for manufacturing and economic systems activity, *J. Phys.: Conf. Ser.*, 2018, vol. 1111, 012073. EDN: VZIFDX. DOI: <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1111/1/012073>.
8. Gavrilova A. A., Salov A. G. *Sistemnaia metodologiya analiza i modelirovaniia energoefektivnosti generiruiushchikh kompanii* [System Methodology for Analysis and Modeling of Energy Efficiency of Generating Companies]. Samara, Nauchno-tehnicheskii Tsentr, 2021, 277 pp. (In Russian). EDN: ZZZXNK.
9. Abramov A. P., Bessonov V. A., Nikiforov L. T., Sviridenko K. S. *Issledovanie dinamiki makroekonomicheskikh pokazatelei metodom proizvodstvennykh funktsii* [Study of the Dy-

- namics of Macroeconomic Indicators by the Production Functions Method]. Moscow, Computing Center of the USSR Academy of Sciences, 1987, 62 pp. (In Russian)
10. Zamkov O. O., Tolstopiatenko A. V., Cheremnykh Yu. N. *Matematicheskie metody v ekonomike* Mathematical Methods in Economics. Moscow, Moscow State Univ., 1997, 368 pp. (In Russian)
11. Zoteev V. E., Bashkinova E. V., Starokvasheva P. V. Mathematical modeling of the functioning of the energy system of the Samara region, In: *Perspektivnye informatsionnye tekhnologii (PIT 2020)*, Proceedings of the International Scientific and Technical Conference. Samara, Samar. Nauchn. Tsentr RAN, 2020, pp. 361–365 (In Russian). EDN: KVSGXT.
12. Vuchkov I., Boyadjieva L., Solakov O. *Prikladnoi lineinyi regressionnyi analiz* [Applied Linear Regression Analysis]. Moscow, Finansy i Statistika, 1987, 238 pp. (In Russian)
13. Draper N. R., Smith H. *Applied Regression Analysis*, Wiley Series in Probability and Statistics. New York, John Wiley and Sons, 1998, xvii+706 pp. DOI: <https://doi.org/10.1002/9781118625590>.
14. Demidenko E. Z. *Lineinaiia i nelineinaiia regressii* [Linear and Nonlinear Regression]. Moscow, Finansy i Statistika, 1981, 302 pp. (In Russian)
15. Seber G. A. F., Lee A. J. *Linear Regression Analysis*, Wiley Series in Probability and Statistics. Hoboken, NJ, Wiley, 2003, xvi+557 pp.
16. Box G. E. P., Jenkins G. M.; Reinsel G. C., Ljung G. M. *Time Series Analysis. Forecasting and Control*, Wiley Series in Probability and Statistics. Hoboken, NJ, John Wiley and Sons, 2016, 712 pp.
17. Anderson T. W. *The Statistical Analysis of Time Series*, Wiley Classics Library. Chichester, John Wiley and Sons, 1994, xiv+704 pp.
18. Kendall M. G., Stuart A. *The Advanced Theory of Statistics*, vol. 3, Design and Analysis, and Time-Series. London, Charles Griffin, 1976, x+585 pp.
19. Otnes R. K., Enochson L. *Applied Time Series Analysis*, vol. 1, Basic Techniques. New York, John Wiley and Sons, 1978, xiv+449 pp.
20. Kashyap R. L., Ramachandra Rao A. *Dynamic Stochastic Models from Empirical Data*, Mathematics in Science and Engineering, vol. 122. New York, Academic Press, 1976, xvi+334 pp. DOI: [https://doi.org/10.1016/s0076-5392\(08\)x6016-3](https://doi.org/10.1016/s0076-5392(08)x6016-3).
21. Durbin J., Watson G. S. Testing for serial correlation in least squares regression: I, *Biometrika*, 1950, vol. 37, no. 3/4, pp. 409–428. DOI: <https://doi.org/10.2307/2332391>.
22. Granovsky V. A., Siraya T. N. *Metody obrabotki eksperimental'nykh dannykh pri izmereniiakh* [Methods of Processing Experimental Data in Measurements]. Leningrad, Energoatomizdat, 1990, 288 pp. (In Russian)
23. Zoteev V. E. A numerical method of nonlinear estimation based on difference equations, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2018, vol. 22, no. 4, pp. 669–701 (In Russian). EDN: YSDYZN. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1643>.

Подписной индекс 18108

ISSN 1991-8615 (print)



9 771991 861246



Цена свободная