

ISSN 1991-8615 (print)  
ISSN 2310-7081 (online)



# ВЕСТНИК

САМАРСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО  
ТЕХНИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

Серия  
«Физико-математические науки»

Т. 28, № 4 – 2024

# Вестник Самарского государственного технического университета

ISSN 1991–8615 (print)  
ISSN 2310–7081 (online)  
НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ  
Издаётся с 1996 г.  
Выходит 4 раза в год

Декабрь — 2024

Серия

«ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ» (Т. 28, № 4/77 – 2024)

---

**Главный редактор** В. П. Радченко — д.ф.-м.н., проф. (Самара, Россия)  
**Заместитель главного редактора** А. И. Жданов — д.ф.-м.н., проф. (Самара, Россия)  
**Отв. секретарь** М. Н. Саушкин — к.ф.-м.н., доц. (Самара, Россия)  
**Отв. секретарь** Е. В. Мурашкин — к.ф.-м.н. (Москва, Россия)  
**Секретарь** Е. А. Козлова — к.ф.-м.н. (Самара, Россия)

**Редакционный совет:**

- С. А. Авдонин — д.ф.-м.н., проф. (Фэрбенкс, Аляска, США)
- Б. Д. Аннин — акад. РАН, д.ф.-м.н., проф. (Новосибирск, Россия)
- А. А. Буренин — чл. кор. РАН, д.ф.-м.н., проф. (Комсомольск-на-Амуре, Россия)
- Р. Вельмураган — доктор наук (Ченнай, Индия)
- С. П. Верёвкин — д.х.н., проф. (Росток, Германия)
- Ш. Иматани — доктор наук (Киото, Япония)
- О. И. Маричев — д.ф.-м.н., проф. (Ларами, Вайоминг, США)
- В. П. Матвеев — акад. РАН, д.т.н., проф. (Пермь, Россия)
- П. В. Севастьянов — д.т.н., проф. (Ченстохова, Польша)

**Редакционная коллегия:**

- В. Н. Акопян — д.ф.-м.н., проф. (Ереван, Армения)
- А. П. Амосов — д.ф.-м.н., проф. (Самара, Россия)
- А. В. Боровских — д.ф.-м.н., проф. (Москва, Россия)
- Л. А. Игумнов — д.ф.-м.н., проф. (Нижний Новгород, Россия)
- Ф. дель Изола — д. н., проф. (Рим, Италия)
- В. А. Ковалёв — д.ф.-м.н., проф. (Москва, Россия)
- А. И. Кожанов — д.ф.-м.н., проф. (Новосибирск, Россия)
- Д. С. Лисовенко — д.ф.-м.н. (Москва, Россия)
- А. Н. Миронов — д.ф.-м.н., проф. (Елабуга, Россия)
- Е. Ю. Просвиряков — д.ф.-м.н., (Екатеринбург, Россия)
- Л. С. Пулькина — д.ф.-м.н., проф. (Самара, Россия)
- Ю. Н. Радаев — д.ф.-м.н., проф. (Москва, Россия)
- Е. В. Радкевич — д.ф.-м.н., проф. (Москва, Россия)
- А. В. Саакян — д.ф.-м.н., проф. (Ереван, Армения)
- К. Б. Сабитов — д.ф.-м.н., проф. (Стерлитамак, Россия)
- Л. А. Сараев — д.ф.-м.н., проф. (Самара, Россия)
- А. П. Солдатов — д.ф.-м.н., проф. (Москва, Россия)

## НАУЧНОЕ ИЗДАНИЕ

Вестник Самарского государственного технического университета.  
Серия «Физико-математические науки» (Т. 28, № 4/77 – 2024)

Учредитель — ФГБОУ ВО «Самарский государственный технический университет» 443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244

Редактор Е. С. Захарова

Выпускающий редактор Е. В. Абрамова

Компьютерная вёрстка М. Н. Саушкин, О. С. Афанасьева,  
Е. Ю. Арланова

Адрес редакции и издателя:

ФГБОУ ВО «СамГТУ»,

443100, г. Самара,

ул. Молодогвардейская, 244

Тел.: +7 (846) 337 04 43

Факс: +7 (846) 278 44 00

E-mail: [vsgtu@samgtu.ru](mailto:vsgtu@samgtu.ru)

URL: <http://www.mathnet.ru/vsgtu>

Оригинал-макет изготовлен  
на кафедре прикладной математики  
и информатики СамГТУ

Свидетельство о регистрации

ПИ № ФС 77–66685 от 27.07.2016.

Федеральная служба по надзору

в сфере связи информационных

технологий и массовых коммуникаций

Подписано в печать 27 декабря 2024 г.

Дата выхода в свет 24 января 2025 г.

Формат 70 × 108 1/16.

Усл. печ. л. 13.00. Уч.-изд. л. 12.97.

Тираж 500 экз. Рег. № 6/25.

Заказ № 480.

Отпечатано в типографии

Самарского государственного

технического университета

443100, г. Самара,

ул. Молодогвардейская, 244.

Журнал индексируется в Web of Science Core Collection (Emerging Sources Citation Index), Scopus, Russian Science Citation Index, Zentralblatt MATH, DOAJ и входит в ядро Российского индекса научного цитирования.

Журнал включен в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук, по научным специальностям и соответствующим им отраслям науки:

- 1.1.2 – Дифференциальные уравнения и математическая физика (физико-математические науки);
- 1.1.8 – Механика деформируемого твердого тела (физико-математические науки);
- 1.2.2 – Математическое моделирование численные методы и комплексы программ (физико-математические науки).

Полнотекстовый доступ к статьям журнала осуществляется на Общероссийском математическом портале (<http://www.mathnet.ru>), портале научных журналов «Эко-Вектор» (<https://journals.eco-vector.com>), сайтах научных электронных библиотек eLibrary.ru (<http://elibrary.ru>) и КиберЛенинка (<http://cyberleninka.ru>).

© Коллектив авторов, 2024

© СамГТУ, 2024 (составление, дизайн, макет)

♾️ Контент публикуется на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

Подписной индекс в каталоге агентства «Урал-Пресс» 18108 Цена свободная

# Journal of Samara State Technical University

ISSN 1991–8615 (print)  
ISSN 2310–7081 (online)  
SCIENTIFIC JOURNAL  
Published since 1996  
4 issues per year  
December — 2024

**Ser. Physical & Mathematical Sciences, 2024, vol. 28, no. 4**

---

Founder — Samara State Technical University, Samara, 443100, Russian Federation

**Editor-in-Chief** V. P. Radchenko (Samara, Russian Federation)  
**Deputy Editor-in-Chief** A. I. Zhdanov (Samara, Russian Federation)  
**Executive Secretary** M. N. Saushkin (Samara, Russian Federation)  
**Executive Secretary** E. V. Murashkin (Moscow, Russian Federation)  
**Secretary** E. A. Kozlova (Samara, Russian Federation)

## **Editorial Council:**

- B. D. Annin (Novosibirsk, Russian Federation)
- S. A. Avdonin (Fairbanks, Alaska, USA)
- A. A. Burenin (Komsomolsk-on-Amur, Russian Federation)
- Shōji Imatani (Kyoto, Japan)
- O. I. Marichev (Laramie, Wyoming, USA)
- V. P. Matveenko (Perm, Russian Federation)
- P. V. Sevastiyarov (Częstochowa, Poland)
- Ramachandran Velmurugan (Chennai, India)
- S. P. Verevkin (Rostock, Germany)

## **Editorial Board:**

- A. P. Amosov (Samara, Russian Federation)
- A. V. Borovskikh (Moscow, Russian Federation)
- F. dell'Isola (Rome, Italy)
- V. N. Hakobyan (Yerevan, Armenia)
- L. A. Igumnov (N. Novgorod, Russian Federation)
- V. A. Kovalev (Moscow, Russian Federation)
- A. I. Kozhanov (Novosibirsk, Russian Federation)
- D. S. Lisoenko (Moscow, Russian Federation)
- A. N. Mironov (Elabuga, Russian Federation)
- E. Yu. Prosviryakov (Ekaterinburg, Russian Federation)
- L. S. Pulkina (Samara, Russian Federation)
- Yu. N. Radayev (Moscow, Russian Federation)
- E. V. Radkevich (Moscow, Russian Federation)
- K. B. Sabitov (Sterlitamak, Russian Federation)
- A. V. Sahakyan (Yerevan, Armenia)
- L. A. Saraev (Samara, Russian Federation)
- A. P. Soldatov (Moscow, Russian Federation)

Edited by E. S. Zakharova, E. V. Abramova  
Compiled and typeset by M. N. Saushkin, O. S. Afanas'eva,  
E. Yu. Arlanova

The Editorial Board Address:

Dept. of Applied Mathematics and Computer Science,  
Samara State Technical University,  
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russian Federation

Phone: +7 (846) 337 04 43

Phax: +7 (846) 278 44 00

E-mail: [vsgtu@samgtu.ru](mailto:vsgtu@samgtu.ru)

URL: <http://www.mathnet.ru/eng/vsgtu>

Printed at the Samara State Technical University Press.

The journal covered in Web of Science Core Collection (Emerging Sources Citation Index), Zentralblatt MATH, Scopus, Russian Science Citation Index, and DOAJ.

The full-text electronic version of journal is hosted by the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru (<http://www.mathnet.ru>), the Eco-Vector Journals Portal (<https://journals.eco-vector.com>), and by the web-sites of scientific electronic libraries eLibrary.ru (<http://elibrary.ru>) and CyberLeninka (<http://cyberleninka.ru>).

© The Author(s), 2024

© Samara State Technical University, 2024 (Compilation, Design, and Layout)

 The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

## Содержание

### Дифференциальные уравнения и математическая физика

- Нефедов В. Н.* “Некоторые необходимые и некоторые достаточные условия локального экстремума для полиномов и степенных рядов двух переменных” . . . 615
- Сагадеева М. А.* “Задача оптимального динамического измерения с мультипликативным воздействием в пространствах дифференцируемых «шумов»” . 651
- Шадиметов Х. М., Болтаев А. К.* “Оптимизация погрешности экспоненциально-тригонометрической интерполяционной формулы” . . . . . 665

### Механика деформируемого твёрдого тела

- Земсков А. В., Ле В. Х., Сердюк Д. О.* “Модель изгиба ортотропной консольно закрепленной балки Бернулли—Эйлера под действием нестационарных термомеханодиффузионных нагрузок” . . . . . 682
- Прокудин А. Н.* “Расчет профиля равнопрочного вращающегося диска переменной толщины с учетом анизотропии и разной прочности при растяжении и сжатии” . . . . . 701
- Сараев Л. А.* “Стохастические сверхупругие свойства материалов с фазовыми превращениями” . . . . . 721
- Севастьянов Г. М.* “Антиплоский осесимметричный упругопластический сдвиг в изотропно упрочняющемся материале” . . . . . 740

### Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

- Башуров В. В., Бурмашева Н. В., Просвиряков Е. Ю.* “Точное решение для описания поля скоростей течений Куэтта—Пуазейля бинарных жидкостей” 759
- Кудинов И. В., Трубицын К. В., Еремин А. В., Долгих В. Д.* “Математическое моделирование колебаний газа в реакторе пиролиза метана” . . . . . 773

### Краткие сообщения

- Touail Y., Jaid A., El Moutawakil D.* “Результат об общей неподвижной точке, полученный через вспомогательную функцию, и его применение” . . . . . 790
- Яковлева Ю. О.* “Матрица Римана для некоторых систем уравнений гиперболического типа высокого порядка” . . . . . 799

## Contents

### Differential Equations and Mathematical Physics

- Nefedov V. N.* “Some necessary and some sufficient conditions for local extrema of polynomials and power series in two variables” . . . . . 615
- Sagadeeva M. A.* “Problem of optimal dynamic measurement with multiplicative effects in spaces of differentiable “noises”” . . . . . 651
- Shadimetov Kh. M., Boltaev A. K.* “Optimization of the error in exponential-trigonometric interpolation formula” . . . . . 665

### Mechanics of Solids

- Zemskov A. V., Le V. H., Serdyuk D. O.* “Model of bending of an orthotropic cantilever beam of Bernoulli–Euler under the action of unsteady thermomechanodiffusion loads” . . . . . 682
- Prokudin A. N.* “The influence of anisotropy and strength-differential effect on the design of equi-strength rotating disk of variable thickness” . . . . . 701
- Saraev L. A.* “Stochastic superelastic properties of materials with phase transformations” . . . . . 721
- Sevastianov G. M.* “Antiplane axisymmetric elastic-plastic shear in an isotropic hardening material” . . . . . 740

### Mathematical Modeling, Numerical Methods and Software Complexes

- Bashurov V. V., Burmasheva N. V., Prosviryakov E. Yu.* “Exact solution to the velocity field description for Couette–Poiseuille flows of binary liquids” . . 759
- Kudinov I. V., Trubitsyn K. V., Eremin A. V., Dolgikh V. D.* “Mathematical modeling of gas oscillations in a methane pyrolysis reactor” . . . . . 773

### Short Communications

- Touail Y., Jaid A., El Moutawakil D.* “A common fixed-point result via a supplemental function with an application” . . . . . 790
- Yakovleva J. O.* “The Riemann matrix for some systems of the differential hyperbolic-type equations of the high order” . . . . . 799



УДК 519.65 + 512.3

## Некоторые необходимые и некоторые достаточные условия локального экстремума для полиномов и степенных рядов двух переменных

*В. Н. Нефедов*

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет),  
Россия, 125993, Москва, Волоколамское ш., 4.

### Аннотация

Настоящее исследование развивает предыдущие работы автора, устанавливающие необходимые и достаточные условия локального экстремума в стационарной точке полинома или абсолютно сходящегося в ее окрестности степенного ряда. Известно, что в одномерном случае необходимые и достаточные условия экстремума совпадают, образуя единое критериальное условие.

Следующим этапом анализа становится двумерный случай, составляющий предмет настоящего исследования. Проверка условий экстремума в этом случае сводится к алгоритмически выполнимым процедурам: вычислению действительных корней одномерных многочленов и решению ряда практически реализуемых вспомогательных задач.

Предложен алгоритм, основанный на указанных процедурах. Для ситуаций, когда его применение ограничено, разработан метод подстановки многочленов с неопределенными коэффициентами. На его основе построен алгоритм однозначной верификации наличия локального минимума в стационарной точке для полиномов, представимых суммой двух  $A$ -квазиоднородных форм, где  $A$  — двумерный вектор с натуральными компонентами.

**Ключевые слова:** полиномы, степенные ряды, необходимые условия экстремума, достаточные условия экстремума, квазиоднородные формы.

Получение: 12 июля 2024 г. / Исправление: 23 октября 2024 г. /

Принятие: 28 октября 2024 г. / Публикация онлайн: 26 декабря 2024 г.

### Дифференциальные уравнения и математическая физика Научная статья

© Коллектив авторов, 2024

© СамГТУ, 2024 (составление, дизайн, макет)

Контент публикуется на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

### Образец для цитирования

Нефедов В. Н. Некоторые необходимые и некоторые достаточные условия локального экстремума для полиномов и степенных рядов двух переменных // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2024. Т. 28, № 4. С. 615–650. EDN: KECQQD. DOI: 10.14498/vsgtu2103.

### Сведения об авторе

Виктор Николаевич Нефедов  <https://orcid.org/0000-0001-6053-2066>

кандидат физико-математических наук, доцент; доцент; каф. 805 «Математическая кибернетика»; e-mail: nefedovvn54@yandex.ru

**Введение.** Настоящая работа развивает исследования, представленные в [1, 2], где были установлены необходимые и достаточные условия экстремума (в частности минимума) в стационарной точке полинома или степенного ряда, абсолютно сходящегося в некоторой окрестности этой точки. Рассмотрим  $x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ , где  $p(x)$  — полином (или степенной ряд),  $0_{(m)} = (0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^m$ ,  $p(0_{(m)}) = 0$ ,  $p'(0_{(m)}) = 0_{(m)}$ , т. е.  $0_{(m)}$  — стационарная точка. Возникает вопрос: является ли  $0_{(m)}$  точкой локального минимума? Для ответа на него исследуется матрица вторых производных  $p''(0_{(m)})$  с использованием критерия Сильвестра (см., например, [3]). Однако этот критерий позволяет утверждать наличие локального минимума только в случае, когда квадратичная форма  $\langle p''(0_{(m)})x, x \rangle$  (где  $\langle x, y \rangle$  — скалярное произведение векторов  $x, y \in \mathbb{R}^m$ ) является положительно определенной. В противном случае требуются более тонкие методы анализа. Особый интерес представляет случай, когда матрица вторых производных нулевая. В работах [1, 2] предложено использовать для таких исследований многогранник Ньютона — выпуклую оболочку векторов степеней членов полинома. Например, многогранник Ньютона для полинома (где  $x, y$  — скалярные переменные)

$$p(x, y) = x^4 y^2 + 2x^2 y^3 + y^4 + 3x^6 y^2 + 3x^4 y^3 + 0.01x^8 y^3$$

изображен на рис. 1 (выделен темно-серым цветом).

В [1, 2] приведены и доказаны некоторые необходимые и некоторые достаточные условия, основанные на анализе полиномиальных форм, соответствующих граням многогранника Ньютона, находящимся в множестве его минимальных по Парето точек. Напомним, что отношение Парето  $\leq$  на  $\mathbb{R}^m$  определяется как  $x \leq y \Leftrightarrow x_1 \leq y_1, \dots, x_m \leq y_m$ . В двумерном случае многогранник становится многоугольником, а исследуемыми гранями являются отрезки (размерности 1) или вершины, расположенные в его «юго-западной» части. Для полинома  $p(x, y)$  из примера таких граней три: две вершины  $(0, 4)$  и  $(4, 2)$  и один отрезок (см. рис. 1). Необходимое условие локального минимума — неотрицательность этих форм. Достаточное условие — их неотрицательность и слабая невырожденность (т. е. неравенство нулю при ненулевых значениях переменных). Эти результаты, полученные в [1, 2] для произвольного

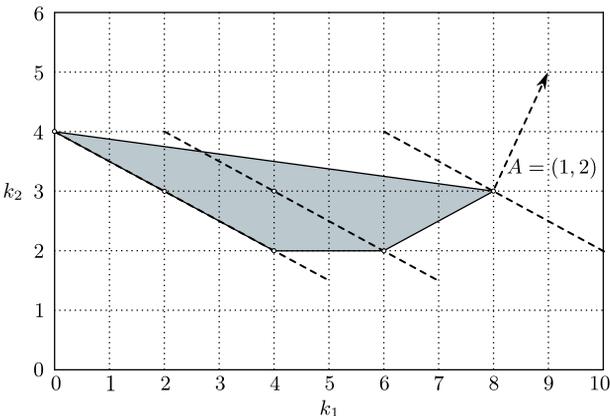


Рис. 1. Многогранник Ньютона для полинома  $p(x, y)$   
 [Figure 1. The Newton polyhedron for the polynomial  $p(x, y)$ ]

числа переменных  $m$ , позволяют решить задачу для большинства случаев.

Однако существуют ситуации, когда необходимое условие выполнено, а достаточное — нет. Для таких случаев в [2] предложена методика, основанная на разложении полинома (или степенного ряда) на сумму  $A$ -квазиоднородных форм. Под  $A$ -квазиоднородной формой, где  $A \in \mathbb{Z}^m$ , понимается полином, все члены которого имеют одинаковое значение скалярного произведения вектора  $A$  на вектор степеней его переменных. Однородная форма является частным случаем  $A$ -квазиоднородной при  $A = (1, \dots, 1) \in \mathbb{Z}^m$ . Для анализа локального минимума рассматриваются только разложения при  $A \in \mathbb{N}^m$ , где  $\mathbb{N}$  — множество натуральных чисел.

На рис. 1 показано разложение полинома  $p(x, y)$  на три  $A$ -квазиоднородные формы при  $A = (1, 2)$ . В [2] доказаны необходимые и достаточные условия локального минимума для таких разложений. Однако для произвольного  $m$  не удалось сформулировать единый критерий. Для  $m = 1$  такой критерий легко формулируется.

Следующим по сложности является случай  $m = 2$ , которому и посвящена настоящая работа. Для двумерного случая многие процедуры, сложные в общем случае, становятся простыми и легко проверяемыми. Например, неотрицательность или невырожденность квазиоднородной формы проверяется через нахождение действительных корней соответствующего многочлена (процедура, реализуемая в режиме онлайн). Это позволило разработать алгоритмы решения задачи с использованием «юго-западных» граней многогранника Ньютона, а также разложения на  $A$ -квазиоднородные формы при  $A \in \mathbb{N}^2$ .

Для случаев, когда эти алгоритмы не дают ответа, предложен метод подстановки многочленов с неопределенными коэффициентами. Приведены примеры, иллюстрирующие его применение. Доказано, что множество коэффициентов при главных членах таких многочленов может быть сужено до двух возможных вариантов.

Кроме того, в работе выделен класс полиномов — сумма двух  $A$ -квазиоднородных форм при  $A \in \mathbb{N}^2$  — для которых получен единый критерий локального минимума. Этот результат имеет самостоятельное значение и усиливает утверждение 15 из [2], где условие локального минимума формулируется для суммы первых нескольких квазиоднородных форм.

В настоящей работе вопрос о строгости локального минимума в исследуемой стационарной точке не рассматривался.

Основные результаты работ [1, 2], а также настоящей работы получены с использованием леммы 7 из [1, с. 208] (см. утверждение 8, являющееся ее следствием для двумерного случая). Эта лемма доказана в [1] с использованием метода последовательного исключения переменных в полиномиальных задачах оптимизации, а также теорем 21.7 и 21.8 из [4], где обосновывается метод нахождения всех решений уравнения  $f(x, y) = 0$  для степенного ряда  $f(x, y)$ , абсолютно сходящегося в окрестности точки  $0_{(2)}$ ,  $f(0, 0) = 0$ , а решения ищутся в виде степенных рядов  $y(x)$  с рациональными показателями степеней, абсолютно сходящихся в окрестности  $x = 0$ , где  $y(0) = 0$ . В работе [5] эта лемма была обобщена с полиномиального случая на случай степенного ряда, абсолютно сходящегося в окрестности нулевой точки.

В работе всюду, где это необходимо, подчеркиваются существенные отличия

чия двумерного случая от случаев с тремя и более переменными (см. замечания 3 и 5).

**1. Постановка задачи. Случай, когда полином является квазиоднородной формой.** В настоящей работе рассматриваются полиномы  $p(x, y)$  от двух действительных переменных  $x, y$ . Кроме того, в замечаниях 4 и 8 будет показано, что  $p(x, y)$  может быть и степенным рядом. Однако для простоты изложения далее речь пойдет только о полиномах. Пусть  $p(x, y) \not\equiv 0$ ,  $p(0, 0) = 0$ ,  $p'(0, 0) = (0, 0) = 0_{(2)}$ , т. е.  $0_{(2)}$  является стационарной точкой. Целью статьи является получение практически проверяемых необходимых и достаточных условий того, что  $0_{(2)}$  является точкой локального минимума  $p(x, y)$ . При этом в последнем случае не проводится дополнительного исследования того, является ли  $0_{(2)}$  точкой строгого или нестрогого локального минимума.

Следуя [2], воспользуемся некоторыми понятиями и обозначениями. Будем использовать *носитель полинома*  $N_p$  — множество целочисленных векторов  $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^2$  таких, что в  $p(x, y)$  входит член вида  $ax^\alpha y^\beta$  при  $a \neq 0$ . Выпуклая оболочка этого множества  $\text{Co } N_p$  называется *многогранником Ньютона* полинома  $p(x, y)$ , а  $\dim \text{Co } N_p$  — его размерностью [3]. Если для некоторого вектора (очевидно, не единственного)  $A = (A_1, A_2) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0_{(2)}\}$  найдется число  $B \in \mathbb{Z}$ , для которого выполняется  $\forall (\alpha, \beta) \in N_p \langle A, (\alpha, \beta) \rangle = B$  ( $\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle = x_1 x_2 + y_1 y_2$  — скалярное произведение векторов  $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ ), то полином  $p(x, y)$  называется *A-квазиоднородной (полиномиальной) формой*. Будем называть полином  $p(x, y)$  *квазиоднородной формой*, если для некоторого  $A \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0_{(2)}\}$  он является A-квазиоднородной формой.

**ПРИМЕР 1.** Следующие полиномы являются квазиоднородными формами (в скобках указаны подходящие  $A$  и  $B$ ):

- (а)  $p_1(x, y) = 2xy^2 - 3x^2y^3 + 5x^3y^4$  ( $A = (1, -1)$ ,  $B = -1$ );
- (б)  $p_2(x, y) = 2xy^2 + 3x^3y^2 - 5x^5y^2$  ( $A = (0, 1)$ ,  $B = 2$ );
- (в)  $p_3(x, y) = 2xy^2 + 3xy^3 + 4xy^5$  ( $A = (1, 0)$ ,  $B = 1$ );
- (г)  $p_4(x, y) = 2x^4y^2 + 3x^2y^3 + 2y^4$  ( $A = (1, 2)$ ,  $B = 8$ ).

Очевидно, что если полином  $p(x, y)$  является A-квазиоднородной формой, то он является  $\lambda A$ -квазиоднородной формой для любого  $\lambda \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ , при котором  $\lambda A \in \mathbb{Z}^2$  (в том числе при  $\lambda = -1$ ), где  $\mathbb{Q}$  — множество рациональных чисел.

Заметим, что если полином  $p(x, y)$  является квазиоднородной формой, то  $\dim \text{Co } N_p < 2$ , поскольку для некоторого  $A \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0_{(2)}\}$  все точки  $(\alpha, \beta) \in N_p$  (а следовательно, и точки из  $\text{Co } N_p$ ) принадлежат прямой, заданной уравнением  $A_1(\alpha - \alpha_1) + A_2(\beta - \beta_1) = 0$ , где  $(\alpha_1, \beta_1)$  — произвольная пара из  $N_p$ . При этом возможны случаи:  $\dim \text{Co } N_p = 0$  (тривиальный случай, когда  $p(x, y)$  состоит из одного члена) либо  $\dim \text{Co } N_p = 1$ . Нетрудно показать [2], что справедливо и обратное утверждение: если  $\dim \text{Co } N_p < 2$ , то  $p(x, y)$  является квазиоднородной формой.

В этом разделе приведем необходимое и достаточное условие того, что точка  $0_{(2)}$  является точкой локального минимума полинома  $p(x, y)$  для простейшего случая, когда он является квазиоднородной формой. Начнем с наиболее сложного случая, когда  $p(x, y)$  является A-квазиоднородной формой для некоторого вектора  $A = (A_1, A_2) \in \mathbb{N}^2$  (далее будет показано, что рас-

смотрение других случаев, при которых  $A \in \mathbb{Z}^2 \setminus (\mathbb{N}^2 \cup \{0_{(2)}\})$ , вполне очевидно), т. е. имеет вид  $p(x, y) = \varphi_1^A(x, y)$ , где для некоторого  $s \in \mathbb{N}$  выполняется

$$\varphi_1^A(x, y) = \sum_{i=1}^s a_i x^{\alpha_i} y^{\beta_i}, \quad (1)$$

$$\begin{aligned} a_i \neq 0, \quad \alpha_i, \beta_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad A_1 \alpha_i + A_2 \beta_i = B_1^A \in \mathbb{N}, \\ i = 1, \dots, s, \quad \alpha_1 > \alpha_2 > \dots > \alpha_s \geq 0 \end{aligned} \quad (2)$$

(при этом  $0 \leq \beta_1 < \beta_2 < \dots < \beta_s$ ).

Для простоты считаем, что  $\text{НОД}(A_1, A_2) = 1$  (иначе разделим  $A_1, A_2$  на  $\text{НОД}(A_1, A_2)$ ). Будем предполагать, что  $s \geq 2$ , поскольку случай  $s = 1$  очевиден. Точки  $(\alpha_i, \beta_i)$  находятся на одной прямой, координаты  $(\alpha, \beta)$  которой удовлетворяют уравнению  $A_1 \alpha + A_2 \beta = B_1^A$  (или  $\frac{\alpha - \alpha_1}{-A_2} = \frac{\beta - \beta_1}{A_1}$ ), с направляющим вектором  $e = (-A_2, A_1)$ , а следовательно,  $(\alpha_i, \beta_i) = (\alpha_1, \beta_1) + \nu_i e$ ,  $i = 1, \dots, s$ , где  $\nu_1 = 0, \nu_i > 0, i = 2, \dots, s$ . Используя то, что  $\text{НОД}(|e_1|, |e_2|) = \text{НОД}(A_1, A_2) = 1, (\alpha_i - \alpha_1, \beta_i - \beta_1) = \nu_i e$ , получаем  $\nu_i \in \mathbb{N}, i = 2, \dots, s, \nu_1 = 0$ .

Таким образом, при  $x \neq 0$  имеем

$$\begin{aligned} \varphi_1^A(x, y) &= \sum_{i=1}^s a_i x^{\alpha_i} y^{\beta_i} = \sum_{i=1}^s a_i x^{\alpha_1 + \nu_i e_1} y^{\beta_1 + \nu_i e_2} = \\ &= x^{\alpha_1} y^{\beta_1} \sum_{i=1}^s a_i (x^{e_1} y^{e_2})^{\nu_i} = x^{\alpha_1} y^{\beta_1} \sum_{i=1}^s a_i u^{\nu_i} = x^{\alpha_1} y^{\beta_1} g_1^A(u), \end{aligned} \quad (3)$$

$$u = x^{e_1} y^{e_2}, \quad e = (-A_2, A_1), \quad g_1^A(u) = \sum_{i=1}^s a_i u^{\nu_i},$$

где  $g_1^A(u)$  — многочлен от одной переменной  $u \in \mathbb{R}$ . Так как  $\text{НОД}(|e_1|, |e_2|) = 1$ , хотя бы одно из чисел среди  $e_1, e_2$  является нечетным, а следовательно, переменная  $u = x^{e_1} y^{e_2}$  может принимать при  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  любые действительные значения. Будем в дальнейшем  $g_1^A(u)$  называть *характеристическим многочленом*<sup>1</sup> для квазиоднородной формы  $\varphi_1^A(x, y)$ , а  $a_1 x^{\alpha_1} y^{\beta_1}$  — ее *главным членом*. Соответственно, в случае  $x = 0$  имеем

$$\varphi_1^A(0, y) = \begin{cases} 0, & \alpha_s > 0; \\ a_s y^{\beta_s}, & \alpha_s = 0. \end{cases}$$

Справедливо следующее

**УТВЕРЖДЕНИЕ 1.** *Полином  $p(x, y) = \varphi_1^A(x, y)$  вида (1)–(3) при  $A = (A_1, A_2) \in \mathbb{N}^2$  является неотрицательным тогда и только тогда, когда выполняются условия:*

<sup>1</sup>Отметим, что термин «характеристический многочлен» используется в теории матриц, а здесь этот термин используется применительно к квазиоднородным формам и к матрицам никакого отношения не имеет.

- 1)  $a_1 > 0, a_s > 0, \alpha_1, \beta_1, \alpha_s, \beta_s \in 2\mathbb{N} \cup \{0\}$ ;  
 2) многочлен  $g_1^A(u) = \sum_{i=1}^s a_i u^{\nu_i}$  является неотрицательным, т. е. (в силу того, что  $g_1^A(0) = a_1 > 0$ ; см. предыдущее условие) либо не имеет действительных корней, либо все его действительные корни имеют четную кратность.

*Доказательство.* Докажем необходимость (достаточность очевидна). Покажем сначала справедливость условия 1. Например, если  $a_1 > 0, \alpha_1$  — нечетно,  $\beta_1$  — любое, то  $p(-t^{A_1}, t^{A_2+1}) = -a_1 t^{B_1^A + \beta_1} + o(t^{B_1^A + \beta_1})$ , т. е. полином  $p(x, y)$  не является неотрицательным. Соответственно, если  $a_1 > 0, \alpha_1$  — четно,  $\beta_1$  — нечетно, то  $p(t^{A_1}, -t^{A_2+1}) = -a_1 t^{B_1^A + \beta_1} + o(t^{B_1^A + \beta_1})$ , т. е. полином  $p(x, y)$  снова не является неотрицательным. Остальные случаи невыполнения условия 1 рассматриваются аналогично.

Покажем теперь справедливость условия 2. Предположим, что для некоторого  $u_0 \in \mathbb{R}$  выполняется  $g_1^A(u_0) < 0$ . Тогда  $u_0 \neq 0$  (поскольку  $g_1^A(0) = a_1 > 0$ ). Используя то, что хотя бы одно из чисел среди  $e_1, e_2$  является нечетным, нетрудно подобрать  $x \neq 0, y \neq 0$ , являющиеся решениями уравнения  $u_0 = x^{e_1} y^{e_2}$  (например, если  $e_1$  — нечетно, то полагаем:  $y = 1, x = (u_0)^{1/e_1}$ ). Тогда в силу (3) при выбранных  $x, y$  с учетом четности  $\alpha_1, \beta_1$  выполняется  $p(x, y) = x^{\alpha_1} y^{\beta_1} g_1^A(u_0) < 0$ .  $\square$

Таким образом, получено необходимое и достаточное условие неотрицательности полинома  $p(x, y) = \varphi_1^A(x, y)$  вида (1)–(3), где  $A = (A_1, A_2) \in \mathbb{N}^2$ . Очевидно, что в случае неотрицательности этого полинома точка  $0_{(2)}$  является точкой его локального (и даже глобального) минимума (возможно, строгого, а возможно, нестрогого), а в случае, если неотрицательность не выполняется, то  $0_{(2)}$  не является точкой локального минимума этого полинома. Действительно, если нашлась точка  $(x^*, y^*) \in \mathbb{R}^2$ , для которой  $\varphi_1^A(x^*, y^*) < 0$ , то для  $u_1(t) = x^* t^{A_1}, u_2(t) = y^* t^{A_2}$  при всех  $t > 0$  (в том числе сколь угодно малых) имеем  $\varphi_1^A(u_1(t), u_2(t)) = \varphi_1^A(x^*, y^*) t^{B_1^A} < 0$ .

**Пример 2.** Заметим, что полином  $p_4(x, y)$  из примера 1 является  $A$ -квазиоднородной формой при  $A = (1, 2)$ , т. е. находится в области применения утверждения 1. Для этого полинома условие 1 утверждения 1 выполняется, характеристический многочлен  $g_1^A(u)$ , удовлетворяющий (3), имеет вид  $g_1^A(u) = 2 + 3u + 2u^2$ , где  $u = x^{-2}y$ . Этот квадратный трехчлен имеет отрицательный дискриминант, т. е. у него нет действительных корней, а следовательно, в силу утверждения 1 точка  $0_{(2)}$  является точкой локального (и глобального) минимума полинома  $p_4(x, y)$ .

Рассмотрим теперь случай, когда полином  $p(x, y) = \varphi_1^A(x, y)$  вида (1)–(3) является  $A$ -квазиоднородной формой для некоторого  $A = (A_1, A_2) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0_{(2)}\}$  такого, что  $A \notin \mathbb{N}^2$ . Поскольку, как уже отмечалось, любая  $A$ -квазиоднородная форма, где  $A \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0_{(2)}\}$ , будет одновременно  $(-A)$ -квазиоднородной формой, достаточно ограничиться рассмотрением случаев: (а)  $A_1 > 0, A_2 < 0$ , (б)  $A_1 = 0, A_2 > 0$ , (в)  $A_1 > 0, A_2 = 0$  (например, если  $A_1 < 0, A_2 > 0$ , то  $-A_1 > 0, -A_2 < 0$ ), и при этом одновременно с  $A \notin \mathbb{N}^2$  предполагаем, что  $-A \notin \mathbb{N}^2$ .

Произведем некоторые изменения в условии (2). В случаях (а), (б) заме-

нием в (2) условие  $\alpha_1 > \alpha_2 > \dots > \alpha_s \geq 0$  на  $0 \leq \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_s$  (тогда в случае (а)  $0 \leq \beta_1 < \beta_2 < \dots < \beta_s$ , а в случае (б)  $\beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_s$ ; см. полиномы  $p_1(x, y)$ ,  $p_2(x, y)$  в примере 1). Соответственно, в случае (в) заменяем условие  $\alpha_1 > \alpha_2 > \dots > \alpha_s \geq 0$  на  $0 \leq \beta_1 < \beta_2 < \dots < \beta_s$  (в этом случае  $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_s$ ; см. полином  $p_3(x, y)$  в примере 1). В каждом из этих случаев  $a_1 x^{\alpha_1} y^{\beta_1}$  является главным членом полинома  $p(x, y) = \varphi_1^A(x, y)$ ,<sup>2</sup> который и определяет, будет ли точка  $0_{(2)}$  точкой локального минимума этого полинома или нет. Чтобы  $0_{(2)}$  была точкой локального минимума, необходимо и достаточно, чтобы этот член был неотрицательным, т. е. при  $a_1 > 0$ ,  $\alpha_1, \beta_1 \in 2\mathbb{N} \cup \{0\}$ . В примере 1 для всех трех полиномов этим членом является  $2xy^2$ , который может принимать отрицательные значения в сколь угодно малой окрестности точки  $0_{(2)}$ , т. е. она не является точкой локального минимума этих полиномов. Действительно, для каждого из этих полиномов подстановка  $x = -t$ ,  $y = t$  дает многочлен, являющийся отрицательным в достаточно малой окрестности точки  $t = 0$  при  $t > 0$ . Совершенно аналогично и в общем случае, если не выполняется условие  $a_1 > 0$ ,  $\alpha_1, \beta_1 \in 2\mathbb{N} \cup \{0\}$ , нетрудно выбрать числа  $C_1, C_2 \in \{1, -1\}$ , для которых  $a_1 C_1^{\alpha_1} C_2^{\beta_1} < 0$ , и при этом в окрестности точки  $t = 0$  при достаточно малых  $t > 0$  выполняется

$$\varphi_1^A(C_1 t, C_2 t) = a_1 C_1^{\alpha_1} C_2^{\beta_1} t^{\alpha_1 + \beta_1} + o(t^{\alpha_1 + \beta_1}) < 0.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Ранее отмечалось, что выбор вектора  $A \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0_{(2)}\}$  для  $A$ -квазиоднородной формы не является однозначным. Однако, накладывая на  $A$  некоторые простые дополнительные условия, можно прийти к однозначности этого выбора. Например, для квазиоднородной формы, состоящей из одного члена, он может быть выбран произвольно (в частности,  $A = (1, 1)$ ). В этом случае проверка неотрицательности этого полинома является тривиальной (см. условие 1 утверждения 1). Пусть теперь квазиоднородная форма содержит по крайней мере два члена  $(\alpha_1, \beta_1)$ ,  $(\alpha_2, \beta_2)$ . Тогда если  $A_1 \neq 0$ ,  $A_2 \neq 0$ , то дополнительное условие  $A_1 > 0$  приводит к системе

$$A_1 > 0, \quad A_1(\alpha_2 - \alpha_1) + A_2(\beta_2 - \beta_1) = 0,$$

которая при добавлении условия  $\text{НОД}(A_1, |A_2|) = 1$  всегда имеет единственное решение, которое обозначим через  $\bar{A}$ . Понятно, что при выборе другого вектора, удовлетворяющего этой системе без дополнительного условия  $\text{НОД}(A_1, |A_2|) = 1$ , получим вектор  $A = \lambda \bar{A}$  при  $\lambda \in \mathbb{N}$ . При таком изменении результат исследования точки  $0_{(2)}$  на локальный минимум останется прежним, т. е. всегда можно ограничиться использованием  $A = \bar{A}$ . Соответственно, в случае  $A_1 = 0$  достаточно взять  $A = (0, 1)$ , а в случае  $A_2 = 0$  — взять  $A = (1, 0)$ .

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Простые примеры показывают, что приведенные утверждения для случая двух переменных не переносятся на случай трех переменных, что указывает на исключительность этого случая (равно как и случая с одной переменной). Например, полином  $p(x, y, z) = x^2 + 2xy + y^2 + x^2 y^2 z$  является  $A$ -квазиоднородной формой, где  $A = (1, 1, -2) \in \mathbb{Z}^3 \setminus \{0_{(3)}\}$ ,  $A \notin \mathbb{N}^3$ . Этот полином имеет уже не один, а три главных члена, не сравнимых по Парето. Сумма этих членов дает неотрицательную  $(1, 1)$ -квазиоднородную форму от двух переменных. При

<sup>2</sup>Для любого другого члена этого полинома  $a_i x^{\alpha_i} y^{\beta_i}$ , где  $i \in \{2, \dots, s\}$ , выполняются условия  $\alpha_i \geq \alpha_1$ ,  $\beta_i \geq \beta_1$ , причем одно из этих неравенств строгое.

этом  $0_{(3)}$  не является точкой локального минимума исходного полинома, поскольку  $p(t, -t, -t) = -t^5 < 0$  при всех  $t > 0$ .

## 2. Случай, когда многогранник Ньютона имеет размерность 2.

**Использование главных квазиоднородных форм.** Выпуклое непустое множество  $C \subseteq \mathbb{R}^n$  называется *гранью* [3] выпуклого замкнутого множества  $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ , если  $C \subseteq Y$  и  $\forall y^{(1)}, y^{(2)} \in Y, \forall \alpha \in (0, 1)$  в случае  $\alpha y^{(1)} + (1 - \alpha)y^{(2)} \in C$   $y^{(1)}, y^{(2)} \in C$ . Грань  $C$  называется *собственной*, если  $C \neq Y$ . Точка  $y \in Y$  называется *угловой*, если  $\{y\}$  — грань.

Пусть теперь  $\dim \text{Co } N_p = 2$ . В этом случае полином  $p(x, y)$  не может быть квазиоднородной формой (см. раздел 1). Тем не менее, у него можно выделить так называемые *главные квазиоднородные формы*, соответствующие граням многогранника Ньютона  $\text{Co } N_p$  размерности меньше 2. В случае  $\dim \text{Co } N_p = 2$  каждой собственной грани  $C \subset \text{Co } N_p$  соответствует главная квазиоднородная форма

$$\varphi_C(x, y) = p_{N_p \cap C}(x, y),$$

где для любого непустого множества  $N \subseteq N_p$  под  $p_N(x, y)$  понимается сумма членов полинома  $p(x, y)$ , векторы степеней которых принадлежат  $N$  ( $N$  — *укорочение* полинома  $p(x, y)$ ). Таким образом,  $N_{\varphi_C} = N_p \cap C$  и все члены полинома  $\varphi_C(x, y)$  являются членами полинома  $p(x, y)$ .

Следует отметить, что многогранники Ньютона являются инструментом для исследования широкого класса задач (см., например, [6–9]). В частности, теория многогранников Ньютона связывает геометрию многогранников с алгебраической геометрией [9].

В рассматриваемом случае с  $\dim \text{Co } N_p = 2$  главные квазиоднородные формы могут соответствовать только собственным граням многогранника  $\text{Co } N_p$ : угловым точкам (граням размерности 0) и сторонам  $\text{Co } N_p$  (граням размерности 1).

Следует отметить, что существует также другое определение главной квазиоднородной формы полинома  $p(x, y)$  [2]. Полином  $\varphi^A(x, y)$  называется главной  $A$ -квазиоднородной формой полинома  $p(x, y)$ , где  $A = (A_1, A_2) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0_{(2)}\}$ , если все члены  $\varphi^A(x, y)$  являются членами  $p(x, y)$  и  $N_{\varphi^A} = \text{Arg min}\{\langle A, k \rangle \mid k \in N_p\} = \{k \in N_p \mid \langle A, k \rangle = \min_{k' \in N_p} \langle A, k' \rangle\}$ , т. е. каждому  $A = (A_1, A_2) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0_{(2)}\}$  соответствует единственная главная  $A$ -квазиоднородная форма этого полинома. Полином  $\varphi(x, y)$  называется главной квазиоднородной формой полинома  $p(x, y)$ , если для некоторого  $A \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0_{(2)}\}$  он является его главной  $A$ -квазиоднородной формой. В [2] показано, что оба определения эквивалентны. В частности, это означает, что для любой собственной грани  $C$  многогранника  $\text{Co } N_p$  найдется вектор  $A \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0_{(2)}\}$  такой, что  $p_{N_p \cap C}(x, y)$  является главной  $A$ -квазиоднородной формой полинома  $p(x, y)$ , т. е.  $N_p \cap C = \text{Arg min}\{\langle A, k \rangle \mid k \in N_p\}$ . Как будет видно из дальнейшего, нахождение подходящего вектора  $A$  для рассматриваемых ниже граней  $\text{Co } N_p$  является несложной задачей.

Соответственно, если для некоторого  $A \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0_{(2)}\}$   $\varphi^A(x, y)$  — главная  $A$ -квазиоднородная форма полинома  $p(x, y)$ , откуда  $N_{\varphi^A} = \text{Arg min}\{\langle A, k \rangle \mid$

$k \in N_p\}$ , то, как показано в [2], ей соответствует собственная грань (многогранника  $\text{Co } N_p$ )  $C_A = \text{Arg min}\{\langle A, k \rangle \mid k \in \text{Co } N_p\}$ , и при этом

$$N_{\varphi^A} = N_p \cap C_A, \quad C_A = \text{Co}(N_p \cap C_A) = \text{Co } N_{\varphi^A}, \quad \varphi^A(x, y) = p_{N_p \cap C_A}(x, y).$$

Используя только главные квазиоднородные формы полинома, уже можно получить некоторые необходимые и некоторые достаточные условия локального минимума полинома  $p(x, y)$  в точке  $0_{(2)}$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.** Пусть функция  $f(x, y)$  определена на всем пространстве  $\mathbb{R}^2$ . Функцию  $f(x, y)$  будем называть *неотрицательной*, если  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$   $f(x, y) \geq 0$ ; функцию  $f(x, y)$  — *невыврожденной в слабом смысле*, если  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$  выполняется  $[x \neq 0, y \neq 0] \Rightarrow f(x, y) \neq 0$ .

**ТЕОРЕМА 1** [1, ТЕОРЕМА 2]. Пусть  $p(x, y)$  — полином,  $p(0, 0) = 0$ ,  $p'(0, 0) = 0_{(2)}$  и  $\forall A \in \mathbb{N}^2$  главные  $A$ -квазиоднородные формы полинома  $p(x, y)$  являются неотрицательными и невыврожденными в слабом смысле. Тогда  $0_{(2)}$  — точка локального минимума  $p(x, y)$ .

**ЛЕММА 1** [1, ЛЕММА 8]. Пусть  $0_{(2)}$  — точка локального минимума  $p(x, y)$ ,  $p(0, 0) = 0$ ,  $p'(0, 0) = 0_{(2)}$ . Тогда  $\forall A \in \mathbb{N}^2$  главные  $A$ -квазиоднородные формы полинома  $p(x, y)$  являются неотрицательными.

**ЗАМЕЧАНИЕ 3.** Следует отметить, что в теореме 1 и лемме 1 рассматриваются главные  $A$ -квазиоднородные формы полинома  $p(x, y)$  не для всех  $A \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0_{(2)}\}$ , а лишь для  $A \in \mathbb{N}^2$ . Между тем во многих других задачах могут понадобиться  $A$ -квазиоднородные формы полинома  $p(x, y)$  для всех векторов  $A \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0_{(2)}\}$ , например, при исследовании<sup>3</sup> полинома на знакоопределенность в положительном ортанте  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y > 0\}$ .

Заметим, что в случае  $A \in \mathbb{N}^2$  для главной  $A$ -квазиоднородной формы  $\varphi^A(x, y) = p_{N_{\varphi^A}}(x, y)$ , где  $N_{\varphi^A} = \text{Arg min}\{\langle A, k \rangle \mid k \in N_p\}$ , и соответствующей ей грани  $C_A = \text{Co } N_{\varphi^A}$  (для которой  $N_{\varphi^A} = N_p \cap C_A$ ) выполняется

$$N_{\varphi^A} = \text{Arg min}\{\langle A, k \rangle \mid k \in N_p\} \subseteq P(N_p), \quad C_A \subseteq P(\text{Co } N_p),$$

где  $P(Y) = \{y^* \in Y \mid \forall y \in Y (y_1 \leq y_1^* \ \& \ y_2 \leq y_2^*) \Rightarrow y = y^*\}$  — множество парето-оптимальных точек произвольного множества  $Y \subset \mathbb{R}^2$ . Здесь было использовано простое утверждение:

$$C_A = \text{Arg min}\{\langle A, k \rangle \mid k \in \text{Co } N_p\} \subseteq P(\text{Co } N_p).$$

Таким образом, при использовании теоремы 1 и леммы 1 понадобятся главные квазиоднородные формы, соответствующие не всем граням, а только граням, содержащимся в «юго-западной» границе многогранника  $\text{Co } N_p$  («юго-западные» грани). Для небольших задействованных степеней эти грани легко выделяются даже визуально. Кроме того, в [2, 10] описаны практически реализуемые алгоритмы подбора подходящих  $A \in \mathbb{N}^2$  для выделения

<sup>3</sup>См. [11], где это исследование проводилось для любого числа переменных в полиноме, а также приведенные там ссылки на другие работы.

всех главных  $A$ -квазиоднородных форм полинома, соответствующих случаям  $A \in \mathbb{N}^2$ .

ЗАМЕЧАНИЕ 4. В случае  $A \in \mathbb{N}^2$  можно ставить задачу о нахождении совокупности главных  $A$ -квазиоднородных форм не только для полинома, но и для степенного ряда, абсолютно сходящегося в некоторой окрестности стационарной точки, поскольку в этом случае их число конечно и потребуется конечное число «первых» членов из этого разложения. При этом теорема 1 и лемма 1 остаются в силе и для степенного ряда  $p(x, y)$  [5].

Заметим теперь, что множество всех главных квазиоднородных форм полинома (или степенного ряда; см. замечание 4)  $p(x, y)$ , являющихся  $A$ -квазиоднородными при некоторых  $A \in \mathbb{N}^2$  можно разбить на три группы.

Группа 1. В эту группу входят главные квазиоднородные формы полинома  $p(x, y)$ , соответствующие граням многогранника  $\text{Co } N_p$  размерности 0. Каждая из таких форм представляет собой одночлен вида  $ax^\alpha y^\beta$ , являющийся членом полинома  $p(x, y)$ . При этом пишем  $\text{coef}(p, (\alpha, \beta)) = a$ . Как показано в [2], эти одночлены соответствуют угловым точкам многогранника  $\text{Co } N_p$ , т. е.  $(\alpha, \beta) \in \Psi(N_p) \subseteq N_p$ , где через  $\Psi(N_p)$  в [2] обозначается множество угловых точек  $\text{Co } N_p$ . Более того, векторы  $(\alpha, \beta)$  являются оптимальными по Парето на множестве  $N_p$ , т. е.  $(\alpha, \beta) \in P(N_p)$ . Таким образом,  $(\alpha, \beta) \in \Omega(N_p)$ , где в соответствии с обозначениями из [2]  $\Omega(N_p) = P(N_p) \cap \Psi(N_p)$ .

Справедливо и обратное утверждение [2]: одночлен полинома  $p(x, y)$ , соответствующий каждой точке из  $\Omega(N_p)$  является для некоторого  $A \in \mathbb{N}^2$   $A$ -квазиоднородной формой этого полинома. Выделение (даже визуальное, с использованием графического изображения многогранника  $\text{Co } N_p$ ) точек из  $\Omega(N_p)$ , является достаточно простой задачей.<sup>4</sup> Необходимым и достаточным условием неотрицательности таких форм, которая в этом случае влечет также невырожденность в слабом смысле, в силу утверждения 1 является (см. условие 1) условие  $a > 0$ ,  $\alpha, \beta \in 2\mathbb{N} \cup \{0\}$ . Таким образом, необходимым условием того, что  $0_{(2)}$  будет точкой локального минимума полинома  $p(x, y)$ , является

$$\forall (\alpha, \beta) \in \Omega(N_p) \quad \text{coef}(p, (\alpha, \beta)) > 0, \quad \alpha, \beta \in 2\mathbb{N} \cup \{0\}. \quad (4)$$

Будем в дальнейшем считать, что это условие выполнено.<sup>5</sup>

Группа 2. В эту группу войдут главные квазиоднородные формы полинома  $p(x, y)$  размерности 1 (т. е. соответствующие сторонам многогранника  $\text{Co } N_p$ ), представляющие собой сумму двух одночленов, каждый из которых в этом случае соответствует одной из двух угловых точек этой стороны, являющихся угловыми точками  $\text{Co } N_p$  и одновременно принадлежащих  $P(N_p)$  (т. е. каждая из них принадлежит  $\Omega(N_p)$  и тем самым входит в группу 1). Таким образом, в группу 2 войдут некоторые суммы квазиоднородных форм из группы 1, являющихся одночленами. Поскольку для одночленов, входящих в эту сумму, предполагается выполнение условия вида (4), обеспечивающее неотрицательность и невырожденность в слабом смысле каждого из них,

<sup>4</sup>См. также в [2, 10] алгоритмы их выделения для произвольного числа переменных.

<sup>5</sup>В первом же случае его невыполнения рассматриваемая задача решена и  $0_{(2)}$  не является точкой локального минимума полинома  $p(x, y)$ .

сумма этих одночленов будет, очевидно, также неотрицательной и невырожденной в слабом смысле.

Группа 3. В эту группу войдут все остальные главные квазиоднородные формы полинома  $p(x, y)$  (не вошедшие в группы 1, 2), соответствующие граням (сторонам) многогранника  $Co N_p$ , размерности 1, являющиеся суммами, по крайней мере, трех одночленов (два соответствуют угловым точкам этой грани (т. е. входят в группу 1), и имеется, по крайней мере, один одночлен, соответствующий промежуточной точке этой грани, находящейся между ее угловыми точками).

Таким образом, в случае, когда выполняется условие (4) и все главные  $A$ -квазиоднородные формы полинома  $p(x, y)$ , соответствующие случаям  $A \in \mathbb{N}^2$ , принадлежат группам 1 и 2, в силу теоремы 1 точка  $0_{(2)}$  является точкой локального минимума полинома  $p(x, y)$ . Пусть теперь множество квазиоднородных форм из группы 3 не является пустым и была выделена одна из таких форм. Тогда для некоторого  $A \in \mathbb{N}^2$  это будет полином  $\varphi_1^A(x, y)$  вида (1), (2).

Задача определения вектора  $A = (A_1, A_2) \in \mathbb{N}^2$  по членам выделенной квазиоднородной формы<sup>6</sup> является простой вычислительной задачей. Этот вектор определяется по любым двум членам, входящим в эту форму, например,  $a_1 x^{\alpha_1} y^{\beta_1}$ ,  $a_2 x^{\alpha_2} y^{\beta_2}$  из уравнения  $A_1 \alpha_1 + A_2 \beta_1 = A_1 \alpha_2 + A_2 \beta_2$ , откуда  $\frac{A_1}{A_2} = \frac{\beta_2 - \beta_1}{\alpha_1 - \alpha_2}$ . Приводим правую часть этого равенства к несократимой дроби вида  $\frac{m}{n}$ , где  $m, n \in \mathbb{N}$ , и тогда полагаем  $A_1 = m$ ,  $A_2 = n$ . При этом  $\text{НОД}(A_1, A_2) = 1$ .

Множество векторов  $A = (A_1, A_2) \in \mathbb{N}^2$ , удовлетворяющих условию  $\text{НОД}(A_1, A_2) = 1$ , обозначим через  $\mathbb{N}_0^2$ .

Используя лемму 1, можно воспользоваться полученным ранее утверждением 1. В силу леммы 1 неотрицательность  $\varphi_1^A(x, y)$  является лишь необходимым условием того, что  $0_{(2)}$  является точкой локального минимума полинома  $p(x, y)$ . Поэтому и воспользоваться утверждением 1 можно лишь для получения отрицательного результата. А именно, если главная  $A$ -квазиоднородная форма  $\varphi_1^A(x, y)$  полинома  $p(x, y)$  не является неотрицательной (т. е. не удовлетворяет необходимым и достаточным условиям из утверждения 1), то  $0_{(2)}$  не является точкой локального минимума полинома  $p(x, y)$ .

Если все главные квазиоднородные формы полинома (или степенного ряда; см. замечание 4)  $p(x, y)$  из группы 3 оказались неотрицательными, то необходимое условие из леммы 1 выполняется и мы переходим к проверке достаточных условий. Самым простым из них является проверка квазиоднородных форм из группы 3 на невырожденность в слабом смысле. Если все они оказались невырожденными в слабом смысле, то согласно теореме 1 точка  $0_{(2)}$  является точкой локального минимума полинома  $p(x, y)$ . Для проверки этого наиболее простого условия можно использовать

**УТВЕРЖДЕНИЕ 2.** *Квазиоднородная форма  $\varphi_1^A(x, y)$  вида (1)–(3), удовлетворяющая условию 1 утверждения 1, является неотрицательной и невырожденной в слабом смысле тогда и только тогда, когда  $g_1^A(u) > 0$  при всех  $u \in \mathbb{R}$ , т. е. (в силу того, что  $g_1^A(0) = a_1 > 0$ ) этот многочлен не имеет действительных корней.*

<sup>6</sup>Например, они могут быть определены визуально исходя из изображения  $Co N_p$ ; см. также в [2, 10] алгоритмы их выделения для произвольного числа переменных.

*Доказательство. Достаточность.* Пусть  $g_1^A(u) > 0$  при всех  $u \in \mathbb{R}$ . В силу утверждения 1 квазиоднородная форма  $\varphi_1^A(x, y)$  является неотрицательной. Покажем, что она является невырожденной в слабом смысле. Предположим, что нашлась точка  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$  такая, что  $x_0 \neq 0, y_0 \neq 0, \varphi_1^A(x_0, y_0) = 0$ . Тогда для  $u_0 = x_0^{e_1} y_0^{e_2}$ , где  $e = (-A_2, A_1)$ , в силу (3) выполняется  $g_1^A(u_0) = 0$ , что противоречит исходному предположению.

*Необходимость.* Предположим, что квазиоднородная форма  $\varphi_1^A(x, y)$  является неотрицательной и невырожденной в слабом смысле. Покажем, что  $g_1^A(u) > 0$  при всех  $u \in \mathbb{R}$ . Предположим, что нашлась точка  $u_0 \in \mathbb{R}$  такая, что  $g_1^A(u_0) = 0$ . Поскольку  $g_1^A(0) = a_1 > 0$ , имеем  $u_0 \neq 0$ . Используя то, что хотя бы одно из чисел среди  $e_1, e_2$  является нечетным (в силу того, что  $\text{НОД}(A_1, A_2) = 1$ ), нетрудно подобрать  $x_0 \neq 0, y_0 \neq 0$ , являющиеся решениями уравнения  $u_0 = x_0^{e_1} y_0^{e_2}$  (например, если  $e_1$  — нечетно, то полагаем, что  $y_0 = 1, x_0 = (u_0)^{1/e_1}$ ). Тогда в силу (3) при выбранных  $x_0, y_0, u_0$  имеем

$$\varphi_1^A(x_0, y_0) = x_0^{\alpha_1} y_0^{\beta_1} g_1^A(u_0) = 0,$$

что противоречит невырожденности  $\varphi_1^A(x, y)$  в слабом смысле.  $\square$

Таким образом, для проверки главных квазиоднородных форм из группы 3 на невырожденность в слабом смысле достаточно найти действительные корни их характеристических многочленов. Если все они оказались невырожденными в слабом смысле (т. е. действительных корней нет), то согласно теореме 1 точка  $0_{(2)}$  является точкой локального минимума полинома (или степенного ряда; см. замечание 4)  $p(x, y)$ . В случае если для некоторого  $A = (A_1, A_2) \in \mathbb{N}_0^2$  нашлась главная квазиоднородная форма  $\varphi_1^A(x, y)$  из группы 3, являющаяся неотрицательной, но для которой не выполняется условие невырожденности в слабом смысле, т. е. ее характеристический многочлен имеет действительные корни (хотя бы один) четной кратности, то потребуются более сложные исследования, приводимые ниже. Такая форма из группы 3 может оказаться единственной. Другие формы будут соответствовать другим  $A = (A_1, A_2) \in \mathbb{N}_0^2$  и каждая из них должна быть рассмотрена отдельно.

Следует отметить, что в рассматриваемом двумерном случае метод, представленный в этом разделе, идейно близок методу диаграммы Ньютона. Например, главные квазиоднородные формы из групп 2 и 3 являются аналогами *опорных многочленов* [4] в методе диаграммы Ньютона.

**ПРИМЕР 3.** Пусть  $p_a(x, y) = x^2 y^6 - (2+a)x^4 y^5 + x^6 y^4 + y^{10} - 10x y^9 - 0.1x^8 y^4 -$  полином, где  $a$  — параметр,  $a \neq -2$ . Тогда

$$N_{p_a} = \{(2, 6), (4, 5), (6, 4), (0, 10), (1, 9), (8, 4)\}$$

(см. изображение,  $N_{p_a}$ , Со  $N_{p_a}$  на рис. 2). Для этого полинома выполняется условие (4) (здесь  $\Omega(N_{p_a}) = \{(0, 10), (2, 6), (6, 4)\}$ ) и единственной квазиоднородной формой из группы 3 является  $\varphi_a(x, y) = x^6 y^4 - (2+a)x^4 y^5 + x^2 y^6$  (это (1, 2)-квазиоднородная форма), характеристическим многочленом которой является  $g_a(u) = 1 - (2+a)u + u^2$ . Тогда при  $a = 0.01$  многочлен  $g_a(u) = g_{0.01}(u)$  не является неотрицательным ( $g_{0.01}(1) = -0.01 < 0$ ), а следовательно, в силу утверждения 1 квазиоднородная форма  $\varphi_{0.01}(x, y)$  не является неотрицательной, и тогда в силу леммы 1 точка  $0_{(2)}$  не является точкой локального

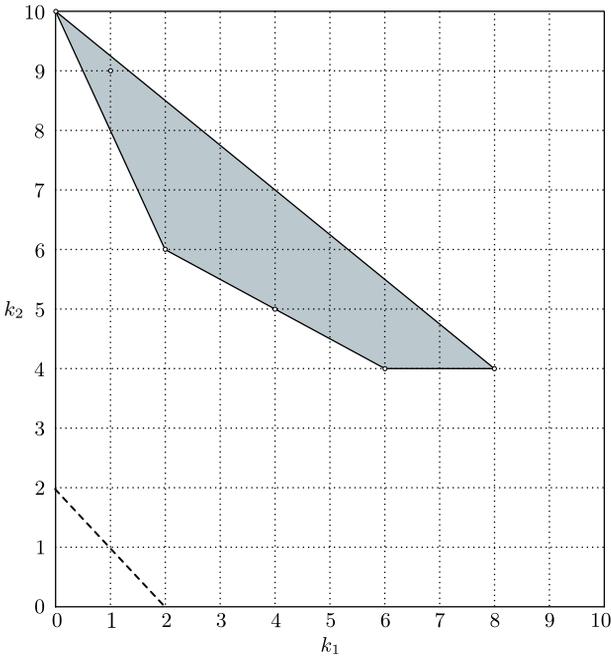


Рис. 2. Многогранник Ньютона для полинома  $p_a(x, y)$   
 [Figure 2. The Newton polyhedron for the polynomial  $p_a(x, y)$ ]

минимума полинома  $p_{0.01}(x, y)$ . При  $a = -0.01$  многочлен  $g_a(u) = g_{-0.01}(u)$  не имеет действительных корней, поскольку  $g_{-0.01}(u) = 1 - 1.99u + u^2 = 0.995(1 - u)^2 + 0.005(1 + u^2) > 0$  при всех  $u \in \mathbb{R}$ . Но тогда в силу утверждения 2 квазиоднородная форма  $\varphi_{-0.01}(x, y)$  является неотрицательной и невырожденной в слабом смысле, а следовательно, в силу теоремы 1 точка  $0_{(2)}$  будет точкой локального минимума полинома  $p_{-0.01}(x, y)$ . При  $a = 0$  многочлен  $g_a(u) = g_0(u) = 1 - 2u + u^2 = (1 - u)^2$  является неотрицательным и имеет действительный корень  $u = 1$  кратности 2. Таким образом, в этом случае условия леммы 1 не нарушаются, а теорема 1 не работает, а следовательно, для дальнейшего исследования потребуются более тонкие методы, которые будут приведены далее.

**ЗАМЕЧАНИЕ 5.** Снова подчеркнем существенное различие между случаем двух и большего числа переменных. Утверждения леммы 1 и теоремы 1 справедливы для произвольного числа переменных [2]. Однако проверка неотрицательности и невырожденности в слабом смысле квазиоднородных форм, существенно зависящих от трех и большего числа переменных, требует исследования конечной совокупности многочленов с рациональными показателями степеней при переменных на неотрицательность и строгую положительность в положительном ортанте [2]. Такая задача исследуется в [11], где предлагается алгоритм ее решения, существенно более сложный, чем вычисление действительных корней от многочлена (к чему сводится случай двух переменных). Здесь можно отметить, что есть возможность упростить задачу, заменив проверку для квазиоднородной формы невырожденности в слабом смысле на невырожденность в сильном смысле, которая в случае неотрицательности этой формы выполняется тогда и только тогда, когда исследуемая квазиоднородная форма, зависящая от переменных  $x_1, \dots, x_m$ , строго положительна на поверхности

координатного куба  $Q = \{(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m \mid |x_i| \leq 1, i = 1, \dots, m\}$ . Последняя задача сводится к решению нескольких задач глобальной оптимизации многочлена (т. е. липшицевой функции) на координатных кубах размерностей  $1, 2, \dots, m-1$  (см. некоторые методы решения этой задачи в [12] и других работах этих авторов).

**3. Использование разложения полинома на сумму  $A$ -квазиоднородных форм.** Будем в этом разделе считать, что многогранник Ньютона полинома (или степенного ряда; см. ниже замечание 8)  $p(x, y)$  снова имеет размерность 2 и при этом все главные  $A$ -квазиоднородные формы этого полинома при всех  $A \in \mathbb{N}^2$  неотрицательны, т. е., в частности, выполняется условие (4). В связи с этим введем в рассмотрение для данного полинома  $p(x, y)$  множество  $\mathbf{A}_p \subset \mathbb{N}_0^2$  целочисленных векторов  $A \in \mathbb{N}_0^2$  таких, что  $A \in \mathbf{A}_p$  тогда и только тогда, когда одновременно выполняются следующие условия:

- 1) главная  $A$ -квазиоднородная форма  $\varphi_1^A(x, y)$  полинома  $p(x, y)$  принадлежит группе 3 (т. е. является суммой не менее чем трех одночленов);
- 2) характеристический многочлен  $g_1^A(u)$ , определяемый согласно (3), является неотрицательным (см. утверждение 1);
- 3) многочлен  $g_1^A(u)$  имеет действительные корни, т.е. рассматриваемая квазиоднородная форма не является невырожденной в слабом смысле.

Обозначим  $U_p(A) = \{u \in \mathbb{R} \mid g_1^A(u) = 0\}$ . Заметим, что  $0 \notin U_p(A)$ , так как  $g_1^A(0) = a_1 > 0$ .

Если  $\mathbf{A}_p = \emptyset$ , то, как мы уже видели, вопрос о том, является ли точка  $0_{(2)}$  точкой локального минимума полинома  $p(x, y)$ , решается просто с использованием утверждения 2 и теоремы 1, т. е. в этом случае  $0_{(2)}$  является точкой локального минимума этого полинома.

Пусть теперь  $\mathbf{A}_p \neq \emptyset$ . Тогда для каждого  $A \in \mathbf{A}_p$  рассмотрим разложение полинома  $p(x, y)$  на сумму  $A$ -квазиоднородных форм:

$$p(x, y) = \varphi_1^A(x, y) + \varphi_2^A(x, y) + \dots + \varphi_{r_A}^A(x, y); \quad (5)$$

$$\varphi_i^A(x, y) \not\equiv 0; \forall k \in N_{\varphi_i^A} \langle A, k \rangle = B_i^A \in \mathbb{N}, \quad (6)$$

где  $i = 1, \dots, r_A$ ,  $B_1^A < B_2^A < \dots < B_{r_A}^A$ ;  $r_A \geq 2$ , так как рассматривается случай  $\dim \text{Co } N_p = 2$ .

Пусть  $H_{\varphi_i^A} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \varphi_i^A(x, y) = 0\}$ ,  $i = 1, \dots, r_A$ . Воспользуемся леммой 3 и утверждением 15 из [2]. Перепишем эти утверждения применительно к случаю с двумя переменными.

**ЛЕММА 2.** Пусть  $0_{(2)}$  — точка локального минимума  $p(x, y)$ ,  $p(0, 0) = 0$ ,  $p'(0, 0) = 0_{(2)}$ . Тогда  $\forall A \in \mathbb{N}^2$  для разложения (5), (6) выполняется следующее:  $\forall i \in \{1, 2, \dots, r_A\}$ ,  $\forall (x, y) \in H_{\varphi_1^A} \cap \dots \cap H_{\varphi_{i-1}^A}$   $\varphi_i^A(x, y) \geq 0$  (в частности при  $i = 1$  имеем  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$   $\varphi_1^A(x, y) \geq 0$ ).

**ТЕОРЕМА 2.** Пусть  $p(x, y)$  — полином,  $p(0, 0) = 0$ ,  $p'(0, 0) = 0_{(2)}$ , и  $\forall A \in \mathbb{N}^2$  все главные  $A$ -квазиоднородные формы полинома  $p(x, y)$  являются неотрицательными (т. е. выполняются необходимые условия локального минимума из леммы 1). Пусть для любого  $A \in \mathbb{N}^2$  для разложения (5), (6) справедливо, что для некоторого  $j \in \{1, 2, \dots, r_A\}$  точка  $0_{(2)}$  является точкой локального минимума полиномов  $\varphi_1^A(x, y)$ ,  $\varphi_1^A(x, y) + \varphi_2^A(x, y)$ ,  $\dots$ ,  $\varphi_1^A(x, y) + \dots +$

+  $\varphi_{j-1}^A(x, y)$ . При этом либо  $H_{\varphi_1^A} \cap \dots \cap H_{\varphi_{j-1}^A} \cap [\mathbb{R} \setminus \{0\}]^2 = \emptyset$ , либо  $\forall (x, y) \in H_{\varphi_1^A} \cap \dots \cap H_{\varphi_{j-1}^A} \cap [\mathbb{R} \setminus \{0\}]^2$   $\varphi_j^A(x, y) > 0$ . Тогда  $0_{(2)}$  — точка локального минимума  $p(x, y)$ .

Как это следует из приведенных утверждений, в случае  $\mathbf{A}_p \neq \emptyset$  для дальнейших исследований могут потребоваться другие члены разложения (5), (6) (помимо  $\varphi_1^A(x, y)$ ) и, в частности,  $\varphi_2^A(x, y)$ . Поскольку  $\varphi_2^A(x, y)$  также является  $A$ -квазиоднородной формой, аналогично  $\varphi_1^A(x, y)$  эту форму можно представить в виде

$$\varphi_2^A(x, y) = \sum_{i=1}^v b_i x^{\chi_i} y^{\eta_i}, \quad (7)$$

где

$$b_i \neq 0; \quad \chi_i, \eta_i \in \mathbb{N} \cup \{0\};$$

$$A_1 \chi_i + A_2 \eta_i = B_2^A, \quad i = 1, \dots, v, \quad v \in \mathbb{N};$$

$$\chi_1 > \chi_2 > \dots > \chi_v \geq 0.$$

Точки  $(\chi_i, \eta_i)$  находятся на одной прямой, координаты  $(\chi, \eta)$  которой удовлетворяют уравнению  $A_1 \chi + A_2 \eta = B_2^A$  или  $\frac{\chi - \chi_1}{-A_2} = \frac{\eta - \eta_1}{A_1}$  с направляющим вектором  $e = (-A_2, A_1)$ , а следовательно,  $(\chi_i, \eta_i) = (\chi_1, \eta_1) + \mu_i e$ ,  $i = 1, \dots, v$ , где  $\mu_1 = 0$ ,  $\mu_i > 0$ ,  $i = 2, \dots, v$ . Так как  $\text{НОД}(|e_1|, |e_2|) = \text{НОД}(A_1, A_2) = 1$ ,  $(\chi_i - \chi_1, \eta_i - \eta_1) = \mu_i e$  получаем, что  $\mu_i \in \mathbb{N}$ ,  $i = 2, \dots, v$  ( $\mu_1 = 0$ ). Таким образом, при  $x \neq 0$  имеем

$$\begin{aligned} \varphi_2^A(x, y) &= \sum_{i=1}^v b_i x^{\chi_i} y^{\eta_i} = \sum_{i=1}^v b_i x^{\chi_1 + \mu_i e_1} y^{\eta_1 + \mu_i e_2} = x^{\chi_1} y^{\eta_1} \sum_{i=1}^v b_i (x^{e_1} y^{e_2})^{\mu_i} = \\ &= x^{\chi_1} y^{\eta_1} \sum_{i=1}^v b_i u^{\mu_i} = x^{\chi_1} y^{\eta_1} g_2^A(u), \quad u = x^{e_1} y^{e_2}, \quad g_2^A(u) = \sum_{i=1}^v b_i u^{\mu_i}, \quad (8) \end{aligned}$$

где  $g_2^A(u)$  — характеристический многочлен квазиоднородной формы  $\varphi_2^A(x, y)$ , а  $b_1 x^{\chi_1} y^{\eta_1}$  — ее главный член.

Рассмотрим два условия:

$$(Y1)_A: \exists (x_0, y_0) \in H_{\varphi_1^A} : \varphi_2^A(x_0, y_0) < 0;$$

$$(Y2)_A: \forall (x, y) \in H_{\varphi_1^A} (x \neq 0 \ \& \ y \neq 0 \Rightarrow \varphi_2^A(x, y) > 0).$$

Следствием леммы 2 и теоремы 2 является

**ТЕОРЕМА 3.** Пусть  $p(x, y)$  — полином,  $p(0, 0) = 0$ ,  $p'(0, 0) = 0_{(2)}$ ,  $\dim \text{Co } N_p = 2$  и выполняется условие (4) (т. е. все главные квазиоднородные формы из групп 1 и 2 являются неотрицательными и невырожденными в слабом смысле). Тогда, если  $\mathbf{A}_p = \emptyset$ , то  $0_{(2)}$  является точкой локального минимума полинома  $p(x, y)$ . Если  $\mathbf{A}_p \neq \emptyset$ , то возможны случаи:

- 1) если  $\exists A \in \mathbf{A}_p$ , для которого выполняется условие  $(Y1)_A$ , то  $0_{(2)}$  не является точкой локального минимума полинома  $p(x, y)$ ;
- 2) если  $\forall A \in \mathbf{A}_p$  не выполняется условие  $(Y1)_A$ , но справедливо  $(Y2)_A$ , то  $0_{(2)}$  является точкой локального минимума полинома  $p(x, y)$ .

Приведем теперь утверждения, сводящие проверку условий  $(Y1)_A$ ,  $(Y2)_A$  к решению очень простых вычислительных задач. Пусть все главные квази-однородные формы полинома  $p(x, y)$  из групп 1–3 неотрицательны и  $\mathbf{A}_p \neq \emptyset$ . Рассмотрим для  $A \in \mathbf{A}_p$ ,  $u_0 \in U_p(A)$  условие  $(Y3)_{A, u_0}$ , которое выполняется тогда и только тогда, когда не является совместной система

$$\begin{cases} x \neq 0 \ \& \ y \neq 0, \\ x^{\epsilon_1} y^{\epsilon_2} = u_0, \\ \varphi_2^A(x, y) = x^{\chi_1} y^{\eta_1} g_2^A(u_0) < 0. \end{cases} \quad (9)$$

**УТВЕРЖДЕНИЕ 3.** Пусть выполнены условия теоремы 3 и  $A \in \mathbf{A}_p \neq \emptyset$ . Тогда для выполнения условия  $(Y1)_A$  (при выполнении которого  $0_{(2)}$  не является точкой локального минимума полинома  $p(x, y)$ ) необходимо и достаточно, чтобы было справедливо хотя бы одно из трех нижеследующих условий:

$$\alpha_s > 0, \quad \chi_v = 0, \quad (b_v < 0) \vee (\eta_v \notin 2\mathbb{N}), \quad (10)$$

$$\beta_1 > 0, \quad \eta_1 = 0, \quad (b_1 < 0) \vee (\chi_1 \notin 2\mathbb{N}), \quad (11)$$

$$\exists u_0 \in U_p(A), \text{ что не выполняется условие } (Y3)_{A, u_0} \quad (12)$$

(т.е. для заданных  $A, u_0$  система (9) совместна).

*Доказательство. Достаточность.* В случае (10) (случай (11) рассматривается аналогично), если  $b_v < 0$ , то при  $x = 0, y = 1$  имеем  $\varphi_1^A(0, 1) = 0$ ,  $\varphi_2^A(0, 1) = b_v < 0$ , а если  $b_v > 0, \eta_v \notin 2\mathbb{N}$  ( $\eta_v \neq 0$ , т. к.  $\chi_v = 0$ ), то при  $x = 0, y = -1$  имеем:  $\varphi_1^A(0, -1) = 0$ ,  $\varphi_2^A(0, -1) = -b_v < 0$ . В случае (12), используя (3), получаем, что при  $x, y$ , удовлетворяющих (9), выполняется  $(x, y) \in H_{\varphi_1^A}$ ,  $\varphi_2^A(x, y) < 0$ , т. е. справедливо условие  $(Y1)_A$ , и в силу теоремы 3 точка  $0_{(2)}$  не является точкой локального минимума полинома  $p(x, y)$ .

*Необходимость.* Пусть  $\exists (x_0, y_0) \in H_{\varphi_1^A} : \varphi_2^A(x_0, y_0) < 0$ . Покажем, что тогда справедливо хотя бы одно из условий (10)–(12). Рассмотрим сначала случай, когда  $x_0 \neq 0, y_0 \neq 0$ . Тогда для  $u_0 = x_0^{\epsilon_1} y_0^{\epsilon_2}$  выполняется

$$\varphi_1^A(x_0, y_0) = x_0^{\alpha_1} y_0^{\beta_1} g_1^A(u_0), \quad \varphi_2^A(x_0, y_0) = x_0^{\chi_1} y_0^{\eta_1} g_2^A(u_0)$$

и, поскольку  $(x_0, y_0) \in H_{\varphi_1^A}$ , имеем  $g_1^A(u_0) = 0$ , а следовательно,  $u_0 \in U_p(A)$ . Но тогда  $x = x_0, y = y_0, u_0$  являются решением системы (9), т. е. справедливо (12). Пусть теперь  $x_0 = 0$ . Тогда из условия  $\varphi_2^A(x_0, y_0) < 0$  (с учетом  $B_2^A > 0$ ) получаем, что  $y_0 \neq 0$ . При этом не может выполняться  $\alpha_s = 0$ , так как, если  $\alpha_s = 0$ , то  $\varphi_1^A(0, y) = a_s y^{\beta_s}$ , откуда из условия  $(x_0, y_0) = (0, y_0) \in H_{\varphi_1^A}$  получаем  $\varphi_1^A(0, y_0) = a_s y_0^{\beta_s} = 0$ , а это противоречит тому, что  $y_0 \neq 0$ . Таким образом,  $\alpha_s > 0$ . Заметим теперь, что не может выполняться  $\chi_v > 0$ , так как тогда

$$\varphi_2^A(0, y_0) = b_v \cdot 0^{\chi_v} \cdot y_0^{\eta_v} = 0.$$

Таким образом,  $\chi_v = 0$ . Далее, не может быть одновременно  $b_v > 0$  и  $\eta_v \in 2\mathbb{N}$ , так как тогда

$$\varphi_2^A(x_0, y_0) = \varphi_2^A(0, y_0) = b_v y_0^{\eta_v} > 0.$$

Совершенно аналогично доказывается, что в случае  $y_0 = 0$  выполняется (11).  $\square$

ПРИМЕР 4.

1. Случаю (10) соответствует полином

$$p(x, y) = \varphi_1^A(x, y) + \varphi_2^A(x, y) = x^2(x - y)^2 + 2y^5.$$

Здесь  $A = (1, 1) \in \mathbb{N}^2$ ,  $\varphi_1^A(x, y) = x^2(x - y)^2$ ,  $\varphi_2^A(x, y) = 2y^5$ ,  $\varphi_1^A(0, -1) = 0$ ,  $\varphi_2^A(0, -1) = -2 < 0$ .

2. Случаю (11) соответствует полином

$$p(x, y) = \varphi_1^A(x, y) + \varphi_2^A(x, y) = y^2(x - y)^2 + 2x^5.$$

Здесь  $A = (1, 1) \in \mathbb{N}^2$ ,  $\varphi_1^A(x, y) = y^2(x - y)^2$ ,  $\varphi_2^A(x, y) = 2x^5$ ,  $\varphi_1^A(-1, 0) = 0$ ,  $\varphi_2^A(-1, 0) = -2 < 0$ .

3. Случаю (12) соответствует полином

$$p(x, y) = \varphi_1^A(x, y) + \varphi_2^A(x, y) = (x - y)^2 + (x - 2y)^3.$$

Здесь  $A = (1, 1) \in \mathbb{N}^2$ ,  $\varphi_1^A(x, y) = (x - y)^2 = x^2 g_1^A(u)$ ,  $u = x^{e_1} y^{e_2} = x^{-1} y$ ,  $e = (-A_2, A_1) = (-1, 1)$ ,  $g_1^A(u) = (1 - u)^2$ ,  $\varphi_2^A(x, y) = (x - 2y)^3 = x^3 g_2^A(u)$ ,  $g_2^A(u) = (1 - 2u)^3$ ,  $A = (1, 1) \in \mathbf{A}_p \neq \emptyset$ ,  $u_0 = 1 \in U_p(A)$ .

Тогда, например, при  $x = 1$ ,  $y = 1$  имеем

$$x \neq 0 \ \& \ y \neq 0, \quad x^{e_1} y^{e_2} = 1 = u_0,$$

$$\varphi_2^A(x, y) = x^{x_1} y^{y_1} g_2^A(u_0) = x^3 g_2^A(u_0) = -1 < 0,$$

т. е. система (9) совместна, а следовательно, не выполняется условие  $(Y3)_{A, u_0}$  и согласно утверждению 3 точка  $0_{(2)}$  не является точкой локального минимума полинома  $p(x, y)$ .

УТВЕРЖДЕНИЕ 4. Пусть выполняются условия теоремы 3,  $A \in \mathbf{A}_p \neq \emptyset$  и справедливо условие  $(Y2)_A$ . Тогда  $\forall u_0 \in U_p(A)$  выполняется условие  $(Y3)_{A, u_0}$ .

*Доказательство.* Предположим, что для некоторого  $u_0 \in U_p(A)$  не выполняется условие  $(Y3)_{A, u_0}$ , т. е. система (9) является совместной. Тогда для  $x, y$ , удовлетворяющих этой системе, выполняется

$$\varphi_1^A(x, y) = x^{\alpha_1} y^{\beta_1} g_1^A(u_0) = 0, \quad \varphi_2^A(x, y) = x^{x_1} y^{y_1} g_2^A(u_0) < 0, \quad x \neq 0, \quad y \neq 0,$$

а это противоречит условию  $(Y2)_A$ .  $\square$

УТВЕРЖДЕНИЕ 5. Пусть выполняются условия теоремы 3,  $A \in \mathbf{A}_p \neq \emptyset$  и  $\forall u_0 \in U_p(A)$  выполняется условие  $(Y3)_{A, u_0}$  при  $g_2^A(u_0) \neq 0$ . Тогда справедливо условие  $(Y2)_A$ .

*Доказательство.* В случае невыполнения условия  $(Y2)_A$  найдутся  $(x, y) \in H_{\varphi_1^A}$  такие, что  $x \neq 0$ ,  $y \neq 0$ ,  $\varphi_2^A(x, y) \leq 0$ . Но тогда  $\varphi_1^A(x, y) = x^{\alpha_1} y^{\beta_1} g_1^A(u_0) = 0$ , где  $x^{e_1} y^{e_2} = u_0$ , откуда  $g_1^A(u_0) = 0$ , а следовательно,

$u_0 \in U_p(A)$ . При этом  $\varphi_2^A(x, y) = x^{\chi_1} y^{\eta_1} g_2^A(u_0) \neq 0$ , следовательно,  $\varphi_2^A(x, y) = x^{\chi_1} y^{\eta_1} g_2^A(u_0) < 0$ , т. е. система (9) оказалась совместной, что противоречит исходному предположению о выполнении условия (У3) $_{A, u_0}$ .  $\square$

Из утверждений 4, 5 получаем, что справедливо

**Следствие 1.** Пусть выполняются условия теоремы 3,  $A \in \mathbf{A}_p \neq \emptyset$ ,  $\forall u_0 \in U_p(A)$   $g_2^A(u_0) \neq 0$ . Тогда для выполнения условия (У2) $_A$  необходимо и достаточно, чтобы  $\forall u_0 \in U_p(A)$  выполнялось условие (У3) $_{A, u_0}$  (т. е. система (9) не являлась совместной).

Таким образом, проверка для некоторого  $A \in \mathbf{A}_p \neq \emptyset$  условий (У1) $_A$ , (У2) $_A$  сводится к вычислению  $g_2^A(u_0)$ ,  $u_0 \in U_p(A)$ , и проверке (в случае  $g_2^A(u_0) \neq 0$ ) совместности системы (9). Исследование на совместность (или на несовместность) системы (9) в случае  $g_2^A(u_0) \neq 0$  является несложным. Поскольку  $\text{НОД}(|e_1|, |e_2|) = 1$ , хотя бы одно из чисел среди  $e_1, e_2$  является нечетным. Пусть, например, число  $e_1$  является нечетным. Тогда для любого значения  $y \in \mathbb{R}$  из второго равенства в (9) однозначно определяем значение  $x$  согласно формуле  $x = (u_0 y^{-e_2})^{1/e_1}$ , подставляя которое в третье условие из (9), получаем неравенство  $(u_0 y^{-e_2})^{\chi_1/e_1} y^{\eta_1} g_2^A(u_0) < 0$  или

$$[u_0^{\chi_1/e_1} g_2^A(u_0)] y^{\frac{e_1 \eta_1 - e_2 \chi_1}{e_1}} < 0. \quad (13)$$

Если целое число  $e_1 \eta_1 - e_2 \chi_1$  является четным, то условие (13) эквивалентно легко проверяемому условию

$$u_0^{\chi_1/e_1} g_2^A(u_0) < 0, \quad (14)$$

в случае выполнения которого убеждаемся, что система (9) является совместной. В противном случае  $u_0^{\chi_1/e_1} g_2^A(u_0) > 0$  (напомним, что  $u_0 \neq 0$ ) и система (9) несовместна (поскольку из ее совместности в рассматриваемом случае следует (14)). Если же число  $e_1 \eta_1 - e_2 \chi_1$  является нечетным, то при любом значении величины  $u_0^{\chi_1/e_1} g_2^A(u_0)$ , которое в рассматриваемом случае отлично от 0, можно подобрать значение  $y$  (например, выбрать его из чисел 1, -1), чтобы условие (13) выполнялось, т. е. в этом случае система (9) совместна (после подбора  $y$  полагаем  $x = (u_0 y^{-e_2})^{1/e_1}$ , чтобы выполнилось равенство  $x^{e_1} y^{e_2} = u_0$ ).

Пусть теперь число  $e_2$  является нечетным. Тогда для любого значения  $x \in \mathbb{R}$  из второго равенства в (9) однозначно определяем значение  $y$  согласно формуле  $y = (u_0 x^{-e_1})^{1/e_2}$ , подставляя которое в третье условие из (9), получаем неравенство  $x^{\chi_1} (u_0 x^{-e_1})^{\eta_1/e_2} g_2^A(u_0) < 0$  или

$$[u_0^{\eta_1/e_2} g_2^A(u_0)] x^{\frac{e_2 \chi_1 - e_1 \eta_1}{e_2}} < 0. \quad (15)$$

Если целое число  $e_2 \chi_1 - e_1 \eta_1$  (или, что то же самое,  $e_1 \eta_1 - e_2 \chi_1$ ; см. предыдущий случай) является четным, то условие (15) эквивалентно легко проверяемому условию

$$u_0^{\eta_1/e_2} g_2^A(u_0) < 0, \quad (16)$$

в случае выполнения которого убеждаемся, что система (9) является совместной. В противном случае  $u_0^{n_1/e_2} g_2^A(u_0) > 0$  и система (9) несовместна (поскольку из ее совместности в рассматриваемом случае следует (16)). Если же число  $e_2\chi_1 - e_1\eta_1$  является нечетным, то при любом значении величины  $u_0^{n_1/e_2} g_2^A(u_0)$ , которое в этом случае отлично от 0, можно подобрать значение  $x$  (например, выбрать его из чисел 1,  $-1$ ), чтобы условие (15) выполнялось, т. е. в этом случае система (9) совместна (после подбора  $x$  полагаем  $y = (u_0 x^{-e_1})^{1/e_2}$ , чтобы выполнилось равенство  $x^{e_1} y^{e_2} = u_0$ ). Действуя таким образом, мы для каждого  $u_0 \in U_p(A)$ , при котором  $g_2^A(u_0) \neq 0$ , однозначно определим, является ли система (9) совместной или нет.

На основании полученных результатов уже можно описать достаточно простой алгоритм проверки для полинома (или степенного ряда; см. ниже замечание 8)  $p(x, y) \not\equiv 0$ , где  $p(0, 0) = 0$ ,  $p'(0, 0) = 0_{(2)}$  (т. е. точка  $0_{(2)}$  является стационарной точкой), является ли точка  $0_{(2)}$  точкой локального минимума этого полинома. Будем рассматривать нетривиальный случай, когда  $\dim \text{Co } N_p = 2$  и одночлены полинома  $p(x, y)$ , соответствующие точкам из  $\Omega(N_p)$ , являются неотрицательными (а следовательно, и невырожденными) квазиоднородными формами, т. е. выполняется (4).

### Алгоритм

Шаг 1. Выделяем все главные квазиоднородные формы полинома  $p(x, y)$  из группы 3. Если множество таких форм пусто, то в силу теоремы 1 точка  $0_{(2)}$  является точкой локального минимума рассматриваемого полинома  $p(x, y)$  и на этом работа алгоритма заканчивается. Иначе полагаем  $\tilde{\mathbf{A}}_p = \emptyset$ , где  $\tilde{\mathbf{A}}_p$  — множество всех  $A \in \mathbb{N}_0^2$ , для которых после окончания работы алгоритма потребуются более тонкие исследования, и переходим к шагу 2.

Шаг 2. Выбираем любую очередную главную квазиоднородную форму из группы 3. Если все они были уже рассмотрены, то в случае  $\tilde{\mathbf{A}}_p = \emptyset$  (всюду в алгоритме к шагу 2 переходим в одном из трех случаев: либо в случае, когда очередная квазиоднородная форма  $\varphi_1^A(x, y)$  из группы 3 оказалась неотрицательной и невырожденной в слабом смысле, т. е. при  $A \notin \mathbf{A}_p$ , либо, если  $A \in \mathbf{A}_p$  и при этом не выполняется условие  $(Y1)_A$ , но справедливо  $(Y2)_A$ , т. е. не нарушается условие 2 теоремы 3, либо в случае  $A \in \tilde{\mathbf{A}}_p$ ) точка  $0_{(2)}$  является точкой локального минимума рассматриваемого полинома  $p(x, y)$ , а если  $\tilde{\mathbf{A}}_p \neq \emptyset$ , то требуются более тонкие исследования (см. ниже модификацию алгоритма, замечание 7, а также раздел 4), и на этом работа алгоритма заканчивается. В противном случае определяем по любым двум членам выбранной формы вектор  $A \in \mathbb{N}_0^2$  такой, что эта форма является главной  $A$ -квазиоднородной формой полинома  $p(x, y)$ . В силу того, что  $\dim \text{Co } N_p = 2$ ,  $p(x, y)$  содержит по крайней мере два члена в разложении (5), (6), первый из которых  $\varphi_1^A(x, y)$  и соответствует очередной выбранной форме из группы 3.

Шаг 3. В силу (4) получаем, что для  $\varphi_1^A(x, y)$  выполняется условие 1 утверждения 1 (используя утверждение 10 и замечание 9 из [2], нетрудно показать, что  $(\alpha_1, \beta_1), (\alpha_s, \beta_s) \in \Omega(N_p) = \Psi(N_p) \cap P(N_p)$ ). Находим характеристический многочлен  $g_1^A(u)$  для квазиоднородной формы  $\varphi_1^A(x, y)$  согласно формуле (3), а также множество  $U_p(A)$ . Если  $U_p(A) = \emptyset$ , то в этом случае в силу утверждения 2 квазиоднородная форма  $\varphi_1^A(x, y)$  является неотриц-

пательной и невырожденной в слабом смысле. Тогда  $A \notin \mathbf{A}_p$  и переходим к шагу 2. Иначе  $U_p(A) \neq \emptyset$  и переходим к шагу 4.

Шаг 4. Находим кратности корней из  $U_p(A)$ , по которым проверяем неотрицательность многочлена  $g_1^A(u)$ . Если она не выполняется, то в силу утверждения 1 квазиоднородная форма  $\varphi_1^A(x, y)$  не является неотрицательной, а следовательно, в силу леммы 1 точка  $0_{(2)}$  не является точкой локального минимума  $p(x, y)$  и на этом работа алгоритма заканчивается. Иначе  $A \in \mathbf{A}_p$ , и переходим к шагу 5.

Шаг 5. Проверяем выполнение условия  $(Y1)_A$ . Для этого сначала определяем справедливость (10), (11). Если хотя бы одно из этих условий выполняется, то в силу утверждения 3 точка  $0_{(2)}$  не является точкой локального минимума  $p(x, y)$  и на этом работа алгоритма заканчивается. Иначе переходим к шагу 6.

Шаг 6. Находим характеристический многочлен  $g_2^A(u)$  квазиоднородной формы  $\varphi_2^A(x, y)$  согласно формуле (8). Если  $\forall u_0 \in U_p(A) g_2^A(u_0) = 0$ , то переходим к шагу 7. Иначе рассматриваем два случая.

1. Пусть целое число  $e_1\eta_1 - e_2\chi_1$  является нечетным. Тогда система (9) совместна для каждого  $u_0 \in U_p(A)$ , для которого  $g_2^A(u_0) \neq 0$ , и согласно утверждению 3 точка  $0_{(2)}$  не является точкой локального минимума  $p(x, y)$ . На этом работа алгоритма заканчивается.
2. Пусть целое число  $e_1\eta_1 - e_2\chi_1$  является четным. Тогда для каждого  $u_0 \in U_p(A)$ , для которого  $g_2^A(u_0) \neq 0$ , проверяем выполнение условия (14), если число  $e_1$  является нечетным, или условия (16), если число  $e_2$  является нечетным.<sup>7</sup> В первом же случае выполнения (14) при нечетном  $e_1$  или (16) при нечетном  $e_2$  система (9) совместна, а следовательно, в силу утверждения 3 точка  $0_{(2)}$  не является точкой локального минимума  $p(x, y)$ , и на этом работа алгоритма заканчивается. В случае, если при всех  $u_0 \in U_p(A) g_2^A(u_0) \neq 0$  и при этом система (9) несовместна (что однозначно определяется проверкой одного из условий (14) или (16)), то в силу следствия 1 выполняется  $(Y2)_A$ , а в силу утверждения 3 не выполняется  $(Y1)_A$ , т. е. для рассматриваемого  $A \in \mathbf{A}_p$  не нарушается условие 2 теоремы 3. В этом случае рассматриваем очередную главную квазиоднородную форму из группы 3, т. е. переходим к шагу 2. Если же нашлось число  $u_0 \in U_p(A)$ , при котором  $g_2^A(u_0) = 0$ , то переходим к шагу 7.

Шаг 7. На этом шаге мы оказываемся в случае, когда  $A \in \mathbf{A}_p$ ,  $g_2^A(u_0) = 0$  для некоторых (хотя бы для одного)  $u_0 \in U_p(A)$ , и при этом система (9) несовместна для тех  $u_0 \in U_p(A)$ , для которых  $g_2^A(u_0) \neq 0$ . Тогда для данного  $A \in \mathbf{A}_p$  потребуются еще более тонкие исследования. Поэтому присваиваем  $\tilde{\mathbf{A}}_p := \tilde{\mathbf{A}}_p \cup \{A\}$ . В любом случае можно продолжить работу алгоритма, исследуя очередную главную квазиоднородную форму из группы 3 (поскольку это исследование может привести к ситуации, показывающей, что  $0_{(2)}$  не является точкой локального минимума  $p(x, y)$ ), т. е. переходим к шагу 2.

<sup>7</sup>Если оба нечетны, то эти условия эквивалентны, поскольку в этом случае числа  $\chi_1, \eta_1$  либо одновременно четны, либо одновременно нечетны, т. е. величины  $u_0^{\eta_1/e_2}, u_0^{\chi_1/e_1}$  имеют один знак.

Применяя изложенный алгоритм к полиному  $p(x, y)$  рассматриваемого вида, мы либо определим, является ли точка  $0_{(2)}$  точкой локального минимума этого полинома или нет, либо выделим непустое множество  $\tilde{\mathbf{A}}_p$  всех  $A \in \mathbf{A}_p$ , для которых требуются более тонкие исследования. Опишем некоторые из них.

Эти исследования могут, в частности, базироваться на применении теоремы 2 для случаев с  $j \geq 3$ , т. е. с использованием других членов в разложении (5), (6), в частности, квазиоднородной формы  $\varphi_3^A(x, y)$ . Опишем модификацию алгоритма, использующую  $\varphi_3^A(x, y)$ . Аналогичным образом могут быть описаны модификации, использующие  $\varphi_4^A(x, y)$  и т. д.

**ЗАМЕЧАНИЕ 6.** Заметим, что возможен случай, когда  $p(x, y) = \varphi_1^A(x, y) + \varphi_2^A(x, y)$ , т. е.  $p(x, y)$  является суммой двух первых квазиоднородных форм. Этот случай будет рассмотрен в разделе 5 и для него будет получена процедура, позволяющая однозначно ответить на вопрос, является ли точка  $0_{(2)}$  точкой локального минимума этого полинома или нет. В связи с этим перейдем к рассмотрению случая, когда  $\forall A \in \tilde{\mathbf{A}}_p \varphi_3^A(x, y) \not\equiv 0$ .

По аналогии с условием  $(Y2)_A$  введем в рассмотрение условие (см. также ниже замечание 7)

$$(\tilde{Y}2)_A: \forall (x, y) \in H_{\varphi_1^A} \cap H_{\varphi_2^A} [x \neq 0, y \neq 0 \Rightarrow \varphi_3^A(x, y) > 0]; \\ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \varphi_2^A(x, y) \geq 0.$$

Заметим, что второе условие в  $(\tilde{Y}2)_A$  проверяется в соответствии с утверждением 1 по аналогии с  $\varphi_1^A(x, y)$ . Это условие можно заменить на более слабое (см. ниже замечание 7).

Следствием леммы 2 и теоремы 2 (при  $j = 3$ ) является

**ТЕОРЕМА 4.** Пусть мы находимся в условиях теоремы 3. Тогда условие 2 в теореме 3 можно заменить на условие

$$2') \text{ если } \forall A \in \mathbf{A}_p \text{ выполняется условие } (Y2)_A \text{ или } (\tilde{Y}2)_A, \text{ то точка } 0_{(2)} \\ \text{ является точкой локального минимума полинома } p(x, y).$$

Обозначим

$$\tilde{U}_p(A) = \{u \in U_p(A) \mid g_2^A(u) = 0\} = \{u \in \mathbb{R} \mid g_1^A(u) = 0, g_2^A(u) = 0\}.$$

По аналогии с условием  $(Y3)_{A, u_0}$  рассмотрим для  $A \in \mathbf{A}_p \neq \emptyset$ ,  $u_0 \in \tilde{U}_p(A)$  условие  $(\tilde{Y}3)_{A, u_0}$ , которое выполняется тогда и только тогда, когда не является совместной система

$$\begin{aligned} x \neq 0, y \neq 0, \\ x^{e_1} y^{e_2} = u_0, \\ \varphi_3^A(x, y) = x^{\omega_1} y^{\xi_1} g_3^A(u_0) < 0, \end{aligned} \tag{17}$$

полученная из  $\varphi_3^A(x, y)$  по аналогии с системой (9), используя  $g_3^A(u)$  — характеристический многочлен квазиоднородной формы  $\varphi_3^A(x, y)$ . Здесь  $\omega_1, \xi_1$  — степени переменных  $x, y$  в главном члене формы  $\varphi_3^A(x, y)$ .

Аналогично утверждениям 4, 5 нетрудно показать, что справедливы следующие утверждения.

УТВЕРЖДЕНИЕ 6. Пусть мы находимся в условиях теоремы 3,  $A \in \mathbf{A}_p \neq \emptyset$  и справедливо условие  $(\tilde{Y}2)_A$ . Тогда  $\forall u_0 \in \tilde{U}_p(A)$  выполняется условие  $(\tilde{Y}3)_{A, u_0}$ .

УТВЕРЖДЕНИЕ 7. Пусть  $\forall u_0 \in \tilde{U}_p(A)$  выполняются условия  $(\tilde{Y}3)_{A, u_0}$ ,  $g_2^A(u_0) \neq 0$ . Тогда выполняется условие  $(\tilde{Y}2)_A$ .

Используя теорему 4, а также утверждения 6, 7, можно модифицировать предложенный алгоритм, заменив шаг 7 на новый — шаг 7' (при этом возникает дополнительный шаг 8).

Шаг 7'. На этом шаге мы оказываемся в случае, когда  $A \in \mathbf{A}_p$ ,  $g_2^A(u_0) = 0$  для некоторых (хотя бы для одного)  $u_0 \in U_p(A)$ , и при этом система (9) несовместна для тех  $u_0 \in U_p(A)$ , для которых  $g_2^A(u_0) \neq 0$ . В этом случае потребуется рассмотрение квазиоднородной формы  $\varphi_3^A(x, y)$ . Если  $\varphi_3^A(x, y) \equiv 0$ , то в соответствии с замечанием 6 можно, используя указанную в нем процедуру, однозначно определить, является ли точка  $0_{(2)}$  точкой локального минимума полинома  $p(x, y)$  или нет. В противном случае исследуем на неотрицательность  $\varphi_2^A(x, y)$  аналогично исследованию на неотрицательность  $\varphi_1^A(x, y)$ , описанному на шагах 3–5 рассматриваемого алгоритма (см. также ниже замечание 7). Если она не выполняется, то для данного  $A \in \mathbb{N}_0^2$  потребуются еще более тонкие исследования (см. раздел 5). Поэтому присваиваем  $\tilde{\mathbf{A}}_p := \tilde{\mathbf{A}}_p \cup \{A\}$  и переходим к шагу 2. В противном случае второе условие в  $(\tilde{Y}2)_A$  выполнено и проверяем выполнение первого. Действуем аналогично шагу 6, применяя все описанные в нем действия к квазиоднородной форме  $\varphi_3^A(x, y)$  (вместо  $\varphi_2^A(x, y)$ ) со всеми вытекающими в связи с этим переобозначениями. В случае если при всех  $u_0 \in \tilde{U}_p(A)$   $g_3^A(u_0) \neq 0$  и при этом система (17) несовместна, то в силу утверждения 7 выполняется  $(\tilde{Y}2)_A$ , т. е. для рассматриваемого  $A \in \mathbb{N}_0^2$  не нарушается условие 2' теоремы 4. В этом случае рассматриваем очередную главную квазиоднородную форму из группы 3, т. е. переходим к шагу 2.

Шаг 8. На этом шаге мы оказываемся в случае, когда  $A \in \mathbf{A}_p$ ,  $g_3^A(u_0) = 0$  для некоторых (хотя бы для одного)  $u_0 \in \tilde{U}_p(A)$ , и при этом система (17) несовместна для тех  $u_0 \in \tilde{U}_p(A)$ , для которых  $g_3^A(u_0) \neq 0$ . В этом случае может потребоваться рассмотрение квазиоднородной формы  $\varphi_4^A(x, y)$  и дальнейшая модификация алгоритма вплоть до исчерпания всех квазиоднородных форм в разложении (5), (6). Отметим однако, что дальнейшая модификация алгоритма возможна, например, в случае выполнения условия неотрицательности  $\varphi_3^A(x, y)$  (см. также замечание 7 относительно ослабления этого условия). В противном случае присваиваем  $\tilde{\mathbf{A}}_p := \tilde{\mathbf{A}}_p \cup \{A\}$  и переходим к шагу 2.

ЗАМЕЧАНИЕ 7. В теореме 2 используется условие, при выполнении которого для некоторого  $j \in \{2, \dots, r_A\}$  точка  $0_{(2)}$  является точкой локального минимума полиномов  $\varphi_1^A(x, y)$ ,  $\varphi_1^A(x, y) + \varphi_2^A(x, y)$ ,  $\dots$ ,  $\varphi_1^A(x, y) + \dots + \varphi_{j-1}^A(x, y)$ . Это условие заведомо выполняется, если справедливо легко проверяемое условие неотрицательности<sup>8</sup>  $\varphi_1^A(x, y)$ ,  $\dots$ ,  $\varphi_{j-1}^A(x, y)$ . В разделе 6 описывается процедура, позволяющая однозначно ответить на вопрос, является ли  $0_{(2)}$  точкой локального минимума по-

<sup>8</sup>При этом в силу  $A \in \mathbb{N}^2$  условие неотрицательности квазиоднородной формы  $\varphi_1^A(x, y)$  эквивалентно условию, что точка  $0_{(2)}$  является точкой локального минимума  $\varphi_1^A(x, y)$ .

линома  $\varphi_1^A(x, y) + \varphi_2^A(x, y)$  или нет. В связи с этим второе условие в  $(\tilde{Y}2)_A$  (т. е. условие неотрицательности  $\varphi_2^A(x, y)$ ) можно заменить на проверку локального минимума функции  $\varphi_1^A(x, y) + \varphi_2^A(x, y)$  в точке  $0_{(2)}$ . Но тогда и в модификации рассматриваемого алгоритма можно заменить проверку условия неотрицательности  $\varphi_2^A(x, y)$  на проверку более слабого условия локального минимума  $0_{(2)}$  для  $\varphi_1^A(x, y) + \varphi_2^A(x, y)$ . Соответственно, при дальнейшей модификации рассматриваемого алгоритма можно и далее условия неотрицательности полиномов  $\varphi_3^A(x, y)$ ,  $\varphi_4^A(x, y)$  и т. д. заменить на более слабые условия: точка  $0_{(2)}$  является точкой локального минимума полиномов  $\varphi_1^A(x, y) + \varphi_2^A(x, y) + \varphi_3^A(x, y)$ ,  $\varphi_1^A(x, y) + \varphi_2^A(x, y) + \varphi_3^A(x, y) + \varphi_4^A(x, y)$  и т. д.

**ЗАМЕЧАНИЕ 8.** Все используемые в алгоритме и его модификации утверждения остаются в силе и для степенного ряда  $p(x, y)$ , абсолютно сходящегося в некоторой окрестности точки  $0_{(2)}$  (см. [5]), а следовательно, эти алгоритмы могут быть применены к  $p(x, y)$  и в этом случае. При этом множество главных  $A$ -квазиоднородных форм, где  $A \in \mathbb{N}_0^2$ , а затем множество векторов  $\mathbf{A}_p$  определяем по  $P(N_p)$ , которое является конечным (см. [5]). Таким образом, квазиоднородные формы  $\varphi_1^A(x, y)$ , где  $A \in \mathbf{A}_p$ , находятся по членам ряда  $p(x, y)$ , соответствующим конечному множеству  $P(N_p)$ . Далее для  $\varphi_2^A(x, y)$  могут потребоваться члены ряда, соответствующие конечному множеству  $P(N_p \setminus N_{\varphi_1^A})$  и т. д.

**ПРИМЕР 5.** Рассмотрим полином  $p(x, y, a)$  (см.  $N_p$ ,  $\text{Co } N_p$  на рис. 1), для которого при  $A = (1, 2)$  выполняется

$$p(x, y, a) = \varphi_1^A(x, y) + \varphi_2^A(x, y, a) + \varphi_3^A(x, y),$$

где  $\varphi_1^A(x, y) = x^4y^2 + 2x^2y^3 + y^4 = y^2(x^2 + y)^2$ ,  $\varphi_2^A(x, y, a) = 3ax^6y^2 + 3x^4y^3$ ,  $\varphi_3^A(x, y) = 0.01x^8y^3$  — полиномы, являющиеся  $A$ -квазиоднородными формами,  $B_1^A = 8$ ,  $B_2^A = 10$ ,  $B_3^A = 14$  (см. (5), (6)),  $a \in \{0.99, 1, 1.01\}$  — параметр. В этом примере  $p(0, 0, a) = 0$ ,  $p'(0, 0, a) = 0_{(2)}$ , т. е. точка  $0_{(2)}$  является стационарной. Применим к  $p(x, y, a)$  рассмотренный алгоритм. Заметим (см. рис. 1), что у полинома  $p(x, y, a)$  при любом из указанных значений  $a$  имеются три «юго-западные» грани, находящиеся в множестве минимальных по Парето точек этого многогранника: две размерности 0 (угловые точки  $(0, 4)$ ,  $(4, 2)$ ) и одна размерности 1 (отрезок прямой, соединяющий эти угловые точки). Угловой точке  $(0, 4)$  соответствует главная  $(1, 1)$ -квазиоднородная форма  $x^4y^2$ , а угловой точке  $(4, 2)$  соответствует главная  $(2, 1)$ -квазиоднородная форма  $y^4$ , т. е. эти формы принадлежат группе 1. Грани размерности 1 соответствует главная  $(1, 2)$ -квазиоднородная форма  $\varphi_1^A(x, y) = x^4y^2 + 2x^2y^3 + y^4$ , где  $A = (1, 2)$ , принадлежащая группе 3 (т. е. ни одна из трех форм не принадлежит группе 2). Рассмотрим условие (4), проверяемое для  $\Omega(N_p) = P(N_p) \cap \Psi(N_p) = \{(0, 4), (4, 2)\}$ . Поскольку  $\text{coef}(p, (0, 4)) = 1 > 0$  и при этом  $(0, 4) \in 2\mathbb{N} \cup \{0\}$ , а также  $\text{coef}(p, (4, 2)) = 1 > 0$  и при этом  $(4, 2) \in 2\mathbb{N} \cup \{0\}$ , условие (4) выполняется. Единственной главной квазиоднородной формой из группы 3 является  $\varphi_1^A(x, y)$ . При этом соответствующий ей вектор  $A = (1, 2) \in \mathbb{N}_0^2$  однозначно определяется по членам этой формы (по любым двум из них). На шагах 3, 4 исследуем на неотрицательность  $\varphi_1^A(x, y)$ . Заметим, что  $x^4y^2$  — ее главный член,  $\varphi_1^A(x, y) = x^4y^2g_1^A(u)$ , где  $g_1^A(u) = (1 + u)^2$  — ее характеристический многочлен,  $u = x^{-2}y = x^{e_1}y^{e_2}$ ,  $e_1 = -A_2 = -2$ ,  $e_2 = A_1 = 1$ . Таким образом, характеристический многочлен имеет единственный корень  $u_0 = -1$

кратности 2, т. е.  $U_p(A) = \{-1\}$ . При этом выполняются условия утверждения 1, т.е. квазиоднородная форма  $\varphi_1^A(x, y)$  является неотрицательной. Таким образом,  $\mathbf{A}_p = \{(1, 2)\}$ . На шаге 5 проверяем выполнение условий (10), (11), которые в рассматриваемом случае не выполняются. На шаге 6 исследуем квазиоднородную форму  $\varphi_2^A(x, y, a) = x^{\chi_1} y^{\eta_1} g_2^A(u, a)$ , где  $b_1 x^{\chi_1} y^{\eta_1} = 3ax^6 y^2$  — ее главный член, а  $g_2^A(u, a) = 3(a + u)$  — характеристический многочлен, т. е.  $\chi_1 = 6, \eta_1 = 2$ . Заметим, что число  $e_1 \eta_1 - e_2 \chi_1 = (-2) \cdot 2 - 1 \cdot 6 = -4 - 6 = -10$  является четным. Поэтому согласно шагу 6, поскольку число  $e_1 = -A_2 = -2$  является четным, а число  $e_2 = A_1 = 1$  — нечетным, проверяем выполнение условия (16), имеющее вид

$$u_0^{\eta_1/e_2} g_2^A(u_0, a) < 0 \Leftrightarrow g_2^A(-1, a) < 0 \Leftrightarrow 3(a - 1) < 0$$

(т. к.  $u_0^{\eta_1/e_2} = (-1)^{2/1} = (-1)^2 = 1$ ). В случае  $a = 0.99$  это условие выполняется, а следовательно, точка  $0_{(2)}$  не является точкой локального минимума полинома  $p(x, y, 0.99)$ . В случае  $a = 1.01$  оно не выполняется, т. е. справедливо условие  $(Y3)_{A, u_0}$ . Но тогда в силу следствия 1 имеет место  $(Y2)_A$ , а в силу утверждения 3 не выполняется  $(Y1)_A$ . При этом из единственности  $A = (1, 2) \in \mathbf{A}_p$  следует справедливость условия 2 теоремы 3, в силу которой  $0_{(2)}$  является точкой локального минимума полинома  $p(x, y, 1.01)$ . В случае  $a = 1$  выполняется  $g_2^A(u_0, 1) = 0$ , т. е. этот случай требует более тонких исследований (в частности, предлагаемых в разделе 4). Заметим, что в третьем случае ( $a = 1$ ) при подстановке  $x(t) = t, y(t) = -t^2$  выполняется  $p(x(t), y(t), 1) = -0.01t^{14}$ , т. е.  $0_{(2)}$  не является точкой локального минимума полинома  $p(x, y, 1)$ . Отметим, что в третьем случае был на самом деле применен метод подстановки многочленов, который подробно рассматривается в разделе 4.

**4. Метод подстановки многочленов с неопределенными коэффициентами.** Из рассмотрения предложенного алгоритма и его модификации видно, что его применение к некоторым полиномам приводит к случаю, когда результатом работы является непустое множество  $\tilde{\mathbf{A}}_p$ , показывающее, что исследуемый вопрос остается невыясненным и требуется дополнительное исследование разложений полинома на  $A$ -квазиоднородные формы для  $A \in \tilde{\mathbf{A}}_p$ . Это связано с тем, что алгоритм и его модификация базируются на утверждениях леммы 2 и теоремы 2, которые дают отдельно необходимое условие (лемма 2) и отдельно достаточное условие (теорема 2), не объединенные в единый общий критерий локального минимума.

В настоящем разделе рассмотрим метод, который основан на общем критерии локального минимума полинома  $p(x, y)$ . В этом методе рассматриваем многочлены с переменной  $t \in \mathbb{R}$  вида (эти многочлены могут содержать любое конечное число членов)

$$\begin{aligned} x(t) &= c_0 t^{\nu_1} + c_1 t^{\nu_1+1} + o(t^{\nu_1+1}), \\ y(t) &= d_0 t^{\nu_2} + d_1 t^{\nu_2+1} + o(t^{\nu_2+1}), \\ c_0, d_0 &\neq 0, \quad \nu_1, \nu_2 \in \mathbb{N}. \end{aligned} \tag{18}$$

Будем подбирать многочлены  $x(t), y(t)$  вида (18) таким образом, чтобы

$$p(x(t), y(t)) = g_0 t^\sigma + o(t^\sigma), \quad \sigma \in \mathbb{N}, \quad g_0 < 0. \tag{19}$$

При этом будем использовать приводимое далее утверждение 8, являющееся следствием леммы 7 из [1].

**УТВЕРЖДЕНИЕ 8.** Пусть  $p(x, y)$  — полином,  $p(x, y) \not\equiv 0$ ,  $p(0, 0) = 0$ ,  $p'(0, 0) = 0_{(2)}$ , т. е. точка  $0_{(2)}$  является стационарной. Для того чтобы  $0_{(2)}$  не являлась точкой локального минимума полинома  $p(x, y)$  необходимо и достаточно существование многочленов вида (18), таких, чтобы выполнялось (19).

Заметим, что для  $A = (A_1, A_2) = (\nu_1, \nu_2)/\nu_0 \in \mathbb{N}_0^2$ , где  $\nu_0 = \text{НОД}(\nu_1, \nu_2)$ , для разложения (5), (6) выполняется

$$p(x(t), y(t)) = \varphi_1^A(x(t), y(t)) + \varphi_2^A(x(t), y(t)) + \dots + \varphi_{r_A}^A(x(t), y(t)),$$

где  $\varphi_1^A(x, y)$  — главная  $A$ -квазиоднородная форма полинома  $p(x, y)$ , удовлетворяющая (1)–(3), а следовательно,

$$p(x(t), y(t)) = \varphi_1^A(c_0, d_0)t^{B_1^A} + o(t^{B_1^A}). \quad (20)$$

Метод неопределенных коэффициентов применяется в нетривиальном случае, когда главные  $A$ -квазиоднородные формы полинома  $p(x, y)$  при  $A \in \mathbb{N}_0^2$  неотрицательны, т. е., в частности, выполняется условие (4) и при этом  $\mathbf{A}_p \neq \emptyset$ . Если  $\mathbf{A}_p = \emptyset$ , то, как показано в разделе 2, вопрос о том, является ли точка  $0_{(2)}$  точкой локального минимума полинома  $p(x, y)$ , решается просто с использованием утверждения 2 и теоремы 1, т. е. в этом случае  $0_{(2)}$  является точкой локального минимума полинома  $p(x, y)$ . Из неотрицательности  $\varphi_1^A(x, y)$  следует, что в силу (20) условие (19) может выполняться только при  $\varphi_1^A(c_0, d_0) = 0$ , и поэтому для дальнейшего представляет интерес только этот случай, при котором в силу (1)–(3) имеем

$$\begin{cases} \varphi_1^A(c_0, d_0) = c_0^{\alpha_1} d_0^{\beta_1} g_1^A(u_0) = 0, \\ u_0 = c_0^{e_1} d_0^{e_2} \in U_p(A); \\ A = (A_1, A_2) = (\nu_1, \nu_2)/\nu_0 \in \mathbf{A}_p, \\ \nu_0 = \text{НОД}(\nu_1, \nu_2), e_1 = -A_2, e_2 = A_1. \end{cases} \quad (21)$$

Таким образом, удалось сузить множество рассматриваемых многочленов вида (18), проверяемых на выполнение условия (19). Множество  $\mathbf{A}_p$  является конечным, поскольку число векторов в  $\mathbf{A}_p$  не превосходит количество главных квазиоднородных форм полинома  $p(x, y)$ , принадлежащих группе 3. Нередко  $\mathbf{A}_p$  состоит из единственного вектора.

Рассмотрим условие для полинома  $p(x, y)$ , у которого  $\mathbf{A}_p \neq \emptyset$ , формулируемое относительно  $A \in \mathbf{A}_p$ ,  $u_0 \in U_p(A)$ :

(У4) $_{A, u_0}$ : существуют  $c_0 \neq 0$ ,  $d_0 \neq 0$  такие, что для многочленов вида (18) выполняются условия (19), (21).

Сформулируем также условие для полинома  $p(x, y)$ , у которого  $\mathbf{A}_p \neq \emptyset$ :  
(У4): существуют вектор  $A \in \mathbf{A}_p$  и число  $u_0 \in U_p(A)$ , для которых выполняется условие (У4) $_{A, u_0}$ .

Следствием приведенных рассуждений, а также утверждения 8, является

УТВЕРЖДЕНИЕ 9. Пусть  $p(x, y)$  – полином,  $p(x, y) \not\equiv 0$ ,  $p(0, 0) = 0$ ,  $p'(0, 0) = 0_{(2)}$ , т. е. точка  $0_{(2)}$  является стационарной. Пусть далее все главные квазиоднородные формы полинома  $p(x, y)$  из групп 1 и 2 являются неотрицательными и невырожденными в слабом смысле, и при этом  $\mathbf{A}_p \neq \emptyset$ . Тогда для того, чтобы  $0_{(2)}$  не являлась точкой локального минимума полинома  $p(x, y)$ , необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие (У4).

Для удобства применения утверждения 9 желательно для каждого  $A \in \mathbf{A}_p$  сузить множество многочленов вида (18), проверяемых в условии (У4) $_{A, u_0}$  на выполнение (21).

Пусть  $A \in \mathbf{A}_p$ ,  $u_0 \in U_p(A)$ , и мы собираемся проверить выполнение условия (У4) $_{A, u_0}$ . Заметим, что условию  $u_0 = c_0^{e_1} d_0^{e_2}$  удовлетворяет бесчисленное множество пар  $(c_0, d_0)$ . Сузим это множество до конечного. Заметим, что в силу  $\text{НОД}(|e_1|, |e_2|) = 1$  хотя бы одно из чисел среди  $e_1, e_2$  является нечетным. Таким образом, возможны три случая, для каждого из которых рассмотрим соответствующие множества:

1) пусть  $e_1 = -A_2$  четно, а  $e_2 = A_1$  нечетно; положим

$$C_1 = \{(1, u_0^{1/e_2}), (-1, u_0^{1/e_2})\};$$

2) пусть  $e_1$  нечетно, а  $e_2$  четно; положим

$$C_2 = \{(u_0^{1/e_1}, 1), (u_0^{1/e_1}, -1)\};$$

3) пусть  $e_1, e_2$  нечетны; положим

$$C_3 = \{(1, u_0^{1/e_2}), (-1, -u_0^{1/e_2})\}, \quad C_4 = \{(u_0^{1/e_1}, 1), (-u_0^{1/e_1}, -1)\}.$$

Покажем, что в любом из этих случаев можно при проверке условия (У4) $_{A, u_0}$  ограничиться рассмотрением выбранных конечных множеств пар  $(c_0, d_0)$ .

Предварительно покажем, что в каждом из этих случаев, если  $u_0 = c_0^{e_1} d_0^{e_2}$  для некоторых  $c_0 \neq 0, d_0 \neq 0$ , то найдется (и легко вычисляется)  $\tau > 0$  такое, что для пары чисел  $\tilde{c}_0 = c_0 \tau^{1/A_2}, \tilde{d}_0 = d_0 \tau^{1/A_1}$  справедливо следующее. В случае 1 имеем  $\{(\tilde{c}_0, \tilde{d}_0), (-\tilde{c}_0, \tilde{d}_0)\} = C_1$ . В случае 2 –  $\{(\tilde{c}_0, \tilde{d}_0), (\tilde{c}_0, -\tilde{d}_0)\} = C_2$ . В случае 3 найдутся два значения для числа  $\tau > 0$ , при одном из которых  $\{(\tilde{c}_0, \tilde{d}_0), (-\tilde{c}_0, -\tilde{d}_0)\} = C_3$ , а при другом  $\{(\tilde{c}_0, \tilde{d}_0), (-\tilde{c}_0, -\tilde{d}_0)\} = C_4$ .

Рассмотрим случай 1. Остальные случаи рассматриваются аналогично. Действительно, в случае 1 достаточно положить  $\tau = c_0^{-A_2} = c_0^{e_1} = |c_0|^{e_1}$  (при этом  $|c_0| = \tau^{-1/A_2}, \tau = |c_0|^{-A_2}$ ). Тогда, учитывая, что в силу  $u_0 = c_0^{e_1} d_0^{e_2} = |c_0|^{e_1} d_0^{e_2}$  выполняется  $(u_0)^{1/A_1} = (u_0)^{1/e_2} = d_0 |c_0|^{e_1/e_2} = d_0 |c_0|^{-A_2/A_1}$ , получаем, что для  $\tilde{c}_0 = \pm c_0 \tau^{1/A_2}, \tilde{d}_0 = d_0 \tau^{1/A_1}$  справедливо следующее:  $|\tilde{c}_0| = |c_0| \tau^{1/A_2} = 1, \tilde{d}_0 = d_0 \tau^{1/A_1} = d_0 |c_0|^{-A_2/A_1} = (u_0)^{1/A_1} = (u_0)^{1/e_2}$ , т. е.

$$\{(\tilde{c}_0, \tilde{d}_0), (-\tilde{c}_0, \tilde{d}_0)\} = \{(1, u_0^{1/e_2}), (-1, u_0^{1/e_2})\} = C_1.$$

Вернемся к задаче проверки условия (У4) $_{A, u_0}$  для некоторых  $A \in \mathbf{A}_p$ ,  $u_0 \in U_p(A)$ . Покажем, что эту проверку достаточно проводить для конечного числа наборов  $c_0 \neq 0, d_0 \neq 0$  таких, что  $u_0 = c_0^{e_1} d_0^{e_2} \in U_p(A)$ .

Воспользуемся тем, что для вектора  $A \in \mathbf{A}_p$  выполняется один из перечисленных ранее случаев относительно четности или нечетности его компонент. Пусть, например, выполняется случай 1, когда  $e_1 = -A_2$  является четным, а  $e_2 = A_1$  нечетным. Остальные случаи рассматриваются аналогично. Предположим, что для некоторого  $u_0 \in U_p(A)$  выполняется условие  $(Y4)_{A,u_0}$ . Тогда существуют  $c_0 \neq 0$ ,  $d_0 \neq 0$  такие, что для многочленов вида (18) справедливы условия (19), (21). Рассмотрим подстановку  $t = (\tau^{1/(\nu_0 A_1 A_2)})\tilde{t}$ ,  $\tau > 0$ . Тогда, учитывая (19), получаем

$$p(x(t), y(t)) = p(x(\tau^{1/(\nu_0 A_1 A_2)}\tilde{t}), y(\tau^{1/(\nu_0 A_1 A_2)}\tilde{t})) = \tilde{g}_0 \tilde{t}^\sigma + o(\tilde{t}^\sigma),$$

где  $\tilde{g}_0 = g_0 \tau^{\sigma/(\nu_0 A_1 A_2)} < 0$ . При этом

$$\begin{aligned} x(t) &= x(\tau^{1/(\nu_0 A_1 A_2)}\tilde{t}) = c_0 \tau^{\nu_1/(\nu_0 A_1 A_2)} \tilde{t}^{\nu_1} + c_1 \tau^{(\nu_1+1)/(\nu_0 A_1 A_2)} \tilde{t}^{\nu_1+1} + o(\tilde{t}^{\nu_1+1}), \\ y(t) &= y(\tau^{1/(\nu_0 A_1 A_2)}\tilde{t}) = d_0 \tau^{\nu_2/(\nu_0 A_1 A_2)} \tilde{t}^{\nu_2} + d_1 \tau^{(\nu_2+1)/(\nu_0 A_1 A_2)} \tilde{t}^{\nu_2+1} + o(\tilde{t}^{\nu_2+1}). \end{aligned}$$

Заметим, что  $\tilde{c}_0 = c_0 \tau^{\nu_1/(\nu_0 A_1 A_2)} = c_0 \tau^{1/A_2}$ ,  $\tilde{d}_0 = d_0 \tau^{\nu_2/(\nu_0 A_1 A_2)} = d_0 \tau^{1/A_1}$ , а следовательно, при выборе  $\tau = c_0^{-A_2} = c_0^{e_1} = |c_0|^{e_1}$  (как было показано при рассмотрении случая 1) выполняется  $(\tilde{c}_0, \tilde{d}_0) \in C_1 = \{(1, u_0^{1/e_2}), (-1, u_0^{1/e_2})\}$ , т. е.  $\tilde{d}_0 = u_0^{1/e_2}$  выбирается однозначно, а  $\tilde{c}_0 \in \{1, -1\}$ .

Таким образом, показано, что при проверке для любых  $A \in \mathbf{A}_p$ ,  $u_0 \in U_p(A)$  условия  $(Y4)_{A,u_0}$  в случае 1 на многочлены вида (18), удовлетворяющие (19), можно наложить дополнительное условие  $(c_0, d_0) \in C_1$ , которое из бесконечного числа случаев выполнения  $u_0 = c_0^{e_1} d_0^{e_2}$  позволяет ограничиться рассмотрением лишь двух из них. Аналогичная ситуация имеет место и для остальных двух случаев.

Таким образом, было показано, что вместо условия  $(Y4)_{A,u_0}$  можно рассматривать эквивалентное ему условие

$(\tilde{Y}4)_{A,u_0}$ : существуют  $c_0 \neq 0$ ,  $d_0 \neq 0$  такие, что для многочленов вида (18), выполняются условия (19), (21) и при этом в случае 1 —  $(c_0, d_0) \in C_1$ , в случае 2 —  $(c_0, d_0) \in C_2$ , а в случае 3 —  $(c_0, d_0) \in C_3$  или  $(c_0, d_0) \in C_4$  (выбираем любое из этих условий).

Рассмотрим теперь вопрос о выборе для многочленов вида (18) вектора  $(\nu_1, \nu_2) \in \mathbb{N}^2$  при проверке условия  $(Y4)_{A,u_0}$  или  $(\tilde{Y}4)_{A,u_0}$ . Одним из ограничений является условие (21), при выполнении которого должно найтись число  $\nu \in \mathbb{N}$  такое, что  $(\nu_1, \nu_2) = \nu A$ . В связи с этим возникает вопрос: можно ли при этом обойтись случаем  $\nu = 1$ ?

Следующий пример показывает, что при применении метода подстановки многочленов с неопределенными коэффициентами не всегда можно ограничиться значением  $\nu = 1$ .

**ПРИМЕР 6.** Пусть  $p(x, y) = (x - y)^6 - (x - y)^2 x^5 + x^8$ . Тогда для  $A = (A_1, A_2) = (1, 1)$  выполняется  $p(x, y) = \varphi_1^A(x, y) + \varphi_2^A(x, y) + \varphi_3^A(x, y)$ , где (см. (5), (6))

$$\begin{aligned} \varphi_1^A(x, y) &= (x - y)^6 = x^6 g_1^A(u), \quad u = yx^{-1}, \quad g_1^A(u) = (1 - u)^6, \quad B_1^A = 6; \\ \varphi_2^A(x, y) &= -(x - y)^2 x^5 = x^7 g_2^A(u), \quad g_2^A(u) = -(1 - u)^2, \quad B_2^A = 7; \\ \varphi_3^A(x, y) &= x^8 = x^8 g_3^A(u), \quad g_3^A(u) = 1, \quad B_3^A = 8. \end{aligned}$$

Характеристический многочлен  $g_1^A(u) = (1 - u)^6$  имеет единственный действительный корень  $u_0 = 1$ . Заметим, что  $A = (A_1, A_2) = (1, 1) \in \mathbf{A}_p$ , и при проверке условия  $(\tilde{Y}4)_A$  в общем случае должны рассматриваться многочлены  $x(t), y(t)$  вида

$$x(t) = c_0 t^\nu + c_1 t^{\nu+1} + o(t^{\nu+1}), \quad y(t) = d_0 t^\nu + d_1 t^{\nu+1} + o(t^{\nu+1}), \quad \text{где } \nu \in \mathbb{N}. \quad (22)$$

Здесь имеет место случай 3, когда оба числа  $e_1 = -A_2 = -1, e_2 = A_1 = 1$  являются нечетными, а следовательно, пару чисел  $(c_0, d_0)$  можно выбирать из множества  $C_3 = \{(1, 1), (-1, -1)\}$ . В случае  $\nu = 1$  при  $c_0 = 1, d_0 = 1$  многочлены (22) имеют вид (для простоты обозначаем  $c_1 = c, d_1 = d$ )

$$x(t) = t + ct^2 + o(t^2), \quad y(t) = t + dt^2 + o(t^2). \quad (23)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \varphi_1^A(x(t), y(t)) &= (x(t) - y(t))^6 = (c - d)^6 t^{12} + o(t^{12}); \\ \varphi_2^A(x(t), y(t)) &= -(x(t) - y(t))^2 [x(t)]^5 = -(c - d)^2 t^9 + o(t^9); \\ \varphi_3^A(x(t), y(t)) &= [x(t)]^8 = t^8 + o(t^8). \end{aligned}$$

Таким образом,  $p(x(t), y(t)) = (c - d)^6 t^{12} + o(t^{12}) - (c - d)^2 t^9 + o(t^9) + t^8 + o(t^8)$ , а следовательно, для любых многочленов вида (23) выполняется  $p(x(t), y(t)) = t^8 + o(t^8)$ . Совершенно аналогично в случае выбора  $c_0 = -1, d_0 = -1$ , т. е. для многочленов вида  $x(t) = -t + ct^2 + o(t^2), y(t) = -t + dt^2 + o(t^2)$ , также выполняется  $p(x(t), y(t)) = t^8 + o(t^8)$ .

Рассмотрим теперь многочлены вида (22) при  $\nu = 2, c_0 = 1, d_0 = 1$  (снова для простоты обозначаем  $c_1 = c, d_1 = d$ ):

$$x(t) = t^2 + ct^3 + o(t^3), \quad y(t) = t^2 + dt^3 + o(t^3). \quad (24)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \varphi_1^A(x(t), y(t)) &= (x(t) - y(t))^6 = (c - d)^6 t^{18} + o(t^{18}); \\ \varphi_2^A(x(t), y(t)) &= -(x(t) - y(t))^2 x^5(t) = -(c - d)^2 t^{16} + o(t^{16}); \\ \varphi_3^A(x(t), y(t)) &= x^8(t) = t^{16} + o(t^{16}); \\ p(x(t), y(t)) &= (c - d)^6 t^{18} + o(t^{18}) - (c - d)^2 t^{16} + o(t^{16}) + t^{16} + o(t^{16}), \end{aligned}$$

а следовательно, например, при  $c = 2, d = 0$  для многочленов  $x(t) = t^2 + 2t^3, y(t) = t^2$  выполняется  $p(x(t), y(t)) = 2^6 t^{18} - 2^2 t^{16} + t^{16} + o(t^{16}) = -3t^{16} + o(t^{16})$ . Таким образом, рассмотрение многочленов вида (24) показало, что  $0_{(2)}$  не является точкой локального минимума полинома  $p(x, y)$ , т. е. рассмотрение только многочленов вида (23), соответствующих случаю  $\nu = 1$ , оказалось недостаточным. Отметим, что при использовании рассмотренного в разделе 3 алгоритма мы не получим ответа на вопрос, является ли точка  $0_{(2)}$  точкой локального минимума полинома  $p(x, y)$  из этого примера.

**ЗАМЕЧАНИЕ 9.** Все используемые в этом разделе утверждения остаются в силе и для степенного ряда  $p(x, y)$  [5], а следовательно, могут быть применены к  $p(x, y)$  и в этом случае.

**5. Случай, когда  $p(x, y)$  является суммой двух  $A$ -квазиоднородных форм, где  $A \in \mathbb{N}_0^2$ .** Рассмотрим теперь один частный случай, когда для полинома  $p(x, y)$ , удовлетворяющего условиям утверждения 9, для некоторого  $A \in \mathbb{N}_0^2$  разложение (5), (6) состоит из двух  $A$ -квазиоднородных форм, т. е.  $r_A = 2$ . Покажем, что в этом случае с помощью простых вычислительных процедур можно однозначно ответить на вопрос, является ли  $0_{(2)}$  точкой локального минимума  $p(x, y)$ .

**УТВЕРЖДЕНИЕ 10.** Пусть для некоторого  $A \in \mathbb{N}_0^2$  разложение (5), (6) полинома  $p(x, y)$  состоит из двух  $A$ -квазиоднородных форм, т. е. имеет вид  $p(x, y) = \varphi_1^A(x, y) + \varphi_2^A(x, y)$ . Тогда не существует вектора  $\bar{A} \in \mathbb{N}_0^2$  такого, что  $\bar{A} \neq A$ , и главная  $\bar{A}$ -квазиоднородная форма  $\varphi_1^{\bar{A}}(x, y)$  полинома  $p(x, y)$  содержит более двух одночленов.

*Доказательство.* Предположим, что для некоторого  $\bar{A} = (\bar{A}_1, \bar{A}_2) \in \mathbb{N}_0^2$  главная  $\bar{A}$ -квазиоднородная форма  $\varphi_1^{\bar{A}}(x, y)$  полинома  $p(x, y)$  содержит по крайней мере три одночлена. При этом по крайней мере два из них будут принадлежать одной из двух форм  $\varphi_1^A(x, y)$  или  $\varphi_2^A(x, y)$  (носитель каждой из которых лежит на одной прямой). Поскольку прямая на плоскости однозначно определяется любыми двумя точками, находящимися на этой прямой, принадлежность двух одночленов любой из этих форм означает, что  $\bar{A} = A$  (поскольку  $A, \bar{A} \in \mathbb{N}_0^2$ ), т. е. пришли к противоречию с  $\bar{A} \neq A$ .  $\square$

**УТВЕРЖДЕНИЕ 11.** Пусть  $A = (A_1, A_2) \in \mathbb{N}_0^2$ ,  $u_0 \neq 0$ ,  $l$  – четное натуральное число,  $p(x, y)$ ,  $\bar{p}(x, y)$  – полиномы,  $p(x, y) = (y^{A_1} - u_0 x^{A_2})^l \bar{p}(x, y)$ ,  $\bar{p}(0, 0) = 0$ . Тогда  $0_{(2)}$  является точкой локального минимума полинома  $p(x, y)$  тогда и только тогда, когда она является точкой локального минимума полинома  $\bar{p}(x, y)$ .

*Доказательство.* Пусть сначала  $0_{(2)}$  не является точкой локального минимума полинома  $p(x, y)$ . Тогда найдется последовательность точек  $(x(n), y(n)) \in \mathbb{R}^2$  таких, что

$$p(x(n), y(n)) = [(y(n))^{A_1} - u_0(x(n))^{A_2}]^l \bar{p}(x(n), y(n)) < 0, \quad n = 1, 2, \dots,$$

$$(x(n), y(n)) \rightarrow 0_{(2)} \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Из этих условий, используя четность  $l$ , получаем

$$[y(n)]^{A_1} - u_0[x(n)]^{A_2} \neq 0, \quad \bar{p}((x(n), y(n))) < 0, \quad n = 1, 2, \dots,$$

т. е.  $0_{(2)}$  не является точкой локального минимума полинома  $\bar{p}(x, y)$ .

Пусть теперь  $0_{(2)}$  не является точкой локального минимума полинома  $\bar{p}(x, y)$ . Тогда найдется последовательность точек  $(x(n), y(n)) \in \mathbb{R}^2$  таких, что  $\bar{p}((x(n), y(n))) < 0$ ,  $n = 1, 2, \dots$ ,  $(x(n), y(n)) \rightarrow 0_{(2)}$  при  $n \rightarrow \infty$ . При этом в силу непрерывности  $\bar{p}(x, y)$  можно считать, что  $x(n) \neq 0$ ,  $y(n) \neq 0$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . Заметим, что если для некоторых  $x_0 \neq 0$ ,  $y_0 \neq 0$ ,  $u_0 \neq 0$  выполняется  $y_0^{A_1} - u_0 x_0^{A_2} = 0$ , то  $\forall \nu \in (0, 1)$  справедливо  $(\nu y_0)^{A_1} - u_0 x_0^{A_2} \neq 0$ . Действительно, если  $(\nu y_0)^{A_1} - u_0 x_0^{A_2} = 0$ , то  $(\nu y_0)^{A_1} = u_0 x_0^{A_2}$ , откуда  $\nu^{A_1} = 1$ , что противоречит условию  $\nu \in (0, 1)$ . Но тогда, используя непрерывность  $\bar{p}(x, y)$ , для любого

номера  $n = 1, 2, \dots$ , можно подобрать число  $\nu_n \in (1 - 1/n, 1]$  такое, что

$$\bar{p}(x(n), \nu_n y(n)) < 0, \quad (\nu_n y(n))^{A_1} - u_0(x(n))^{A_2} \neq 0$$

(если  $(y(n))^{A_1} - u_0(x(n))^{A_2} \neq 0$ , то полагаем  $\nu_n = 1$ ). Таким образом, получаем

$$p(x(n), \nu_n y(n)) = [(\nu_n y(n))^{A_1} - u_0(x(n))^{A_2}]^l \bar{p}(x(n), \nu_n y(n)) < 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

и при этом  $(x(n), \nu_n y(n)) \rightarrow 0_{(2)}$  при  $n \rightarrow \infty$ , т. е.  $0_{(2)}$  не является точкой локального минимума полинома  $p(x, y)$ . Утверждение 11 доказано.  $\square$

Нам понадобятся некоторые дополнительные сведения относительно произвольной  $A$ -квазиоднородной формы  $\varphi_1^A(x, y)$ , где  $A = (A_1, A_2) \in \mathbb{N}_0^2$ , вида (1)–(3). Пусть, как и ранее,  $e = (-A_2, A_1)$ ,  $u = x^{e_1} y^{e_2} = x^{-A_2} y^{A_1}$ ,

$$\varphi_1^A(x, y) = \sum_{i=1}^s a_i x^{\alpha_i} y^{\beta_i} = x^{\alpha_1} y^{\beta_1} g_1^A(x^{-A_2} y^{A_1}) = x^{\alpha_1} y^{\beta_1} g_1^A(x^{e_1} y^{e_2}) = x^{\alpha_1} y^{\beta_1} g_1^A(u),$$

$$r_1 = \deg g_1^A(u) = \nu_s = (\alpha_1 - \alpha_s)/A_2, \quad \alpha_1 = \alpha_s + r_1 A_2, \quad \alpha_1 - r_1 A_2 = \alpha_s,$$

где  $\deg g(u)$  — степень произвольного многочлена  $g(u)$ . Пусть далее  $u_0$  — корень кратности  $k \in \mathbb{N}$  многочлена  $g_1^A(u)$ , т. е.  $g_1^A(u) = (u - u_0)^k \bar{g}_1^A(u)$ , где  $\bar{g}_1^A(u)$  — многочлен,  $\bar{g}_1^A(u_0) \neq 0$ ,  $\bar{r}_1 = \deg \bar{g}_1^A(u) = r_1 - k$ . Тогда

$$\begin{aligned} \varphi_1^A(x, y) &= x^{\alpha_1} y^{\beta_1} g_1^A(x^{-A_2} y^{A_1}) = x^{\alpha_1} y^{\beta_1} (x^{-A_2} y^{A_1} - u_0)^k \bar{g}_1^A(x^{-A_2} y^{A_1}) = \\ &= (y^{A_1} - u_0 x^{A_2})^k x^{\alpha_1 - r_1 A_2} y^{\beta_1} [x^{\bar{r}_1 A_2} \bar{g}_1^A(x^{-A_2} y^{A_1})] = \\ &= (y^{A_1} - u_0 x^{A_2})^k \bar{\varphi}_1^A(x, y), \end{aligned} \quad (25)$$

где полином

$$\bar{\varphi}_1^A(x, y) = x^{\alpha_1 - r_1 A_2} y^{\beta_1} [x^{\bar{r}_1 A_2} \bar{g}_1^A(x^{-A_2} y^{A_1})] = x^{\alpha_1 - k A_2} y^{\beta_1} \bar{g}_1^A(x^{-A_2} y^{A_1}) \quad (26)$$

имеет члены вида

$$\begin{aligned} \bar{a}_i x^{\bar{\alpha}_i} y^{\bar{\beta}_i} &= \bar{a}_i x^{\alpha_1 - k A_2} y^{\beta_1} (x^{-A_2} y^{A_1})^{\bar{\nu}_i} = \\ &= \bar{a}_i x^{\alpha_1 - (k + \bar{\nu}_i) A_2} y^{\beta_1 + A_1 \bar{\nu}_i}, \quad \bar{\nu}_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad \bar{\nu}_i \leq \bar{r}_1, \end{aligned}$$

и при этом

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}_i &= \alpha_1 - (k + \bar{\nu}_i) A_2 \geq \alpha_1 - (k + \bar{r}_1) A_2 = \alpha_1 - r_1 A_2 = \alpha_s \geq 0, \\ \bar{\beta}_i &= \beta_1 + A_1 \bar{\nu}_i \geq \beta_1, \\ B_1^A &= A_1 \alpha_1 + A_2 \beta_1 = A_1 (\alpha_s + r_1 A_2) + A_2 \beta_1 = \\ &= r_1 A_1 A_2 + \alpha_s A_1 + A_2 \beta_1, \\ A_1 \bar{\alpha}_i + A_2 \bar{\beta}_i &= A_1 [\alpha_1 - (k + \bar{\nu}_i) A_2] + A_2 (\beta_1 + A_1 \bar{\nu}_i) = \\ &= A_1 [\alpha_1 - k A_2] + A_2 \beta_1 = A_1 \alpha_1 + A_2 \beta_1 - k A_1 A_2 = \\ &= B_1^A - k A_1 A_2 = (r_1 - k) A_1 A_2 + \alpha_s A_1 + A_2 \beta_1 \geq 0. \end{aligned}$$

Таким образом,  $\bar{\varphi}_1^A(x, y)$  также является  $A$ -квазиоднородной полиномиальной формой, для членов  $\bar{a}_i x^{\bar{\alpha}_i} y^{\bar{\beta}_i}$  которой при  $\bar{B}_1^A = B_1^A - k A_1 A_2$  выполняется

$$A_1 \bar{\alpha}_i + A_2 \bar{\beta}_i = \bar{B}_1^A = (r_1 - k) A_1 A_2 + \alpha_s A_1 + A_2 \beta_1 \geq 0$$

и при этом  $\bar{B}_1^A = 0 \Rightarrow [r_1 = k, \alpha_s = 0, \beta_1 = 0]$ . Если  $\bar{B}_1^A = 0$ , то равенство  $r_1 = k$  означает, что многочлен  $\bar{g}_1^A(u)$  имеет степень  $r_1 - k = 0$ , т. е. является константой  $G \neq 0$  (поскольку  $\bar{g}_1^A(u_0) \neq 0$ ), и тогда

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}_1^A(x, y) &= x^{\alpha_1 - kA_2} y^{\beta_1} \bar{g}_1^A(x^{-A_2} y^{A_1}) = Gx^{\alpha_1 - kA_2} y^{\beta_1} = \\ &= Gx^{\alpha_s + r_1 A_2 - kA_2} y^{\beta_1} = Gx^0 y^0 = G, \end{aligned}$$

т. е.  $A$ -квазиоднородная форма  $\bar{\varphi}_1^A(x, y)$  является этой же константой.

Перейдем теперь к изложению главного результата этого раздела, а именно к получению общего критерия локального минимума в стационарной точке для полинома, являющегося суммой двух  $A$ -квазиоднородных форм, где  $A \in \mathbb{N}_0^2$ . Пусть  $p(x, y)$  — полином, для которого выполнены условия утверждения 9:  $p(x, y) \not\equiv 0$ ,  $p(0, 0) = 0$ ,  $p'(0, 0) = 0_{(2)}$  (т. е.  $0_{(2)}$  является стационарной точкой), все главные квазиоднородные формы полинома  $p(x, y)$  из групп 1 и 2 являются неотрицательными и невырожденными в слабом смысле, и при этом  $\mathbf{A}_p \neq \emptyset$ ,  $A = (A_1, A_2) \in \mathbf{A}_p$ . Пусть далее

$$p(x, y) = \varphi_1^A(x, y) + \varphi_2^A(x, y) = x^{\alpha_1} y^{\beta_1} g_1^A(u) + x^{\chi_1} y^{\eta_1} g_2^A(u),$$

где  $\varphi_1^A(x, y)$  удовлетворяет условиям (1)–(3), а  $\varphi_2^A(x, y)$  — условиям (7)–(8). Как это следует из утверждения 10, в этом случае  $\mathbf{A}_p = \{A\}$ .

Пусть  $u_0 \in U_p(A)$ , и при этом кратность корня  $u_0$  в многочлене  $g_1^A(u)$  равна четному натуральному числу  $k \in 2\mathbb{N}$  (см. утверждение 1), а кратность корня  $u_0$  в многочлене  $g_2^A(u)$  равна  $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ . Тогда  $g_1^A(u) = (u - u_0)^k \bar{g}_1^A(u)$ ,  $g_2^A(u) = (u - u_0)^l \bar{g}_2^A(u)$ , где  $\bar{g}_1^A(u_0) > 0$  (в силу неотрицательности  $g_1^A(u)$ ; см. утверждение 1),  $\bar{g}_2^A(u_0) \neq 0$ . Пусть  $r_1 = \deg g_1^A(u)$ ,  $\bar{r}_1 = \deg \bar{g}_1^A(u)$ ,  $r_2 = \deg g_2^A(u)$ ,  $\bar{r}_2 = \deg \bar{g}_2^A(u)$ . Возможны следующие 4 случая:

- 1)  $l = 0$ , т. е.  $g_2^A(u_0) \neq 0$ ;
- 2)  $0 < l < k$  и  $l$  четно;
- 3)  $k \leq l$ ;
- 4)  $0 < l < k$  и  $l$  нечетно.

Используя утверждение 11, а также приведенные ранее рассуждения относительно произвольной  $A$ -квазиоднородной формы  $\varphi_1^A(x, y)$  (см. представление (25), (26), где  $\bar{\varphi}_1^A(x, y)$  — снова  $A$ -квазиоднородная форма), нетрудно от полинома  $p(x, y) = \varphi_1^A(x, y) + \varphi_2^A(x, y)$  перейти к полиному  $\tilde{p}(x, y) = \tilde{\varphi}_1^A(x, y) + \tilde{\varphi}_2^A(x, y)$ , также являющемуся суммой двух  $A$ -квазиоднородных форм, такому, что  $U_{\tilde{p}}(A) \subseteq U_p(A)$ , полином  $\tilde{\varphi}_1^A(x, y)$  является неотрицательным и для нового полинома  $\tilde{p}(x, y)$  для любого  $u_0 \in U_{\tilde{p}}(A)$  будут выполняться только случаи вида 1, 4 и при этом в случае вида 4 будет  $l = 1$ . Действительно, используя утверждение 11, при каждом фиксированном  $u_0 \in U_{\tilde{p}}(A)$  от случая 2 легко переходим к случаю вида 1; от случая 3 — к случаю, когда  $u_0 \notin U_{\tilde{p}}(A)$ ; от случая 4 при  $l > 1$  — к случаю вида 4 при  $l = 1$ . Более того, в силу утверждения 11 при таком переходе  $0_{(2)}$  является точкой локального минимума полинома  $p(x, y)$  тогда и только тогда, когда она является точкой локального минимума полинома  $\tilde{p}(x, y)$ . Если при этом для полинома  $\tilde{p}(x, y)$  для любого  $u_0 \in U_{\tilde{p}}(A)$  выполняется случай вида 1, то мы находимся в области применимости описанного в разделе 3 алгоритма, используя который, получим

однозначный ответ, является ли  $0_{(2)}$  точкой локального минимума полинома  $\tilde{p}(x, y)$  (а тем самым и  $p(x, y)$ ).

Покажем теперь, что в случае выполнения для полинома  $\tilde{p}(x, y)$  условия вида 4, где  $l = 1$  хотя бы при одном  $u_0 \in U_{\tilde{p}}(A)$ , точка  $0_{(2)}$  не является точкой локального минимума полинома  $\tilde{p}(x, y)$  (а тем самым и  $p(x, y)$ ). Для простоты обозначений считаем, что  $\tilde{p}(x, y) = p(x, y)$ .

Таким образом, рассматриваем случай, когда (см. (1)–(3), (7)–(8))

$$\begin{aligned} p(x, y) &= \varphi_1^A(x, y) + \varphi_2^A(x, y) = x^{\alpha_1} y^{\beta_1} g_1^A(u) + x^{\chi_1} y^{\eta_1} g_2^A(u) = \\ &= x^{\alpha_1} y^{\beta_1} (u - u_0)^k \bar{g}_1^A(u) + x^{\chi_1} y^{\eta_1} (u - u_0) \bar{g}_2^A(u), \quad k \in 2\mathbb{N}, \end{aligned}$$

где, как и ранее,  $e = (-A_2, A_1)$ ,  $u = x^{e_1} y^{e_2} = x^{-A_2} y^{A_1}$ , и при этом, используя (25), (26), имеем:

$$\begin{aligned} p(x, y) &= (y^{A_1} - u_0 x^{A_2})^k \bar{\varphi}_1^A(x, y) + (y^{A_1} - u_0 x^{A_2}) \bar{\varphi}_2^A(x, y), \\ \bar{\varphi}_1^A(x, y) &= x^{\alpha_1 - r_1 A_2} y^{\beta_1} [x^{\bar{r}_1 A_2} \bar{g}_1^A(x^{-A_2} y^{A_1})] = x^{\alpha_1 - k A_2} y^{\beta_1} \bar{g}_1^A(x^{-A_2} y^{A_1}), \\ \bar{\varphi}_2^A(x, y) &= x^{\chi_1 - r_2 A_2} y^{\eta_1} [x^{(r_2 - 1) A_2} \bar{g}_2(x^{-A_2} y^{A_1})] = x^{\chi_1 - A_2} y^{\eta_1} \bar{g}_2(x^{-A_2} y^{A_1}). \end{aligned}$$

Пусть для некоторых  $c_0 \neq 0$ ,  $d_0 \neq 0$  выполняется  $u_0 = c_0^{e_1} d_0^{e_2} = c_0^{-A_2} d_0^{A_1}$ . Рассмотрим многочлены

$$x(t) = c_0 t^{A_1}, \quad y(t) = d_0 t^{A_2} \pm d_0 t^{A_2 + \kappa} = d_0 t^{A_2} (1 \pm t^\kappa), \quad \kappa \in \mathbb{N}.$$

Тогда<sup>9</sup>

$$\begin{aligned} [x(t)]^{-A_2} &= [c_0 t^{A_1}]^{-A_2} = c_0^{-A_2} t^{-A_1 A_2}, \\ [y(t)]^{A_1} &= [d_0 t^{A_2} (1 \pm t^\kappa)]^{A_1} = d_0^{A_1} t^{A_1 A_2} + o(t^{A_1 A_2}), \\ [x(t)]^{-A_2} [y(t)]^{A_1} &= c_0^{-A_2} d_0^{A_1} + O(t) = u_0 + O(t), \\ \bar{g}_1^A([x(t)]^{-A_2} [y(t)]^{A_1}) &= \bar{g}_1^A(u_0 + O(t)) = \bar{g}_1^A(u_0) + O(t), \\ \bar{g}_2^A([x(t)]^{-A_2} [y(t)]^{A_1}) &= \bar{g}_2^A(u_0 + O(t)) = \bar{g}_2^A(u_0) + O(t), \\ \bar{\varphi}_1^A(x(t), y(t)) &= [x(t)]^{\alpha_1 - k A_2} [y(t)]^{\beta_1} \bar{g}_1^A([x(t)]^{-A_2} [y(t)]^{A_1}) = \\ &= h_1 t^{\sigma_1} + o(t^{\sigma_1}), \quad h_1 > 0, \quad \sigma_1 \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \\ \bar{\varphi}_2^A(x(t), y(t)) &= [x(t)]^{\chi_1 - A_2} [y(t)]^{\eta_1} \bar{g}_2^A([x(t)]^{-A_2} [y(t)]^{A_1}) = \\ &= h_2 t^{\sigma_2} + o(t^{\sigma_2}), \quad h_2 \neq 0, \quad \sigma_2 \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \\ [y(t)]^{A_1} - u_0 [x(t)]^{A_2} &= d_0^{A_1} t^{A_1 A_2} (1 \pm t^\kappa)^{A_1} - u_0 c_0^{A_2} t^{A_1 A_2} = \\ &= d_0^{A_1} t^{A_1 A_2} (1 \pm A_1 t^\kappa + o(t^\kappa)) - u_0 c_0^{A_2} t^{A_1 A_2} = \\ &= [d_0^{A_1} - u_0 c_0^{A_2}] t^{A_1 A_2} \pm d_0^{A_1} A_1 t^{A_1 A_2 + \kappa} + o(t^{A_1 A_2 + \kappa}) = \\ &= \pm d_0^{A_1} A_1 t^{A_1 A_2 + \kappa} + o(t^{A_1 A_2 + \kappa}). \end{aligned}$$

Соответственно,

$$([y(t)]^{A_1} - u_0 [x(t)]^{A_2})^k = h_3 t^{\sigma_3 + k\kappa} + o(t^{\sigma_3 + k\kappa}), \quad h_3 > 0, \quad \sigma_3 \in \mathbb{N}.$$

<sup>9</sup>Конкретные значения некоторых величин:  $h_1, \dots, h_5, \sigma_1, \dots, \sigma_5$  не играют роли.

Таким образом, получаем

$$\begin{aligned} p(x(t), y(t)) &= ([y(t)]^{A_1} - u_0[x(t)]^{A_2})^k \bar{\varphi}_1^A(x(t), y(t)) + \\ &+ ([y(t)]^{A_1} - u_0[x(t)]^{A_2}) \bar{\varphi}_2^A(x(t), y(t)) = \\ &= h_4 t^{\sigma_4 + k\kappa} + h_5 t^{\sigma_5 + \kappa} + o(t^{\sigma_4 + k\kappa}) + o(t^{\sigma_5 + \kappa}), \quad (27) \end{aligned}$$

где при соответствующем выборе знака в многочлене  $y(t) = d_0 t^{A_2} (1 \pm t^\kappa)$  (учитываем знак величины  $h_2 \neq 0$ ) выполняется  $h_4 > 0$ ,  $h_5 < 0$ ,  $\sigma_4, \sigma_5 \in \mathbb{N}$ . Выберем число  $\kappa \in \mathbb{N}$  столь большим, чтобы  $\sigma_4 + k\kappa > \sigma_5 + \kappa$ . Это можно сделать, поскольку  $k \geq 2$  (т. е. достаточно взять любое  $\kappa > \sigma_5 - \sigma_4$ ). Тогда из (27) получаем

$$p(x(t), y(t)) = h_5 t^{\sigma_5 + \kappa} + o(t^{\sigma_5 + \kappa}), \quad h_5 < 0, \quad \sigma_5 + \kappa \in \mathbb{N},$$

т. е. выполняется условие (У4), а следовательно, точка  $0_{(2)}$  не является точкой локального минимума полинома  $p(x, y)$ . Описание критерия, обеспечивающего однозначную проверку локального минимума в стационарной точке для рассматриваемого случая, завершено.

**Заключение.** В работе изложены необходимые и достаточные условия локального минимума в стационарной точке полинома или абсолютно сходящегося степенного ряда  $p(x, y)$  от двух переменных  $x, y$  для случаев, когда использование матрицы вторых производных невозможно.

В простейших случаях, когда  $p(x, y)$  является квазиоднородной полиномиальной формой или суммой двух  $A$ -квазиоднородных форм (где  $A$  — двумерный вектор с натуральными компонентами), сформулировано единое критериальное условие, применимое на практике.

В более сложных случаях отдельно представлены необходимые и достаточные условия локального минимума. Для их анализа используется многогранник Ньютона полинома (степенного ряда)  $p(x, y)$ , а при необходимости — разложение  $p(x, y)$  на сумму квазиоднородных форм. Эти условия могут быть проверены с помощью практически реализуемого алгоритма и его модификаций, описанных в работе. Основные шаги алгоритма включают вычисление действительных корней многочленов от одной переменной и решение других практически выполнимых задач. Однако остаются случаи, когда предложенный алгоритм неприменим.

Для таких случаев разработан метод «подстановки многочленов с неопределенными коэффициентами». В частности, на его основе удалось построить алгоритм, однозначно определяющий наличие локального минимума в стационарной точке для полиномов, являющихся суммой двух  $A$ -квазиоднородных форм с натуральными компонентами вектора  $A$ . Этот результат используется также как вспомогательный инструмент для исследования более общих задач.

С одной стороны, полученные результаты применимы к широкому классу практических задач. С другой стороны, объединение необходимых и достаточных условий в единое критериальное условие удалось лишь для узкого класса задач. Расширение этого класса или добавление новых условий представляет собой важное направление дальнейших исследований. Перспективным представляется развитие метода «подстановки многочленов с неопреде-

ленными коэффициентами». В настоящей работе этот метод применялся преимущественно для доказательства отсутствия локального минимума, однако его потенциал для формулировки достаточных условий требует дополнительного изучения.

Отдельно отметим важность задачи поиска линейного преобразования переменных, приводящего исходную задачу к виду, удобному для применения предложенных методов (в случаях их изначальной неприменимости). Вполне вероятно, что подобный подход, использованный в [1, 5], может быть применен и для рассматриваемого класса задач.

**Конфликт интересов.** Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

**Ответственность автора.** Автор несет полную ответственность за подготовку окончательной версии рукописи и подтверждает ее одобрение для публикации.

**Финансирование.** Исследование выполнено без привлечения внешнего финансирования.

### Библиографический список

1. Нефедов В. Н. Об оценивании погрешности в выпуклых полиномиальных задачах оптимизации // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 1990. Т. 30, № 2. С. 200–216.
2. Нефедов В. Н. Необходимые и достаточные условия экстремума в сложных задачах оптимизации систем, описываемых полиномиальными и аналитическими функциями // *Изв. РАН. Теория и системы управления*, 2023. № 2. С. 3–25. EDN: JCHPKN. DOI: <https://doi.org/10.31857/S0002338823020154>.
3. Васильев Ф. П. *Методы оптимизации*. Т. 1: Конечномерные задачи оптимизации. Принцип максимума. Динамическое программирование. М.: МЦНМО, 2011. 620 с.
4. Красносельский М. А., Вайникко Г. М., Забрейко П. П. и др. *Приближенное решение операторных уравнений*. М.: Наука, 1969. 456 с.
5. Нефедов В. Н. Необходимые и достаточные условия экстремума в аналитических задачах оптимизации // *Труды МАИ*, 2009. № 33, 4. EDN: JWKQVV.
6. Гиндикин С. Г. Энергетические оценки, связанные с многогранником Ньютона // *Тр. ММО*, 1974. Т. 31. С. 189–236.
7. Брюно А. Д. *Степенная геометрия в алгебраических и дифференциальных уравнениях*. М.: Физматлит, 1998. 288 с.
8. Волевич Л. Р., Гиндикин С. Г. *Метод многогранника Ньютона в теории дифференциальных уравнений в частных производных*. М.: Эдиториал УРСС, 2002. 312 с.
9. Хованский А. Г. Многогранники и алгебра // *Труды ИСА РАН*, 2008. Т. 38. С. 23–35. EDN: KGCDTJ.
10. Nefedov V. Methods and algorithms for determining the main quasi-homogeneous forms of polynomials and power series // *MATEC Web of Conferences*, 2022. vol. 362, 01017. EDN: LJ0IE0. DOI: <https://doi.org/10.1051/mateconf/202236201017>.
11. Нефедов В. Н. Об одном методе исследования полинома на знакоопределенность в положительном ортанте // *Труды МАИ*, 2006. № 22, 6. EDN: ISVGRT.
12. Евтушенко Ю. Г., Ратькин В. Г. Метод половинных делений для глобальной оптимизации функции многих переменных // *Изв. АН СССР. Техн. кибернетика*, 1987. № 1. С. 119–127.

MSC: 26B05, 26C10, 32A05

## Some necessary and some sufficient conditions for local extrema of polynomials and power series in two variables

V. N. Nefedov

Moscow Aviation Institute (National Research University),  
4, Volokolamskoe shosse, Moscow, 125993, Russian Federation.

### Abstract

This study extends the author's previous works establishing necessary and sufficient conditions for a local extremum at a stationary point of a polynomial or an absolutely convergent power series in its neighborhood. It is known that in the one-dimensional case, the necessary and sufficient conditions for an extremum coincide, forming a single criterion.

The next stage of analysis focuses on the two-dimensional case, which constitutes the subject of the present research. Verification of extremum conditions in this case reduces to algorithmically feasible procedures: computing real roots of univariate polynomials and solving a series of practically implementable auxiliary problems.

An algorithm based on these procedures is proposed. For situations where its applicability is limited, a method of substituting polynomials with undetermined coefficients is developed. Building on this method, an algorithm is constructed to unambiguously verify the presence of a local minimum at a stationary point for polynomials representable as a sum of two  $A$ -quasihomogeneous forms, where  $A$  is a two-dimensional vector with natural components.

**Keywords:** polynomials, power series, necessary conditions for an extremum, sufficient conditions for an extremum, quasi-homogeneous forms.

Received: 12<sup>th</sup> July, 2024 / Revised: 23<sup>rd</sup> October, 2024 /

Accepted: 28<sup>th</sup> October, 2024 / First online: 26<sup>th</sup> December, 2024

**Conflict of interest.** The author declares no conflict of interest.

**Author's Responsibilities.** The author is solely responsible for preparing the final version of the manuscript and approves it for publication.

### Differential Equations and Mathematical Physics Research Article

© The Author(s), 2024

© Samara State Technical University, 2024 (Compilation, Design, and Layout)

© The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

#### Please cite this article in press as:

Nefedov V. N. Some necessary and some sufficient conditions for local extrema of polynomials and power series in two variables, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2024, vol. 28, no. 4, pp. 615–650. EDN: KECQQD. DOI: 10.14498/vsgtu2103 (In Russian).

#### Author's Details:

Victor N. Nefedov  <https://orcid.org/0000-0001-6053-2066>

Cand. Phys. & Math. Sci., Associate Professor; Associate Professor; Dept. of Mathematical Cybernetics; e-mail: [nefedovvn54@yandex.ru](mailto:nefedovvn54@yandex.ru)

**Funding.** The research was conducted without external funding.

## References

1. Nefedov V. N. Estimation of the error in convex polynomial optimization problems, *U.S.S.R. Comput. Math. Math. Phys.*, 1990, vol. 30, no. 1, pp. 147–158. DOI: [https://doi.org/10.1016/0041-5553\(90\)90024-M](https://doi.org/10.1016/0041-5553(90)90024-M).
2. Nefedov V. N. Necessary and sufficient conditions for an extremum in complex problems of optimization of systems described by polynomial and analytic functions, *J. Comput. Syst. Sci. Int.*, 2023, vol. 62, no. 2, pp. 179–200. EDN: AHYZCK. DOI: <https://doi.org/10.1134/s1064230723020156>.
3. Vasil'ev F. P. *Metody optimizatsii* [Optimization Methods], vol. 1, Konechnomernye zadachi optimizatsii. Printsip maksimuma. Dinamicheskoe programmirovaniye [Finite-dimensional Optimization Problems. Maximum Principle. Dynamic Programming]. Moscow, MTsNMO, 2011, 620 pp. (In Russian)
4. Krasnosel'skiy M. A., Vainikko G. M., Zabreiko P. P., et al. *Approximate Solution of Operator Equations*, Wolters-Noordhoff Series of Monographs and Textbooks on Pure and Applied Mathematics. Groningen, Wolters-Noordhoff Publ., 1972, xii+484 pp.
5. Nefedov V. N. Necessary and sufficient conditions of the extremum in the analytical optimization problems, *Trudy MAI*, 2009, no. 33, 4 (In Russian). EDN: JWKQVV.
6. Gindikin S. G. Energy estimates connected with the Newton polyhedron, *Tr. Mosk. Mat. Obs.*, 1974, vol. 31, pp. 189–236 (In Russian).
7. Bruno A. D. *Power Geometry in Algebraic and Differential Equations*, North-Holland Mathematical Library, vol. 57. Amsterdam, North-Holland, 2000, ix+385 pp.
8. Gindikin S. G., Volevich L. R. *The Method of Newton's Polyhedron in the Theory of Partial Differential Equations*, Mathematics and Its Applications. Soviet Series, vol. 86. Dordrecht, Kluwer Academic Publ, 1992, x+266 pp.
9. Khovansky A. G. Polyhedra and algebra, *Trudy ISA RAN*, 2008, vol. 38, pp. 23–35 (In Russian). EDN: KGCDTJ.
10. Nefedov V. Methods and algorithms for determining the main quasi-homogeneous forms of polynomials and power series, *MATEC Web of Conferences*, 2022, vol. 362, 01017. EDN: LJOIEO. DOI: <https://doi.org/10.1051/mateconf/202236201017>.
11. Nefedov V. N. On one method of analysis of a polynomial on constancy of signs in the positive orthant, *Trudy MAI*, 2006, no. 22, 6 (In Russian). EDN: ISVGRT.
12. Evtushenko Yu. G., Rat'kin V. A. The method of half-divisions for global optimization of a function of many variables, *Sov. J. Comput. Syst. Sci.*, 1987, vol. 25, no. 5, pp. 75–84.



УДК 517.977.1

## Задача оптимального динамического измерения с мультипликативным воздействием в пространствах дифференцируемых «шумов»

*М. А. Сагадеева*

Южно-Уральский государственный университет  
(национальный исследовательский университет),  
Россия, 454080, Челябинск, пр. Ленина, 76.

### Аннотация

В статье исследуется модель оптимального динамического измерения с мультипликативным воздействием, рассматриваемая как задача оптимального управления для нестационарной системы леонтьевского типа. Установлено существование решения данной задачи в стохастической постановке. Основная цель заключается в нахождении восстанавливаемого сигнала (управляющего воздействия), максимально приближающего состояние системы к наблюдаемым показателям, при наличии дополнительного входного процесса, моделирующего помеху. Решения системы требуется искать в пространствах случайных процессов. Для этого предварительно анализируется задача оптимального управления в пространствах дифференцируемых «шумов». Линейность модели преобразователя, описываемой нестационарной системой леонтьевского типа, позволяет декомпозировать исходную систему на детерминированную и стохастическую подсистемы. На основе результатов о разрешимости задач оптимального управления для каждой из подсистем получено решение исходной задачи.

В первой части статьи приведены условия разрешимости стохастической нестационарной системы леонтьевского типа. Во второй части исследуется задача оптимального управления в стохастическом случае, а также выводятся оценки для минимизируемых функционалов с использованием результатов, полученных ранее для детерминированного аналога. В заключении представлен алгоритм исследования задачи оптимального динамического измерения с мультипликативным воздействием в пространствах «шумов».

### Дифференциальные уравнения и математическая физика Научная статья

© Коллектив авторов, 2024

© СамГТУ, 2024 (составление, дизайн, макет)

Контент публикуется на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

### Образец для цитирования

Сагадеева М. А. Задача оптимального динамического измерения с мультипликативным воздействием в пространствах дифференцируемых «шумов» // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2024. Т. 28, № 4. С. 651–664. EDN: CFEGES. DOI: 10.14498/vsgtu2114.

### Сведения об авторе

*Минзиля Алмасовна Сагадеева*  <https://orcid.org/0000-0001-9376-4242>

кандидат физико-математических наук, доцент; доцент; каф. математического и компьютерного моделирования; e-mail: [sagadeevama@susu.ru](mailto:sagadeevama@susu.ru)

**Ключевые слова:** задача оптимального управления, нестационарная система леонтьевского типа, относительно регулярные матрицы, задача Шоултера–Сидорова, производная Нельсона–Гликлиха.

Получение: 6 сентября 2024 г. / Исправление: 17 ноября 2024 г. /

Принятие: 28 ноября 2024 г. / Публикация онлайн: 27 декабря 2024 г.

**Введение.** Задача оптимального динамического измерения [1] формулируется как поиск внешнего воздействия, обеспечивающего минимальное отклонение наблюдаемых значений от данных, генерируемых моделью преобразователя. Данная задача относится ко второй обратной задаче теории динамических измерений в соответствии с классификацией [2, 3]. Преимуществом формулировки задачи в терминах оптимального управления решениями системы леонтьевского типа [4] является возможность получения решения без перехода в частотную область.

Рассмотрим стохастическую нестационарную систему леонтьевского типа в пространстве  $\mathbb{R}^n$  [5]:

$$L \overset{\circ}{\xi}(t) = a(t)M\xi(t) + Bu(t) + \delta(t), \quad (1)$$

где  $L$ ,  $M$ ,  $B$  — квадратные матрицы порядка  $n$ , причем  $\det L = 0$ . Скалярная функция  $a : [0, \tau] \rightarrow \mathbb{R}_+$  характеризует временную зависимость параметров взаимовлияния состояний исследуемой системы, а матрица  $M$  является  $(L, p)$ -регулярной (т.е. существует  $\mu \in \mathbb{C}$  такая, что  $\det(\mu L - M) \neq 0$ , при этом  $\infty$  выступает полюсом порядка  $p = \bar{0}, n - 1$  для резольвенты  $(\mu L - M)^{-1}$ ). Вектор-функция  $u : [0, \tau] \rightarrow \mathbb{R}^n$  моделирует управляющее воздействие, а случайный процесс  $\delta : (0, \tau) \rightarrow \mathbb{R}^n$  отражает влияние помех. Решение системы (1), учитывающее стохастическую природу  $\delta(t)$ , представляет собой случайный процесс  $\xi(t)$ , описывающий эволюцию состояний системы под внешним воздействием  $u(t)$  и влиянием помех  $\delta(t)$ . Производная  $\overset{\circ}{\xi}$  в уравнении понимается в смысле Нельсона–Гликлиха [6, 7], совпадая с классической производной на скалярных функциях.

Системы леонтьевского типа (1) представляют собой конечномерный аналог уравнений соболевского типа [8, 9], изучаемых в более общих функциональных пространствах. Условие вырожденности  $\det L = 0$  системы (1) при численных решениях классической задачи Коши требует согласования начальных данных [10]. Использование начального условия Шоултера–Сидорова [11], более естественного для вырожденных систем, [11]

$$[(\nu L - M)^{-1}L]^{p+1}(\xi(0) - \xi_0) = 0 \quad \text{при} \quad \nu \in \mathbb{C} : \det(\nu L - M) \neq 0 \quad (2)$$

позволяет упростить алгоритмы численного решения таких задач. Кроме того, в современных исследованиях уравнений соболевского типа начальное условие Шоултера–Сидорова рассматривается как наиболее естественное для прикладных задач [12].

Для постановки задачи оптимального управления решениями задачи Шоултера–Сидорова (2) для системы леонтьевского типа (1) введем функцио-

нал штрафа

$$J(u) = \sum_{q=0}^1 \int_0^\tau \|C \overset{\circ}{\xi}^{(q)}(u, t) - z_0^{(q)}(t)\|_3^2 dt,$$

где  $\tau \in \mathbb{R}_+$ , пространства управлений  $\mathfrak{U}$  и наблюдений  $\mathfrak{Z}$  — гильбертовы пространства, а  $C$  — квадратная матрица порядка  $n$ . Здесь  $z_0(t)$  описывает целевую динамику состояний, к которой система приводится с помощью управления  $u(t)$ . Требуется найти оптимальное управление  $\hat{u} \in \mathfrak{U}_{ad}$ , удовлетворяющее условию

$$J(\hat{u}) = \min_{u \in \mathfrak{U}_{ad}} J(u),$$

где  $\xi(\hat{u})$  почти всюду на  $(0, \tau)$  удовлетворяет системе (1) и начальному условию (2). Множество  $\mathfrak{U}_{ad}$  представляет собой выпуклое и компактное подмножество допустимых управлений в пространстве  $\mathfrak{U}$ . Задача оптимального управления решениями стационарных систем леонтьевского типа исследовалась, например, в работах [10, 13, 14]. Разрешимость задачи оптимального управления для стационарного стохастического уравнения соболевского типа изучена в [15].

Отметим, что благодаря линейности системы (1) ее можно представить в виде системы, состоящей из детерминированной части

$$L\dot{x}(t) = a(t)Mx(t) + Bu(t)$$

и стохастической части

$$L \overset{\circ}{\eta}(t) = a(t)M\eta(t) + \delta(t),$$

где  $x(t) = \mathbf{E}\xi(t)$  обозначает математическое ожидание процесса  $\xi(t)$ , а  $\eta(t) = \xi(t) - x(t)$  — центрированный случайный процесс. Таким образом, нам необходимо исследовать стохастическую систему леонтьевского типа и описать решение задачи оптимального управления для этой системы.

Основной целью данной статьи является построение решения задачи оптимального динамического измерения при наличии мультипликативного воздействия в пространстве случайных процессов. Для этого предложены решения задачи оптимального управления решениями задачи (2) для нестационарных систем леонтьевского типа (1) с использованием методов вырожденных потоков разрешающих матриц [16].

**1. Разрешимость нестационарных стохастических систем леонтьевского типа в пространстве дифференцируемых «шумов».** Обозначим множество матриц размера  $n \times m$  символом  $\mathbb{M}_{n \times m}$ . Пусть  $L, M \in \mathbb{M}_{n \times n}$  — квадратные матрицы порядка  $n$ . Следуя [8, 17], будем называть множества

$$\rho^L(M) = \{\mu \in \mathbb{C} : \det(\mu L - M) \neq 0\}$$

и

$$\sigma^L(M) = \mathbb{C} \setminus \rho^L(M)$$

соответственно  $L$ -резольвентным множеством и  $L$ -спектром матрицы  $M$ . Нетрудно показать [8, 17], что либо  $\rho^L(M) = \emptyset$ , либо  $L$ -спектр матрицы  $M$

состоит из конечного множества точек. Кроме того, заметим, что множества  $\rho^L(M)$  и  $\sigma^L(M)$  инвариантны относительно выбора базиса. Здесь и далее будем предполагать, что  $\rho^L(M) \neq \emptyset$ .

Для комплексной переменной  $\mu \in \mathbb{C}$  определим матрично-значные функции

$$(\mu L - M)^{-1}, \quad R_\mu^L(M) = (\mu L - M)^{-1}L, \quad L_\mu^L(M) = L(\mu L - M)^{-1},$$

с областью определения  $\rho^L(M)$ . Эти функции будем называть соответственно  $L$ -резольвентой, правой и левой  $L$ -резольвентами матрицы  $M$ . Согласно результатам [8, 17],  $L$ -резольвента, правая и левая  $L$ -резольвенты матрицы  $M$  голоморфны в  $\rho^L(M)$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.** Матрица  $M$  называется  $L$ -регулярной, если  $\rho^L(M) \neq \emptyset$ ;  $L$ -регулярная матрица  $M$  называется  $(L, p)$ -регулярной, если  $p$  равно порядку полюса в  $\infty$  для функции  $(\mu L - M)^{-1}$ .

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Если бесконечность является устранимой особой точкой  $L$ -резольвенты матрицы  $M$ , то  $p = 0$ . Также заметим, что для квадратных матриц параметр  $p$  не может превосходить размерности пространства  $n$ .

Ортогональные проекторы [8, 17], расщепляющие пространство  $\mathbb{R}^n$ , имеют вид

$$P = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma R_\mu^L(M) d\mu, \quad Q = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma L_\mu^L(M) d\mu,$$

где контур  $\gamma \subset \mathbb{C}$  такой, что  $\gamma = \partial D$  и  $D \supset \sigma^L(M)$ . Сужение матриц  $L$  ( $M$ ) на подпространства  $\ker P$  и  $\operatorname{im} P$  обозначим через  $L_k$  ( $M_k$ ),  $k = 0, 1$  ( $k = 0$  для сужений на  $\ker P$  и  $k = 1$  — для  $\operatorname{im} P$ ).

**ЛЕММА.** Пусть матрица  $M$   $(L, p)$ -регулярна ( $p = \overline{0, n-1}$ ). Тогда существуют матрицы  $L_1^{-1}$  и  $M_0^{-1}$ .

Рассмотрим задачу Шоуолтера—Сидорова

$$P(x(0) - x_0) = 0 \tag{3}$$

для неоднородного нестационарного уравнения

$$L\dot{x}(t) = a(t)Mx(t) + f(t) \tag{4}$$

с функцией  $f : \mathfrak{J} \rightarrow \mathbb{R}^n$ . В дальнейшем обозначим  $(E_n - Q)f(t) = f^0(t)$ , где  $E_n$  — единичная матрица размера  $n$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.** Решение уравнения (4) будем называть решением задачи Шоуолтера—Сидорова (3), (4), если оно дополнительно удовлетворяет условию (3).

**ТЕОРЕМА 1** [16]. Пусть  $0, \tau \in \mathfrak{J}$ , матрица  $M$   $(L, p)$ -регулярна ( $p = \overline{0, n-1}$ ) и функция  $a \in C^{p+1}([0, \tau]; \mathbb{R}_+)$ . Тогда для любой функции  $f : [0, \tau] \rightarrow \mathbb{R}^n$  такой, что  $Qf \in C^1([0, \tau]; \operatorname{im} Q)$  и  $f^0 \in C^{p+1}([0, \tau]; \ker Q)$ , и для любого начального значения  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  существует единственное решение  $x \in C^1([0, \tau]; \mathbb{R}^n)$  задачи Шоуолтера—Сидорова (3) для уравнения (4), которое имеет вид

$$x(t) = X(t, 0)P x_0 + \int_0^t X(t, s)L_1^{-1}Qf(s)ds - \sum_{k=0}^p (M_0^{-1}L_0)^k M_0^{-1} \left( \frac{1}{a(t)} \frac{d}{dt} \right)^k \frac{(E_n - Q)f(t)}{a(t)}, \quad (5)$$

где поток  $X(t, s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} R_{\mu}^L(M) \exp\left(\mu \int_s^t a(\zeta)d\zeta\right) d\mu$  для  $s < t$ , а выражение  $\left(\frac{1}{a(t)} \frac{d}{dt}\right)^q$  означает последовательное применение  $q$  раз данного оператора.

Перейдем к описанию пространств дифференцируемых «шумов». Пусть  $\Omega \equiv (\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$  — полное вероятностное пространство с вероятностной мерой  $\mathbf{P}$ , ассоциированное с  $\sigma$ -алгеброй  $\mathcal{A}$  подмножеств множества  $\Omega$ , а  $\mathbb{R}$  — множество действительных чисел со стандартной борелевой  $\sigma$ -алгеброй и мерой Лебега. Измеримое отображение  $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  называется *случайной величиной*. Множество случайных величин с нулевым математическим ожиданием и конечной дисперсией образует гильбертово пространство

$$\mathbf{L}_2 = \mathbf{L}_2(\mathbb{R}) = \{\xi : \mathbf{E}\xi = 0, \mathbf{D}\xi < +\infty\}$$

со скалярным произведением  $(\xi_1, \xi_2) = \mathbf{E}\xi_1\xi_2$  и нормой  $\|\xi\|_{\mathbf{L}_2}^2 = \mathbf{D}\xi$ .

Возьмем множество  $\mathcal{J} \subset \mathbb{R}$ . Отображение  $\eta : \mathcal{J} \rightarrow \mathbf{L}_2$  задает *стохастический процесс*. Будем говорить, что стохастический процесс  $\eta = \eta(t)$  непрерывен на интервале  $\mathcal{J}$ , если п.н. (почти наверное) все его траектории непрерывны. Множество непрерывных стохастических процессов  $\eta : \mathcal{J} \rightarrow \mathbf{L}_2$  образует банахово пространство со стандартной суп-нормой, которое мы обозначим символом  $C(\mathcal{J}; \mathbf{L}_2)$ . Введем в рассмотрение пространства дифференцируемых «шумов»

$$C^{\ell}(\mathcal{J}; \mathbf{L}_2), \quad \ell \in \mathbb{N},$$

случайных процессов из  $C(\mathcal{J}; \mathbf{L}_2)$ , чьи траектории п.н. *дифференцируемы по Нельсону—Гликлиху* [6, 7] на  $\mathcal{J}$  до порядка  $\ell$  включительно.

Возьмем  $n$  случайных процессов  $\{\eta_1(t), \eta_2(t), \dots, \eta_n(t)\}$  и зададим  $n$ -мерный случайный процесс формулой

$$\Theta(t) = \sum_{j=1}^n \eta_j(t)e_j,$$

где  $e_j$  — орты в пространстве  $\mathbb{R}^n$ ,  $j = \overline{1, n}$  (для краткости такой процесс будем называть  *$n$ -случайным процессом*). Очевидно, что п.н. все его траектории непрерывны, если  $\eta_j \in C(\mathcal{J}; \mathbf{L}_2)$ ,  $j = \overline{1, n}$ , и непрерывно дифференцируемы по Нельсону—Гликлиху до порядка  $\ell$  включительно, если  $\eta_j \in C^{\ell}(\mathcal{J}; \mathbf{L}_2)$ ,  $j = \overline{1, n}$ . По аналогии с предыдущим введем в рассмотрение пространства непрерывных  $C(\mathcal{J}; \mathbf{L}_2(\mathbb{R}^n))$  и непрерывно дифференцируемых  $C^{\ell}(\mathcal{J}; \mathbf{L}_2(\mathbb{R}^n))$   $n$ -мерных «шумов».

Рассмотрим неоднородное нестационарное стохастическое уравнение

$$L \overset{\circ}{\eta}(t) = a(t)M\eta(t) + \varsigma(t), \quad (6)$$

где процесс  $\varsigma : \mathfrak{J} \rightarrow \mathbf{L}_2(\mathbb{R}^n)$  будет описан ниже.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.** Процесс  $\eta \in C(\mathfrak{J}; \mathbf{L}_2(\mathbb{R}^n)) \cap C^1(\mathfrak{J}; \mathbf{L}_2(\mathbb{R}^n))$  будем называть *решением уравнения* (6), если он на  $\mathfrak{J}$  п.н. обращает его в тождество. Решение  $\eta = \eta(t)$  уравнения (6) называется *решением задачи Шоуолтера—Сидорова*

$$P(\eta(t) - \eta_0) = 0 \tag{7}$$

для уравнения (6), если оно почти наверное удовлетворяет условию (7).

**ТЕОРЕМА 2.** Пусть  $0, \tau \in \mathfrak{J}$ , матрица  $M$   $(L, p)$ -регулярна ( $p = \overline{0, n-1}$ ) и функция  $a \in C^{p+1}([0, \tau]; \mathbb{R}_+)$ . Тогда для любой случайной  $n$ -величины  $\eta_0 \in \mathbf{L}_2(\mathbb{R}^n)$ , не зависящей от процесса  $\varsigma : \mathfrak{J} \rightarrow \mathbf{L}_2(\mathbb{R}^n)$ , для которого выполнены условия

$$Q\varsigma \in C(\mathfrak{J}; \mathbf{L}_2(\mathbb{R}^n)) \quad \text{и} \quad (E_n - Q)\varsigma \in C^{p+1}(\mathfrak{J}; \mathbf{L}_2(\mathbb{R}^n)),$$

существует почти наверное единственное решение

$$\eta \in C(\mathfrak{J}; \mathbf{L}_2(\mathbb{R}^n)) \cap C^1(\mathfrak{J}; \mathbf{L}_2(\mathbb{R}^n))$$

задачи (6), (7) вида

$$\begin{aligned} \eta(t) = & - \sum_{k=0}^p (M_0^{-1}L_0)^k M_0^{-1} \left( \frac{1}{a(t)} \frac{d}{dt} \right)^k \frac{(E_n - Q)\varsigma(t)}{a(t)} + \\ & + X(t, 0)P\eta_0 + \int_0^t X(t, s)L_1^{-1}Q\varsigma(s)ds, \end{aligned} \tag{8}$$

где символ  $\frac{d}{dt}$  означает производную Нельсона—Гликлиха, а поток  $X(t, \tau)$  такой же, как в теореме 1.

Утверждение данной теоремы справедливо в силу теоремы 1 с учетом специфики пространств «шумов».

**2. Задача оптимального управления решениями стохастической системы.** Опираясь на результаты [16] о существовании решения задачи оптимального управления для детерминированной системы, исследуем задачу оптимального управления решениями стохастической нестационарной системы леонтьевского типа.

На интервале  $[0, \tau) \subset \mathbb{R}_+$  ( $\tau < +\infty$ ) рассмотрим задачу Шоуолтера—Сидорова

$$P(\eta(t) - \eta_0) = 0 \tag{9}$$

для уравнения

$$L \overset{\circ}{\eta}(t) = a(t)M\eta(t) + \delta(t), \tag{10}$$

где матрицы  $L, M \in \mathbb{M}_{n \times n}$ , а скалярная функция  $a : [0, \tau) \rightarrow \mathbb{R}_+$  и процесс  $\delta : [0, \tau) \rightarrow \mathbf{L}_2(\mathbb{R}^n)$  подлежат дальнейшему определению.

Построим пространство

$$H^{p+1}(\mathbf{L}_2(\mathbb{R}^n)) = \{\xi \in L_2(0, \tau; \mathbf{L}_2(\mathbb{R}^n)) : \overset{\circ}{\xi}^{(p+1)} \in L_2(0, \tau; \mathbf{L}_2(\mathbb{R}^n)), p = \overline{0, n-1}\},$$

которое является гильбертовым в силу гильбертовости  $\mathbf{L}_2(\mathbb{R}^n)$  со скалярным произведением

$$[\xi, \vartheta] = \sum_{q=0}^{p+1} \int_0^\tau \langle \xi^{(q)}, \vartheta^{(q)} \rangle_{\mathbf{L}_2(\mathbb{R}^n)} dt.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Вектор-функцию  $\eta \in H^1(\mathbf{L}_2(\mathbb{R}^n)) = \{\eta \in L_2(0, \tau; \mathbf{L}_2(\mathbb{R}^n)) : \overset{\circ}{\eta} \in L_2(0, \tau; \mathbf{L}_2(\mathbb{R}^n))\}$  назовем *сильным решением уравнения* (10), если она почти всюду на  $(0, \tau)$  обращает его в тождество почти наверное. Сильное решение  $x = x(t)$  системы (10) называется *сильным решением задачи Шоултера—Сидорова* (9), (10), если оно удовлетворяет (9) почти наверное.

В силу теоремы 2 справедлива

ТЕОРЕМА 3. Пусть матрица  $M$   $(L, p)$ -регулярна ( $p = \overline{0, n-1}$ ) и функция  $a \in C^{p+1}([0, \tau]; \mathbb{R}_+)$ . Тогда для любой случайной  $n$ -величины  $\eta_0 \in \mathbf{L}_2(\mathbb{R}^n)$ , не зависящей от процесса  $\delta : \mathcal{J} \rightarrow \mathbf{L}_2(\mathbb{R}^n)$  такого, что  $Q\delta \in L_2(\mathcal{J}; \mathbf{L}_2(\mathbb{R}^n))$  и  $(E_n - Q)\delta \in H^{p+1}(\mathcal{J}; \mathbf{L}_2(\mathbb{R}^n))$ , существует почти наверное единственное решение  $\eta \in H^1(\mathbf{L}_2(\mathbb{R}^n))$  задачи Шоултера—Сидорова (9) для системы (10), имеющее вид (8), где вместо процесса  $\zeta(t)$  подставлен процесс  $\delta(t)$ .

Пусть  $\Upsilon = \mathbf{L}_2(\mathbb{R}^n)$  — гильбертово пространство, а матрица  $C \in \mathbb{M}_{n \times n}$ . Построим функционал качества

$$J_1(\delta) = \sum_{q=0}^1 \int_0^\tau \|C \overset{\circ}{\eta}^{(q)}(\delta, t) - \overset{\circ}{\vartheta}_0^{(q)}(t)\|_{\Upsilon}^2 dt, \quad (11)$$

где  $\vartheta_0(t)$  — планируемый процесс состояний системы, который является процессом из некоторого гильбертова пространства наблюдений  $\Upsilon$ . Заметим, что если  $\eta \in H^1(\mathbf{L}_2(\mathbb{R}^n))$ , то  $\vartheta \in H^1(\mathbf{L}_2(\mathbb{R}^n))$ .

Аналогично  $H^{p+1}(\mathbf{L}_2(\mathbb{R}^n))$  зададим пространство  $H^{p+1}(\Xi)$ , которое является гильбертовым в силу гильбертовости  $\Xi = \mathbf{L}_2(\mathbb{R}^n)$ . Выделим в пространстве  $H^{p+1}(\Xi)$  замкнутое и выпуклое подмножество  $H_{\delta}^{p+1}(\Xi) = \Xi_{ad}$  — множество допустимых управлений.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Процесс  $\hat{\delta} \in H_{\delta}^{p+1}(\mathbf{L}_2(\mathbb{R}^n))$  назовем *оптимальным управлением* решениями задачи (9), (10), если

$$J_1(\hat{\delta}) = \min_{\delta \in \Xi_{ad}} J_1(\delta), \quad (12)$$

где процессы  $\eta(\delta) \in H^1(\mathbf{L}_2(\mathbb{R}^n))$  и  $\delta \in \Xi_{ad}$  таковы, что  $\eta(\delta) \in H^1(\mathbf{L}_2(\mathbb{R}^n))$  является решением задачи (9), (10).

ТЕОРЕМА 4. Пусть матрица  $M$   $(L, p)$ -регулярна ( $p = \overline{0, n-1}$ ), функция  $a \in C^{p+1}([0, \tau]; \mathbb{R}_+)$ . Тогда для любой случайной  $n$ -величины  $\eta_0 \in \mathbf{L}_2(\mathbb{R}^n)$ , не зависящей от независимых процессов  $\vartheta_0 \in H^1(\mathbf{L}_2(\mathbb{R}^n))$  и  $\delta : \mathcal{J} \rightarrow \mathbf{L}_2(\mathbb{R}^n)$  такого, что  $Q\delta \in L_2(\mathcal{J}; \mathbf{L}_2(\mathbb{R}^n))$  и  $(E_n - Q)\delta \in H^{p+1}(\mathcal{J}; \mathbf{L}_2(\mathbb{R}^n))$ , существует оптимальное управление  $\hat{\delta} \in \Xi_{ad}$  задачи (9), (10), (12) с функционалом (11).

Справедливость этого утверждения получается аналогично соответствующему рассуждению из [15] с учетом теоремы 3 и поэтому не приводится.

Вернемся теперь к исходной системе

$$L \overset{\circ}{\xi}(t) = a(t)M\xi(t) + Bu(t) + \delta(t), \quad (13)$$

где  $L$ ,  $M$  и  $B$  — квадратные матрицы порядка  $n$ , причем  $\det L = 0$ . Представим  $\xi(t) = x(t) + \eta(t)$ , причем процесс  $\eta(t)$  описывает случайную ошибку и обладает соответствующими свойствами. Как уже отмечалось выше, эта система эквивалентна системе из двух уравнений: стохастического (10) и детерминированного

$$L\dot{x}(t) = a(t)Mx(t) + Bu(t), \quad (14)$$

где матрицы  $L$ ,  $M$ ,  $B \in \mathbb{M}_{n \times n}$ , а скалярная функция  $a : [0, \tau] \rightarrow \mathbb{R}_+$  и вектор-функции  $u : [0, \tau] \rightarrow \mathbb{R}^n$  подлежат дальнейшему определению.

Аналогично построим пространство

$$H^{p+1}(\mathfrak{Y}) = \{v \in L_2(0, \tau; \mathfrak{Y}) : v^{(p+1)} \in L_2(0, \tau; \mathfrak{Y}), p = \overline{0, n-1}\},$$

которое является гильбертовым в силу гильбертовости  $\mathfrak{Y}$  со скалярным произведением

$$[v, w] = \sum_{q=0}^{p+1} \int_0^\tau \langle v^{(q)}, w^{(q)} \rangle_{\mathfrak{Y}} dt.$$

В силу теоремы 2 вид решения  $x \in H^1(\mathfrak{X})$  задачи

$$P(x(0) - x_0) = 0 \quad (15)$$

для уравнения (14) имеет вид (5), где вместо функции  $f(t)$  подставлена функция  $Bu(t)$ . Пусть  $\mathfrak{Z}$  — гильбертово пространство, а оператор  $C \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}; \mathfrak{Z})$ . Построим функционал качества

$$J_2(u) = \sum_{q=0}^1 \int_0^\tau \|Cx^{(q)} - z_0^{(q)}\|_{\mathfrak{Z}}^2 dt,$$

где  $z_0(t)$  — наблюдаемые значения состояний системы, которые являются функциями из некоторого гильбертова пространства наблюдений  $\mathfrak{Z}$ . Заметим, что если  $x \in H^1(\mathfrak{X})$ , то  $z \in H^1(\mathfrak{Z})$ . Так как  $\mathfrak{U}$  — гильбертово пространство, пространство  $H^{p+1}(\mathfrak{U})$  также является гильбертовым по построению. Наконец, выделим множество допустимых управлений, которое является замкнутым и выпуклым подмножеством  $H_{\partial}^{p+1}(\mathfrak{U}) = \mathfrak{U}_{ad}$  в пространстве  $H^{p+1}(\mathfrak{U})$ .

Вектор-функцию  $\hat{u} \in H_{\partial}^{p+1}(\mathfrak{U})$  назовем оптимальным управлением решениями задачи (14), (15), если

$$J_2(\hat{u}) = \min_{u \in \mathfrak{U}_{ad}} J_2(u),$$

где функции  $x(u) \in \mathfrak{X}$  и  $u \in \mathfrak{U}_{ad}$  таковы, что  $x(u) \in \mathfrak{X}$  является решением задачи (14), (15). В [16] показано, что такое оптимальное управление существует и единственно для любых начальных данных  $x_0 \in \mathfrak{X}$  и наблюдений  $z_0 \in H^1(\mathfrak{Z})$ .

Рассмотрим функционал штрафа

$$\begin{aligned}
 J(u) &= \sum_{q=0}^1 \int_0^\tau \mathbf{E} \|C \overset{\circ}{\xi}^{(q)}(u, t) - z_0^{(q)}(t)\|_{\mathbb{R}^n}^2 dt = \\
 &= \sum_{q=0}^1 \int_0^\tau \mathbf{E} \|C(x^{(q)}(u, t) + \overset{\circ}{\eta}^{(q)}(\delta, t)) - z_0^{(q)}(t)\|_{\mathbb{R}^n}^2 dt \leq \\
 &\leq \sum_{q=0}^1 \int_0^\tau \|Cx^{(q)}(u, t) - z_0^{(q)}(t)\|_{\mathbb{R}^n}^2 dt + \int_0^\tau \mathbf{E} \|C \overset{\circ}{\eta}^{(q)}(\delta, t)\|_{\mathbb{R}^n}^2 dt.
 \end{aligned}$$

Соответственно, для функционала  $J(u)$  выполняется неравенство

$$J_2(u) \leq J(u) \leq J_2(u) + K \|\delta\|_{H^1(\mathbf{L}_2(\mathbb{R}^n))}, \quad (16)$$

где  $K$  — константа, зависящая от параметров задачи. По постановке задачи ясно, что требуется найти управляющее воздействие, которое наиболее близко приведет состояние системы к плановому значению. Поэтому полученная оценка помехи будет учитываться при реализации алгоритма нахождения численного решения задачи оптимального управления для детерминированной части системы.

Наконец, в заключение коротко приведем *алгоритм решения задачи оптимального управления* для системы (13). При нахождении оптимального управления будем использовать построенные ранее алгоритмы [18, 19].

**Шаг 1.** Построить детерминированную часть наблюдения  $z_0(t)$  с использованием алгоритма построения наблюдения для задачи оптимального динамического измерения по искаженным данным. В силу вида системы модели измерительного устройства помеха  $\delta$  отвечает за внутренние помехи системы и по норме пренебрежимо мала.

**Шаг 2.** По введенным матрицам  $L, M$  найти решение детерминированной части нестационарной системы леонтьевского типа, используя приближения матриц разрешающего семейства с помощью степеней пучка  $\mu L - M$ , причем  $\mu$  зависит от мультипликативной функции  $a(t)$ .

**Шаг 3.** В силу вида системы модели измерительного устройства помеха  $\delta$  отвечает за внутренние помехи системы и по норме пренебрежимо мала. Константа  $K$  оценивается с помощью оценок определителей матриц  $L, M$ , их пучка  $\mu L - M$  и ее степеней, а также матрицы  $C$  из функционала  $J(u)$ .

**Шаг 4.** По полученной части наблюдения  $z_0(t)$  на шаге 1 найти решение задачи оптимального управления решениями детерминированной части нестационарной системы леонтьевского типа. При этом вычислительная погрешность  $\varepsilon$  при поиске минимума функционала штрафа  $J(u)$  выбирается соразмерно константам, найденным на предыдущем шаге.

**Заключение.** В работе доказана разрешимость задачи оптимального динамического измерения с мультипликативным воздействием в пространствах случайных процессов. Основным результатом является построение решения для нестационарных систем леонтьевского типа методами вырожденных потоков разрешающих матриц, что расширяет классические подходы теории динамических измерений.

Полученная оценка отклонения функционала качества (16) демонстрирует, что влияние стохастической составляющей на целевую динамику системы может быть контролируемо через норму помехи  $\|\delta\|_{H^1}$ . Это позволяет при численной реализации задачи фокусироваться на оптимизации детерминированной компоненты, существенно снижая вычислительную сложность алгоритмов.

Результаты работы имеют значение для прикладных задач управления системами с шумовыми возмущениями, включая обработку сигналов в условиях нестационарности. Дальнейшие исследования могут быть направлены на обобщение метода для нелинейных систем и анализ устойчивости полученных решений.

**Конфликт интересов.** Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

**Ответственность автора.** Автор несет полную ответственность за подготовку окончательной версии рукописи и подтверждает ее одобрение для публикации.

**Финансирование.** Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-11-20037, <https://rscf.ru/project/24-11-20037/>.

### Библиографический список

1. Бычков Е. В., Загребина С. А., Замышляева А. А. [и др.] Развитие теории оптимальных динамических измерений // *Вестн. ЮУрГУ. Сер. Матем. моделирование и программирование*, 2022. Т. 15, №3. С. 19–33. EDN: XCLBOY. DOI: <https://doi.org/10.14529/mmp220302>.
2. Грановский В. А. *Динамические измерения. Основы метрологического обеспечения*. Л.: Энергоатомиздат, 1984. 224 с.
3. Шестаков А. Л. *Методы теории автоматического управления в динамических измерениях*. Челябинск: ЮУрГУ, 2013. 257 с. EDN: UBFILJ.
4. Shestakov A. L., Keller A. V., Sviridyuk G. A. The theory of optimal measurements // *J. Comp. Eng. Math.*, 2014. vol. 1, no. 1. pp. 3–16. EDN: TRZDMN.
5. Свиридюк Г. А., Брычев С. В. Численное решение систем уравнений леонтьевского типа // *Изв. вузов. Матем.*, 2003. №8. С. 46–52. EDN: HQUFDX.
6. Favini A., Sviridyuk G. A., Sagadeeva M. A. Linear Sobolev type equations with relatively  $p$ -sectorial operators in space of “noises” // *Mediterr. J. Math.*, 2016. vol. 15, no. 1. pp. 185–196. EDN: WPETIL. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00009-016-0765-x>.
7. Гликлик Ю. Е. Изучение уравнений леонтьевского типа с белым шумом методами производных в среднем случайных процессов // *Вестн. ЮУрГУ. Сер. Матем. моделирование и программирование*, 2012. №13. С. 24–34. EDN: PCAULL.
8. Sviridyuk G. A., Fedorov V. E. *Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators / Inverse and Ill-Posed Problems Series*. vol. 42. Utrecht: De Gruyter, 2003. viii+216 pp. DOI: <https://doi.org/10.1515/9783110915501>.
9. Al'shin A. B., Korpusov M. O., Sveshnikov A. G. *Blow-up in Nonlinear Sobolev Type Equations / De Gruyter Series in Nonlinear Analysis and Applications*. vol. 15. Berlin: De Gruyter, 2011. xii+648 pp. DOI: <https://doi.org/10.1515/9783110255294>.
10. Келлер А. В. Системы леонтьевского типа: классы задач с начальным условием Шоултера–Сидорова и численные решения // *Изв. Иркутск. гос. ун-ва. Сер. Математика*, 2010. Т. 3, №2. С. 30–43. EDN: MTOZSB.
11. Свиридюк Г. А., Загребина С. А. Задача Шоултера–Сидорова как феномен уравнений соболевского типа // *Изв. Иркутск. гос. ун-ва. Сер. Математика*, 2010. Т. 3, №1. С. 104–125. EDN: MNINJT.
12. Келлер А. В., Загребина С. А. Некоторые обобщения задачи Шоултера–Сидорова для моделей соболевского типа // *Вестн. ЮУрГУ. Сер. Матем. моделирование и про-*

- граммирование, 2015. Т. 8, № 2. С. 5–23. EDN: TSZPJ. DOI: <https://doi.org/10.14529/mmp150201>.
13. Свиридок Г. А., Келлер А. В. О сходимости численного решения задач оптимального управления для систем уравнений леонтьевского типа // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2011. № 2. С. 24–33. EDN: OZBCED. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu951>.
  14. Keller A. V. On the computational efficiency of the algorithm of the numerical solution of optimal control problems for models of Leontieff type // *J. Comp. Eng. Math.*, 2015. vol. 2, no. 2. pp. 39–59. EDN: UCRTJH. DOI: <https://doi.org/10.14529/jcem150205>.
  15. Замышляева А. А., Цыпленкова О. Н. Восстановление динамически искаженных сигналов на основе теории оптимального управления решениями уравнений соболевского типа в пространствах случайных процессов // *Вестн. Южно-Ур. ун-та. Сер. Матем. Мех. Физ.*, 2022. Т. 14, № 3. С. 38–44. EDN: OCTGLH. DOI: <https://doi.org/10.14529/mmp220304>.
  16. Keller A. V., Sagadeeva M. A. Degenerate matrix groups and degenerate matrix flows in solving the optimal control problem for dynamic balance models of the economy / *Springer Proceedings in Mathematics and Statistics*, 325, *Semigroups of Operators – Theory and Applications*. Cham: Springer, 2020. pp. 263–277. EDN: WQDSBE. DOI: [https://doi.org/10.1007/978-3-030-46079-2\\_15](https://doi.org/10.1007/978-3-030-46079-2_15).
  17. Shestakov A. L., Sviridyuk G. A., Khudyakov Yu. V. Dynamical measurements in the view of the group operators theory / *Semigroups of Operators – Theory and Applications* / *Springer Proceedings in Mathematics and Statistics*, 113. Cham: Springer, 2015. pp. 273–286. EDN: WWFJNX. DOI: [https://doi.org/10.1007/978-3-319-12145-1\\_17](https://doi.org/10.1007/978-3-319-12145-1_17).
  18. Сагадеева М. А. Построение наблюдения для задачи оптимального динамического измерения по искаженным данным // *Вестн. ЮУрГУ. Сер. Матем. моделирование и программирование*, 2019. Т. 12, № 2. С. 82–96. EDN: ZTEVRZ. DOI: <https://doi.org/10.14529/mmp190207>.
  19. Шестаков А. Л., Загребина С. А., Манакова Н. А. [и др.] Алгоритм численного нахождения оптимального измерения, искаженного инерционностью, резонансами и деградацией измерительного устройства // *Автомат. и телемех.*, 2021. № 1. С. 55–67. EDN: BDHCLB. DOI: <https://doi.org/10.31857/S0005231021010025>.

MSC: 93C23

## Problem of optimal dynamic measurement with multiplicative effects in spaces of differentiable “noises”

*M. A. Sagadeeva*

South Ural State University,  
(National Research University),  
76, prosp. Lenina, Chelyabinsk, 454080, Russian Federation.

### Abstract

The article deals with a model of optimal dynamic measurement with multiplicative influence, considered as an optimal control problem for a non-stationary Leontief-type system. The existence of a solution to this problem in a stochastic formulation is established. The main objective is to find a recoverable signal (control action) that brings the system state as close as possible to the observed indicators, given the presence of an additional input process modeling noise. Solutions to the system must be sought in spaces of random processes. To achieve this, the optimal control problem in spaces of differentiable “noises” is preliminarily analyzed. The linearity of the transducer model, described by a non-stationary Leontief-type system, allows the original system to be decomposed into deterministic and stochastic subsystems. Based on the results regarding the solvability of optimal control problems for each subsystem, a solution to the original problem is obtained.

The first part of the article presents the solvability conditions for a stochastic non-stationary Leontief-type system. The second part explores the optimal control problem in the stochastic case and derives estimates for the minimized functionals using results previously obtained for the deterministic counterpart. In conclusion, an algorithm for studying the problem of optimal dynamic measurement with multiplicative influence in spaces of “noises” is presented.

**Keywords:** optimal control problem, nonstationary Leontief-type system, relatively regular matrices, Showalter–Sidorov problem, Nelson–Gliklikh derivative.

Received: 6<sup>th</sup> September, 2024 / Revised: 17<sup>th</sup> November, 2024 /

Accepted: 28<sup>th</sup> November, 2024 / First online: 27<sup>th</sup> December, 2024

### Differential Equations and Mathematical Physics Research Article

© The Author(s), 2024

© Samara State Technical University, 2024 (Compilation, Design, and Layout)

♾️ © ⓘ The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

#### Please cite this article in press as:

Sagadeeva M. A. Problem of optimal dynamic measurement with multiplicative effects in spaces of differentiable “noises”, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2024, vol. 28, no. 4, pp. 651–664. EDN: CFEGES. DOI: 10.14498/vsgtu2114 (In Russian).

#### Author’s Details:

Minzilia A. Sagadeeva  <https://orcid.org/0000-0001-9376-4242>

Cand. Phys. & Math. Sci., Associate Professor; Associate Professor; Dept. of Mathematical and Computer Modeling; e-mail: [sagadeevama@susu.ru](mailto:sagadeevama@susu.ru)

**Conflict of interest.** The author declares no conflict of interest.

**Author's Responsibilities.** The author is solely responsible for preparing the final version of the manuscript and approves it for publication.

**Funding.** The study was supported by a grant from the Russian Science Foundation no. 24-11-20037, <https://rscf.ru/project/24-11-20037/>.

## References

1. Bychkov E. V., Zagrebina S. A., Zamyshlyayeva A. A., et al. Development of the theory of optimal dynamic measurement, *Vestnik YuUrGU. Ser. Mat. Model. Progr.*, 2022, vol. 15, no. 3, pp. 19–33 (In Russian). EDN: XCLBOY. DOI: <https://doi.org/10.14529/mmp220302>.
2. Granovskiy V. A. *Dinamicheskie izmereniia. Osnovy metrologicheskogo obespecheniia* [Dynamic Measurements. Fundamentals of Metrological Support]. Leningrad, Energoatomizdat, 1984, 224 pp. (In Russian)
3. Shestakov A. L. *Metody teorii avtomaticheskogo upravleniia v dinamicheskikh izmereniiaakh* [Methods of the Theory of Automatic Control in Dynamic Measurements]. Chelyabinsk, South Ural State Univ., 2013, 257 pp. (In Russian). EDN: UBFILJ.
4. Shestakov A. L., Keller A. V., Sviridyuk G. A. The theory of optimal measurements, *J. Comp. Eng. Math.*, 2014, vol. 1, no. 1, pp. 3–16. EDN: TRZDMN.
5. Sviridyuk G. A., Brychev S. V. Numerical solution of systems of equations of Leontief type, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2003, vol. 47, no. 8, pp. 44–50.
6. Favini A., Sviridyuk G. A., Sagadeeva M. A. Linear Sobolev type equations with relatively  $p$ -sectorial operators in space of “noises”, *Mediterr. J. Math.*, 2016, vol. 15, no. 1, pp. 185–196. EDN: WPETIL. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00009-016-0765-x>.
7. Gliklikh Yu. E. Investigation of Leontieff type equations with white noise by the methods of mean derivatives of stochastic processes, *Vestnik YuUrGU. Ser. Mat. Model. Progr.*, 2012, no. 13, pp. 24–34 (In Russian). EDN: PCAULL.
8. Sviridyuk G. A., Fedorov V. E. *Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators*, Inverse and Ill-Posed Problems Series, vol. 42. Utrecht, De Gruyter, 2003, viii+216 pp. DOI: <https://doi.org/10.1515/9783110915501>.
9. Al'shin A. B., Korpusov M. O., Sveshnikov A. G. *Blow-up in Nonlinear Sobolev Type Equations*, De Gruyter Series in Nonlinear Analysis and Applications, vol. 15. Berlin, De Gruyter, 2011, xii+648 pp. DOI: <https://doi.org/10.1515/9783110255294>.
10. Keller A. V. The Leontief type systems: classes of problems with the Showalter–Sidorov initial condition and numerical solving, *Bulletin of Irkutsk State Univ., Ser. Mathematics*, 2010, vol. 3, no. 2, pp. 30–43 (In Russian). EDN: MTOZSB.
11. Sviridyuk G. A., Zagrebina S. A. The Showalter–Sidorov problem as a phenomena of the Sobolev-type equations, *Bulletin of Irkutsk State Univ., Ser. Mathematics*, 2010, vol. 3, no. 1, pp. 104–125 (In Russian). EDN: MNINJT.
12. Keller A. V., Zagrebina S. A. Some generalizations of the Showalter–Sidorov problem for Sobolev-type models, *Vestnik YuUrGU. Ser. Mat. Model. Progr.*, 2015, vol. 8, no. 2, pp. 5–23 (In Russian). EDN: TSZPJ. DOI: <https://doi.org/10.14529/mmp150201>.
13. Sviridyuk G. A., Keller A. V. On the numerical solution convergence of optimal control problems for Leontief type system, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2011, no. 2, pp. 24–33 (In Russian). EDN: OZBCED. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu951>.
14. Keller A. V. On the computational efficiency of the algorithm of the numerical solution of optimal control problems for models of Leontieff type, *J. Comp. Eng. Math.*, 2015, vol. 2, no. 2, pp. 39–59. EDN: UCRTJH. DOI: <https://doi.org/10.14529/jcem150205>.
15. Zamyshlyayeva A. A., Tsyplenkova O. N. Reconstruction of dynamically distorted signals based on the theory of optimal control of solutions for Sobolev type equations in the spaces of stochastic processes, *Vestn. Yuzhno-Ural. Gos. Un-ta. Ser. Matem. Mekh. Fiz.*, 2022, vol. 14, no. 3, pp. 38–44 (In Russian). EDN: OCTGLH. DOI: <https://doi.org/10.14529/mmp220304>.

16. Keller A. V., Sagadeeva M. A. Degenerate matrix groups and degenerate matrix flows in solving the optimal control problem for dynamic balance models of the economy, Springer Proceedings in Mathematics and Statistics, 325, Semigroups of Operators – Theory and Applications. Cham, Springer, 2020, pp. 263–277. EDN: WQDSBE. DOI: [https://doi.org/10.1007/978-3-030-46079-2\\_15](https://doi.org/10.1007/978-3-030-46079-2_15).
17. Shestakov A. L., Sviridyuk G. A., Khudyakov Yu. V. Dynamical measurements in the view of the group operators theory, In: *Semigroups of Operators – Theory and Applications*, Springer Proceedings in Mathematics and Statistics, 113. Cham, Springer, 2015, pp. 273–286. EDN: WWFJNX. DOI: [https://doi.org/10.1007/978-3-319-12145-1\\_17](https://doi.org/10.1007/978-3-319-12145-1_17).
18. Sagadeeva M. A. Reconstruction of observation from distorted data for the optimal dynamic measurement problem, *Vestnik YuUrGU. Ser. Mat. Model. Progr.*, 2019, vol. 12, no. 2, pp. 82–96 (In Russian). EDN: ZTEVRZ. DOI: <https://doi.org/10.14529/mmp190207>.
19. Shestakov A. L., Zagrebina S. A., Manakova N. A., et al. Numerical optimal measurement algorithm under distortions caused by inertia, resonances, and sensor degradation, *Autom. Remote Control*, 2021, vol. 82, no. 1, pp. 41–50. EDN: FIKVXS. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0005117921010021>.



УДК 519.652

## Оптимизация погрешности экспоненциально-тригонометрической интерполяционной формулы

Х. М. Шадиметов<sup>1,2</sup>, А. К. Болтаев<sup>2,3</sup>

<sup>1</sup> Ташкентский государственный транспортный университет, Узбекистан, 100167, Ташкент, ул. Темирийулчилар, 1.

<sup>2</sup> Институт математики имени В.И. Романовского Академии наук Узбекистана, Узбекистан, 100174, Ташкент, ул. Университетская, 9.

<sup>3</sup> Международный университет Нордик, Узбекистан, 100043, Ташкент, ул. Бунедкор, 8/2.

### Аннотация

В инженерной геодезии облака точек, полученные с помощью методов площадных измерений, таких как наземное лазерное сканирование или фотограмметрия, должны быть аппроксимированы кривой или поверхностью, которую можно описать с помощью непрерывной математической функции, часто используя сплайны и оптимальные интерполяционные формулы.

Работа посвящена построению оптимальной интерполяционной формулы, точной на экспоненциально-тригонометрических функциях в гильбертовом пространстве. Оптимальная формула интерполяции получается минимизацией нормы функционала погрешности по коэффициентам. В статье доказаны существование и единственность оптимальной интерполяционной формулы, а также получены явные аналитические выражения для оптимальных коэффициентов интерполяционной формулы. С помощью построенной оптимальной интерполяционной формулы интерполированы конкретные функции и проведено сравнение с известными результатами других авторов.

**Ключевые слова:** интерполяционная формула, погрешность формулы, оптимальные коэффициенты, метод Соболева.

Получение: 15 мая 2024 г. / Исправление: 16 ноября 2024 г. /

Принятие: 19 ноября 2024 г. / Публикация онлайн: 26 декабря 2024 г.

### Дифференциальные уравнения и математическая физика

#### Научная статья

© Коллектив авторов, 2024

© СамГТУ, 2024 (составление, дизайн, макет)

📄 © ⓘ Контент публикуется на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

#### Образец для цитирования

Шадиметов Х. М., Болтаев А. К. Оптимизация погрешности экспоненциально-тригонометрической интерполяционной формулы // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2024. Т. 28, № 4. С. 665–681. EDN: CJETPO. DOI: 10.14498/vsgtu2094.

#### Сведения об авторах

Холмат Махкамбаевич Шадиметов ✉️ ⓘ <https://orcid.org/0000-0002-4183-6184>

доктор физико-математических наук, профессор; заведующий кафедрой; каф. компьютерных наук и графики<sup>1</sup>; главный научный сотрудник; лаб. вычислительной математики<sup>2</sup>; e-mail: [kholmatshadimetov@mail.ru](mailto:kholmatshadimetov@mail.ru)

Азиз Кузиевич Болтаев ⓘ <https://orcid.org/0000-0002-8329-4440>

кандидат физико-математических наук, доцент; старший научный сотрудник; лаб. вычислительной математики<sup>2</sup>; доцент; каф. экономики и управления бизнесом<sup>3</sup>; e-mail: [aziz\\_boltayev@mail.ru](mailto:aziz_boltayev@mail.ru)

**1. Введение.** В различных областях науки, техники, технологий и компьютерного геометрического проектирования подгонка данных играет важную роль. Интерполяция и аппроксимация являются двумя наиболее распространенными методами подгонки. При интерполяции точки данных используются для построения интерполирующей кривой, проходящей через них. В отличие от этого аппроксимация строит кривую, которая не обязательно проходит через точки данных, но минимизирует отклонение от них. Если форма базовой функции данных сложная, оценить ее с помощью одного полинома затруднительно. В таких случаях предпочтительнее использовать кусочные функции, известные как сплайны. Благодаря простоте построения и способности аппроксимировать сложные формы сплайны являются одними из наиболее полезных инструментов для интерполяции и аппроксимации.

Сплайны играют ключевую роль в прикладной математике благодаря своей гибкости, позволяющей эффективно приближать даже негладкие функции, заданные как явно, так и неявно, например, через дифференциальные уравнения [1–5]. Для численного решения дифференциальных уравнений широко применяются разностные схемы [6]. Узлы и коэффициенты оптимальных интерполяционных формул имеют важное значение для построения оптимальных разностных формул в гильбертовых пространствах. Кроме того, для наилучшего приближения решений дифференциальных уравнений дробного порядка используются оптимальные интерполяционные формулы и их оценки. Решения таких уравнений ищутся в гильбертовых пространствах и находятся преимущественно численными методами, включая различные типы аппроксимации и интерполяции. Интерполяционные формулы для аппроксимации функций могут быть построены как классическими, так и вариационными методами (см. [7]).

**1.1. Классические интерполяционные формулы.** Общая задача интерполяции заключается в нахождении функции  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , которая для заданных  $n+1$  точек данных  $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ , где  $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ , удовлетворяет условию интерполяции:

$$f(x_i) = y_i, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Выбор подходящей функции  $f$  зависит от свойств данных, таких как их гладкость или периодичность, а также от вычислительных аспектов, включая затраты на определение коэффициентов и численную устойчивость получаемой системы уравнений. Наиболее часто используемыми функциями для интерполяции являются полиномы, тригонометрические, экспоненциальные, логарифмические и рациональные функции.

**1.2. Вариационные методы для построения интерполяционных формул.** В последние годы были разработаны новые методы аппроксимации, включая сплайны, которые доказали свою эффективность как в теоретических исследованиях, так и в практических приложениях. Теория сплайнов, основанная на вариационных методах, активно изучается и развивается [8–11]. Сплайны были впервые предложены И. Шенбергом в 1946 году для сглаживания табличных данных [12]. Ниже приведено определение полиномиальных сплайнов.

**1.2.1. Полиномиальные сплайны.** Обозначим через  $L_2^{(m)} = L_2^{(m)}[a, b]$  гильбертово пространство классов вещественных функций, интегрируемых с

квадратом на  $[a, b]$  и имеющих производные порядка  $m$ ,  $m \geq 1$ . Функции в этом пространстве отличаются полиномом степени  $(m - 1)$ , а норма функций определяется формулой [13]:

$$\|f\|_{L_2^{(m)}} = \left( \int_a^b (f^{(m)}(x))^2 dx \right)^{1/2}.$$

Обозначим через  $S$  пространство вещественных функций  $s$ , определенных на интервале  $[a, b]$  и удовлетворяющих следующим условиям:

- (i)  $s$  — полином степени  $2m - 1$  на каждом интервале  $(x_i, x_{i+1})$ ,  $i = \overline{1, N - 1}$ ;
- (ii)  $s$  — полином степени  $m - 1$  на  $[a, x_1]$  и  $(x_N, b]$ ;
- (iii)  $s^{(2m-2)}$  — непрерывная функция.

Такие сплайны имеют следующий общий вид (см., например, [14–16]):

$$s(x) = \sum_{i=1}^N d_i \frac{(x - x_i)_+^{2m-1}}{(2m - 1)!} + \sum_{j=0}^{m-1} \alpha_j x^j,$$

где

$$x_+^\alpha = \begin{cases} x^\alpha, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases}$$

а коэффициенты  $d_i$  удовлетворяют условиям  $\sum_{i=1}^N d_i x_i^k = 0$ ,  $k = 0, 1, \dots, m - 1$ . Учитывая условия интерполяции, интерполяционный сплайн  $s(x)$  определяется следующей системой уравнений:

$$s(x_{i'}) = \sum_{i=1}^N d_i \frac{(x_{i'} - x_i)_+^{2m-1}}{(2m - 1)!} + \sum_{j=0}^{m-1} \alpha_j x_{i'}^j = y_{i'}, \quad i' = 1, \dots, N, \quad (1)$$

$$\sum_{i=1}^N d_i x_i^k = 0, \quad k = 0, 1, \dots, m - 1. \quad (2)$$

В случае  $m = 1$  решением этой системы является сплайн первой степени (прямая линия), а в случае  $m = 2$  — кубический сплайн.

**1.2.2. Задача минимальной нормы.** Пусть даны  $N$  фиксированные различные точки отрезка  $[a, b]$ :  $a < x_1 < x_2 < \dots < x_N < b$ , где  $N \geq m$ , и  $N$  вещественных чисел  $y_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ . Требуется среди всех функций  $f \in L_2^{(m)}$ , удовлетворяющих условиям интерполяции  $f(x_i) = y_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ , найти функцию, для которой функционал

$$\ell_m(f) = \int_a^b (f^{(m)}(x))^2 dx$$

принимает наименьшее значение. Эта задача заключается в аппроксимации данных полиномиальным сплайном степени  $2m - 1$  в пространстве  $L_2^{(m)}$  для получения более гладкой кривой, проходящей через заданные точки.

Холладей в работе [17] решил эту задачу для  $m = 2$  в 1957 году, доказав, что кубический сплайн Шенберга (см. [18]) является решением. Позже Де Бур

в своей работе [19] обобщил этот результат для произвольного  $m$ , показав, что решение представляет собой полиномиальный сплайн степени  $2m - 1$  в  $L_2^{(m)}$ .

В работе [20] явное решение задачи минимальной нормы в пространстве  $L_2^{(m)}$  было найдено с помощью дискретного аналога дифференциального оператора  $2m$ -го порядка. Решения системы (1), (2) позволяют строить натуральные сплайны степени  $2m - 1$  для любого натурального числа  $m$ .

В статьях [21–26] рассматривается задача минимальной нормы в различных гильбертовых пространствах.

Недавно в [27] авторы построили новую оптимальную интерполяционную формулу, используя дискретный аналог оператора  $\frac{d^6}{dx^6} - 1$  в гильбертовом пространстве  $W_2^{(3,0)}(0, 1)$ .

**2. Постановка задачи.** Впервые оптимальные интерполяционные формулы изучил С. Л. Соболев (см. [28]). Рассмотрим одну из таких формул:

$$\varphi(x) \cong \sum_{\beta=0}^N C_{\beta}(x)\varphi(x_{\beta}), \quad (3)$$

где  $C_{\beta}(x)$  и  $x_{\beta}$ ,  $x_{\beta} \in [0, 1]$  называются *коэффициентами* и *узлами* интерполяционной формулы (3), а  $\varphi$  является элементом класса  $W_2^{(4,0)}(0, 1)$ . Этот класс функций определяется следующим образом:

$$W_2^{(4,0)}(0, 1) = \{\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \mid \varphi^{(3)} \text{ абсолютно непрерывна и } \varphi^{(4)} \in L_2(0, 1)\}.$$

Класс функций  $W_2^{(4,0)}(0, 1)$  со скалярным произведением

$$\langle \varphi, \psi \rangle_{W_2^{(4,0)}} = \int_0^1 (\varphi^{(4)}(x) + \varphi(x))(\psi^{(4)}(x) + \psi(x))dx \quad (4)$$

является гильбертовым пространством, если отождествлять функции, отличающиеся на решение уравнения

$$\varphi^{(4)}(x) + \varphi(x) = 0.$$

Следовательно,  $W_2^{(4,0)}$  — гильбертово пространство, снабженное полунормой

$$\|\varphi\|_{W_2^{(4,0)}} = \left\{ \int_0^1 [\varphi^{(4)}(x) + \varphi(x)]^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}},$$

соответствующей скалярному произведению (4).

*Погрешность* интерполяционной формулы (3) определяется как разность между функцией и ее интерполяционной суммой. Значение этой погрешности в точке  $z \in [0, 1]$  выражается следующим образом:

$$(\ell, \varphi) = \varphi(z) - \sum_{\beta=0}^N C_{\beta}(z)\varphi(x_{\beta}), \quad (5)$$

где

$$\ell(x, z) = \delta(x - z) - \sum_{\beta=0}^N C_{\beta}(z)\delta(x - x_{\beta}) \quad (6)$$

является функционалом погрешности интерполяционной формулы (3) и принадлежит сопряженному пространству  $W_2^{(4,0)*}$ . Здесь  $\delta(x)$  — дельта-функция Дирака. Для удобства далее будем обозначать  $\ell(x, z)$  через  $\ell(x)$ .

Согласно неравенству Коши–Шварца, абсолютная величина погрешности (5) оценивается следующим образом:

$$|(\ell, \varphi)| \leq \|\varphi\|_{W_2^{(4,0)}} \cdot \|\ell\|_{W_2^{(4,0)*}},$$

где

$$\|\ell\|_{W_2^{(4,0)*}} = \sup_{\varphi, \|\varphi\| \neq 0} \frac{|(\ell, \varphi)|}{\|\varphi\|_{W_2^{(4,0)}}}.$$

Таким образом, для оценки погрешности интерполяционной формулы (3) по функциям из пространства  $W_2^{(4,0)}$  требуется вычисление величины

$$\|\ell\|_{W_2^{(4,0)*}}^{\circ} = \inf_{C_{\beta}(z)} \|\ell\|_{W_2^{(4,0)*}}, \quad (7)$$

т.е. нахождение минимума (7) функционала погрешности  $\ell(x)$  по коэффициентам  $C_{\beta}(z)$  при фиксированных узлах  $x_{\beta}$ .

Эта задача состоит из двух частей: вычисление нормы функционала погрешности (6) в пространстве  $W_2^{(4,0)*}$ , а затем нахождение минимума нормы (7) по коэффициентам  $C_{\beta}(z)$  для фиксированных узлов  $x_{\beta}$ .

Одной из основных целей данной работы является исследование задачи о построении оптимальных интерполяционных формул вида (3) в пространстве  $W_2^{(4,0)}$  методом Соболева. Метод Соболева является одним из алгоритмов для построения оптимальных квадратурных и кубатурных формул в пространстве  $L_2^m(\mathbb{R}^N)$  [13, 28]. В данной работе мы разрабатываем аналогичный метод для построения оптимальных интерполяционных формул вида (3) в пространстве  $W_2^{(4,0)}$ . В результате мы получаем оптимальную интерполяционную формулу, которая точна на экспоненциально-тригонометрических функциях.

**3. Норма функционала погрешности.** Для нахождения нормы функционала погрешности (6) интерполяционной формулы (3) мы будем использовать экстремальную функцию этого функционала.

Функция  $\psi_{\ell}$ , для которой выполняется равенство

$$(\ell, \psi_{\ell}) = \|\ell\|_{W_2^{(4,0)*}} \cdot \|\psi_{\ell}\|_{W_2^{(4,0)}}, \quad (8)$$

называется экстремальной функцией функционала погрешности  $\ell$  [13, 28].

Поскольку  $W_2^{(4,0)}$  — гильбертово пространство, по теореме Рисса об общем виде линейного непрерывного функционала в гильбертовых пространствах

для функционала погрешности  $\ell \in W_2^{(4,0)*}$  существует единственная функция  $\psi_\ell \in W_2^{(4,0)}$  такая, что для любой функции  $\varphi \in W_2^{(4,0)}$  выполняется равенство

$$(\ell, \varphi) = \langle \psi_\ell, \varphi \rangle, \quad (9)$$

причем  $\|\ell\|_{W_2^{(4,0)*}} = \|\psi_\ell\|_{W_2^{(4,0)}}$ . Здесь  $\langle \psi_\ell, \varphi \rangle$  обозначает скалярное произведение функций  $\psi_\ell$  и  $\varphi$  в пространстве  $W_2^{(4,0)}$ .

Отсюда видно, что решение  $\psi_\ell$  уравнения (9) удовлетворяет уравнению (8) и является экстремальной функцией. Кроме того, из (9) следует, что функционал погрешности  $\ell$  удовлетворяет следующим равенствам:

$$\left(\ell, e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x} \cos \frac{\sqrt{2}}{2}x\right) = 0, \quad \left(\ell, e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x} \sin \frac{\sqrt{2}}{2}x\right) = 0, \quad (10)$$

$$\left(\ell, e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}x} \cos \frac{\sqrt{2}}{2}x\right) = 0, \quad \left(\ell, e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}x} \sin \frac{\sqrt{2}}{2}x\right) = 0. \quad (11)$$

Равенства (10) и (11) означают, что наша интерполяционная формула точна для функций  $e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x} \cos \frac{\sqrt{2}}{2}x$ ,  $e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x} \sin \frac{\sqrt{2}}{2}x$ ,  $e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}x} \cos \frac{\sqrt{2}}{2}x$ ,  $e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}x} \sin \frac{\sqrt{2}}{2}x$ .

Уравнение (9) решено в работе [29], и для экстремальной функции  $\psi_\ell$  при  $m = 4$  справедливо следующее выражение:

$$\psi_\ell(x) = (\ell * G_4)(x) + Y_4(x), \quad (12)$$

где

$$G_4(x) = \frac{\text{sign}(x)}{8} \left[ \frac{3\sqrt{2}}{2} \left( \sin \frac{\sqrt{2}}{2}x \operatorname{ch} \frac{\sqrt{2}}{2}x - \cos \frac{\sqrt{2}}{2}x \operatorname{sh} \frac{\sqrt{2}}{2}x \right) - x \sin \frac{\sqrt{2}}{2}x \operatorname{sh} \frac{\sqrt{2}}{2}x \right], \quad (13)$$

и

$$Y_4(x) = d_1 e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x} \cos \frac{\sqrt{2}}{2}x + d_2 e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x} \sin \frac{\sqrt{2}}{2}x + d_3 e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}x} \cos \frac{\sqrt{2}}{2}x + d_4 e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}x} \sin \frac{\sqrt{2}}{2}x. \quad (14)$$

Символ  $*$  обозначает операцию свертки, которая для функций  $f$  и  $g$  определяется следующим образом:

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)dy. \quad (15)$$

Теперь мы получили норму функционала погрешности  $\ell$ . Поскольку пространство  $W_2^{(4,0)}$  является гильбертовым, по теореме Рисса об общем виде линейного непрерывного функционала имеем

$$(\ell, \psi_\ell) = \|\ell\| \cdot \|\psi_\ell\| = \|\ell\|^2. \quad (16)$$

Отсюда, используя четную функцию  $G_4(x)$  и выражения (12)–(14), а также учитывая (15) и (16), получаем

$$\|\ell\|^2 = \sum_{\beta=0}^N \sum_{\gamma=0}^N C_\beta(z) C_\gamma(z) G_4(x_\beta - x_\gamma) - 2 \sum_{\beta=0}^N C_\beta(z) G_4(z - x_\beta). \quad (17)$$

Таким образом, первая часть задачи о построении оптимальных интерполяционных формул в пространстве  $W_2^{(4,0)}$  решена. Далее мы рассмотрим вторую часть задачи.

**4. Система для оптимальных коэффициентов интерполяционных формул.** Теперь переходим к минимизации квадрата нормы функционала погрешности (17). Известно, что функционал погрешности  $\ell$  удовлетворяет условиям (10), (11). Квадрат нормы (17) функционала погрешности является функцией многих переменных коэффициентов  $C_\beta(z)$ ,  $\beta = \overline{0, N}$ , интерполяционной формулы (3). Для нахождения точки условного минимума квадрата нормы функционала погрешности (5) при условиях (10), (11) применяем метод неопределенных множителей Лагранжа.

Рассмотрим следующую функцию:

$$\begin{aligned} \Psi(C_0(z), C_1(z), \dots, C_N(z), d_1, d_2, d_3, d_4) = & \|\ell\|^2 - \\ & - 2d_1 \left( e^{\frac{\sqrt{2}}{2}z} \cos \frac{\sqrt{2}}{2}z - \sum_{\beta=0}^N C_\beta(z) e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x_\beta} \cos \frac{\sqrt{2}}{2}x_\beta \right) - \\ & - 2d_2 \left( e^{\frac{\sqrt{2}}{2}z} \sin \frac{\sqrt{2}}{2}z - \sum_{\beta=0}^N C_\beta(z) e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x_\beta} \sin \frac{\sqrt{2}}{2}x_\beta \right) - \\ & - 2d_3 \left( e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}z} \cos \frac{\sqrt{2}}{2}z - \sum_{\beta=0}^N C_\beta(z) e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}x_\beta} \cos \frac{\sqrt{2}}{2}x_\beta \right) - \\ & - 2d_4 \left( e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}z} \sin \frac{\sqrt{2}}{2}z - \sum_{\beta=0}^N C_\beta(z) e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}x_\beta} \sin \frac{\sqrt{2}}{2}x_\beta \right). \end{aligned}$$

Приравнявая к нулю частные производные от  $\Psi$  по коэффициентам  $C_\beta(z)$ ,  $\beta = \overline{0, N}$  и  $d_k(z)$ ,  $k = \overline{1, 4}$ , получаем систему линейных уравнений:

$$\begin{aligned} \sum_{\gamma=0}^N C_\gamma(z) G_4(x_\beta - x_\gamma) + d_3 e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}x_\beta} \cos \frac{\sqrt{2}}{2}x_\beta + d_4 e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}x_\beta} \sin \frac{\sqrt{2}}{2}x_\beta + \\ + d_1 e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x_\beta} \cos \frac{\sqrt{2}}{2}x_\beta + d_2 e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x_\beta} \sin \frac{\sqrt{2}}{2}x_\beta = G_4(z - x_\beta), \quad \beta = \overline{0, N}, \quad (18) \end{aligned}$$

$$\sum_{\gamma=0}^N C_\gamma(z) e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x_\gamma} \cos \frac{\sqrt{2}}{2}x_\gamma = e^{\frac{\sqrt{2}}{2}z} \cos \frac{\sqrt{2}}{2}z, \quad (19)$$

$$\sum_{\gamma=0}^N C_{\gamma}(z) e^{\frac{\sqrt{2}}{2} x_{\gamma}} \sin \frac{\sqrt{2}}{2} x_{\gamma} = e^{\frac{\sqrt{2}}{2} z} \sin \frac{\sqrt{2}}{2} z, \quad (20)$$

$$\sum_{\gamma=0}^N C_{\gamma}(z) e^{-\frac{\sqrt{2}}{2} x_{\gamma}} \cos \frac{\sqrt{2}}{2} x_{\gamma} = e^{-\frac{\sqrt{2}}{2} z} \cos \frac{\sqrt{2}}{2} z, \quad (21)$$

$$\sum_{\gamma=0}^N C_{\gamma}(z) e^{-\frac{\sqrt{2}}{2} x_{\gamma}} \sin \frac{\sqrt{2}}{2} x_{\gamma} = e^{-\frac{\sqrt{2}}{2} z} \sin \frac{\sqrt{2}}{2} z, \quad (22)$$

где  $G_4(x)$  определяется равенством (13).

Система (18)–(22) имеет единственное решение, которое дает минимум  $\|\ell\|^2$  при условиях (19)–(22). Доказательство единственности решения системы (18)–(22) аналогично доказательству единственности решения системы для оптимальных коэффициентов в пространстве  $L_2^{(m)}$ , полученных в работах Соболева [13, 28].

**5. Основные результаты.** Для решения системы (18)–(22) методом Соболева нам понадобится дискретный аналог  $D_4(h\beta)$  дифференциального оператора  $\frac{d^8}{dx^8} + 2\frac{d^4}{dx^4} + 1$ , удовлетворяющего равенству

$$D_4(h\beta) * G_4(h\beta) = \delta_d(h\beta), \quad (23)$$

где  $G_4(h\beta)$  — функция дискретного аргумента, соответствующая функции  $G_4(x)$ , определенной формулой (13), а  $\delta_d(h\beta)$  — дискретная дельта-функция:

$$\delta_d(h\beta) = \begin{cases} 1, & \beta = 0, \\ 0, & \beta \neq 0. \end{cases}$$

В работе [29] при  $m = 4$  построен дискретный аналог  $D_4(h\beta)$ , удовлетворяющий равенству (23), и доказаны некоторые его свойства.

Введем следующие обозначения:

$$B_1(z, h) = F_1 G_4(z) + G_4(z - h) + a_1^- e^{-\frac{\sqrt{2}}{2} h} \cos \frac{\sqrt{2}}{2} h - a_2^- e^{-\frac{\sqrt{2}}{2} h} \sin \frac{\sqrt{2}}{2} h + \\ + a_3^- e^{\frac{\sqrt{2}}{2} h} \cos \frac{\sqrt{2}}{2} h - a_4^- e^{\frac{\sqrt{2}}{2} h} \sin \frac{\sqrt{2}}{2} h - \frac{h}{8} \sin \frac{\sqrt{2}}{2} (z + h) \operatorname{sh} \frac{\sqrt{2}}{2} (z + h),$$

$$B_2(z, h) = F_1 G_4(z - h\beta) + G_4(z - h(\beta - 1)) + G_4(z - h(\beta + 1)),$$

$$B_3(z, h) = F_1 G_4(z - 1) + G_4(z - 1 + h) + a_1^+ e^{\frac{\sqrt{2}}{2} (1+h)} \cos \frac{\sqrt{2}}{2} (1 + h) + \\ + a_2^+ e^{\frac{\sqrt{2}}{2} (1+h)} \sin \frac{\sqrt{2}}{2} (1 + h) + a_3^+ e^{-\frac{\sqrt{2}}{2} (1+h)} \cos \frac{\sqrt{2}}{2} (1 + h) + \\ + a_4^+ e^{-\frac{\sqrt{2}}{2} (1+h)} \sin \frac{\sqrt{2}}{2} (1 + h),$$

$$B_4(z, h) = e^{\frac{\sqrt{2}}{2} (z+h)} \frac{\sin \frac{\sqrt{2}}{2} (z + h) - 2\lambda_k e^{\frac{\sqrt{2}}{2} h} \sin \frac{\sqrt{2}}{2} z + \lambda_k^2 e^{\sqrt{2} h} \sin \frac{\sqrt{2}}{2} (z - h)}{[\lambda_k^2 e^{\sqrt{2} h} - 2\lambda_k e^{\frac{\sqrt{2}}{2} h} \cos \frac{\sqrt{2}}{2} h + 1]^2} -$$

$$- e^{\frac{\sqrt{2}}{2}(h-z)} \frac{e^{\sqrt{2}h} \sin \frac{\sqrt{2}}{2}(z+h) - 2\lambda_k e^{\frac{\sqrt{2}}{2}h} \sin \frac{\sqrt{2}}{2}z + \lambda_k^2 \sin \frac{\sqrt{2}}{2}(z-h)}{[\lambda_k^2 - 2\lambda_k e^{\frac{\sqrt{2}}{2}h} \cos \frac{\sqrt{2}}{2}h + e^{\sqrt{2}h}]^2},$$

где  $a_i^-$  и  $a_i^+$  — неизвестные коэффициенты, а  $\lambda_k$  определены в работе [29] при  $m = 4$ .

Результат этого раздела следующий.

**ТЕОРЕМА.** *Оптимальные коэффициенты интерполяционной формулы (3) с равноотстоящими узлами в пространстве  $W_2^{(4,0)}(0,1)$  имеют следующий вид:*

$$C_0(z) = \frac{8}{K} \left[ B_1(z, h) + \sum_{k=1}^3 \frac{A_k}{\lambda_k} \sum_{\gamma=0}^N (\lambda_k^\gamma G_4(z-h\gamma) + M_k + \lambda_k^N N_k) \right],$$

$$C_\beta(z) = \frac{8}{K} \left[ B_2(z, h) + \sum_{k=1}^3 \frac{A_k}{\lambda_k} \sum_{\gamma=0}^N (\lambda_k^{|\beta-\gamma|} G_4(z-h\gamma) + \lambda_k^\beta M_k + \lambda_k^{N-\beta} N_k) \right],$$

$$C_N(z) = \frac{8}{K} \left[ B_3(z, h) + \sum_{k=1}^3 \frac{A_k}{\lambda_k} \sum_{\gamma=0}^N (\lambda_k^{N-\gamma} G_4(z-h\gamma) + \lambda_k^N M_k + N_k) \right],$$

где  $\beta = \overline{1, N-1}$ , а величины  $K$ ,  $A_k$  и  $\lambda_k$ , определены в работе [29] при  $m = 4$ ,  $h$  — малый параметр и

$$M_k = \frac{a_1^-(e^{\frac{\sqrt{2}}{2}h} \cos \frac{\sqrt{2}}{2}h - \lambda_k) - a_2^- e^{\frac{\sqrt{2}}{2}h} \sin \frac{\sqrt{2}}{2}h}{\lambda_k^2 - 2\lambda_k e^{\frac{\sqrt{2}}{2}h} \cos \frac{\sqrt{2}}{2}h + e^{\sqrt{2}h}} - \frac{h\lambda_k}{16} B_4(z, h) + \\ + \frac{a_3^-(e^{\frac{\sqrt{2}}{2}h} \cos \frac{\sqrt{2}}{2}h - e^{\sqrt{2}h} \lambda_k) - a_4^- e^{\frac{\sqrt{2}}{2}h} \sin \frac{\sqrt{2}}{2}h}{e^{\sqrt{2}h} \lambda_k^2 - 2\lambda_k e^{\frac{\sqrt{2}}{2}h} \cos \frac{\sqrt{2}}{2}h + 1}, \quad k = 1, 2, 3,$$

$$N_k = \frac{a_1^+(e^{\frac{\sqrt{2}}{2}(1+h)} \cos \frac{\sqrt{2}}{2}(1+h) - \lambda_k e^{\frac{\sqrt{2}}{2}(1+2h)} \cos \frac{\sqrt{2}}{2})}{e^{\sqrt{2}h} \lambda_k^2 - 2\lambda_k e^{\frac{\sqrt{2}}{2}h} \cos \frac{\sqrt{2}}{2}h + 1} + \\ + \frac{a_2^+(e^{\frac{\sqrt{2}}{2}(1+h)} \sin \frac{\sqrt{2}}{2}(1+h) - \lambda_k e^{\frac{\sqrt{2}}{2}(1+2h)} \sin \frac{\sqrt{2}}{2})}{e^{\sqrt{2}h} \lambda_k^2 - 2\lambda_k e^{\frac{\sqrt{2}}{2}h} \cos \frac{\sqrt{2}}{2}h + 1} + \\ + \frac{a_3^+(e^{\frac{\sqrt{2}}{2}(h-1)} \cos \frac{\sqrt{2}}{2}(1+h) - \lambda_k e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}} \cos \frac{\sqrt{2}}{2})}{\lambda_k^2 - 2\lambda_k e^{\frac{\sqrt{2}}{2}h} \cos \frac{\sqrt{2}}{2}h + e^{\sqrt{2}h}} + \\ + \frac{a_4^+(e^{\frac{\sqrt{2}}{2}(h-1)} \sin \frac{\sqrt{2}}{2}(1+h) - \lambda_k e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}} \sin \frac{\sqrt{2}}{2})}{\lambda_k^2 - 2\lambda_k e^{\frac{\sqrt{2}}{2}h} \cos \frac{\sqrt{2}}{2}h + e^{\sqrt{2}h}} - \frac{h\lambda_k}{16} B_4(z, h) + \\ + \frac{1}{16} \left[ \frac{e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}(z-1-h)} \sin \frac{\sqrt{2}}{2}(z-1-h) - \lambda_k e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}(z-1-2h)} \sin \frac{\sqrt{2}}{2}(z-1)}{e^{\sqrt{2}h} \lambda_k^2 - 2\lambda_k e^{\frac{\sqrt{2}}{2}h} \cos \frac{\sqrt{2}}{2}h + 1} - \right.$$

$$- \frac{e^{\frac{\sqrt{2}}{2}(z-1+h)} \sin \frac{\sqrt{2}}{2}(z-1-h) - \lambda_k e^{\frac{\sqrt{2}}{2}(z-1)} \sin \frac{\sqrt{2}}{2}(z-1)}{\lambda_k^2 - 2\lambda_k e^{\frac{\sqrt{2}}{2}h} \cos \frac{\sqrt{2}}{2}h + e^{\sqrt{2}h}} \Big], \quad k = 1, 2, 3.$$

*Доказательство.* Для доказательства этой теоремы необходимо провести следующие вычисления. Введем функции

$$\vartheta(h\beta) = G_4(h\beta) * C_\beta(z)$$

и

$$u(h\beta) = \vartheta(h\beta) + Y_4(h\beta). \quad (24)$$

Тогда с учетом (23) для оптимальных коэффициентов  $C_\beta(z)$  имеем

$$C_\beta(z) = D_4(h\beta) * u(h\beta). \quad (25)$$

Найдя функцию  $u(h\beta)$ , мы можем определить оптимальные коэффициенты  $C_\beta(z)$  из равенства (25).

Для вычисления свертки (25) необходимо найти представление функции  $u(h\beta)$  при всех целых значениях  $\beta$ . Из равенства (24) получаем, что  $u(h\beta) = G_4(z - h\beta)$  для  $h\beta \in [0, 1]$ . Теперь найдем представление функции  $u(h\beta)$  при  $\beta < 0$  и  $\beta > N$ . Поскольку  $C_\beta(z) = 0$  для  $h\beta \notin [0, 1]$ ,

$$C_\beta(z) = D_4(h\beta) * u(h\beta) = 0, \quad h\beta \notin [0, 1]. \quad (26)$$

Теперь вычислим свертку  $\vartheta(h\beta) = G_4(h\beta) * C_\beta(z)$  для  $h\beta \notin [0, 1]$ .

Предположим, что  $\beta < 0$  и  $\beta > N$ . Тогда, учитывая равенства (10), (11) и (13), получаем

$$u(h\beta) = \begin{cases} a_1^- e^{\frac{\sqrt{2}}{2}h\beta} \cos \frac{\sqrt{2}}{2}h\beta + a_2^- e^{\frac{\sqrt{2}}{2}h\beta} \sin \frac{\sqrt{2}}{2}h\beta + \\ \quad + a_3^- e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}h\beta} \cos \frac{\sqrt{2}}{2}h\beta + a_4^- e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}h\beta} \sin \frac{\sqrt{2}}{2}h\beta + \\ \quad + \frac{h\beta}{8} \sin \frac{\sqrt{2}}{2}(z - h\beta) \operatorname{sh} \frac{\sqrt{2}}{2}(z - h\beta), & \beta < 0, \\ G_4(z - h\beta), & 0 \leq \beta \leq N, \\ a_1^+ e^{\frac{\sqrt{2}}{2}h\beta} \cos \frac{\sqrt{2}}{2}h\beta + a_2^+ e^{\frac{\sqrt{2}}{2}h\beta} \sin \frac{\sqrt{2}}{2}h\beta + \\ \quad + a_3^+ e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}h\beta} \cos \frac{\sqrt{2}}{2}h\beta + a_4^+ e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}h\beta} \sin \frac{\sqrt{2}}{2}h\beta - \\ \quad - \frac{h\beta}{8} \sin \frac{\sqrt{2}}{2}(z - h\beta) \operatorname{sh} \frac{\sqrt{2}}{2}(z - h\beta), & \beta > N, \end{cases} \quad (27)$$

где  $a_1^-, a_2^-, a_3^-, a_4^-, a_1^+, a_2^+, a_3^+, a_4^+$  — неизвестные коэффициенты.

Из (27) при  $\beta = 0$  и  $\beta = N$  получаем

$$a_1^- = G_4(z) - a_3^-, \quad (28)$$

$$a_1^+ = \frac{G_4(z-1) + \frac{h\beta}{8} \sin \frac{\sqrt{2}}{2}(z-1) \operatorname{sh} \frac{\sqrt{2}}{2}(z-1)}{e^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \cos \frac{\sqrt{2}}{2}} - \\ - a_2^+ \tan \frac{\sqrt{2}}{2} - a_3^+ e^{-\sqrt{2}} - a_4^+ e^{-\sqrt{2}} \tan \frac{\sqrt{2}}{2}. \quad (29)$$

Здесь у нас есть шесть неизвестных:  $a_2^-, a_3^-, a_4^-, a_2^+, a_3^+$  и  $a_4^+$ . Из уравнения (26) для  $\beta = -1, -2, -3$  и  $\beta = N + 1, N + 2, N + 3$  с учетом (27) получаем систему из шести линейных уравнений для  $a_2^-, a_3^-, a_4^-, a_2^+, a_3^+$  и  $a_4^+$ . Поскольку интерполяционная задача имеет единственное решение, основная матрица этой системы невырождена.

Решая систему (26) при  $\beta = -1, -2, -3$  и  $\beta = N + 1, N + 2, N + 3$ , находим  $a_2^-, a_3^-, a_4^-, a_2^+, a_3^+$  и  $a_4^+$ . Затем, используя (28) и (29), находим  $a_1^-$  и  $a_1^+$ . Из (25) для  $\beta = 0, 1, \dots, N$  выводим

$$\begin{aligned}
 C_\beta(z) = & \sum_{\gamma=1}^{\infty} D_4(h\beta + h\gamma) \left[ a_1^- e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}h\gamma} \cos \frac{\sqrt{2}}{2}h\gamma - a_2^- e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}h\gamma} \sin \frac{\sqrt{2}}{2}h\gamma + \right. \\
 & + a_3^- e^{\frac{\sqrt{2}}{2}h\gamma} \cos \frac{\sqrt{2}}{2}h\gamma - a_4^- e^{\frac{\sqrt{2}}{2}h\gamma} \sin \frac{\sqrt{2}}{2}h\gamma - \\
 & \left. - \frac{h\gamma}{8} \sin \frac{\sqrt{2}}{2}(z + h\gamma) \operatorname{sh} \frac{\sqrt{2}}{2}(z + h\gamma) \right] + \\
 & + \sum_{\gamma=0}^N D_4(h\beta - h\gamma) G_4(z - h\gamma) + \\
 & + \sum_{\gamma=1}^{\infty} D_4(h(N + \gamma - \beta)) \left[ a_1^+ e^{\frac{\sqrt{2}}{2}(1+h\gamma)} \cos \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + h\gamma) + \right. \\
 & + a_2^+ e^{\frac{\sqrt{2}}{2}(1+h\gamma)} \sin \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + h\gamma) + a_3^+ e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}(1+h\gamma)} \cos \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + h\gamma) + \\
 & + a_4^+ e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}(1+h\gamma)} \sin \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + h\gamma) - \\
 & \left. - \frac{1 + h\gamma}{8} \sin \frac{\sqrt{2}}{2}(z - 1 - h\gamma) \operatorname{sh} \frac{\sqrt{2}}{2}(z - 1 - h\gamma) \right], \quad \beta = 0, 1, \dots, N.
 \end{aligned}$$

Отсюда, используя дискретный оператор  $D_4(h\beta)$ , приведенный в работе [29] при  $m = 4$ , и учитывая  $M_k$  и  $N_k$ ,  $k = 1, 2, 3$ , приходим к выражениям для коэффициентов  $C_\beta(z)$ ,  $\beta = 0, 1, \dots, N$ , которые приведены в теореме. Теорема доказана.  $\square$

**6. Численные результаты.** В этом разделе мы приведем численные примеры и результаты интерполяции следующих функций:

$$\varphi_1(z) = z^3 + z^2 + z, \quad \varphi_2(z) = \frac{1.25 + \cos 5.4z}{6(1 + (3z - 1)^2)},$$

взятых из работы [30], и сравним эти результаты с результатами работы [30] при  $N = 5$ .

Для заданных функций графики абсолютных погрешностей интерполяционной формулы (3) приведены на рис. 1. Аналогичные абсолютные погрешности аппроксимации из работы [30] представлены на рис. 2.

В случае  $\varphi_1(z)$  погрешность оптимальной интерполяционной формулы (3) меньше, чем погрешность интерполяции из работы [30]. Однако для функции  $\varphi_2(z)$  их абсолютные погрешности почти одинаковы.

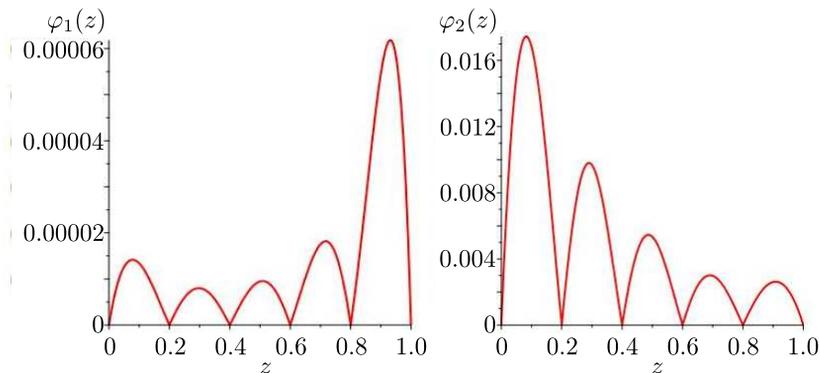


Рис. 1. Графики абсолютных погрешностей  $\varphi_1(z)$  и  $\varphi_2(z)$  при  $N = 5$   
 [Figure 1. Graphs of absolute errors for  $\varphi_1(z)$  and  $\varphi_2(z)$  at  $N = 5$ ]

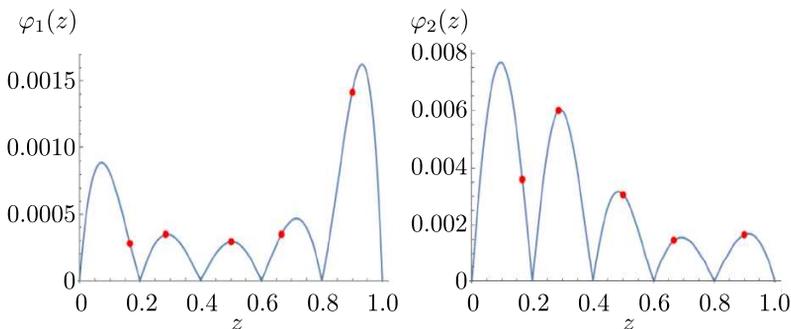


Рис. 2. Графики абсолютных погрешностей  $\varphi_1(z)$  и  $\varphi_2(z)$  при  $N = 5$  [30]  
 [Figure 2. Graphs of absolute errors for  $\varphi_1(z)$  and  $\varphi_2(z)$  at  $N = 5$  [30]]

**7. Заключение.** Статья посвящена построению оптимальной интерполяционной формулы, точной для экспоненциально-тригонометрических функций. Для построения оптимальной интерполяционной формулы использован метод Соболева, основанный на дискретном аналоге  $D_4(h\beta)$  дифференциального оператора  $\frac{d^8}{dx^8} + 2\frac{d^4}{dx^4} + 1$ . Применяя дискретный аналог  $D_4(h\beta)$ , мы получили явные выражения для оптимальных коэффициентов (см. теорему), которые имеют важное значение в приложениях. В итоге численные результаты демонстрируют высокую надежность построенной оптимальной интерполяционной формулы.

**Конкурирующие интересы.** Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

**Вклад авторов и ответственность.** Все авторы внесли равный вклад в разработку концепции статьи и написание рукописи. Авторы несут полную ответственность за подготовку и предоставление окончательной версии рукописи для публикации. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

**Финансирование.** Исследование выполнено без привлечения внешнего финансирования.

**Благодарности.** Авторы выражают искреннюю благодарность рецензентам за внимательное прочтение статьи, а также за ценные комментарии и предложения, которые способствовали улучшению работы.

## Библиографический список

1. Ahlberg J. H., Nilson E. N., Walsh J. L. *The Theory of Splines and Their Applications* / Mathematics in Science and Engineering. vol. 38. New York: Academic Press, 1967. xi+284 pp. DOI: [https://doi.org/10.1016/s0076-5392\(08\)x6115-6](https://doi.org/10.1016/s0076-5392(08)x6115-6).
2. Стечкин С. Б., Субботин Ю. Н. *Сплайны в вычислительной математике*. М.: Наука, 1976. 248 с.
3. Завьялов Ю. С., Квасов Б. И., Мирошниченко В. Л. *Методы сплайн-функций*. М.: Наука, 1980. 352 с.
4. Nürnberger G. *Approximation by Spline Functions*. Berlin: Springer-Verlag, 1989. xi+243 pp.
5. Игнашев М. И., Певний А. Б. *Натуральные сплайны многих переменных*. Ленинград: Наука, 1991. 127 с.
6. Самарский А. А. *Введение в численные методы*. М.: Наука, 1987. 288 с.
7. Burden A. M., Faires J. D., Burden R. L. *Numerical Analysis*. Boston, MA: Cengage Learning, 2016. xvi+896 pp.
8. Duchon J. Splines minimizing rotation-invariant semi-norms in Sobolev spaces / *Constructive Theory of Functions of Several Variables* / Lecture Notes in Mathematics, 571, 1977. pp. 85-100. DOI: <https://doi.org/10.1007/BFb0086566>.
9. Bojanov B. D., Hakopian H. A., Sahakian A. A. *Spline Functions and Multivariate Interpolations* / Mathematics and its Applications. Dordrecht: Kluwer Academic Publ., 1993. ix+276 pp.
10. Bezhaev A. Yu., Vasilenko V. A. *Variational Theory of Splines*. Dordrecht: Kluwer Academic Publ., 2001. xvii+280 pp.
11. Cheney E. W., Kincaid D. *Numerical Mathematics and Computing*. USA: Brooks Cole, 2013. 700 pp.
12. Schoenberg I. J. *Cardinal Spline Interpolation* / CBMS-NSF Reg. Conf. Ser. Appl. Math. vol. 12. Philadelphia, Pa.: SIAM, 1973. vi+125 pp.
13. Соболев С. Л., Васкевич В. Л. *Кубатурные формулы*. Новосибирск: Ин-т мат-ки им. С.Л. Соболева СО РАН, 1996. 483 с.
14. Laurent P.-J. *Approximation et Optimisation* / Enseignement des Sciences. vol. 13. Paris: Hermann, 1972. xii+531 pp. (In French)
15. Arcangéli R., López de Silanes M. C., Torrens J. J. *Multidimensional Minimizing Splines. Theory and Applications*. Boston, MA: Kluwer Academic Publ., 2004. xvi+261 pp.
16. Schumaker L. L. *Spline Functions: Basic Theory* / Cambridge Mathematical Library. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2007. xv+582 pp.
17. Holladay J. C. A smoothest curve approximation // *Math. Tables Aids Comput.*, 1957. vol. 11. pp. 233-243. DOI: <https://doi.org/10.2307/2001941>.
18. Schoenberg I. J. On equidistant cubic spline interpolation // *Bull. Am. Math. Soc.*, 1971. vol. 77. pp. 1039-1043. DOI: <https://doi.org/10.1090/S0002-9904-1971-12853-7>.
19. de Boor C. Best approximation properties of spline functions of odd degree // *J. Math. Mech.*, 1963. vol. 12. pp. 747-749.
20. Cabada A., Hayotov A. R., Shadimetov Kh. M. Construction of  $D^m$ -splines in  $L_2^{(m)}(0, 1)$  space by Sobolev method // *Appl. Math. Comput.*, 2014. vol. 244. pp. 524-551. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.amc.2014.07.033>.
21. Hayotov A. R., Milovanović G. V., Shadimetov Kh. M. Interpolation splines minimizing a semi-norm // *Calcolo*, 2014. vol. 51, no. 2. pp. 245-260. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10092-013-0080-x>.
22. Shadimetov Kh. M., Hayotov A. R., Nuraliev F. A. Optimal interpolation formulas with derivative in the space  $L_2^{(m)}(0, 1)$  // *Filomat*, 2019. vol. 33, no. 17. pp. 5661-5675. DOI: <https://doi.org/10.2298/FIL1917661S>.
23. Shadimetov Kh. M., Boltaev A. K. An exponential-trigonometric spline minimizing a semi-norm in a Hilbert space // *Adv. Differ. Equ.*, 2020. vol. 2020, 352. DOI: <https://doi.org/10.1186/s13662-020-02805-8>.

24. Akhmedov D., Shadimetov Kh. Optimal quadrature formulas with derivative for Hadamard type singular integrals // *AIP Conf. Proc.*, 2021. vol. 2365, 020020. DOI: <https://doi.org/10.1063/5.0057124>.
25. Akhmedov D. Approximate solution of a class of singular integral equations of the first kind // *AIP Conf. Proc.*, 2024. vol. 3004, 060033. DOI: <https://doi.org/10.1063/5.0199828>.
26. Rasulov R., Mahkamova D. The norm of the error functional for the Euler–Maclaurin type quadrature formulas in the space  $W_2^{(2k, 2k-1)}(0, 1)$  // *AIP Conf. Proc.*, 2024. vol. 3004, 060042. DOI: <https://doi.org/10.1063/5.0200255>.
27. Shadimetov Kh., Boltaev A. An exponential-trigonometric optimal interpolation formula // *Lobachevskii J. Math.*, 2023. vol. 44, no. 10. pp. 4379–4392. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1995080223100359>.
28. Соболев С. Л. О задаче интерполирования функций  $n$  переменных // *Докл. АН СССР*, 1961. Т. 137, № 4. С. 778–781.
29. Shadimetov Kh., Boltaev A., Parovik R. Optimization of the approximate integration formula using the discrete analogue of a high-order differential operator // *Mathematics*, 2023. vol. 11, no. 14, 3114. DOI: <https://doi.org/10.3390/math11143114>.
30. Ghalichi S. S. S., Amirfakhrian M., Allahviranloo T. An algorithm for choosing a good shape parameter for radial basis functions method with a case study in image processing // *Results Appl. Math.*, 2022. vol. 16, 100337. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.rinam.2022.100337>.

MSC: 65D05, 65D07, 65D15

## Optimization of the error in exponential-trigonometric interpolation formula

*Kh. M. Shadimetov*<sup>1,2</sup>, *A. K. Boltaev*<sup>2,3</sup><sup>1</sup> Tashkent State Transport University,  
1, Temiryulchilar st., Tashkent, 100167, Uzbekistan.<sup>2</sup> V.I. Romanovskiy Institute of Mathematics  
of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan,  
9, University st., Tashkent, 100174, Uzbekistan.<sup>3</sup> International Nordic University,  
8/2, Bunyodkor st., Tashkent, 100043, Uzbekistan.

### Abstract

In engineering geodesy, point clouds obtained through area measurement methods, such as terrestrial laser scanning or photogrammetry, need to be approximated by a curve or surface that can be described by using a continuous mathematical function, often employing splines and optimal interpolation formulas.

This work is devoted to the construction of an optimal interpolation formula that is exact for exponential-trigonometric functions in a Hilbert space. The optimal interpolation formula is obtained by minimizing the norm of the error functional with respect to the coefficients. The article proves the existence and uniqueness of the optimal interpolation formula and provides explicit analytical expressions for the optimal coefficients of the interpolation formula. Using the constructed optimal interpolation formula, specific functions were interpolated, and a comparison was made with known results from other authors.

**Keywords:** interpolation formula, error of the formula, optimal coefficients, Sobolev method.

Received: 15<sup>th</sup> May, 2024 / Revised: 16<sup>th</sup> November, 2024 /

Accepted: 19<sup>th</sup> November, 2024 / First online: 26<sup>th</sup> December, 2024

### Differential Equations and Mathematical Physics

#### Research Article

© The Author(s), 2024

© Samara State Technical University, 2024 (Compilation, Design, and Layout)

© The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

#### Please cite this article in press as:

Shadimetov Kh. M., Boltaev A. K. Optimization of the error in exponential-trigonometric interpolation formula, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2024, vol. 28, no. 4, pp. 665–681. EDN: CJETPO. DOI: 10.14498/vsgtu2094 (In Russian).

#### Authors' Details:

*Kholmat M. Shadimetov*  <https://orcid.org/0000-0002-4183-6184>

Dr. Phys. & Math. Sci., Professor; Head of Department; Dept. of Computer Science and Graphics<sup>1</sup>; Leading Research Scientist; Lab. of Computational Mathematics<sup>2</sup>;  
e-mail: [kholmatshadimetov@mail.ru](mailto:kholmatshadimetov@mail.ru)

*Aziz K. Boltaev*  <https://orcid.org/0000-0002-8329-4440>

Cand. Phys. & Math. Sci., Associate Professor; Senior Research Scientist; Lab. of Computational Mathematics<sup>2</sup>; Associate Professor; Dept. of Economics and Business Management<sup>3</sup>;  
e-mail: [aziz\\_boltaev@mail.ru](mailto:aziz_boltaev@mail.ru)

**Competing interests.** The authors declare that they have no competing interests.

**Authors' contributions and responsibility.** All authors contributed equally to the conceptualization of the article and the writing of the manuscript. The authors take full responsibility for the preparation and submission of the final version of the manuscript for publication. The final version of the manuscript was approved by all authors.

**Funding.** The research was conducted without external funding.

**Acknowledgments.** The authors sincerely thank the reviewers for their careful reading of the article, as well as for their valuable comments and suggestions, which helped improve the work.

## References

- Ahlberg J. H., Nilson E. N., Walsh J. L. *The Theory of Splines and Their Applications*, Mathematics in Science and Engineering, vol. 38. New York, Academic Press, 1967, xi+284 pp. DOI: [https://doi.org/10.1016/s0076-5392\(08\)x6115-6](https://doi.org/10.1016/s0076-5392(08)x6115-6).
- Stechkin S. B., Subbotin Yu. N. *Splainy v vychislitel'noi matematike* [Splines in Numerical Mathematics]. Moscow, Nauka, 1976, 248 pp. (In Russian)
- Zav'yalov Yu. S., Kvasov B. I., Miroshnichenko V. L. *Metody splain-funktsii* [Methods of Spline Functions]. Moscow, Nauka, 1980, 352 pp. (In Russian)
- Nürnberg G. *Approximation by Spline Functions*. Berlin, Springer-Verlag, 1989, xi+243 pp.
- Ignatev M. I., Pevniy A. B. *Natural'nye splainy mnogikh peremennykh* [Natural Splines of Many Variables]. Leningrad, Nauka, 1991, 127 pp. (In Russian)
- Samarsky A. A. *Vvedenie v chislennye metody* [An Introduction to Numerical Methods]. Moscow, Nauka, 1987, 288 pp. (In Russian)
- Burden A. M., Faires J. D., Burden R. L. *Numerical Analysis*. Boston, MA, Cengage Learning, 2016, xvi+896 pp.
- Duchon J. Splines minimizing rotation-invariant semi-norms in Sobolev spaces, In: *Constructive Theory of Functions of Several Variables*, Lecture Notes in Mathematics, 571, 1977, pp. 85-100. DOI: <https://doi.org/10.1007/BFb0086566>.
- Bojanov B. D., Hakopian H. A., Sahakian A. A. *Spline Functions and Multivariate Interpolations*, Mathematics and its Applications. Dordrecht, Kluwer Academic Publ., 1993, ix+276 pp.
- Bezhaev A. Yu., Vasilenko V. A. *Variational Theory of Splines*. Dordrecht, Kluwer Academic Publ., 2001, xvii+280 pp.
- Cheney E. W., Kincaid D. *Numerical Mathematics and Computing*. USA, Brooks Cole, 2013, 700 pp.
- Schoenberg I. J. *Cardinal Spline Interpolation*, CBMS-NSF Reg. Conf. Ser. Appl. Math. vol. 12. Philadelphia, Pa., SIAM, 1973, vi+125 pp.
- Sobolev S. L., Vaskevich V. L. *The Theory of Cubature Formulas*, Mathematics and Its Applications, vol. 415. Dordrecht, Kluwer Academic Publ., 1997, xxi+416 pp.
- Laurent P.-J. *Approximation et Optimisation*, Enseignement des Sciences, vol. 13. Paris, Hermann, 1972, xii+531 pp. (In French)
- Arcangéli R., López de Silanes M. C., Torrens J. J. *Multidimensional Minimizing Splines. Theory and Applications*. Boston, MA, Kluwer Academic Publ., 2004, xvi+261 pp.
- Schumaker L. L. *Spline Functions: Basic Theory*, Cambridge Mathematical Library. Cambridge, Cambridge Univ. Press, 2007, xv+582 pp.
- Holladay J. C. A smoothest curve approximation, *Math. Tables Aids Comput.*, 1957, vol. 11, pp. 233-243. DOI: <https://doi.org/10.2307/2001941>.
- Schoenberg I. J. On equidistant cubic spline interpolation, *Bull. Am. Math. Soc.*, 1971, vol. 77, pp. 1039-1043. DOI: <https://doi.org/10.1090/S0002-9904-1971-12853-7>.

19. de Boor C. Best approximation properties of spline functions of odd degree, *J. Math. Mech.*, 1963, vol. 12, pp. 747–749.
20. Cabada A., Hayotov A. R., Shadimetov Kh. M. Construction of  $D^m$ -splines in  $L_2^{(m)}(0, 1)$  space by Sobolev method, *Appl. Math. Comput.*, 2014, vol. 244, pp. 524–551. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.amc.2014.07.033>.
21. Hayotov A. R., Milovanović G. V., Shadimetov Kh. M. Interpolation splines minimizing a semi-norm, *Calcolo*, 2014, vol. 51, no. 2, pp. 245–260. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10092-013-0080-x>.
22. Shadimetov Kh. M., Hayotov A. R., Nuraliev F. A. Optimal interpolation formulas with derivative in the space  $L_2^{(m)}(0, 1)$ , *Filomat*, 2019, vol. 33, no. 17, pp. 5661–5675. DOI: <https://doi.org/10.2298/FIL1917661S>.
23. Shadimetov Kh. M., Boltaev A. K. An exponential-trigonometric spline minimizing a semi-norm in a Hilbert space, *Adv. Differ. Equ.*, 2020, vol. 2020, 352. DOI: <https://doi.org/10.1186/s13662-020-02805-8>.
24. Akhmedov D., Shadimetov Kh. Optimal quadrature formulas with derivative for Hadamard type singular integrals, *AIP Conf. Proc.*, 2021, vol. 2365, 020020. DOI: <https://doi.org/10.1063/5.0057124>.
25. Akhmedov D. Approximate solution of a class of singular integral equations of the first kind, *AIP Conf. Proc.*, 2024, vol. 3004, 060033. DOI: <https://doi.org/10.1063/5.0199828>.
26. Rasulov R., Mahkamova D. The norm of the error functional for the Euler–Maclaurin type quadrature formulas in the space  $W_2^{(2k, 2k-1)}(0, 1)$ , *AIP Conf. Proc.*, 2024, vol. 3004, 060042. DOI: <https://doi.org/10.1063/5.0200255>.
27. Shadimetov Kh., Boltaev A. An exponential-trigonometric optimal interpolation formula, *Lobachevskii J. Math.*, 2023, vol. 44, no. 10, pp. 4379–4392. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1995080223100359>.
28. Sobolev S. L. On interpolation of functions of  $n$  variables, *Sov. Math., Dokl.*, 1961, vol. 2, no. 4, pp. 343–346.
29. Shadimetov Kh., Boltaev A., Parovik R. Optimization of the approximate integration formula using the discrete analogue of a high-order differential operator, *Mathematics*, 2023, vol. 11, no. 14, 3114. DOI: <https://doi.org/10.3390/math11143114>.
30. Ghalichi S. S. S., Amirfakhrian M., Allahviranloo T. An algorithm for choosing a good shape parameter for radial basis functions method with a case study in image processing, *Results Appl. Math.*, 2022, vol. 16, 100337. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.rinam.2022.100337>.



УДК 539.3 + 624.042

## Модель изгиба ортотропной консольно закрепленной балки Бернулли–Эйлера под действием нестационарных термомехано-dиффузионных нагрузок

А. В. Земсков<sup>1,2</sup>, В. Х. Ле<sup>1</sup>, Д. О. Сердюк<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Россия, 125993, Москва, Волоколамское ш., 4.

<sup>2</sup> Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Научно-исследовательский институт механики, Россия, 119192, Москва, Мичуринский проспект, 1.

### Аннотация

Исследуется взаимодействие механического, температурного и диффузионного полей при нестационарном изгибе консольно закрепленной балки. Математическая постановка задачи основана на системе уравнений нестационарных изгибных колебаний балки Бернулли–Эйлера с учетом тепломассопереноса. Данная система получена из общей модели термомехано-dиффузии для сплошных сред с использованием обобщенного принципа виртуальных перемещений. В рамках исследования предполагается, что скорость распространения тепловых и диффузионных возмущений является конечной. На примере консольно закрепленной трехкомпонентной балки из сплава цинка, меди и алюминия, находящейся под действием нестационарной нагрузки, приложенной к свободному концу, проведен анализ взаимодействия механического, температурного и диффузионного полей.

**Ключевые слова:** термомехано-dиффузия, балка Бернулли–Эйлера, консоль, функция Грина, метод эквивалентных граничных условий, нестационарные задачи.

### Механика деформируемого твердого тела

#### Научная статья

© Коллектив авторов, 2024

© СамГТУ, 2024 (составление, дизайн, макет)

Этот контент публикуется на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

#### Образец для цитирования

Земсков А. В., Ле В. Х., Сердюк Д. О. Модель изгиба ортотропной консольно закрепленной балки Бернулли–Эйлера под действием нестационарных термомехано-dиффузионных нагрузок // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2024. Т. 28, № 4. С. 682–700. EDN: CVHDVM. DOI: 10.14498/vsgtu2112.

#### Сведения об авторах

Андрей Владимирович Земсков ✉ <https://orcid.org/0000-0002-2653-6378>

доктор физико-математических наук, доцент; профессор; каф. прикладные программные средства и математические методы<sup>1</sup>; ведущий научный сотрудник; лаб. динамических испытаний<sup>2</sup>; e-mail: [azemskov1975@mail.ru](mailto:azemskov1975@mail.ru)

Ван Хао Ле <https://orcid.org/0000-0002-0456-6429>

аспирант; каф. сопротивления материалов, динамики и прочности машин<sup>1</sup>;  
e-mail: [vanhaovt1@gmail.com](mailto:vanhaovt1@gmail.com)

Дмитрий Олегович Сердюк <https://orcid.org/0000-0003-0082-1856>

кандидат технических наук, доцент; доцент; каф. сопротивления материалов, динамики и прочности машин<sup>1</sup>; e-mail: [d.serduk55@gmail.com](mailto:d.serduk55@gmail.com)

Получение: 23 августа 2024 г. / Исправление: 15 ноября 2024 г. /  
Принятие: 29 ноября 2024 г. / Публикация онлайн: 26 декабря 2024 г.

---

**Введение.** В последнее время все больший научный и практический интерес вызывают связанные нестационарные модели механики деформируемого твердого тела, в частности модели термомеханодиффузии. Это связано с тем, что диффузия, особенно при повышенных температурах, влияя на напряженно-деформированное состояние тела, может оказывать нежелательное воздействие на конструкции или их отдельные элементы.

Экспериментальные исследования середины XX века и теоретические основы, заложенные в работах конца XX века, позволили перейти к построению замкнутых математических моделей и формулировке начально-краевых задач термомеханодиффузии. За последние годы опубликовано значительное количество работ, посвященных исследованию взаимодействия механических, температурных и диффузионных полей в сплошных средах, а также в балках, пластинах и оболочках, которые составляют основу большинства реальных конструкций [1–17].

Среди этих публикаций следует выделить работы, посвященные изучению влияния теплопереноса на напряженно-деформированное состояние пологой трансверсально-изотропной оболочки [1–4]. В частности, в статье [4] предложен вариационный подход к моделированию термодиффузионных процессов, возникающих при контакте гладких слоистых оболочек. В работах [5, 6] рассчитано осесимметричное напряженное состояние нагретой трансверсально-изотропной сферической оболочки с круговым отверстием при диффузионном насыщении в квазистатическом приближении. В публикациях [7–16] проведен анализ термомеханодиффузионных явлений в балках Бернулли–Эйлера и пластинах Кирхгофа. В работе [17] экспериментально исследовано влияние деформаций на массоперенос в пластине из поликристаллического никеля, покрытой медью, к краям которой приложена растягивающая нагрузка.

Анализ публикаций показывает, что, с одной стороны, проблема взаимодействия физических полей в сплошных средах и элементах конструкций остается актуальной. С другой стороны, основное внимание уделяется преимущественно квазистатическим термомеханодиффузионным процессам. Нестационарным моделям посвящены лишь работы [10, 14], где рассматриваются пластины Кирхгофа [10] и балки Бернулли–Эйлера [14].

В данной работе предложена модель нестационарных термомеханодиффузионных колебаний консольно закрепленной балки, основанная на гипотезах Бернулли–Эйлера и учитывающая конечную скорость распространения тепловых и диффузионных потоков, что отличает ее от модели, рассмотренной в [14]. Постановка задачи и общая схема решения были изложены в публикации [18], где отмечено, что граничные условия, соответствующие консольному закреплению, не позволяют получить решение в виде рядов по собственным функциям термоупругодиффузионного оператора.

В связи с этим предложен метод решения, основанный на использовании эквивалентных граничных условий. Суть метода заключается в рассмотрении вспомогательной задачи, отличающейся от исходной только краевыми

условиями, которые допускают построение аналитического решения в виде рядов Фурье методом разделения переменных. Соотношения, связывающие правые части граничных условий обеих задач, записываются в виде системы интегральных уравнений Вольтерры первого рода, которая решается численно с использованием квадратурных формул средних прямоугольников. В результате решение исходной задачи получается путем численного вычисления сверток функций Грина вспомогательной задачи с функциями, найденными в результате решения указанной системы интегральных уравнений.

**1. Постановка задачи.** В работе исследуются физико-механические процессы, возникающие при термоупругодиффузионном изгибе консольно закрепленной ортотропной балки Бернулли—Эйлера под действием нестационарной поперечной нагрузки, приложенной к свободному концу. Изгибные деформации вызывают нагрев и порождают диффузионные потоки, направленные из зон сжатия в зоны растяжения (эффект Горского) [19, 20]. Возникающий при этом тепломассоперенос влияет на механическое поле и, как следствие, на напряженно-деформированное состояние балки.

Математическая постановка задачи представляет собой замкнутую систему уравнений поперечных колебаний балки с учетом термодиффузии. Эта система получена с использованием обобщенного принципа виртуальных перемещений из общей модели термоупругой диффузии для сплошных сред с конечной скоростью распространения тепловых и диффузионных потоков [21–23]. Схема приложенных усилий представлена на рис. 1. На закрепленном конце поддерживаются постоянные температура и концентрации диффузатов, а свободный конец является тепло- и массоизолированным.

Математическая модель поперечных колебаний балки описывается уравнениями [18, 24] (штрих обозначает производную по продольной координате  $x_1$ , а точка — производную по времени):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v''}{\partial \tau^2} - a \frac{\partial^2 v}{\partial \tau^2} &= v^{IV} + b_1 v'' + \sum_{j=1}^N \alpha_1^{(j)} H_j'', \quad a = \frac{F}{J_3}, \\ \sum_{l=0}^M \frac{(\tau_0)^l}{l!} \frac{\partial^{l+1}}{\partial \tau^{l+1}} \left( \vartheta - B_1 v'' + \sum_{q=1}^N v^{(q)} H_q \right) &= \kappa_1 v'', \\ \sum_{r=0}^K \frac{(\tau_q)^r}{r!} \frac{\partial^{r+1} H_q}{\partial \tau^{r+1}} &= D_1^{(q)} H_q'' + \Lambda_{11}^{(q)} v^{IV} - M_1^{(q)} v'', \quad H_{N+1} = - \sum_{q=1}^N H_q. \end{aligned} \quad (1)$$

Все величины в (1) являются безразмерными. Для них приняты следующие



Рис. 1. Иллюстрация к постановке задачи  
[Figure 1. Illustration of the problem statement]

щие обозначения:

$$\begin{aligned}
 x_i &= \frac{x_i^*}{l}, & v &= \frac{v^*}{l}, & \tau &= \frac{Ct}{l}, & \tau_q &= \frac{C\tau^{(q)}}{l}, & \tau_0 &= \frac{C\tau_t}{l}, & \theta &= \frac{T - T_0}{T_0}, \\
 \kappa_\alpha &= \frac{\kappa_{\alpha\alpha}}{\rho c_0 Cl}, & B_\alpha &= \frac{b_{\alpha\alpha}}{\rho c_0}, & b_\alpha &= \frac{b_{\alpha\alpha} T_0}{C_{1111}}, & C^2 &= \frac{C_{1111}}{\rho}, \\
 M_\alpha^{(q)} &= \frac{n_0^{(q)} D_{\alpha\alpha}^{(q)}}{Cl} \ln(n_0^{(q)} \gamma^{(q)}), & \alpha_\gamma^{(q)} &= \frac{\alpha_{\gamma\gamma}^{(q)}}{C_{1111}}, & v^{(q)} &= R \frac{\ln[n_0^{(q)} \gamma^{(q)}]}{c_0 m^{(q)}}, \\
 D_\alpha^{(q)} &= \frac{D_{\alpha\alpha}^{(q)}}{Cl}, & \Lambda_{\alpha\beta}^{(q)} &= \frac{m^{(q)} D_{\alpha\alpha}^{(q)} \alpha_{\beta\beta}^{(q)} n_0^{(q)}}{\rho R T_0 Cl}, & J_3 &= \frac{J_3^*}{l^4}, & F &= \frac{F^*}{l^2},
 \end{aligned}$$

где  $t$  — время;  $x_i^*$  — прямоугольные декартовы координаты;  $v^*(x_1, \tau)$  — прогиб балки;  $l$  — длина балки;  $\eta_q(x_1, x_2, \tau) = x_2 H_q(x_1, \tau)$  — приращение концентрации  $q$ -той компоненты вещества в составе  $(N + 1)$ -компонентной среды;  $H_q$  — линейная плотность приращения концентрации;  $n_0^{(q)}$  — начальная концентрация  $q$ -того вещества;  $C_{ijkl}$  — упругие постоянные;  $\rho$  — плотность;  $\alpha_{ij}^{(q)}$  — коэффициенты, характеризующие объемное изменение среды за счет диффузии;  $v^{(q)}$  — коэффициенты, характеризующие нагрев среды за счет диффузии;  $D_{ij}^{(q)}$  — коэффициенты диффузии;  $R$  — универсальная газовая постоянная;  $\theta(x_1, x_2, \tau) = x_2 \vartheta(x_1, \tau)$  — приращение температуры;  $\vartheta(x_1, \tau)$  — линейная плотность приращения температуры;  $T$  — актуальная температура среды;  $T_0$  — начальная температура среды;  $\kappa_{ij}$  — компоненты тензора теплопроводности;  $c_0$  — удельная теплоемкость;  $b_{ij}$  — температурные коэффициенты, характеризующие деформации за счет нагрева;  $m^{(q)}$  — молярная масса  $q$ -того вещества;  $\tau^{(q)}$  и  $\tau_t$  — время релаксации диффузионных и тепловых потоков;  $J_3^*$  — момент инерции сечения;  $F^*$  — площадь сечения.

Уравнения (1) дополняются начально-краевыми условиями, которые в случае консольного закрепления имеют вид

$$\begin{aligned}
 v'|_{x=0} &= 0, & v|_{x=0} &= 0, & H_q|_{x=0} &= 0, & \vartheta|_{x=0} &= 0, \\
 \left[ v'' + b_1 \vartheta + \sum_{j=1}^N \alpha_1^{(j)} H_j \right]_{x=1} &= 0, \\
 \left[ v''' + b_1 \vartheta' + \sum_{j=1}^N \alpha_1^{(j)} H_j' - \frac{\partial^2 v'}{\partial \tau^2} \right]_{x=1} &= -\frac{Q}{J_3}, & Q &= \frac{Q^*}{C_{1111}}, \\
 \vartheta'|_{x=1} &= 0, & [\Lambda_{11}^{(q)} v''' - M_1^{(q)} \vartheta' + D_1^{(q)} H_q']_{x=1} &= 0,
 \end{aligned} \tag{2}$$

где  $Q^*$  — поперечная нагрузка на свободном конце балки. Начальные условия полагаются нулевыми.

**2. Алгоритм построения функций Грина.** Основная проблема заключается в невозможности построения решения задачи (1), (2) в виде рядов Фурье, что осложняет обращение преобразования Лапласа, используемого при решении этой задачи. Для преодоления указанной проблемы применяется метод эквивалентных граничных условий. Суть метода заключается

в рассмотрении вспомогательной задачи со следующими граничными условиями [23, 25]:

$$\begin{aligned} \left[ v'' + b_1 \vartheta + \sum_{j=1}^N \alpha_1^{(j)} H_j \right]_{x=0} &= f_1(\tau), \quad v|_{x=0} = 0, \quad \vartheta|_{x=0} = 0, \quad H_q|_{x=0} = 0; \\ \left[ v''' + b_1 \vartheta' + \sum_{j=1}^N \alpha_1^{(j)} H_j' - \frac{\partial^2 v'}{\partial \tau^2} \right]_{x=1} &= -\frac{Q}{J_3} = f_3(\tau), \quad \vartheta'|_{x=1} = 0; \\ [\Lambda_{11}^{(q)} v''' - M_1^{(q)} \vartheta' + D_1^{(q)} H_q']_{x=1} &= 0, \quad v'|_{x=1} = f_2(\tau) \end{aligned} \quad (3)$$

при этом функции  $f_1(\tau)$  и  $f_2(\tau)$  подлежат определению.

Решение задачи (1), (3) представляется в виде

$$\left\{ \begin{array}{l} v(x, \tau) \\ \vartheta(x, \tau) \\ H_q(x, \tau) \end{array} \right\} = \int_0^\tau \sum_{k=1}^3 \left\{ \begin{array}{l} G_{1k}(x, \tau - \xi) \\ G_{2k}(x, \tau - \xi) \\ G_{q+2,k}(x, \tau - \xi) \end{array} \right\} f_k(\xi) d\xi, \quad (4)$$

где  $G_{mk}$  — краевые функции Грина задачи (1), (3), которые, в свою очередь, являются решениями следующих задач:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 G_{1k}''}{\partial \tau^2} - a \frac{\partial^2 G_{1k}}{\partial \tau^2} &= G_{1k}^{IV} + b_1 G_{2k}'' + \sum_{j=1}^N \alpha_1^{(j)} G_{j+2,k}'', \\ \sum_{l=0}^M \frac{(\tau_0)^l}{l!} \frac{\partial^{l+1}}{\partial \tau^{l+1}} \left( G_{2k} - B_1 G_{1k}'' + \sum_{q=1}^N v^{(q)} G_{q+2,k} \right) &= \kappa_1 G_{2k}'', \\ \sum_{r=0}^K \frac{(\tau_q)^r}{r!} \frac{\partial^{r+1} G_{q+2,k}}{\partial \tau^{k+1}} &= D_1^{(q)} G_{q+2,k}'' + \Lambda_{11}^{(q)} G_{1k}^{IV} - M_1^{(q)} G_{2k}'', \end{aligned} \quad (5)$$

$$G_{1k}|_{x=0} = 0, \quad G_{q+2,k}|_{x=0} = 0, \quad G_{2k}|_{x=0} = 0,$$

$$G_{1k}'|_{x=1} = \delta_{2k} \delta(\tau), \quad G_{2k}'|_{x=1} = 0,$$

$$\left[ G_{1k}'' + b_1 G_{2k} + \sum_{j=1}^N \alpha_1^{(j)} G_{j+2,k} \right]_{x=0} = \delta_{1k} \delta(\tau), \quad (6)$$

$$\left[ G_{1k}''' + b_1 G_{2k}' + \sum_{j=1}^N \alpha_1^{(j)} G_{j+2,k}' - \frac{\partial^2 G_{1k}'}{\partial \tau^2} \right]_{x=1} = \delta_{3k} \delta(\tau),$$

$$[D_1^{(q)} G_{q+2,k}' + \Lambda_{11}^{(q)} G_{1k}''' - M_1^{(q)} G_{2k}']_{x=1} = 0.$$

Здесь  $\delta_{ij}$  — символы Кронекера,  $\delta(\tau)$  — дельта-функция Дирака.

В соответствии с алгоритмом, изложенным в работах [24, 25], к задаче (5), (6) применяется преобразование Лапласа и разложение в ряды Фурье. Для этого каждое из уравнений (5) домножается на  $\sin \lambda_n x$ , где  $\lambda_n = \pi(n - 1/2)$ , и интегрируется по промежутку  $[0, 1]$  с учетом граничных условий (6). В ре-

зультате получаем (верхний индекс  $L$  обозначает трансформанту Лапласа):

$$\begin{aligned}
 k_{1n}(s)G_{1kn}^L(s) - b_1\lambda_n^2 G_{2kn}^L(s) - \lambda_n^2 \sum_{j=1}^N \alpha_1^{(j)} G_{j+2, kn}^L(s) &= F_{1kn}(s), \\
 B_1\lambda_n^2 k_0(s)G_{1kn}^L(s) + k_{2n}(s)G_{2kn}^L(s) + k_0(s) \sum_{j=1}^N v^{(j)} G_{j+2, kn}^L(s) &= F_{2kn}(s), \\
 -\Lambda_{11}^{(q)} \lambda_n^4 G_{1kn}^L(s) - M_1^{(q)} \lambda_n^2 G_{2kn}^L(s) + k_{q+2, n}(s)G_{q+2, kn}^L(s) &= F_{q+2, kn}(s),
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 k_{1n}(s) &= (\lambda_n^2 + a)s^2 + \lambda_n^4, & k_{2n}(s) &= k_0(s) + \kappa_1 \lambda_n^2, \\
 k_0(s) &= \sum_{l=0}^K \frac{(\tau_0)^l s^{l+1}}{l!}, & k_{q+2, n}(s) &= \sum_{r=0}^M \frac{(\tau_q)^r s^{r+1}}{r!} + D_1^{(q)} \lambda_n^2, \\
 F_{1kn}(s) &= -2\lambda_n \delta_{1k} + 2(-1)^{n+1} \lambda_n^2 \delta_{2k} - 2(-1)^{n+1} \delta_{k3}, \\
 F_{2kn}(s) &= 2(-1)^{n+1} B_1 k_0(s) \delta_{2k}, \\
 F_{q+2, kn}(s) &= 2\Lambda_{11}^{(q)} \lambda_n \delta_{1k} - 2(-1)^{n+1} \Lambda_{11}^{(q)} \lambda_n^2 \delta_{2k}, \\
 G_{mk}^L(x, s) &= \sum_{n=1}^{\infty} G_{mkn}^L(s) \sin \lambda_n x, & G_{mkn}^L(s) &= 2 \int_0^1 G_{mk}^L(x, s) \sin \lambda_n x dx.
 \end{aligned}$$

Решение полученной системы имеет вид

$$\begin{aligned}
 G_{ikn}^L &= \frac{P_{ikn}(s)}{P_n(s)}, \quad i = 1, 2; \\
 G_{q+2, kn}^L &= \frac{2\Lambda_{11}^{(q)} \lambda_n \delta_{1k} - 2\Lambda_{11}^{(q)} \lambda_n^2 (-1)^{n+1} \delta_{2k}}{k_{q+2, n}(s)} + \frac{P_{q+2, kn}(s)}{Q_{qn}(s)},
 \end{aligned} \tag{7}$$

где

$$\begin{aligned}
 P_n(s) &= [k_{1n}(s)k_{2n}(s) + B_1 b_1 \lambda_n^4 k_0(s)] \Pi_n(s) + \lambda_n^2 k_0(s) \sum_{j=1}^N C_{1n}^{(j)} \Lambda_{11}^{(j)} \Pi_{jn}(s) - \\
 &- \lambda_n^6 \sum_{j=1}^N C_{2n}^{(j)} \Lambda_{11}^{(j)} \Pi_{jn}(s) - \lambda_n^8 k_0(s) \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N v^{(i)} \alpha_1^{(j)} M^{(ij)} \Pi_{ijn}(s), \tag{8}
 \end{aligned}$$

$$Q_{qn}(s) = k_{q+2, n}(s)P_n(s),$$

$$\Pi_n(s) = \prod_{j=1}^N k_{j+2, n}(s), \quad \Pi_{qn}(s) = \prod_{j=1, j \neq q}^N k_{j+2, n}(s), \quad \Pi_{pqn}(s) = \prod_{j=1, j \neq p, q}^N k_{j+2, n}(s);$$

$$P_{11n}(s) = -2\lambda_n S_{11n}(s) + 2\lambda_n^3 \sum_{j=1}^N C_{2n}^{(j)}(s) \Lambda_{11}^{(j)} \Pi_{jn}(s) -$$

$$- 2\lambda_n^5 k_0(s) \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N M_1^{(i)} S^{(ij)} \Lambda_{11}^{(j)} \Pi_{ijn}(s),$$

$$\begin{aligned} P_{12n}(s) = & 2(-1)^{n+1} \lambda_n^2 S_{11n}(s) + 2(-1)^{n+1} B_1 \lambda_n^2 k_0(s) S_{12n}(s) - \\ & - 2(-1)^{n+1} \lambda_n^4 \sum_{j=1}^N C_{2n}^{(j)}(s) \Lambda_{11}^{(j)} \Pi_{jn}(s) + \\ & + 2(-1)^{n+1} \lambda_n^6 k_0(s) \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N M_1^{(i)} \Lambda_{11}^{(j)} S^{(ij)} \Pi_{ijn}(s), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_{21n}(s) = & 2\lambda_n^3 k_0(s) S_{21n}(s) - 2\lambda_n k_0(s) \sum_{j=1}^N C_{1n}^{(j)}(s) \Lambda_{11}^{(j)} \Pi_{jn}(s) + \\ & + 2\lambda_n^7 k_0(s) \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \Lambda_{11}^{(i)} \Lambda_{11}^{(j)} S^{(ij)} \Pi_{ijn}(s), \quad (9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_{22n}(s) = & -2(-1)^{n+1} \lambda_n^4 k_0(s) S_{21n}(s) + 2(-1)^{n+1} B_1 S_{22n}(s) k_0(s) + \\ & + 2(-1)^{n+1} \lambda_n^2 k_0(s) \sum_{j=1}^N C_{1n}^{(j)}(s) \Lambda_{11}^{(j)} \Pi_{jn}(s) - \\ & - 2(-1)^{n+1} \lambda_n^8 k_0(s) \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \Lambda_{11}^{(i)} \Lambda_{11}^{(j)} S^{(ij)} \Pi_{ijn}(s), \end{aligned}$$

$$P_{13n}(s) = -2(-1)^{n+1} S_{11n}(s), \quad P_{23n}(s) = 2(-1)^{n+1} k_0(s) \lambda_n^2 S_{21n}(s),$$

$$P_{1,q+3,n}(s) = 0, \quad P_{2,q+3,n}(s) = 0,$$

$$P_{q+2,kn}(s) = \Lambda_{11}^{(q)} \lambda_n^4 P_{1kn}(s) + M_1^{(q)} \lambda_n^2 P_{2kn}(s);$$

$$S_{11n}(s) = k_{2n}(s) \Pi_n(s) + \lambda_n^2 k_0(s) \sum_{j=1}^N v^{(j)} M_1^{(j)} \Pi_{jn}(s),$$

$$S_{12n}(s) = b_1 \Pi_n(s) + \lambda_n^2 \sum_{j=1}^N \alpha_1^{(j)} M_1^{(j)} \Pi_{jn}(s),$$

$$S_{21n}(s) = B_1 \Pi_n(s) + \lambda_n^2 \sum_{j=1}^N v^{(j)} \Lambda_{11}^{(j)} \Pi_{jn}(s),$$

$$S_{22n}(s) = k_{1n}(s) \Pi_n(s) - \lambda_n^6 \sum_{j=1}^N \alpha_1^{(j)} \Lambda_{11}^{(j)} \Pi_{jn}(s),$$

(10)

$$C_{1n}^{(j)}(s) = k_{1n}(s)v^{(j)} + \lambda_n^4 B_1 \alpha_1^{(j)}, \quad C_{2n}^{(j)}(s) = k_{2n}(s)\alpha_1^{(j)} - b_1 k_0(s)v^{(j)},$$

$$S^{(ij)} = \alpha_1^{(i)} v^{(j)} - \alpha_1^{(j)} v^{(i)} M^{(ij)} = M_1^{(i)} \Lambda_{11}^{(j)} - \Lambda_{11}^{(i)} M_1^{(j)}.$$

Оригиналы функций (9) находятся с помощью вычетов и таблиц операционного исчисления

$$G_{ikn}(\tau) = \sum_{j=1}^{\Sigma} A_{ikn}^{(j)} \exp(s_{jn}\tau), \quad A_{ikn}^{(j)} = \frac{P_{ikn}(s_{jn})}{P_n'(s_{jn})}, \quad i = 1, 2;$$

$$A_{q+2, kn}^{(l)} = \frac{P_{q+1, kn}(s_{ln})}{Q'_{qn}(s_{ln})}, \quad \Sigma = (K + 1)N + M + 3;$$

$$G_{q+2, kn}(\tau) = 2\Lambda_{11}^{(q)} (\lambda_n \delta_{1k} - (-1)^{n+1} \lambda_n^2 \delta_{2k}) \sum_{r=1}^{K+1} \frac{\exp(\xi_{qrn}\tau)}{k'_{q+2, n}(\xi_{qrn})} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{\Sigma+K+1} A_{q+2, kn}^{(j)} \exp(s_{jn}\tau), \tag{11}$$

где  $s_{jn}$ ,  $j = \overline{1, \Sigma}$ , — нули многочлена  $P_n(s)$ ;  $\xi_{qrn}$  — нули многочлена  $k_{q+2, n}(s)$ .

**3. Метод эквивалентных граничных условий.** Следующий этап решения заключается в построении соотношений, связывающих правые части граничных условий исходной и вспомогательной задач. Для этого решения (4) подставляются в граничные условия (2). В результате приходим к следующей системе интегральных уравнений:

$$\sum_{j=1}^2 \int_0^{\tau} a_{ij}(\tau - t) f_j(t) dt = \varphi_i(\tau), \tag{12}$$

где

$$a_{11}(\tau) = G'_{11}(0, \tau), \quad a_{12}(\tau) = G'_{12}(0, \tau),$$

$$a_{21}(\tau) = G''_{11}(1, \tau) + b_1 G_{21}(1, \tau) + \sum_{j=1}^N \alpha_1^{(j)} G_{j+2, 1}(1, \tau),$$

$$a_{22}(\tau) = G''_{12}(1, \tau) + b_1 G_{22}(1, \tau) + \sum_{j=1}^N \alpha_1^{(j)} G_{j+2, 2}(1, \tau),$$

$$\varphi_1(\tau) = - \int_0^{\tau} G'_{13}(0, \tau - t) f_3(t) dt,$$

$$\varphi_2(\tau) = - \int_0^{\tau} \left[ G''_{13}(1, \tau - t) + b_1 G_{23}(1, \tau - t) + \sum_{j=1}^N \alpha_1^{(j)} G_{j+1, 3}(1, \tau - t) \right] f_3(t) dt.$$

Интегрированием по частям система (12) приводится к виду

$$\sum_{j=1}^2 \int_0^{\tau} A_{ij}(\tau - t) \frac{\partial f_j(t)}{\partial t} dt = \varphi_i(\tau), \quad A_{ij}(\tau) = \int_0^{\tau} a_{ij}(t) dt \tag{13}$$

и далее решается численно с помощью квадратурных формул средних прямоугольников [23, 25]. Для этого область интегрирования  $[0, \tau]$  разбивается на  $N_t$  отрезков точками  $t_m = mh_t$ ,  $m = \overline{0, N_t}$ , с равномерным шагом  $h_t = \tau/N_t$  и вводятся сеточные функции  $y_m^j = \partial f_j(t_m)/\partial \tau$ ,  $A_m^{ij} = A_{ij}(t_m)$ . Интегралы аппроксимируются с помощью формул средних прямоугольников:

$$\int_0^\tau A_{ij}(\tau - t) \frac{\partial f_j(t)}{\partial t} dt \approx h_t S_{m-1/2}^{ij} + h_t A_{1/2}^{ij} y_{m-1/2}^j,$$

$$S_{m-1/2}^{ij} = \sum_{l=1}^{m-1} A_{m-l+1/2}^{ij} y_{l-1/2}^j, \quad i, j = \overline{1, N+2};$$

$$t_{m-1/2} = (t_{m-1} + t_m)/2 = h_t(m - 1/2),$$

$$t_{m-l+1/2} = t_m - t_{l-1/2} = h_t(m - l + 1/2), \quad m = \overline{1, N_t}.$$

В результате приходим к рекуррентной последовательности систем линейных алгебраических уравнений ( $m \geq 1$ ):

$$\mathbf{A} \mathbf{y}_{m-1/2} = \mathbf{b}_{m-1/2}, \quad \mathbf{A} = (A_{1/2}^{ij})_{2 \times 2},$$

$$\mathbf{b}_{m-1/2} = (b_{m-1/2}^i)_{2 \times 1}, \quad b_{m-1/2}^i = \frac{F_i(t_m)}{h_t} - \sum_{j=1}^2 S_{m-1/2}^{ij}, \quad (14)$$

где  $\mathbf{y}_{m-1/2} = (y_{m-1/2}^i)_{4 \times 4}$  — столбец неизвестных.

Решение системы (14) находится по правилу Крамера:

$$y_{m-1/2}^1 = \frac{b_{m-1/2}^1 A_{1/2}^{22} - b_{m-1/2}^2 A_{1/2}^{12}}{A_{1/2}^{11} A_{1/2}^{22} - A_{1/2}^{12} A_{1/2}^{21}}, \quad y_{m-1/2}^2 = \frac{b_{m-1/2}^2 A_{1/2}^{11} - b_{m-1/2}^1 A_{1/2}^{21}}{A_{1/2}^{11} A_{1/2}^{22} - A_{1/2}^{12} A_{1/2}^{21}}. \quad (15)$$

Полученные таким образом сеточные значения функций  $\partial f_1/\partial \tau$  и  $\partial f_2/\partial \tau$  подставляются в свертки (4), которые также вычисляются численно. В результате получаем решение исходной задачи (1), (2):

$$v(x, t_i) = h_t \sum_{l=1}^2 \sum_{j=1}^i \tilde{G}_{1l}(x, t_{i-j+1/2}) y_{j-1/2}^l + \int_0^{t_i} G_{13}(x, t_i - t) f_3(t) dt,$$

$$\vartheta(x, t_i) = h_t \sum_{l=1}^2 \sum_{j=1}^i \tilde{G}_{2l}(x, t_{i-j+1/2}) y_{j-1/2}^l + \int_0^{t_i} G_{23}(x, t_i - t) f_3(t) dt,$$

$$\eta_q(x, t_i) = h_t \sum_{l=1}^2 \sum_{j=1}^i \tilde{G}_{q+2,l}(x, t_{i-j+1/2}) y_{j-1/2}^l + \int_0^{t_i} G_{q+2,3}(x, t_i - t) f_3(t) dt,$$

$$\tilde{G}_{mk}(x, \tau) = \int_0^\tau G_{mk}(x, t) dt.$$

**4. Предельные переходы.** Полагая в (8)–(10)  $\alpha_1^{(q)} = 0$ ,  $b_1 = 0$  и  $D_1^{(q)} = 0$  из соотношений (11) получаем функции Грина  $G_1^{(el)}(x, \tau)$  упругой задачи [25]:

$$G_1^{(el)}(x, \tau) = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n \sin[\gamma(\lambda_n)\tau]}{(\lambda_n^2 + a)\gamma(\lambda_n)} \sin \lambda_n x,$$

$$G_2^{(el)}(x, \tau) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \lambda_n^2 \sin[\gamma(\lambda_n)\tau]}{(\lambda_n^2 + a)\gamma(\lambda_n)} \sin \lambda_n x,$$

$$G_3^{(el)}(x, \tau) = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \sin[\gamma(\lambda_n)\tau]}{(\lambda_n^2 + a)\gamma(\lambda_n)} \sin \lambda_n x,$$

где  $\gamma(\lambda_n) = \lambda_n^2 / \sqrt{\lambda_n^2 + a}$ .

Полагая в граничных условиях (3)

$$f_k(\tau) = \tilde{f}_k H(\tau), \quad k = \overline{1, 3}$$

и переходя к пределу при  $\tau \rightarrow \infty$ , получаем решение задачи об изгибе консольно закрепленной балки под действием статической нагрузки, приложенной к свободному концу. Здесь  $H(\tau)$  — функция Хевисайда.

Функции Грина статической задачи  $G_{mk}^{(st)}(x)$  выражаются через функции Грина  $G_{mk}(x, \tau)$  динамической задачи с помощью соотношений [23, 25]

$$G_{mk}^{(st)}(x) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} [G_{mk}(x, \tau) * H(\tau)] = \lim_{s \rightarrow 0} \left[ s G_{mk}^L(x, s) \frac{1}{s} \right] = \lim_{s \rightarrow 0} G_{mk}^L(x, s). \quad (16)$$

Преобразуя свертки (4) с помощью (16), получаем решение статической задачи:

$$\begin{Bmatrix} v^{(st)}(x) \\ \vartheta^{(st)}(x) \\ H_q^{(st)}(x) \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^3 \begin{Bmatrix} G_{1k}^{(st)}(x) \\ G_{21}^{(st)}(x) \\ G_{q+2,k}^{(st)}(x) \end{Bmatrix} \tilde{f}_k.$$

Применяя предельный переход (16) к равенствам (7), получаем следующие выражения для функций  $G_{mk}^{(st)}(x)$ ,  $k = \overline{1, N+2}$ ,  $m = \overline{1, N+3}$ :

$$G_{11}^{(st)}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P_{11n}(0)}{P_n(0)} \sin \lambda_n x = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \lambda_n x}{\lambda_n^3},$$

$$G_{12}^{(st)}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P_{12n}(0)}{P_n(0)} \sin \lambda_n x = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\lambda_n^2} \sin \lambda_n x,$$

$$G_{13}^{(st)}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P_{13n}(0)}{P_n(0)} \sin \lambda_n x = -2\Phi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\lambda_n^4} \sin \lambda_n x,$$

$$G_{q+2,3}^{(st)}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P_{q+2,3n}(0)}{P_n(0)} \sin \lambda_n x = -2\Lambda_{11}^{(q)} \Phi_q \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\lambda_n^2} \sin \lambda_n x. \quad (17)$$

Остальные функции равны нулю. Здесь введены следующие обозначения:

$$\Phi = \frac{\prod_{j=1}^N D_1^{(j)}}{\prod_{j=1}^N D_1^{(j)} - \sum_{j=1}^N \alpha_1^{(j)} \Lambda_{11}^{(j)} \prod_{r=1, r \neq j}^N D_1^{(r)}}, \quad \Phi_q = \frac{\prod_{r=1, r \neq q}^N D_1^{(r)}}{\prod_{j=1}^N D_1^{(j)} - \sum_{j=1}^N \alpha_1^{(j)} \Lambda_{11}^{(j)} \prod_{r=1, r \neq j}^N D_1^{(r)}}. \quad (18)$$

С учетом предельного перехода (16) система уравнений (12) запишется в виде

$$\sum_{j=1}^2 \tilde{a}_{ij} \tilde{f}_j = \tilde{\varphi}_i, \quad (19)$$

где с учетом формул (17) и (18)

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{11} &= G_{11}^{(st)'}(0), \quad \tilde{a}_{12} = G_{12}^{(st)'}(0), \\ \tilde{a}_{21} &= G_{11}^{(st)''}(1) + b_1 G_{21}^{(st)}(1) + \sum_{j=1}^N \alpha_1^{(j)} G_{j+2,1}^{(st)}(1), \\ \tilde{a}_{22} &= G_{12}^{(st)''}(1) + b_1 G_{22}^{(st)}(1) + \sum_{j=1}^N \alpha_1^{(j)} G_{j+2,2}^{(st)}(1), \\ \tilde{\varphi}_1 &= -G_{13}^{(st)'}(0) \tilde{f}_3, \\ \tilde{\varphi}_2 &= - \left[ G_{13}^{(st)''}(1) + b_1 G_{23}^{(st)}(1) + \sum_{j=1}^N \alpha_1^{(j)} G_{j+2,3}^{(st)}(1) \right] \tilde{f}_3. \end{aligned}$$

Решение системы (19) находится по формулам (15). При этом используются следующие соответствия:

$$y_{m-1/2}^i \leftrightarrow \tilde{f}_j, \quad A_{1/2}^{ij} \leftrightarrow \tilde{a}_{ij}, \quad b_{m-1/2}^i \leftrightarrow \tilde{\varphi}_i.$$

**5. Пример.** В качестве расчетного примера рассматривается задача для консольно закрепленного трехкомпонентного дюралюминиевого стержня, в котором компоненты цинк и медь диффундируют в алюминии. Стержень характеризуется следующими физическими параметрами [26]:

$$\begin{aligned} C_{1122} &= 6.93 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2, \quad C_{1212} = 2.56 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2, \quad T_0 = 700 \text{ К}, \quad \rho = 2700 \text{ кг/м}^3, \\ c_0 &= 920 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{К)}, \quad \alpha_{11}^{(1)} = 1.55 \cdot 10^7 \text{ Дж/кг}, \quad \alpha_{11}^{(2)} = 6.14 \cdot 10^7 \text{ Дж/кг}, \\ D_{11}^{(1)} &= 2.62 \cdot 10^{-12} \text{ м}^2/\text{с}, \quad D_{11}^{(2)} = 2.89 \cdot 10^{-14} \text{ м}^2/\text{с}, \quad b_{11} = 4.94 \cdot 10^6 \text{ Н/(К} \cdot \text{м}^2), \\ \kappa_{11} &= 134 \text{ Вт/(м} \cdot \text{К)}, \quad m^{(1)} = 0.065 \text{ кг/моль}, \quad m^{(2)} = 0.064 \text{ кг/моль}, \\ C_{1111} &= C_{2222} = C_{1122} + 2C_{1212}, \quad n_0^{(1)} = 0.0084, \quad n_0^{(2)} = 0.045. \end{aligned}$$

Стержень имеет прямоугольное сечение:  $h \times b = 0.05l \times 0.05l$ , где  $l = 0.01$  м. Поперечная нагрузка на конце стержня при  $x = 1$  задается в виде

$$f_3(\tau) = H(\tau),$$

где  $H(\tau)$  — функция Хевисайда.

Решая численно систему (13) и подставляя найденные функции в формулы (15), получаем результаты, представленные на рис. 2–8. Здесь одна единица безразмерного времени соответствует  $1.6 \cdot 10^{-6}$  секундам. Для численного решения системы интегральных уравнений Вольтерра (15) использовалось  $N_t = 20$  точек разбиения. Дальнейшее увеличение количества точек не приводит к заметным изменениям результатов.

На рис. 2 показаны прогибы балки в различные моменты времени, а также прогиб балки при статической нагрузке (жирная линия). Сравнение результатов для термомехано-диффузионной и упругой (при  $\alpha_{11}^{(q)} = 0$  и  $b_{11} = 0$ ) моделей показывает, что влияние тепломассопереноса на механическое поле изгибаемой консольно закрепленной балки Бернулли—Эйлера на рассматриваемом промежутке времени пренебрежимо мало (графики совпадают).

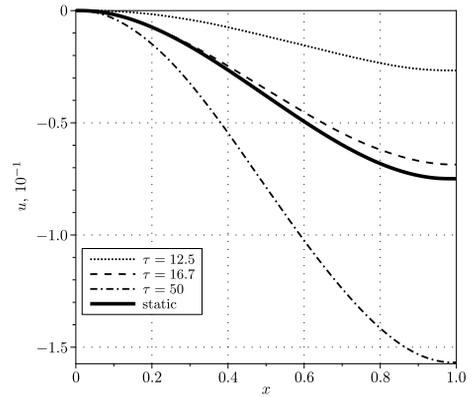


Рис. 2. Прогибы балки  
[Figure 2. Beam deflections]

Графики на рис. 3 и 4 демонстрируют плотности приращений концентраций цинка и меди при динамической и статической нагрузках. На рис. 5 и 6 изображена плотность приращения температуры при динамических нагрузках.

Как показывают расчеты [24], релаксационные эффекты, обуславливающие конечную скорость распространения тепловых и диффузионных потоков, существенно проявляются в начальные моменты времени. Графики, представленные на рис. 3 и 4, одинаково подходят как для классической модели тепломассопереноса, так и для рассмотренной здесь. Примерный момент времени, когда обе модели дают достаточно близкие результаты, показан на рис. 7. Однако на более ранних стадиях развития процесса наблюдаются существенные различия в результатах, полученных по разным моделям (рис. 8).

Полученные результаты позволяют сделать вывод, что влияние механического поля на теплоперенос проявляется более существенно, чем на диффузионные процессы. При заданной нагрузке максимальная плотность приращения температуры материала составляет примерно 85 % (рис. 6). Переходя

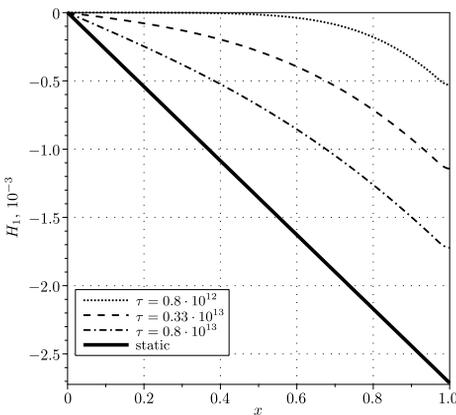


Рис. 3. Линейная плотность приращения концентрации цинка  
[Figure 3. Linear density of zinc concentration increment]

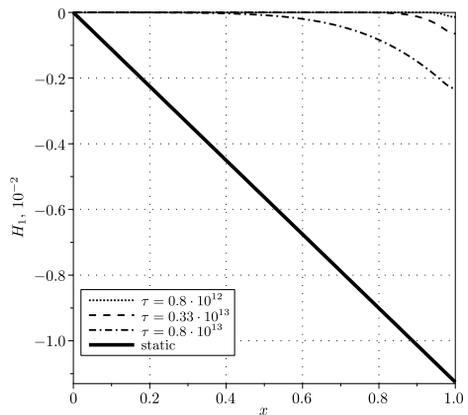


Рис. 4. Линейная плотность приращения концентрации меди  
[Figure 4. Linear density of copper concentration increment]

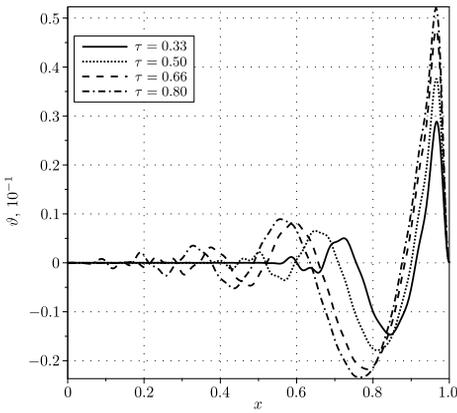


Рис. 5. Линейная плотность приращения температуры  
[Figure 5. Linear density of temperature increment]

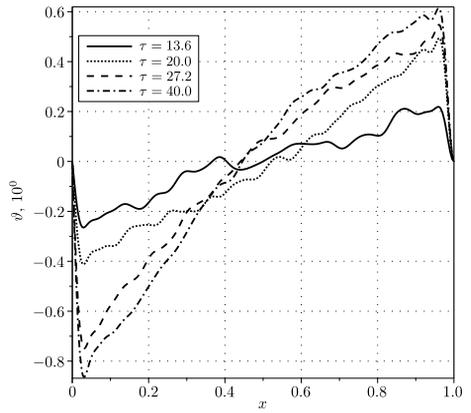


Рис. 6. Линейная плотность приращения температуры  
[Figure 6. Linear density of temperature increment]

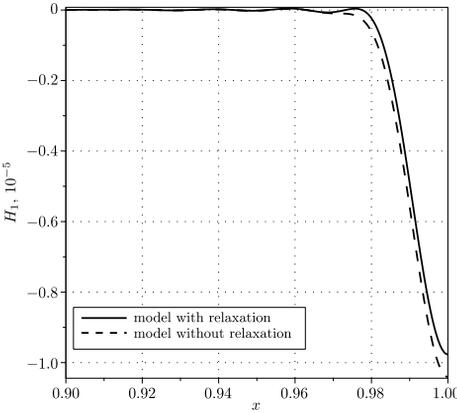


Рис. 7. Линейная плотность приращения концентрации цинка в момент времени  $\tau = 10^9$   
[Figure 7. Linear density of zinc concentration increment at time  $\tau = 10^9$ ]

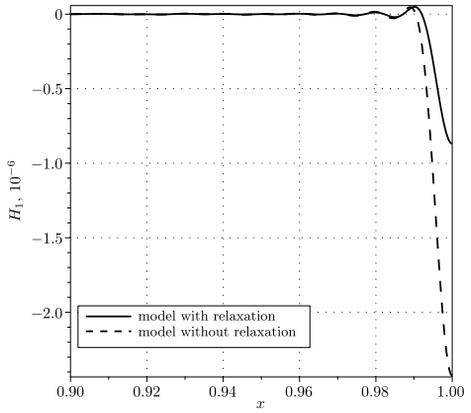


Рис. 8. Линейная плотность приращения концентрации цинка в момент времени  $\tau = 10^8$   
[Figure 8. Linear density of zinc concentration increment at time  $\tau = 10^8$ ]

к размерным величинам, с учетом заданных размеров балки получаем приращение температуры на поверхности балки  $x_2^* = h/2$ :

$$T - T_0 = \theta T_0 = x_2^* \vartheta T_0 = \frac{x_2^*}{l} \vartheta T_0 = \frac{h}{2l} \vartheta T_0 = \frac{0.05}{2} \cdot 0.85 \cdot 700 \approx 15 \text{ K.}$$

При этом изменение плотности концентрации веществ (цинк и медь) даже на значительном промежутке времени не превышает 1.1% по отношению к начальным плотностям концентраций, что при переходе к размерным величинам дает пренебрежимо малое значение. Это, в свою очередь, подтверждается экспериментальными исследованиями [27], согласно которым влияние механических нагрузок на диффузионное поле слабо проявляется при упругих деформациях.

Результаты, представленные на рис. 2–4, хорошо согласуются с результатами, полученными ранее аналогичным способом для консольно закреплен-

ной упругодиффузионной балки Бернулли—Эйлера [25]. Кроме того, в так называемом «неопубликованном обзоре»<sup>1</sup> имеется немало ссылок на экспериментальные исследования, в том числе и на работу [27], подтверждающих, что взаимодействие механических и диффузионных полей наиболее существенным образом проявляется только при пластических деформациях.

**6. Заключение.** Таким образом, в работе построена модель нестационарных колебаний консольно закрепленной ортотропной балки Бернулли—Эйлера с учетом релаксации тепловых и диффузионных потоков. Данная модель описывает взаимосвязь между механическими, температурными и диффузионными полями в сплошных средах. Установлено, что интенсивность возникающего тепломассопереноса крайне мала и практически не оказывает обратного влияния на механическое поле в изгибаемой балке. Этот вывод подтвержден путем сравнения полученного решения с решением упругой задачи для балки Бернулли—Эйлера.

Предложен алгоритм решения задачи об изгибе консольно закрепленной балки с учетом тепломассопереноса, основанный на использовании преобразования Лапласа, разложения в тригонометрические ряды Фурье и метода эквивалентных граничных условий.

**Конфликт интересов.** Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

**Вклад авторов и ответственность.** Все авторы внесли равный вклад в разработку концепции статьи и написание рукописи. Авторы несут полную ответственность за подготовку и предоставление окончательной версии рукописи для публикации. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

**Финансирование.** Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-21-00189, <https://rscf.ru/project/23-21-00189/>.

## Библиографический список

1. Флячок В. М., Швец Р. Н. Некоторые теоремы теории механодиффузии анизотропных оболочек // *Мат. методы и физ.-мех. поля*, 1985. № 21. С. 32–37.
2. Швец Р. Н., Флячок В. М. Уравнения механодиффузии анизотропных оболочек с учетом поперечных деформаций // *Мат. методы и физ.-мех. поля*, 1984. № 20. С. 54–61.
3. Швец Р. Н., Флячок В. М. Вариационный подход к решению динамических задач механотермодиффузии анизотропных оболочек // *Матем. физ. и нелинейн. механ.*, 1991. № 16. С. 39–43.
4. Раврик М. С. Об одной вариационной формуле смешанного типа для контактных задач термодиффузионной теории деформации слоистых оболочек // *Мат. методы и физ.-мех. поля*, 1985. № 22. С. 40–44.
5. Bhattacharya D., Kanoria M. The influence of two temperature generalized thermoelastic diffusion inside a spherical shell // *Int. J. Eng. Technol. Res.*, 2014. vol. 2, no. 5. pp. 151–159.
6. Раврик М. С., Бичуя А. Л. Осесимметричное напряженное состояние нагретой трансверсально-изотропной сферической оболочки с круговым отверстием при диффузионном насыщении // *Мат. методы и физ.-мех. поля*, 1983. № 17. С. 51–54.
7. Aouadi M., Copetti M. I. M. Analytical and numerical results for a dynamic contact problem with two stops in thermoelastic diffusion theory // *ZAMM*, 2016. vol. 96, no. 3. pp. 361–384. DOI: <https://doi.org/10.1002/zamm.201400285>.

<sup>1</sup>Бекман И. Н. Диффузионные процессы при механических воздействиях на материал: Неопубликованный обзор, М., 1980. <https://profbeckman.narod.ru/DMD.pdf>.

8. Aouadi M., Copetti M. I. M. A dynamic contact problem for a thermoelastic diffusion beam with the rotational inertia // *Appl. Numer. Math.*, 2018. vol. 126. pp. 113–137. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.apnum.2017.12.007>.
9. Aouadi M., Copetti M. I. M. Exponential stability and numerical analysis of a thermoelastic diffusion beam with rotational inertia and second sound // *Math. Comput. Simul.*, 2021. vol. 187. pp. 586–613. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.matcom.2021.03.026>.
10. Aouadi M., Miranville A. Smooth attractor for a nonlinear thermoelastic diffusion thin plate based on Gurtin–Pipkin’s model // *Asymptotic Anal.*, 2015. vol. 95, no. 1–2. pp. 129–160. DOI: <https://doi.org/10.3233/ASY-151330>.
11. Copetti M. I. M., Aouadi M. A A quasi-static contact problem in thermoviscoelastic diffusion theory // *Appl. Numer. Math.*, 2016. vol. 109. pp. 157–183. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.apnum.2016.06.011>.
12. Шевчук П. Р., Шевчук В. А. Механодиффузионный эффект при изгибе двухслойного бруса // *Физ.-хим. мех. матер.*, 1987. Т. 23, № 6. С. 75–79.
13. Huang M., Wei P., Zhao L., Li Y. Multiple fields coupled elastic flexural waves in the thermoelastic semiconductor microbeam with consideration of small scale effects // *Compos. Struct.*, 2021. vol. 270, 114104. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2021.114104>.
14. Kumar R., Devi S., Sharma V. Resonance of nanoscale beam due to various sources in modified couple stress thermoelastic diffusion with phase lags // *Mech. Mech. Eng.*, 2019. vol. 23, no. 1. pp. 36–49. DOI: <https://doi.org/10.2478/mme-2019-0006>.
15. Aouadi M. On thermoelastic diffusion thin plate theory // *Appl. Math. Mech.*, 2015. vol. 36, no. 5. pp. 619–632. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10483-015-1930-7>.
16. Miranville A., Aouadi M. Quasi-stability and global attractor in nonlinear thermoelastic diffusion plate with memory // *Evol. Equ. Control Theory*, 2015. vol. 4, no. 3. pp. 241–263. DOI: <https://doi.org/10.3934/eect.2015.4.241>.
17. Миколайчук М. А., Князева А. Г., Грабовецкая Г. П., Мишин И. П. Изучение влияния механических напряжений на диффузию в пластине с покрытием // *Вестник ПНИПУ. Механика*, 2012. № 3. С. 120–134. EDN: PFTTJD.
18. Земсков А. В., Ле В. Х., Сердюк Д. О. Модель изгиба ортотропной консольно закрепленной балки Бернулли–Эйлера под действием нестационарных термомеханодиффузионных нагрузок / *Инновационное развитие транспортного и строительного комплексов*. Т. 2. Гомель: БелГУТ, 2023. С. 90–92.
19. Вольфсон Е. Ф. Эффект Горского (к 80-летию выдающегося открытия В. С. Горского) // *Изв. высш. учебн. завед. Черная металлургия*, 2016. Т. 59, № 5. С. 357–359. EDN: WBOQVZ. DOI: <https://doi.org/10.17073/0368-0797-2016-5-357-359>.
20. Кукушкин С. А., Осипов А. В. Эффект Горского при синтезе пленок карбида кремния из кремния методом топохимического замещения атомов // *Письма в ЖТФ*, 2017. Т. 43, № 13. С. 81–88. EDN: YZJPGF. DOI: <https://doi.org/10.21883/PJTF.2017.13.44815.16625>.
21. Князева А. Г. *Введение в термодинамику необратимых процессов. Лекции о моделях*. Томск: Иван Федоров, 2014. 172 с.
22. Келлер И. Э., Дудин И. С. *Механика сплошной среды. Законы сохранения*. Пермь: ПНИПУ, 2022. 142 с.
23. Земсков А. В., Тарлаковский Д. В. *Моделирование механодиффузионных процессов в многокомпонентных телах с плоскими границами*. М.: Физматлит, 2021. 288 с.
24. Zemskov A. V., Le V. H., Tarlakovskii D. V. Bernoulli–Euler beam unsteady bending model with consideration of heat and mass transfer // *J. Appl. Comp. Mech.*, 2023. vol. 9, no. 1. pp. 168–180. DOI: <https://doi.org/10.22055/jacm.2022.40752.3649>.
25. Zemskov A. V., Tarlakovskii D. V., Faykin G. M. Unsteady bending of the orthotropic cantilever Bernoulli–Euler beam with the relaxation of diffusion fluxes // *ZAMM*, 2022. vol. 102, no. 10, e202100107. DOI: <https://doi.org/10.1002/zamm.202100107>.

26. Бабичев А. П., Бабушкина Н. А., Братковский А. М. [и др.] *Физические величины*. М.: Энергоатомиздат, 1991. 1232 с.
27. Hirano K., Cohen M., Averbach B. L., Ujjiye N. Self-diffusion in alpha iron during compressive plastic flow // *Trans. Metall. Soc. AIME*, 1963. vol. 227. pp. 950–957.

MSC: 74A15, 80A20

## Model of bending of an orthotropic cantilever beam of Bernoulli–Euler under the action of unsteady thermomechanodiffusion loads

A. V. Zemskov<sup>1,2</sup>, V. H. Le<sup>1</sup>, D. O. Serdyuk<sup>1</sup><sup>1</sup> Moscow Aviation Institute (National Research University),  
4, Volokolamskoe shosse, Moscow, 125993, Russian Federation.<sup>2</sup> Lomonosov Moscow State University, Institute of Mechanics,  
1, Michurinsky prospekt, Moscow, 119192, Russian Federation.

### Abstract

The study investigates the interaction of mechanical, thermal, and diffusion fields during nonstationary bending of a cantilevered beam. The mathematical formulation of the problem is based on a system of equations describing nonstationary flexural vibrations of a Bernoulli–Euler beam, accounting for heat and mass transfer. This system is derived from the general thermomechanodiffusion model for continuum media using the generalized principle of virtual displacements. The research assumes a finite velocity of thermal and diffusive perturbation propagation. The interaction of mechanical, thermal, and diffusion fields is analyzed using a cantilevered three-component beam composed of a zinc–copper–aluminum alloy under the action of a nonstationary load applied to its free end.

**Keywords:** thermomechanical diffusion, Bernoulli–Euler beam, console, Green’s function, equivalent boundary conditions method, unsteady problems.

Received: 23<sup>rd</sup> August, 2024 / Revised: 15<sup>th</sup> November, 2024 /Accepted: 29<sup>th</sup> November, 2024 / First online: 26<sup>th</sup> December, 2024

---

### Mechanics of Solids

#### Research Article

© The Author(s), 2024

© Samara State Technical University, 2024 (Compilation, Design, and Layout)

 The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

#### Please cite this article in press as:

Zemskov A. V., Le V. H., Serdyuk D. O. Model of bending of an orthotropic cantilever beam of Bernoulli–Euler under the action of unsteady thermomechanodiffusion loads, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2024, vol. 28, no. 4, pp. 682–700. EDN: CVHDVM. DOI: 10.14498/vsgtu2112 (In Russian).

#### Authors’ Details:

Andrei V. Zemskov  <https://orcid.org/0000-0002-2653-6378>Dr. of Phys. & Math. Sci., Associate Professor; Professor; Dept. of Applied Software and Mathematical Methods<sup>1</sup>; Leading Researcher; Lab. of Dynamic Tests<sup>2</sup>; e-mail: [azemskov1975@mail.ru](mailto:azemskov1975@mail.ru)Van Hao Le  <https://orcid.org/0000-0002-0456-6429>Postgraduate Student; Dept. of Strength of Materials, Dynamics, and Strength of Machines<sup>1</sup>; e-mail: [vanhaovt1@gmail.com](mailto:vanhaovt1@gmail.com)Dmitry O. Serdyuk  <https://orcid.org/0000-0003-0082-1856>Cand. Techn. Sci., Associate Professor; Associate Professor; Dept. of Strength of Materials, Dynamics, and Strength of Machines<sup>1</sup>; e-mail: [d.serduk55@gmail.com](mailto:d.serduk55@gmail.com)

**Conflict of Interest.** The authors declare that they have no conflict of interest.

**Authors' Contributions and Responsibility.** All authors contributed equally to the development of the article's concept and the writing of the manuscript. The authors bear full responsibility for the preparation and submission of the final version of the manuscript for publication. The final version of the manuscript was approved by all authors.

**Funding.** This research was supported by a grant from the Russian Science Foundation, no. 23-21-00189, <https://rscf.ru/en/project/23-21-00189/>.

## References

1. Flyachok V. M., Shvets R. N. Theorems of the mechano-thermodiffusion theory of anisotropic shells, *Mat. Metody Fiz.-Mekh. Polya*, 1985, no. 21, pp. 32–37 (In Russian).
2. Shvets R. N., Flyachok V. M. Equations of the mechano-thermodiffusion of anisotropic shells taking into account transverse deformations, *Mat. Metody Fiz.-Mekh. Polya*, 1984, no. 20, pp. 54–61 (In Russian).
3. Shvets R. N., Flyachok V. M. Variational approach to the solution of dynamical problems of thermoelastic diffusion for anisotropic shells, *Mat. Fiz. Nelin. Mekh.*, 1991, no. 16, pp. 39–43 (In Russian).
4. Ravrik M. S. A variational mixed formula for contact problems of thermal diffusion theory of deformation of laminated shells, *Mat. Metody Fiz.-Mekh. Polya*, 1985, no. 22, pp. 40–44 (In Russian).
5. Bhattacharya D., Kanoria M. The influence of two temperature generalized thermoelastic diffusion inside a spherical shell, *Int. J. Eng. Technol. Res.*, 2014, vol. 2, no. 5, pp. 151–159.
6. Ravrik M. S., Bichuya A. L. Axisymmetric stress state of a heated transversal-isotropic spherical shell with circular opening at diffusion saturation, *Mat. Metody Fiz.-Mekh. Polya*, 1983, no. 17, pp. 51–54 (In Russian).
7. Aouadi M., Copetti M. I. M. Analytical and numerical results for a dynamic contact problem with two stops in thermoelastic diffusion theory, *ZAMM*, 2016, vol. 96, no. 3, pp. 361–384. DOI: <https://doi.org/10.1002/zamm.201400285>.
8. Aouadi M., Copetti M. I. M. A dynamic contact problem for a thermoelastic diffusion beam with the rotational inertia, *Appl. Numer. Math.*, 2018, vol. 126, pp. 113–137. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.apnum.2017.12.007>.
9. Aouadi M., Copetti M. I. M. Exponential stability and numerical analysis of a thermoelastic diffusion beam with rotational inertia and second sound, *Math. Comput. Simul.*, 2021, vol. 187, pp. 586–613. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.matcom.2021.03.026>.
10. Aouadi M., Miranville A. Smooth attractor for a nonlinear thermoelastic diffusion thin plate based on Gurtin–Pipkin's model, *Asymptotic Anal.*, 2015, vol. 95, no. 1–2, pp. 129–160. DOI: <https://doi.org/10.3233/ASY-151330>.
11. Copetti M. I. M., Aouadi M. A quasi-static contact problem in thermoviscoelastic diffusion theory, *Appl. Numer. Math.*, 2016, vol. 109, pp. 157–183. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.apnum.2016.06.011>.
12. Shevchuk P. R., Shevchuk V. A. Mechanodiffusion effect in bending a two-layer bar, *Mater. Sci.*, 1987, vol. 23, no. 6, pp. 604–608. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01151899>.
13. Huang M., Wei P., Zhao L., Li Y. Multiple fields coupled elastic flexural waves in the thermoelastic semiconductor microbeam with consideration of small scale effects, *Compos. Struct.*, 2021, vol. 270, 114104. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2021.114104>.
14. Kumar R., Devi S., Sharma V. Resonance of nanoscale beam due to various sources in modified couple stress thermoelastic diffusion with phase lags, *Mech. Mech. Eng.*, 2019, vol. 23, no. 1, pp. 36–49. DOI: <https://doi.org/10.2478/mme-2019-0006>.
15. Aouadi M. On thermoelastic diffusion thin plate theory, *Appl. Math. Mech.*, 2015, vol. 36, no. 5, pp. 619–632. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10483-015-1930-7>.

16. Miranville A., Aouadi M. Quasi-stability and global attractor in nonlinear thermoelastic diffusion plate with memory, *Evol. Equ. Control Theory*, 2015, vol. 4, no. 3, pp. 241–263. DOI: <https://doi.org/10.3934/eect.2015.4.241>.
17. Mikolaychuk M. A., Knyazeva A. G., Grabovetskaya G. P., Mishin I. P. Research of the stress influence on the diffusion in the coating plate, *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2012, no. 3, pp. 120–134 (In Russian). EDN: PETTDJ.
18. Zemskov A. V., Le V. H., Serdyuk D. O. A model of bending of an orthotropic cantilevered Bernoulli–Euler beam under the action of nonstationary thermomechanodiffusion loads, In: *Innovatsionnoe razvitiye transportnogo i stroitel'nogo kompleksov* [Innovative Development of Transport and Construction Complexes], vol. 2. Gomel', Belarusian State University of Transport, 2023, pp. 90–92 (In Russian).
19. Vol'fson E. F. To the 80th anniversary of the famous opening of V.S. Gorskii, *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Chernaya Metallurgiya*, 2016, vol. 59, no. 5, pp. 357–359 (In Russian). EDN: WBOQVZ. DOI: <https://doi.org/10.17073/0368-0797-2016-5-357-359>.
20. Kukushkin S. A., Osipov A. V. The Gorsky effect in the synthesis of silicon-carbide films from silicon by topochemical substitution of atoms, *Tech. Phys. Lett.*, 2017, vol. 43, no. 7, pp. 631–634. EDN: XNQQWZ. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1063785017070094>.
21. Knyazeva A. G. *Vvedenie v termodinamiku neobratimyykh protsessov. Lektsii o modeliakh* [Introduction to Thermodynamics of Irreversible Processes. Lectures on Models]. Tomsk, Ivan Fedorov, 2014, 172 pp. (In Russian)
22. Keller I. E., Dudin I. S. *Mekhanika sploshnoi sredy. Zakony sokhraneniia* [Continuum Mechanics. Conservation Laws]. PNIPU, Perm', 2022, 142 pp. (In Russian)
23. Zemskov A. V., Tarlakovskii D. V. *Modelirovanie mekhanodiffuzionnykh protsessov v mnogokomponentnykh telakh s ploskimi granitsami* [Modeling of Mechanodiffusion Processes in Multicomponent Bodies with Flat Boundaries]. Moscow, Fizmatlit, 2021, 288 pp. (In Russian)
24. Zemskov A. V., Le V. H., Tarlakovskii D. V. Bernoulli–Euler beam unsteady bending model with consideration of heat and mass transfer, *J. Appl. Comp. Mech.*, 2023, vol. 9, no. 1, pp. 168–180. DOI: <https://doi.org/10.22055/jacm.2022.40752.3649>.
25. Zemskov A. V., Tarlakovskii D. V., Faykin G. M. Unsteady bending of the orthotropic cantilever Bernoulli–Euler beam with the relaxation of diffusion fluxes, *ZAMM*, 2022, vol. 102, no. 10, e202100107. DOI: <https://doi.org/10.1002/zamm.202100107>.
26. Babichev A. P., Babushkina N. A., Bratkovskii A. M., et al. *Fizicheskie velichiny* [Physical Quantities]. Moscow, Energoatomizdat, 1991, 1232 pp. (In Russian)
27. Hirano K., Cohen M., Averbach B. L., Ujjiyi N. Self-diffusion in alpha iron during compressive plastic flow, *Trans. Metall. Soc. AIME*, 1963, vol. 227, pp. 950–957.



УДК 539.3

## Расчет профиля равнопрочного вращающегося диска переменной толщины с учетом анизотропии и разной прочности при растяжении и сжатии

*А. Н. Прокудин*

Институт машиноведения и металлургии

Хабаровского федерального исследовательского центра ДВО РАН

Россия, 681005, Комсомольск-на-Амуре, ул. Металлургов, 1.

### Аннотация

Работа посвящена расчету геометрии равнопрочного кольцевого диска с учетом эффектов анизотропии и разной прочности при растяжении и сжатии. Диск находится под действием центробежных сил и усилий на внутреннем и внешнем контуре. Постановка задачи основана на уравнениях теории упругости анизотропного тела и гипотезе о плоском напряженном состоянии. В качестве критерия прочности применяется общее квадратичное условие, единственным требованием к которому является его эллиптичность. Используемое условие в частных случаях сводится ко многим известным критериям прочности (Цая–Ву, Хилла, Друкера–Прагера, Мизеса и т.д.).

Определяющая система уравнений состоит из уравнения совместности деформаций, уравнения равновесия и условия постоянства эквивалентного напряжения. Указанное условие удовлетворяется с помощью тригонометрической замены и введенной вспомогательной функции. Два оставшихся уравнения решаются последовательно в неявном виде, в котором вспомогательная функция выступает в качестве независимой переменной. Полученное аналитическое решение позволяет построить геометрию диска (профиль и внутренний радиус диска) равной прочности, а также определить распределение напряжений в таком диске. Установлено, что решение может не существовать и быть не единственным. В частных случаях решение сводится к решениям для многих известных критериев прочности, а также к классическому решению Ю. Н. Работнова. Сравнение расчетов, полученных для критериев Цая–Ву и Мизеса, показало, что анизотропия и разная прочность при растяжении и сжатии могут оказывать существенное влияние на геометрию диска равной прочности и напряженное состояние в нем.

### Механика деформируемого твердого тела

#### Научная статья

© Коллектив авторов, 2024

© СамГТУ, 2024 (составление, дизайн, макет)

📄 ©️ Контент публикуется на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

#### Образец для цитирования

Прокудин А. Н. Расчет профиля равнопрочного вращающегося диска переменной толщины с учетом анизотропии и разной прочности при растяжении и сжатии // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2024. Т. 28, № 4. С. 701–720. EDN: NNХJKУ. DOI: 10.14498/vsgtu2108.

#### Сведения об авторе

Александр Николаевич Прокудин ✉️ © <https://orcid.org/0000-0002-5156-424X>

кандидат технических наук; ведущий научный сотрудник; лаб. проблем создания и обработки материалов и изделий; e-mail: [sunbeam\\_85@mail.ru](mailto:sunbeam_85@mail.ru)

**Ключевые слова:** вращающийся диск, равнопрочность, анизотропия, асимметрия при растяжении и сжатии, критерий прочности Цая–Ву.

Получение: 7 августа 2024 г. / Исправление: 9 ноября 2024 г. /

Принятие: 18 ноября 2024 г. / Публикация онлайн: 23 декабря 2024 г.

---

**Введение.** Вращающиеся диски являются неотъемлемым структурным компонентом многих механизмов и машин, таких как маховичные накопители энергии, газотурбинные двигатели, коробки передач, гироскопы, компрессоры и т.д. Начиная с середины XX века оптимальному проектированию тонких дисков, находящихся под действием термомеханических нагрузок, уделяется большое внимание в научной литературе. Для определения оптимальной конструкции используются различные подходы, среди которых важную роль играет понятие равнопрочности — состояния тела, характеризующегося одинаковым запасом прочности во всех его точках [1]. Известно, что напряженное состояние в диске переменной толщины может существенно отличаться по сравнению с диском прямоугольного профиля. Вследствие этого профиль диска может рассматриваться как один из управляющих параметров при решении обратных и оптимизационных задач.

Классическое решение Ю. Н. Работнова [2, 3] описывает равнопрочный вращающийся диск, в котором напряжения всюду постоянны и равны нагрузке, приложенной к внешней поверхности диска; найденный профиль является функцией экспоненциального вида. Следует отметить, что решение [2, 3] легко обобщается на случай ползучести материала. В [4] профиль равнопрочного вращающегося диска определен из предположения, что напряженное состояние удовлетворяет условию пластичности Мизеса. Алгоритм построения равнопрочного по Мизесу диска при наличии центробежных сил и стационарного температурного градиента разработан в [5]. Решения для диска равной прочности, основанные на условии пластичности Треска, получены в [6, 7]. Методика расчета равнопрочных неоднородных дисков, находящихся под действием внутреннего и внешнего давления, представлена в [8] и позволяет установить профиль диска для произвольных зависимостей модуля Юнга и предела текучести от радиальной координаты. В качестве критерия прочности в [8] применялось условие Мизеса.

Для достижения желаемого напряженного состояния помимо изменения геометрии диска также применяется управление механическими параметрами материала, которое стало возможным благодаря значительному прогрессу в механике композитов. В [9] установлено, что при определенной конфигурации многослойного композитного маховика потеря прочности во всех его точках происходит примерно при одной и той же скорости вращения. Авторы [10] показали, что специальное распределение модуля Юнга и плотности материала с хорошей степенью точности приводит к нулевому радиальному и постоянному тангенциальному напряжениям во вращающемся диске. В [11] рассмотрен вращающийся анизотропный диск равной прочности из упруго-анизотропного материала и установлено, что равенство напряжений может быть достигнуто определенным распределением в диске параметра анизотропии (отношение модулей Юнга в разных направлениях), а в частном случае изотропного материала — найденными распределениями модуля Юнга и ко-

эфициента Пуассона. Вращающийся диск из неоднородного несжимаемого материала изучался в [12], где установлены зависимости термомеханических параметров, приводящие к постоянному значению в диске произвольной линейной комбинации напряжений. В [13] найдены упругие характеристики ортотропного неоднородного материала, позволяющие достичь во вращающемся диске одного из трех состояний: постоянное тангенциальное или радиальное напряжение, постоянная разность напряжений. Кроме того, в [13] найдены параметры армирования, реализующие полученные зависимости механических параметров.

Равнопрочность является не единственным возможным критерием оптимальности конструкции. Большое значение также имеют эксплуатационные характеристики, к которым в случае вращающегося диска относятся, например, максимальная скорость вращения, вес, объем, длительная прочность, запасаемая кинетическая энергия и т.д. Различные целевые функции и их комбинации использовались для оптимального проектирования вращающихся дисков и маховичных накопителей энергии в работах [14–30]. Значительное за последние десятилетия увеличение вычислительной мощности компьютерных систем сделало возможным расчет оптимальной формы вращающихся дисков в двумерной и трехмерной постановках на основе метода конечных элементов [20–22, 24–27].

Настоящая работа посвящена расчету профиля равнопрочного диска, находящегося под действием центробежных сил и заданных усилий на внутреннем и внешнем контуре. Постановка задачи основана на теории малых упругих деформаций и гипотезе о плоском напряженном состоянии. Прочность материала диска характеризуется анизотропией и асимметрией при растяжении и сжатии. В качестве критерия прочности выбрано квадратичное условие общего вида, которое в частных случаях сводится ко многим известным критериям прочности (Мизеса, Друкера–Прагера, Хилла и т.д.).

**1. Постановка задачи и определяющие соотношения.** Рассмотрим тонкий осесимметричный диск переменной толщины. Внутренний и внешний радиусы диска обозначим  $r_{in}$  и  $r_{out}$  соответственно. Диск вращается вокруг оси симметрии с угловой скоростью  $\omega$ , а на его боковых поверхностях заданы усилия  $P_{in}$  и  $P_{out}$ . Введем цилиндрическую систему координат  $\rho, \theta, z$ , ось  $z$  которой совпадает с осью симметрии диска. Геометрия диска и схема нагружения изображены на рис. 1. Все нагрузки постоянны и не зависят от угловой и осевой координат. Предполагается, что теория малых деформаций и гипотеза о плоском напряженном состоянии справедливы с достаточной степенью точности. При сформулированных выше допущениях сдвиговые напряжения и деформации, а также осевое напряжение равны нулю. Все неизвестные величины зависят только от радиальной координаты.

Кинематические соотношения имеют вид

$$\varepsilon_{rr} = \frac{du_r}{dr}, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r}, \quad (1)$$

где  $\varepsilon_{rr}$ ,  $\varepsilon_{\theta\theta}$  — компоненты тензора деформаций,  $u_r$  — радиальное перемещение. Следует отметить, что перемещение и деформация в осевом направлении, вообще говоря, не равны нулю.

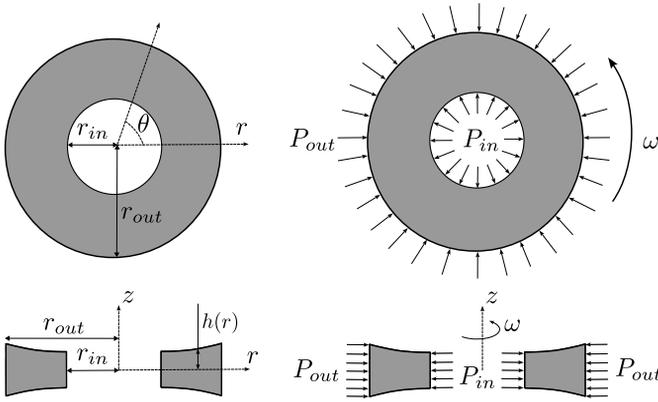


Рис. 1. Геометрия вращающегося диска и схема нагружения  
 [Figure 1. The geometry of a rotating disk and the loading scheme]

Поле деформаций должно удовлетворять уравнению совместности

$$\frac{d(r\varepsilon_{\theta\theta})}{dr} - \varepsilon_{rr} = 0. \quad (2)$$

Диск изготовлен из однородного и ортотропного упругого материала, а главные оси анизотропии совпадают с координатными поверхностями. Закон Гука для такого материала можно записать следующим образом:

$$\varepsilon_{rr} = \frac{1}{E_r}(\sigma_{rr} - \nu_{r\theta}\sigma_{\theta\theta}), \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{E_\theta}(\sigma_{\theta\theta} - \nu_{\theta r}\sigma_{rr}), \quad (3)$$

где  $\sigma_{rr}$ ,  $\sigma_{\theta\theta}$  — компоненты тензора напряжений,  $E_i$  — модули Юнга,  $\nu_{ij}$  — коэффициенты Пуассона. Упругие параметры материала  $E_i$  и  $\nu_{ij}$  удовлетворяют условиям симметрии Максвелла:

$$\frac{\nu_{r\theta}}{E_r} = \frac{\nu_{\theta r}}{E_\theta}, \quad \frac{\nu_{\theta z}}{E_\theta} = \frac{\nu_{z\theta}}{E_z}, \quad \frac{\nu_{zr}}{E_z} = \frac{\nu_{rz}}{E_r}. \quad (4)$$

Закон Гука (3) удобно переписать с помощью параметра ортотропии  $\mathbb{O}$ , определение которого приведено ниже:

$$\mathbb{O} = \frac{E_\theta}{E_r} = \frac{\nu_{\theta r}}{\nu_{r\theta}}. \quad (5)$$

Заметим, что из (4) и (5) следуют соотношения

$$E_\theta = \mathbb{O}E_r, \quad \nu_{\theta r} = \mathbb{O}\nu_{r\theta}. \quad (6)$$

С учетом (6) закон Гука (3) преобразуется к следующей форме:

$$\varepsilon_{rr} = \frac{1}{E_\theta}(\mathbb{O}\sigma_{rr} - \nu\sigma_{\theta\theta}), \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{E_\theta}(\sigma_{\theta\theta} - \nu\sigma_{rr}). \quad (7)$$

В (7) для краткости принято, что  $\nu = \nu_{\theta r}$ .

Единственным нетривиальным уравнением равновесия в диске является уравнение в радиальном направлении, которое имеет вид

$$\frac{d}{dr}(h(r)r\sigma_{rr}) - h(r)\sigma_{\theta\theta} + h(r)\rho\omega^2r^2 = 0, \quad (8)$$

где  $h(r)$  — толщина диска (см. рис. 1),  $\rho$  — плотность.

Граничные условия задачи сформулированы ниже:

$$\sigma_{rr}(r_{in}) = -P_{in}, \quad \sigma_{rr}(r_{out}) = -P_{out}, \quad h(r_{in}) = h_{in}, \quad (9)$$

где  $P_{in} > 0$ ,  $P_{out} > 0$ , а  $h_{in}$  — толщина диска на его внутреннем контуре.

Предполагается, что прочностные свойства материала диска проявляют эффекты анизотропии и асимметрии при растяжении и сжатии. Такое поведение наиболее характерно для композитных материалов, а также наблюдается, пусть и в меньшей степени, у ряда металлов и сплавов. Далее в качестве критерия прочности используется общее квадратичное условие

$$A\sigma_{rr}^2 + B\sigma_{rr}\sigma_{\theta\theta} + C\sigma_{\theta\theta}^2 + D\sigma_{rr} + E\sigma_{\theta\theta} \leq 1, \quad (10)$$

где  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $E$  — экспериментально определяемые параметры материала. В (10) слагаемые второго порядка характеризуют анизотропию, а линейные — разную прочность при растяжении и сжатии. В качестве единственного ограничения потребуем эллиптичности функции в левой части (10), т.е. параметры должны удовлетворять условию  $B^2 - 4AC < 0$ .

Условие (10) в частных случаях сводится ко многим известным критериям прочности. Введем обозначения  $k_{rt}$ ,  $k_{\theta t}$ ,  $k_{zt}$  для пределов прочности при растяжении в радиальном, тангенциальном и осевом направлениях соответственно. Пределы прочности при сжатии обозначим как  $k_{rc}$ ,  $k_{\theta c}$ ,  $k_{zc}$ . Критерий (10) сводится к критерию прочности Цая–Ву [31] при следующих соотношениях на коэффициенты:

$$A = \frac{1}{k_{rc}k_{rt}}, \quad B = -\frac{1}{2\sqrt{k_{rc}k_{rt}k_{\theta c}k_{\theta t}}}, \quad C = \frac{1}{k_{\theta c}k_{\theta t}}, \quad (11)$$

$$D = \frac{1}{k_{rt}} - \frac{1}{k_{rc}}, \quad E = \frac{1}{k_{\theta t}} - \frac{1}{k_{\theta c}}.$$

Критерий Цая–Ву [31] является частным случаем тензорного критерия Гольденבלата–Копнова [32], широко используется в механике композитов и описывает анизотропию материала, а также его различную прочность при растяжении и сжатии. Заметим, что вычисление коэффициента  $B$  в (11) остается предметом дискуссий [33, 34], и в настоящей статье используется наиболее распространенный подход  $B = -\sqrt{AC}/2$ .

Предположим, что материал имеет одинаковую прочность при растяжении и сжатии  $k_r = k_{rt} = k_{rc}$ ,  $k_\theta = k_{\theta t} = k_{\theta c}$ ,  $k_z = k_{zt} = k_{zc}$ , и введем коэффициенты в виде

$$A = G + H, \quad B = -2H, \quad C = F + H, \quad D = E = 0,$$

$$2F = \left(\frac{1}{k_\theta^2} + \frac{1}{k_z^2} - \frac{1}{k_r^2}\right), \quad 2G = \left(\frac{1}{k_r^2} + \frac{1}{k_z^2} - \frac{1}{k_\theta^2}\right), \quad 2H = \left(\frac{1}{k_r^2} + \frac{1}{k_\theta^2} - \frac{1}{k_z^2}\right). \quad (12)$$

Тогда критерий (10) сводится к условию Хилла [35], которое широко применяется для описания пластической анизотропии в металлах. Следует отметить, что при сильно выраженной ортотропии условие Хилла (10), (12) может терять свойство эллиптичности [36]. В этом случае для описания анизотропии может использоваться, например, условие Ху–Марина [37], которое следует из (10), если ввести коэффициенты следующим образом:

$$A = k_r^{-2}, \quad B = -(k_r k_\theta)^{-1}, \quad C = k_\theta^{-2}, \quad D = E = 0.$$

Если материал изотропен, то  $k = k_r = k_\theta = k_z$  и замена

$$A = -B = C = k^{-2}, \quad D = E = 0 \quad (13)$$

переводит критерий (10) в условие Мизеса.

В условиях плоского напряженного состояния ( $\sigma_{zz} = 0$ ) и отсутствия сдвиговых напряжений ( $\sigma_{ij} = 0, i \neq j$ ) многие другие критерии прочности (условия Друкера–Прагера, Мизеса–Шлейхера, обобщения условия Хилла [38, 39] и т.д.) также можно привести к виду (10). Требование эллиптичности, разумеется, должно выполняться в любом случае.

Для удобства введем безразмерные параметры и переменные:

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{r}{r_{out}}, \quad \delta = \frac{r_{in}}{r_{out}}, \quad \bar{h} = \frac{h}{h_{in}}, \quad \Omega = \frac{\rho r_{out}^2}{k_{\theta t}} \omega^2, \quad \bar{P}_{in} = \frac{P_{in}}{k_{\theta t}}, \quad \bar{P}_{out} = \frac{P_{out}}{k_{\theta t}}, \\ \bar{u} &= \frac{E_\theta}{k_{\theta t}} \frac{u}{r_{out}}, \quad \bar{\varepsilon}_{ij} = \frac{E_\theta}{k_{\theta t}} \varepsilon_{ij}, \quad \bar{\sigma}_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{k_{\theta t}}, \\ \bar{A} &= k_{\theta t}^2 A, \quad \bar{B} = k_{\theta t}^2 B, \quad \bar{C} = k_{\theta t}^2 C, \quad \bar{D} = k_{\theta t} D, \quad \bar{E} = k_{\theta t} E. \end{aligned} \quad (14)$$

Далее, если не сказано иное, везде в формулах используются величины (14), а знак верхнего подчеркивания для краткости опускается. Также введем функцию эквивалентного напряжения, соответствующую условию (10):

$$\sigma_{eq} = \sqrt{A\sigma_{rr}^2 + B\sigma_{rr}\sigma_{\theta\theta} + C\sigma_{\theta\theta}^2 + D\sigma_{rr} + E\sigma_{\theta\theta}}. \quad (15)$$

Неравенство  $\sigma_{eq} < 1$  соответствует упругому деформированию материала, а равенство  $\sigma_{eq} = 1$  — разрушению. В равнопрочном диске запас прочности в соответствии с критерием (10) один и тот же во всех точках тела, следовательно, значение эквивалентного напряжения (15) в диске всюду постоянно. Преобразуем уравнение совместности деформаций (2) с помощью закона Гука (7), полученное уравнение вместе с уравнением равновесия (8) и граничными условиями (9) составляют краевую задачу (в безразмерном виде) относительно неизвестных функций  $\sigma_{rr}(\beta)$ ,  $\sigma_{\theta\theta}(\beta)$  и  $h(\beta)$ :

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\beta} (h(\beta)\beta\sigma_{rr}) - h(\beta)\sigma_{\theta\theta} + h(\beta)\Omega\beta^2 &= 0, \\ \frac{d}{d\beta} (\sigma_{\theta\theta} - \nu\sigma_{rr}) + \frac{(1+\nu)\sigma_{\theta\theta} - (\mathbb{O}^{-1} + \nu)\sigma_{rr}}{\beta} &= 0, \\ \sigma_{rr}(\delta) &= -P_{in}, \quad \sigma_{rr}(1) = -P_{out}, \quad h(\delta) = 1. \end{aligned} \quad (16)$$

Задача построения равнопрочного диска в соответствии с условием (10) формулируется следующим образом: *найти решение краевой задачи (16) такое, что для заданного  $\tilde{\sigma}_{eq} \in (0, 1]$  справедливо равенство*

$$\sigma_{eq}(\beta) = \tilde{\sigma}_{eq}, \quad \forall \beta \in [\delta, 1]. \quad (17)$$

**2. Построение аналитического решения.** Условие (17) с учетом (15) можно переписать следующим образом:

$$\sigma_{rr}^2 + N\sigma_{rr}s_{\theta\theta} + s_{\theta\theta}^2 + M\sigma_{rr} + Ls_{\theta\theta} = K,$$

где  $s_{\theta\theta} = Y\sigma_{\theta\theta}$ ,  $Y = C/A$ ,  $N = B/\sqrt{AC}$ ,  $M = D/A$ ,  $L = E/\sqrt{AC}$ ,  $K = \tilde{\sigma}_{eq}^2/A$ .

Преыдыдущее условие можно удовлетворить с помощью тригонометрической замены вида

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= -\frac{1}{\kappa}(\gamma + 2\chi \sin(\varphi(\beta))), \\ \sigma_{\theta\theta} &= -\frac{1}{\kappa Y}(\psi + \sqrt{\kappa}\chi \cos(\varphi(\beta)) - N\chi \sin(\varphi(\beta))). \end{aligned} \quad (18)$$

В (15)  $\varphi(\beta)$  — неизвестная функция,  $\chi = \sqrt{M^2 + L^2 - MLN + K\kappa}$ ,  $\kappa = 4 - N^2$ ,  $\gamma = 2M - LN$ ,  $\psi = 2L - MN$ . Заметим, что  $\kappa > 0$  в силу эллиптичности условия (10).

Граничные условия по напряжениям сводятся к системе уравнений:

$$\sin \varphi_{\delta} = \frac{\kappa P_{in} - \gamma}{2\chi}, \quad \sin \varphi_1 = \frac{\kappa P_{out} - \gamma}{2\chi}, \quad (19)$$

где  $\varphi_{\delta} = \varphi(\delta)$ ,  $\varphi_1 = \varphi(1)$ .

Второе из уравнений (16) преобразуем с помощью (18):

$$\begin{aligned} (1 + \nu)(W - \sqrt{\kappa} \cos(\varphi(\beta)) + V \sin(\varphi(\beta))) / \beta + \\ + ((N + 2\nu Y) \cos(\varphi(\beta)) + \sqrt{\kappa} \sin(\varphi(\beta))) \varphi'(\beta) = 0, \quad (20) \\ W = (\gamma Y Z - \psi) / \chi, \quad V = N + 2Y Z, \quad Z = (1 + \nu)^{-1}(\mathbb{O} - 1) + 1. \end{aligned}$$

Уравнение (20) из неизвестных содержит только функцию  $\varphi(\beta)$  и может быть решено в неявном виде. Величину  $\varphi$  можно принять в качестве новой независимой переменной, а  $\beta(\varphi)$  — в качестве неизвестной функции. Переходя с помощью правила дифференцирования сложной функции от дифференцирования по  $\beta$  к дифференцированию по  $\varphi$ , уравнение (20) можно преобразовать к виду

$$\begin{aligned} (1 + \nu)(W - \sqrt{\kappa} \cos \varphi + V \sin \varphi) \beta'(\varphi) + \\ + ((N + 2\nu Y) \cos \varphi + \sqrt{\kappa} \sin \varphi) \beta(\varphi) = 0. \quad (21) \end{aligned}$$

Решение уравнения (21) должно удовлетворять граничным условиям

$$\beta(\varphi_{\delta}) = \delta, \quad \beta(\varphi_1) = 1. \quad (22)$$

Для определения напряженного состояния в диске кроме дифференциального уравнения (21) также необходимо решить четыре алгебраических уравнения (19) и (22). Однако число неизвестных в этих уравнениях равно трем (константа интегрирования,  $\varphi_\delta$  и  $\varphi_1$ ). Отсюда следует, что для произвольных значений механических параметров материала  $\mathbb{O}$ ,  $\nu$ ,  $A$ ,  $\dots$ ,  $E$ , геометрического параметра  $\delta$ , внешних нагрузок  $P_{in}$ ,  $P_{out}$  и желаемого эквивалентного напряжения  $\tilde{\sigma}_{eq}$  построить диск равной прочности невозможно. Какой-либо из перечисленных параметров должен вычисляться через остальные с помощью одного из уравнений (19), (22). Далее в качестве такого параметра выбран геометрический параметр  $\delta$ .

Решая уравнение (21) с учетом второго из граничных условий (22), найдем

$$\begin{aligned} \beta(\varphi) = & \exp\left(\frac{\sqrt{\kappa}(N - V + 2\nu Y)}{(1 + \nu)S_1}(\varphi - \varphi_1)\right) \times \\ & \times \left(\frac{W - \sqrt{\kappa} \cos \varphi_1 + V \sin \varphi_1}{W - \sqrt{\kappa} \cos \varphi + V \sin \varphi}\right)^{\frac{NV + \kappa + 2\nu VY}{(1 + \nu)S_1}} \times \\ & \times \left(\frac{(V - S_2 + S_3 \tan \varphi_1/2)(V + S_2 + S_3 \tan \varphi/2)}{(V + S_2 + S_3 \tan \varphi_1/2)(V - S_2 + S_3 \tan \varphi/2)}\right)^{\frac{\sqrt{\kappa}W(N - V + 2Y\nu)}{(1 + \nu)S_1 S_2}}, \end{aligned} \quad (23)$$

где  $S_1 = \kappa + V^2$ ,  $S_2 = \sqrt{\kappa + V^2 - W^2}$ ,  $S_3 = \sqrt{\kappa} + W$ . Значение геометрического параметра  $\delta$  непосредственно следует из (23) с учетом первого из граничных условий (22) и равно  $\beta(\varphi_\delta)$ . Разумеется, решение имеет физический смысл только при  $\delta \in (0, 1)$ . Кроме того, интервал  $[\varphi_\delta, \varphi_1]$  (или  $[\varphi_1, \varphi_\delta]$ ) не должен содержать особых точек и точек экстремума функции  $\beta(\varphi)$ . Эти точки перечислены ниже:

$$\begin{aligned} \varphi_0^1 &= -\arcsin \frac{W \operatorname{sgn} V}{\sqrt{\kappa + V^2}} + \arctan \frac{\sqrt{\kappa}}{V} + 2\pi n, \\ \varphi_0^2 &= \pi + \arcsin \frac{W \operatorname{sgn} V}{\sqrt{\kappa + V^2}} + \arctan \frac{\sqrt{\kappa}}{V} + 2\pi n, \\ \varphi_0^3 &= -\arctan \frac{N + 2\nu Y}{\sqrt{\kappa}} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \quad (24)$$

Каждое из уравнений (19) имеет по два решения:

$$\begin{aligned} \varphi_\delta^1 &= \arcsin \frac{\kappa P_{in} - \gamma}{2\chi}, & \varphi_\delta^2 &= \pi - \arcsin \frac{\kappa P_{in} - \gamma}{2\chi}, \\ \varphi_1^1 &= \arcsin \frac{\kappa P_{out} - \gamma}{2\chi}, & \varphi_1^2 &= \pi - \arcsin \frac{\kappa P_{out} - \gamma}{2\chi}. \end{aligned} \quad (25)$$

Из (25) следует, что удовлетворить граничным условиям задачи можно четырьмя различными способами. Однако некоторые из этих способов (и даже все) могут не иметь физического смысла.

Следующим шагом решения является определение профиля диска  $h(\beta)$ . Для удобства введем замену

$$h(\beta) = \exp(t(\beta)). \quad (26)$$

Используя (18) и (26), первое из уравнений (16) можно переписать в виде

$$\chi(N + 2Y) \sin(\varphi(\beta)) - \sqrt{\kappa}\chi \cos(\varphi(\beta)) + Y(\gamma + 2\chi \sin(\varphi(\beta)))\beta t'(\beta) + 2\chi Y \cos(\varphi(\beta))\beta \phi'(\beta) = \kappa Y \Omega \beta^2 + \psi - Y\gamma. \quad (27)$$

Применим к (27) правило дифференцирования  $t'(\beta) = t'(\varphi)\varphi'(\beta)$ , далее в полученное уравнение подставим выражение для производной  $\phi'(\beta)$ , найденное с помощью (20). В завершение перейдем к неизвестной переменной  $\varphi$  и разрешим уравнение относительно  $t'(\varphi)$ . В результате этих преобразований уравнение (27) примет вид

$$t'(\varphi) = \frac{1}{1 + \nu} \left( \frac{\chi(2\sqrt{\kappa}(2Y - N \cos(2\varphi)) + (N^2 - 4Y^2 - \kappa) \sin(2\varphi))}{2Y(W - \sqrt{\kappa} \cos \varphi + V \sin \varphi)(\gamma + 2\chi \sin \varphi)} - \frac{2Y(\mathbb{O} - 1) \cos \varphi}{W - \sqrt{\kappa} \cos \varphi + V \sin \varphi} + \frac{(Y\gamma - \psi)((N - 2Y) \cos \varphi + \sqrt{\kappa} \sin \varphi)}{Y(W - \sqrt{\kappa} \cos \varphi + V \sin \varphi)(\gamma + 2\chi \sin \varphi)} - \kappa\Omega \frac{((N + 2\nu Y) \cos \varphi + \sqrt{\kappa} \sin \varphi)}{(W - \sqrt{\kappa} \cos \varphi + V \sin \varphi)(\gamma + 2\chi \sin \varphi)} \beta(\varphi)^2 \right). \quad (28)$$

Общий ход решения выглядит следующим образом. С помощью (25) вычисляются граничные значения  $\varphi_\delta$  и  $\varphi_1$ , для каждой возможной пары значений проверяется выполнение условия  $\delta \in (0, 1)$ , а также отсутствие точек (24) в интервале  $[\varphi_\delta, \varphi_1]$  (или  $[\varphi_1, \varphi_\delta]$ ). Пары граничных значений  $\varphi_\delta$  и  $\varphi_1$ , удовлетворяющие этим требованиям, используются для восстановления напряженного состояния с помощью (18), (23) и далее для расчета профиля диска из (28) с учетом замены (26) и последнего из уравнений (16). Первые три слагаемых в правой части (28) могут быть проинтегрированы в замкнутом виде, однако получаемые выражения являются достаточно громоздкими и в статье не приводятся. Поля перемещений и деформаций можно вычислить с помощью (7) и (1). В завершение проверяется справедливость гипотезы о плоском напряженном состоянии в диске. Для этого толщина диска должна меняться достаточно плавно, откуда следует условие вида

$$\left| \frac{dh}{dr} \right| \leq \Delta \quad \text{или} \quad \left| \frac{d\bar{h}}{d\beta} \right| \leq \frac{r_{out}}{h_{in}} \Delta. \quad (29)$$

В левом из неравенств (29) используются размерные величины, а в правом — безразмерные;  $\Delta$  — некоторое заданное число. Какие-либо достоверные оценки для  $\Delta$  в литературе отсутствуют и величина этого параметра выбирается достаточно произвольно [8]. Из представленного решения не составляет труда определить производную  $d\bar{h}/d\beta$ . Справедливость неравенства (29) проверяется в каждой точке диска. В спорных случаях необходимо применять конечно-элементный анализ на основе двумерной модели диска.

Содержание данного раздела позволяет рассчитать профиль равнопрочного диска и восстановить напряженное состояние в нем. Важно отметить, что решение может не существовать, а также может быть неединственным. Большое число параметров задачи затрудняет качественный анализ условий существования решения в общем случае. Построение и проверка решения для заданных значений параметров не вызывает трудностей.

Рассмотрим некоторые частные случаи критерия (10). Условие Хилла [35] в безразмерных переменных (14) имеет вид

$$(G + H)\sigma_{rr}^2 - 2H\sigma_{rr}\sigma_{\theta\theta} + \sigma_{\theta\theta}^2 \leq 1.$$

Из предыдущего условия и (18) следует распределение напряжений:

$$\sigma_{rr} = -\tilde{\sigma}_{eq} \frac{\sin \varphi}{\sqrt{Q}}, \quad \sigma_{\theta\theta} = -\tilde{\sigma}_{eq} \left( \cos \varphi + \frac{H \sin \varphi}{\sqrt{Q}} \right),$$

где  $Q = G + (1 - H)H$ .

Величины  $\varphi_\delta$  и  $\varphi_1$  определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} \varphi_\delta^1 &= \arcsin\left(\sqrt{Q} \frac{P_{in}}{\tilde{\sigma}_{eq}}\right), & \varphi_\delta^2 &= \pi - \arcsin\left(\sqrt{Q} \frac{P_{in}}{\tilde{\sigma}_{eq}}\right), \\ \varphi_1^1 &= \arcsin\left(\sqrt{Q} \frac{P_{out}}{\tilde{\sigma}_{eq}}\right), & \varphi_1^2 &= \pi - \arcsin\left(\sqrt{Q} \frac{P_{out}}{\tilde{\sigma}_{eq}}\right). \end{aligned}$$

Функции  $\beta(\varphi)$  и  $h(\varphi)$  имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \beta(\varphi) &= \exp\left(\frac{\sqrt{Q}(\mathbb{O} - \nu^2)(\varphi_1 - \varphi)}{(1 + \nu)^2(Q + T^2)}\right) \left(\frac{T \sin \varphi_1 - \sqrt{Q} \cos \varphi_1}{T \sin \varphi - \sqrt{Q} \cos \varphi}\right)^{\frac{Q - (H - \nu)T}{(1 + \nu)(Q + T^2)}}, \\ h(\varphi) &= \left(\frac{\sin \varphi_\delta}{\sin \varphi}\right)^{\frac{1 + H}{1 + \nu}} \left(\frac{\sqrt{Q} \cos \varphi_\delta - T \sin \varphi_\delta}{\sqrt{Q} \cos \varphi - T \sin \varphi}\right)^{\frac{(\mathbb{O} - 1)(Q - (H - \nu)T)}{(1 + \nu)^2(Q + T^2)}} \times \\ &\quad \times \exp\left(\frac{\sqrt{Q}}{1 + \nu} \left(\frac{Q + \mathbb{O} - (2T + H)H}{Q + T^2}(\varphi - \varphi_\delta) + \frac{\Omega}{\tilde{\sigma}_{eq}} J(\varphi)\right)\right), \\ J(\varphi) &= \int_{\varphi_\delta}^{\varphi} \frac{\sqrt{Q} \sin z - (H - \nu) \cos z}{\sin z(\sqrt{Q} \cos z - T \sin z)} \beta^2(z) dz, \end{aligned}$$

где  $T = H + Z$ .

Рассмотрим материал, который изотропен в отношении упругих и прочностных свойств и не проявляет асимметрии при растяжении и сжатии. В этом случае  $\mathbb{O} = 1$ , а условие (10) переходит в условие Мизеса:

$$\sigma_{rr}^2 - \sigma_{rr}\sigma_{\theta\theta} + \sigma_{\theta\theta}^2 \leq 1,$$

которое удовлетворяется тригонометрической заменой (18) в виде

$$\sigma_{rr} = -\frac{2}{\sqrt{3}} \tilde{\sigma}_{eq} \sin \varphi, \quad \sigma_{\theta\theta} = -\tilde{\sigma}_{eq} \left( \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \varphi + \cos \varphi \right).$$

Из граничных условий задачи следует:

$$\begin{aligned} \varphi_\delta^1 &= \arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{P_{in}}{\tilde{\sigma}_{eq}}\right), & \varphi_\delta^2 &= \pi - \arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{P_{in}}{\tilde{\sigma}_{eq}}\right), \\ \varphi_1^1 &= \arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{P_{out}}{\tilde{\sigma}_{eq}}\right), & \varphi_1^2 &= \pi - \arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{P_{out}}{\tilde{\sigma}_{eq}}\right). \end{aligned}$$

Функции  $\beta(\varphi)$  и  $h(\varphi)$  принимают следующий вид:

$$\beta(\varphi) = \exp\left(\frac{\sqrt{3}(1-\nu)(\varphi_1-\varphi)}{2(1+\nu)}\right) \sqrt{\frac{\sin \varphi_1 - \sqrt{3} \cos \varphi_1}{\sin \varphi - \sqrt{3} \cos \varphi}},$$

$$h(\varphi) = \left(\frac{\sin \varphi_\delta}{\sin \varphi}\right)^{\frac{3}{2(1+\nu)}} \exp\left(\frac{\sqrt{3}}{2(1+\nu)}\left(\varphi - \varphi_\delta + \frac{\Omega}{\tilde{\sigma}_{eq}} J(\varphi)\right)\right),$$

$$J(\varphi) = \int_{\varphi_\delta}^{\varphi} \frac{\sqrt{3} \sin z - (1-2\nu) \cos z}{\sin z(\sqrt{3} \cos z - \sin z)} \beta^2(z) dz.$$

Представленное выше решение для условия Мизеса, разумеется, совпадает с известным решением [4].

**ЗАМЕЧАНИЕ 1.** В настоящей работе параметр  $\delta$  принят неизвестным, однако на практике он может иметь зафиксированное значение. Тогда к неизвестным  $\varphi_\delta$  и  $\varphi_1$  добавляется какой-либо другой параметр задачи, например  $P_{in}$  или  $P_{out}$ . Для вычисления неизвестных также используются условия (19) и первое из уравнений (22), которое в таком случае будет уже нелинейным.

**ЗАМЕЧАНИЕ 2.** Профиль равнопрочного диска можно построить и при других граничных условиях, например, если перемещение на внутреннем контуре диска равно нулю (диск с жестким включением). В этом случае граничные условия имеют вид

$$u(\delta) = 0, \quad \sigma_{rr}(1) = -P_{out},$$

из которых с учетом (1), (7) и (18) следует, что

$$\varphi_\delta^1 = \arcsin \frac{(Y\gamma\nu - \psi) \operatorname{sgn}(N + 2\nu Y)}{\sqrt{\kappa\chi + (N + 2\nu Y)^2}} + \arctan \frac{\sqrt{\kappa}}{N + 2\nu Y},$$

$$\varphi_\delta^2 = \pi - \arcsin \frac{(Y\gamma\nu - \psi) \operatorname{sgn}(N + 2\nu Y)}{\sqrt{\kappa\chi + (N + 2\nu Y)^2}} + \arctan \frac{\sqrt{\kappa}}{N + 2\nu Y},$$

$$\varphi_1^1 = \arcsin \frac{\kappa P_{out} - \gamma}{2\chi}, \quad \varphi_1^2 = \pi - \arcsin \frac{\kappa P_{out} - \gamma}{2\chi}.$$

Дальнейший ход решения повторяет описанные выше шаги. Аналогичным образом рассматриваются другие граничные условия, например, посадка на жесткий вал или диск с жесткой внешней стенкой. Предыдущее замечание, разумеется, также остается в силе.

**3. Специальное решение.** Рассмотрим случай  $\varphi'(\beta) = 0$ , который соответствует первым двум точкам (24). Тогда напряжения в диске всюду постоянны, а давления на внутреннем и внешнем контурах совпадают:  $P_{in} = P_{out}$ . Из второго уравнения (16) следует, что

$$\sigma_{\theta\theta} = Z\sigma_{rr}. \quad (30)$$

Радиальное напряжение определяется с помощью (17) и (30) в виде

$$\sigma_{rr} = -\frac{D + ZE \pm \sqrt{(D + ZE)^2 + 4\tilde{\sigma}_{eq}^2(A + ZB + Z^2C)}}{2(A + ZB + Z^2C)}. \quad (31)$$

В (31) имеют смысл только отрицательные напряжения в силу предположения, что  $P_{in} > 0$  и  $P_{out} > 0$ . Решая первое из уравнений (16) с учетом (30), найдем профиль диска:

$$h(\beta) = \exp\left(\frac{\Omega}{2\sigma_{rr}}(\delta^2 - \beta^2)\right)\left(\frac{\beta}{\delta}\right)^{\frac{0-\nu}{1+\nu}}. \quad (32)$$

Если пренебречь свойствами анизотропии и асимметрии, то  $\sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta} = -\tilde{\sigma}_{eq}$ , а решение (32) сводится к классическому решению Ю. Н. Работнова [2, 3].

**4. Результаты.** Проиллюстрируем найденное решение на примере композитного материала [40] со следующими значениями прочности в различных направлениях:  $k_{rt} = 644.7$  МПа,  $k_{\theta t} = 689.5$  МПа,  $k_{rc} = 513.7$  МПа,  $k_{\theta c} = 455.1$  МПа. Отметим, что в рассматриваемом материале эффекты анизотропии и разной прочности при растяжении и сжатии выражены достаточно умеренно. В качестве критерия прочности будем использовать условие Цая–Ву (10), (11), тогда безразмерные параметры материала (14) примут значения  $A = 1.435$ ,  $B = -1.475$ ,  $C = 1.515$ ,  $D = -0.273$ ,  $E = -0.515$ . Нагрузки на боковых поверхностях диска выберем равными  $P_{in} = 0.25$  и  $P_{out} = 0.4$ .

Из (22) несложно получить минимально возможное значение эквивалентного напряжения (15) в диске: для указанных выше параметров оно составляет  $\min(\tilde{\sigma}_{eq}) \cong 0.581$ , а соответствующее ему значение геометрического параметра  $\delta \cong 0.571$ . С другой стороны, для условия Мизеса  $\min(\tilde{\sigma}_{eq}) \cong 0.346$ , а соответствующий параметр  $\delta \cong 0.468$ . При  $\tilde{\sigma}_{eq} < \min(\tilde{\sigma}_{eq})$  решение не существует. На рис. 2 представлено распределение напряжений в диске, равнопрочном по условию Цая–Ву (10), (11), а также профили такого диска для нескольких значений скорости вращения. Аналогичные графики для условия Мизеса (10), (13) показаны на рис. 3. Из рис. 2 и 3 видно, что эффекты анизотропии и асимметрии оказывают существенное влияние на геометрию равнопрочного вращающегося диска и напряженное состояние в нем. В найденном решении скорость вращения  $\Omega$  влияет только на профиль диска и не

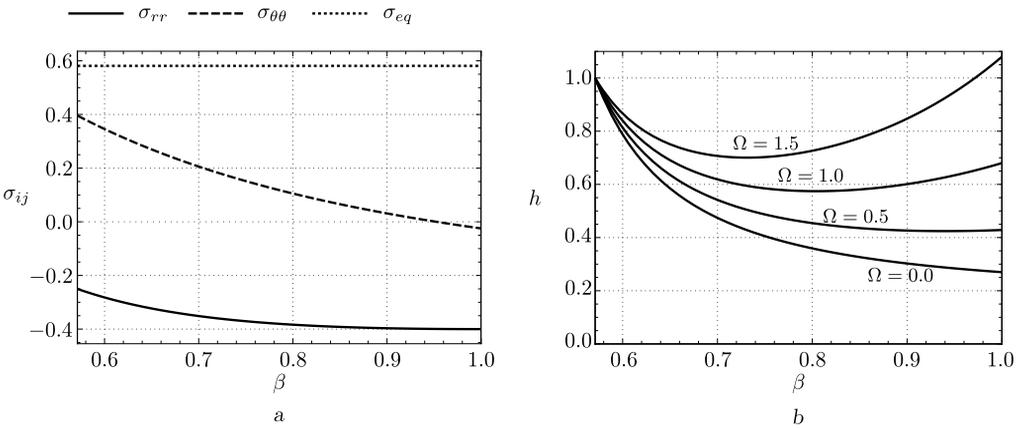


Рис. 2. Распределение напряжений в равнопрочном диске (а) и профили равнопрочного диска (б) для различных значений скорости вращения  $\Omega$  при использовании условия Цая–Ву

[Figure 2. Distribution of stress in the equi-strength disk (a) and the profiles of equi-strength disk (b) at various values of angular velocity  $\Omega$  based on Tsai–Wu failure criterion]

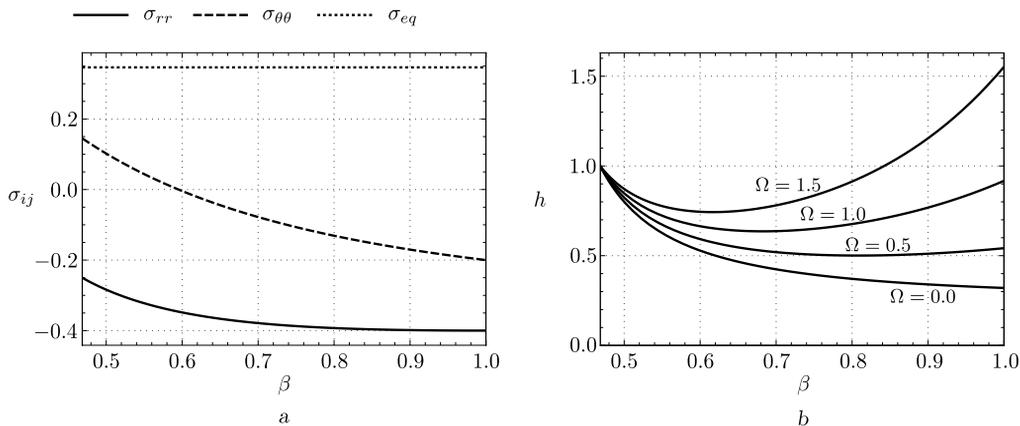


Рис. 3. Распределение напряжений в равнопрочном диске (а) и профили равнопрочного диска (б) для различных значений скорости вращения  $\Omega$  при использовании условия Мизеса

[Figure 3. Distribution of stress in the equi-strength disk (a) and the profiles of equi-strength disk (b) at various values of angular velocity  $\Omega$  based on von Mises failure criterion]

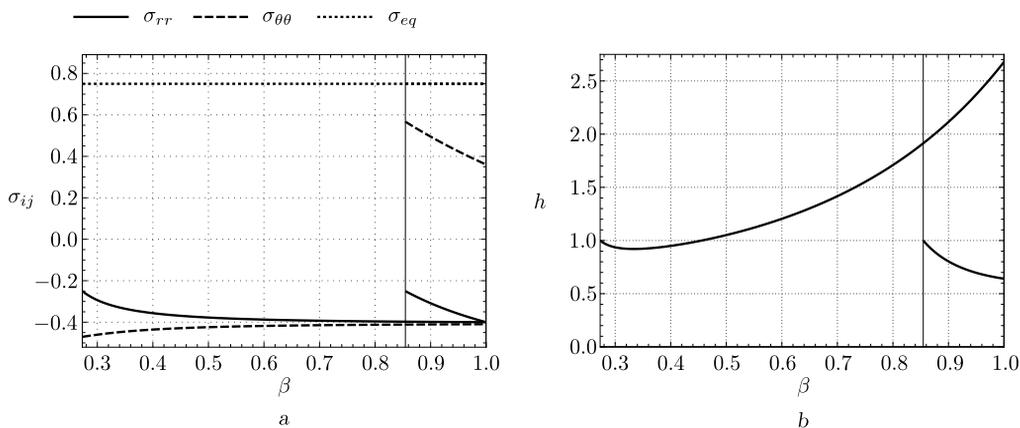


Рис. 4. Распределение напряжений в равнопрочном диске (а) и профили равнопрочного диска (б) для  $\bar{\sigma}_{eq} = 0.75$ ,  $\Omega = 1.0$  при использовании условия Цзя-Ву

[Figure 4. Distribution of stress in the equi-strength disk (a) and the profiles of equi-strength disk (b) for  $\bar{\sigma}_{eq} = 0.75$ ,  $\Omega = 1.0$  based on Tsai-Wu failure criterion]

влияет на распределение напряжений в нем (18), (23). Увеличение скорости вращения требует усиления диска в окрестности его внешнего контура (рис. 2 и 3). Значительное увеличение угловой скорости приводит к выходу решения за границы применимости (29).

Как уже было отмечено ранее, граничным условиям задачи можно удовлетворить четырьмя разными способами (25) и в некоторых случаях решение задачи будет неединственным. Рассмотрим желаемую величину эквивалентного напряжения в равнопрочном диске  $\bar{\sigma}_{eq} = 0.75$ . Из (22) следует, что  $(\varphi_\delta, \varphi_1) = (\varphi_\delta^1, \varphi_1^1) \cong (0.675, 0.953)$  и  $\delta \cong 0.273$ . Однако существует и второе решение, для которого  $(\varphi_\delta, \varphi_1) = (\varphi_\delta^2, \varphi_1^2) \cong (2.466, 2.188)$  и  $\delta \cong 0.855$ . Эти решения проиллюстрированы на рис. 4, где изображены графики напряжений

и профили диска при скорости вращения  $\Omega = 1.0$ . Видим, что полученные решения отличаются принципиальным образом: в первом решении оба напряжения отрицательны, а во втором — радиальное и тангенциальное напряжения имеют разный знак. Для проверки справедливости гипотезы о плоском напряженном состоянии предполагалось [8], что в (29)  $(r_{out}/h_{in})\Delta = 10$ . Установлено, что во всех представленных выше расчетах (рис. 2–4) полученные профили диска удовлетворяют условию (29).

**Заключение.** В настоящей работе найдено аналитическое решение, позволяющее для заданных нагрузок на внешнем и внутреннем контуре диска и скорости вращения построить геометрию диска равной прочности. В качестве критерия прочности применялось общее эллиптическое условие, которое позволяет описать анизотропию материала, а также его асимметрию при растяжении и сжатии. Установлено, что профиль равнопрочного диска может не существовать и может быть не единственным. В качестве примера рассмотрен критерий прочности Цая–Ву, широко используемый для композитных материалов. Сравнение с решением для условия Мизеса показало, что указанные эффекты оказывают существенное влияние на геометрию равнопрочного диска и напряженное состояние в нем. Найденное решение в частных случаях сводится к решениям для многих известных критериев прочности, а также к классическому решению Ю. Н. Работнова.

**Конкурирующие интересы.** Конкурирующих интересов не имею.

**Авторский вклад и ответственность.** Я несу полную ответственность за предоставление окончательной версии рукописи в печать. Окончательная версия рукописи мною одобрена.

**Финансирование.** Работа выполнена в рамках госзадания ХФИЦ ДВО РАН.

### Библиографический список

- Cherepanov G. P. Optimum shapes of elastic bodies: Equistrong wings of aircrafts and equistrong underground tunnels // *Phys. Mesomech.*, 2015. vol. 18, no. 4. pp. 391–401. EDN: X0WTHJ. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1029959915040116>.
- Работнов Ю. Н. *Механика деформируемого твердого тела*. М.: Наука, 1988. 712 с.
- Работнов Ю. Н. *Ползучесть элементов конструкций*. М.: Наука, 1966. 752 с.
- Gontarovskii V. P., Chebaevskii B. P. Profile design of uniform-strength disk by the mises strength rule // *Strength Mater.*, 1973. vol. 5, no. 10. pp. 1257–1259. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01129410>.
- Kai-yuan Y., Ping L. Equi-strength design of nonhomogeneous variable thickness high speed rotating disk under steady temperature field // *Appl. Math. Mech.*, 1986. vol. 7, no. 9. pp. 825–834. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01898124>.
- Hein K., Heinloo M. The design of nonhomogeneous equi-strength annular discs of variable thickness under internal and external pressures // *Int. J. Solids Struct.*, 1990. vol. 26, no. 5–6. pp. 617–630. DOI: [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(90\)90033-R](https://doi.org/10.1016/0020-7683(90)90033-R).
- Gau C.-Y., Manoochehri S. Optimal design of a nonhomogeneous annular disk under pressure loadings // *J. Mech. Des.*, 1994. vol. 116, no. 4. pp. 989–996. DOI: <https://doi.org/10.1115/1.2919509>.
- Alexandrov S., Rynkovskaya M., Jeng Y.-R. Design of equi-strength annular disks made of functionally graded materials // *Mech. Based Des. Struct. Mach.*, 2023. vol. 52, no. 9. pp. 7045–7062. DOI: <https://doi.org/10.1080/15397734.2023.2297241>.
- Danfelt E. L., Hewes S. A., Chou T.-W. Optimization of composite flywheel design // *Int. J. Mech. Sci.*, 1977. vol. 19, no. 2. pp. 69–78. DOI: [https://doi.org/10.1016/0020-7403\(77\)90001-7](https://doi.org/10.1016/0020-7403(77)90001-7).

10. Pardoen G. C., Nudenberg R. D., Swartout B. E. Achieving desirable stress states in thick rim rotating disks // *Int. J. Mech. Sci.*, 1981. vol. 23, no. 6. pp. 367–382. DOI: [https://doi.org/10.1016/0020-7403\(81\)90066-7](https://doi.org/10.1016/0020-7403(81)90066-7).
11. Jain R., Ramachandra K., Simha K. R. Y. Rotating anisotropic disc of uniform strength // *Int. J. Mech. Sci.*, 1999. vol. 41, no. 6. pp. 639–648. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0020-7403\(98\)00041-1](https://doi.org/10.1016/S0020-7403(98)00041-1).
12. Nie G. J., Batra R. C. Stress analysis and material tailoring in isotropic linear thermoelastic incompressible functionally graded rotating disks of variable thickness // *Compos. Struct.*, 2010. vol. 92, no. 3. pp. 720–729. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2009.08.052>.
13. Nie G. J., Zhong Z., Batra R. C. Material tailoring for orthotropic elastic rotating disks // *Compos. Sci. Technol.*, 2011. vol. 71, no. 3. pp. 406–414. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.compscitech.2010.12.010>.
14. Bhavikatti S. S., Ramakrishnan C. V. Optimum shape design of rotating disks // *Comput. Struct.*, 1980. vol. 11, no. 5. pp. 397–401. DOI: [https://doi.org/10.1016/0045-7949\(80\)90105-4](https://doi.org/10.1016/0045-7949(80)90105-4).
15. Sandgren E., Ragsdell K. M. Optimal flywheel design with a general thickness form representation // *J. Mech. Trans. Automation*, 1983. vol. 105, no. 3. pp. 425–433. DOI: <https://doi.org/10.1115/1.3267377>.
16. Genta G., Bassani D. Use of genetic algorithms for the design of rotors // *Meccanica*, 1995. vol. 30, no. 6. pp. 707–717. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00986575>.
17. Arslan M. A. Flywheel geometry design for improved energy storage using finite element analysis // *Mater. Des.*, 2008. vol. 29, no. 2. pp. 514–518. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.matdes.2007.01.020>.
18. Dems K., Turant J. Two approaches to the optimal design of composite flywheels // *Eng. Optim.*, 2009. vol. 41, no. 4. pp. 351–363. DOI: <https://doi.org/10.1080/03052150802506521>.
19. Ghotbi E., Dhingra A. K. A bilevel game theoretic approach to optimum design of flywheels // *Eng. Optim.*, 2012. vol. 44, no. 11. pp. 1337–1350. DOI: <https://doi.org/10.1080/0305215X.2011.637557>.
20. Hiroshima N., Hatta H., Koyama M., et al. Optimization of flywheel rotor made of three-dimensional composites // *Comput. Struct.*, 2015. vol. 131. pp. 304–311. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2015.04.041>.
21. Jiang L., Zhang W., Ma G. J., Wu C. W. Shape optimization of energy storage flywheel rotor // *Struct. Multidisc. Optim.*, 2017. vol. 55, no. 2. pp. 739–750. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00158-016-1516-0>.
22. Singh P., Chaudhary H. Optimal shape synthesis of a metallic flywheel using non-dominated sorting Jaya algorithm // *Soft. Comput.*, 2020. vol. 24, no. 9. pp. 6623–6634. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00500-019-04302-x>.
23. Yildirim V. The best grading pattern selection for the axisymmetric elastic response of pressurized inhomogeneous annular structures (sphere/cylinder/annulus) including rotation // *J. Braz. Soc. Mech. Sci. Eng.*, 2020. vol. 42, no. 2, 109. DOI: <https://doi.org/10.1007/s40430-020-2193-x>.
24. Kale V., Thomas M., Secanell M. On determining the optimal shape, speed, and size of metal flywheel rotors with maximum kinetic energy // *Struct. Multidisc. Optim.*, 2021. vol. 64, no. 3. pp. 1481–1499. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00158-021-02935-x>.
25. Kale V., Aage N., Secanell M. Augmented Lagrangian approach for multi-objective topology optimization of energy storage flywheels with local stress constraints // *Struct. Multidisc. Optim.*, 2023. vol. 66, no. 11, 231. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00158-023-03693-8>.
26. Kale V., Aage N., Secanell M. Stress constrained topology optimization of energy storage flywheels using a specific energy formulation // *J. Energy Storage*, 2023. vol. 61, 106733. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.est.2023.106733>.
27. Yan C., Liu C., Du H., et al. Topology optimization of turbine disk considering maximum stress prediction and constraints // *Chin. J. Aeronaut.*, 2023. vol. 36, no. 8. pp. 182–206. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cja.2023.03.019>.

28. Madan R., Bhowmick S. Optimum FG Rotating Disk of Constant Mass: Lightweight and Economical alternatives Based on Limit Angular Speed // *Iran. J. Sci. Technol. Trans. Mech. Eng.*, 2023. vol. 47, no. 3. pp. 1019–1033. DOI: <https://doi.org/10.1007/s40997-022-00553-6>.
29. Rahman S., Ali M. A novel approach to optimize material distributions of rotating functionally graded circular disk under minimum and prescribed stresses // *Mater. Today Commun.*, 2023. vol. 36, 106620. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.mtcomm.2023.106620>.
30. Abdalla H. M. A., Boussaa D., Sburlati R., Casagrande D. On the best volume fraction distributions for functionally graded cylinders, spheres and disks – A pseudospectral approach // *Comput. Struct.*, 2023. vol. 311, 116784. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2023.116784>.
31. Tsai S. W., Wu E. M. A general theory of strength for anisotropic materials // *J. Compos. Mater.*, 1971. vol. 5, no. 1. pp. 58–80. DOI: <https://doi.org/10.1177/002199837100500106>.
32. Gol'denblat I. I., Kopnov V. A. Strength of glass-reinforced plastics in the complex stress state // *Polymer Mechanics*, 1965. vol. 1, no. 2. pp. 54–59. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00860685>.
33. Li S., Sitnikova E., Liang Y., Kaddour A.-S. The Tsai–Wu failure criterion rationalised in the context of UD composites // *Compos. A: Appl. Sci. Manuf.*, 2017. vol. 102. pp. 207–217. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.compositesa.2017.08.007>.
34. Chen X., Sun X., Chen P., et al. Rationalized improvement of Tsai–Wu failure criterion considering different failure modes of composite materials // *Comput. Struct.*, 2021. vol. 256, 113120. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2020.113120>.
35. Hill R. A theory of the yielding and plastic flow of anisotropic metals // *Proc. R. Soc. Lond. A*, 1948. vol. 193, no. 1033. pp. 281–297. DOI: <https://doi.org/10.1098/rspa.1948.0045>.
36. Ganczarski A. W., Skrzypek J. J. Constraints on the applicability range of Hill's criterion: Strong orthotropy or transverse isotropy // *Acta Mech.*, 2014. vol. 225, no. 9. pp. 2563–2582. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00707-014-1089-1>.
37. Hu L. W., Marin J. Anisotropic loading functions for combined stresses in the plastic range // *J. Appl. Mech.*, 1955. vol. 22, no. 1. pp. 77–85. DOI: <https://doi.org/10.1115/1.4010973>.
38. Caddell R. M., Raghava R. S., Atkins A. G. A yield criterion for anisotropic and pressure dependent solids such as oriented polymers // *J. Mater. Sci.*, 1973. vol. 8, no. 11. pp. 1641–1646. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00754900>.
39. Chen L., Wen W., Cui H. Generalization of Hill's yield criterion to tension-compression asymmetry materials // *Sci. China Technol. Sci.*, 2013. vol. 56, no. 1. pp. 89–97. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11431-012-5037-9>.
40. Kim J. H., Lee M.-G., Chung K., et al. Anisotropic-asymmetric yield criterion and anisotropic hardening law for composite materials: Theory and formulations // *Fiber. Polym.*, 2006. vol. 7, no. 1. pp. 42–50. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF02933601>.

MSC: 74B05, 74G75

## The influence of anisotropy and strength-differential effect on the design of equi-strength rotating disk of variable thickness

*A. N. Prokudin*

Institute of Machinery and Metallurgy,  
Khabarovsk Federal Research Center, Far-East Branch of RAS,  
1, Metallurgov st., Komsomolsk-on-Amur, 681005, Russian Federation.

### Abstract

The work is devoted to the calculation of the geometry of an equi-strength annular disk taking into account the anisotropy and strength differential effect. The disk is under centrifugal forces and tractions on the inner and outer surfaces. The problem statement is based on the anisotropic elasticity theory and the plane stress assumption. General quadratic failure criterion is used, the only requirement for which is ellipticity. In particular cases, the used condition is reduced to many known strength criteria (Tsai–Wu, Hill, Drucker–Prager, von Mises, etc.).

The governing system of equations consists of the compatibility equation, the equilibrium equation and the condition of constant equivalent stress. This condition is satisfied by a trigonometric substitution and an introduced auxiliary function. The two remaining equations are solved sequentially in an implicit form, in which the auxiliary function is treated as independent variable. The found analytical solution allows to construct the geometry of the disk (profile and inner radius of the disk) of equal strength, and also to determine the distribution of stresses in it. It is established that the solution may not exist and be non-unique. In particular cases, the solution is reduced to solutions for many known failure criteria, as well as to the classical solution of Rabotnov. Comparison of calculations obtained for the Tsai–Wu and von Mises criteria showed that anisotropy and different strengths under tension and compression can have a significant effect on the geometry of a disk of equal strength and the stress state in it.

**Keywords:** rotating disk, equi-strength design, anisotropy, strength differential effect, Tsai–Wu failure criterion.

Received: 7<sup>th</sup> August, 2024 / Revised: 9<sup>th</sup> November, 2024 /

---

### Mechanics of Solids

#### Research Article

© The Author(s), 2024

© Samara State Technical University, 2024 (Compilation, Design, and Layout)

© The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

#### Please cite this article in press as:

Prokudin A. N. The influence of anisotropy and strength-differential effect on the design of equi-strength rotating disk of variable thickness, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2024, vol. 28, no. 4, pp. 701–720. EDN: NNXJKY. DOI: 10.14498/vsgtu2108 (In Russian).

#### Author's Details:

Aleksandr N. Prokudin  <https://orcid.org/0000-0002-5156-424X>

Cand. Tech. Sci.; Senior Researcher; Lab. of Problems of Materials and Products Construction and Processing; e-mail: [sunbeam\\_85@mail.ru](mailto:sunbeam_85@mail.ru)

**Competing interests.** I have no competing interests.

**Authors' contributions and responsibilities.** I take full responsibility for providing the final version of the manuscript for publication. The final version of the manuscript has been approved by me.

**Funding.** The study was performed within the framework of the State Contract of the Khabarovsk Federal Research Center of the Far-East Branch of the Russian Academy of Sciences.

## References

1. Cherepanov G. P. Optimum shapes of elastic bodies: Equistrong wings of aircrafts and equistrong underground tunnels, *Phys. Mesomech.*, 2015, vol. 18, no. 4, pp. 391–401. EDN: X0WTHJ. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1029959915040116>.
2. Rabotnov Yu. N. *Mekhanika deformiruemogo tverdogo tela* [Mechanics of a Deformable Rigid Body]. Moscow, Nauka, 1988, 712 pp. (In Russian)
3. Rabotnov Yu. N. *Creep Problems in Structural Members*, North-Holland Series in Applied Mathematics and Mechanics, vol. 7. Amsterdam, London, North-Holland Publ. Co., 1969, xiv+822 pp.
4. Gontarovskii V. P., Chebaevskii B. P. Profile design of uniform-strength disk by the mises strength rule, *Strength Mater.*, 1973, vol. 5, no. 10, pp. 1257–1259. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01129410>.
5. Kai-yuan Y., Ping L. Equi-strength design of nonhomogeneous variable thickness high speed rotating disk under steady temperature field, *Appl. Math. Mech.*, 1986, vol. 7, no. 9, pp. 825–834. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01898124>.
6. Hein K., Heinloo M. The design of nonhomogeneous equi-strength annular discs of variable thickness under internal and external pressures, *Int. J. Solids Struct.*, 1990, vol. 26, no. 5–6, pp. 617–630. DOI: [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(90\)90033-R](https://doi.org/10.1016/0020-7683(90)90033-R).
7. Gau C.-Y., Manoochchri S. Optimal design of a nonhomogeneous annular disk under pressure loadings, *J. Mech. Des.*, 1994, vol. 116, no. 4, pp. 989–996. DOI: <https://doi.org/10.1115/1.2919509>.
8. Alexandrov S., Rynkovskaya M., Jeng Y.-R. Design of equi-strength annular disks made of functionally graded materials, *Mech. Based Des. Struct. Mach.*, 2023, vol. 52, no. 9, pp. 7045–7062. DOI: <https://doi.org/10.1080/15397734.2023.2297241>.
9. Danfelt E. L., Hewes S. A., Chou T.-W. Optimization of composite flywheel design, *Int. J. Mech. Sci.*, 1977, vol. 19, no. 2, pp. 69–78. DOI: [https://doi.org/10.1016/0020-7403\(77\)90001-7](https://doi.org/10.1016/0020-7403(77)90001-7).
10. Pardoen G. C., Nudenberg R. D., Swartout B. E. Achieving desirable stress states in thick rim rotating disks, *Int. J. Mech. Sci.*, 1981, vol. 23, no. 6, pp. 367–382. DOI: [https://doi.org/10.1016/0020-7403\(81\)90066-7](https://doi.org/10.1016/0020-7403(81)90066-7).
11. Jain R., Ramachandra K., Simha K. R. Y. Rotating anisotropic disc of uniform strength, *Int. J. Mech. Sci.*, 1999, vol. 41, no. 6, pp. 639–648. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0020-7403\(98\)00041-1](https://doi.org/10.1016/S0020-7403(98)00041-1).
12. Nie G. J., Batra R. C. Stress analysis and material tailoring in isotropic linear thermoelastic incompressible functionally graded rotating disks of variable thickness, *Compos. Struct.*, 2010, vol. 92, no. 3, pp. 720–729. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2009.08.052>.
13. Nie G. J., Zhong Z., Batra R. C. Material tailoring for orthotropic elastic rotating disks, *Compos. Sci. Technol.*, 2011, vol. 71, no. 3, pp. 406–414. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.compscitech.2010.12.010>.

14. Bhavikatti S. S., Ramakrishnan C. V. Optimum shape design of rotating disks, *Comput. Struct.*, 1980, vol. 11, no. 5, pp. 397–401. DOI: [https://doi.org/10.1016/0045-7949\(80\)90105-4](https://doi.org/10.1016/0045-7949(80)90105-4).
15. Sandgren E., Ragsdell K. M. Optimal flywheel design with a general thickness form representation, *J. Mech. Trans. Automation*, 1983, vol. 105, no. 3, pp. 425–433. DOI: <https://doi.org/10.1115/1.3267377>.
16. Genta G., Bassani D. Use of genetic algorithms for the design of rotors, *Meccanica*, 1995, vol. 30, no. 6, pp. 707–717. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00986575>.
17. Arslan M. A. Flywheel geometry design for improved energy storage using finite element analysis, *Mater. Des.*, 2008, vol. 29, no. 2, pp. 514–518. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.matdes.2007.01.020>.
18. Dems K., Turant J. Two approaches to the optimal design of composite flywheels, *Eng. Optim.*, 2009, vol. 41, no. 4, pp. 351–363. DOI: <https://doi.org/10.1080/03052150802506521>.
19. Ghotbi E., Dhingra A. K. A bilevel game theoretic approach to optimum design of flywheels, *Eng. Optim.*, 2012, vol. 44, no. 11, pp. 1337–1350. DOI: <https://doi.org/10.1080/0305215X.2011.637557>.
20. Hiroshima N., Hatta H., Koyama M., et al. Optimization of flywheel rotor made of three-dimensional composites, *Comput. Struct.*, 2015, vol. 131, pp. 304–311. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2015.04.041>.
21. Jiang L., Zhang W., Ma G. J., Wu C. W. Shape optimization of energy storage flywheel rotor, *Struct. Multidisc. Optim.*, 2017, vol. 55, no. 2, pp. 739–750. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00158-016-1516-0>.
22. Singh P., Chaudhary H. Optimal shape synthesis of a metallic flywheel using non-dominated sorting Jaya algorithm, *Soft. Comput.*, 2020, vol. 24, no. 9, pp. 6623–6634. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00500-019-04302-x>.
23. Yıldırım V. The best grading pattern selection for the axisymmetric elastic response of pressurized inhomogeneous annular structures (sphere/cylinder/annulus) including rotation, *J. Braz. Soc. Mech. Sci. Eng.*, 2020, vol. 42, no. 2, 109. DOI: <https://doi.org/10.1007/s40430-020-2193-x>.
24. Kale V., Thomas M., Secanell M. On determining the optimal shape, speed, and size of metal flywheel rotors with maximum kinetic energy, *Struct. Multidisc. Optim.*, 2021, vol. 64, no. 3, pp. 1481–1499. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00158-021-02935-x>.
25. Kale V., Aage N., Secanell M. Augmented Lagrangian approach for multi-objective topology optimization of energy storage flywheels with local stress constraints, *Struct. Multidisc. Optim.*, 2023, vol. 66, no. 11, 231. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00158-023-03693-8>.
26. Kale V., Aage N., Secanell M. Stress constrained topology optimization of energy storage flywheels using a specific energy formulation, *J. Energy Storage*, 2023, vol. 61, 106733. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.est.2023.106733>.
27. Yan C., Liu C., Du H., et al. Topology optimization of turbine disk considering maximum stress prediction and constraints, *Chin. J. Aeronaut.*, 2023, vol. 36, no. 8, pp. 182–206. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cja.2023.03.019>.
28. Madan R., Bhowmik S. Optimum FG Rotating Disk of Constant Mass: Lightweight and Economical alternatives Based on Limit Angular Speed, *Iran. J. Sci. Technol. Trans. Mech. Eng.*, 2023, vol. 47, no. 3, pp. 1019–1033. DOI: <https://doi.org/10.1007/s40997-022-00553-6>.
29. Rahman S., Ali M. A novel approach to optimize material distributions of rotating functionally graded circular disk under minimum and prescribed stresses, *Mater. Today Commun.*, 2023, vol. 36, 106620. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.mtcomm.2023.106620>.
30. Abdalla H. M. A., Boussaa D., Sburlati R., Casagrande D. On the best volume fraction distributions for functionally graded cylinders, spheres and disks – A pseudospectral approach, *Comput. Struct.*, 2023, vol. 311, 116784. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2023.116784>.

31. Tsai S. W., Wu E. M. A general theory of strength for anisotropic materials, *J. Compos. Mater.*, 1971, vol. 5, no. 1, pp. 58–80. DOI: <https://doi.org/10.1177/002199837100500106>.
32. Gol'denblat I. I., Kopnov V. A. Strength of glass-reinforced plastics in the complex stress state, *Polymer Mechanics*, 1965, vol. 1, no. 2, pp. 54–59. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00860685>.
33. Li S., Sitnikova E., Liang Y., Kaddour A.-S. The Tsai–Wu failure criterion rationalised in the context of UD composites, *Compos. A: Appl. Sci. Manuf.*, 2017, vol. 102, pp. 207–217. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.compositesa.2017.08.007>.
34. Chen X., Sun X., Chen P., et al. Rationalized improvement of Tsai–Wu failure criterion considering different failure modes of composite materials, *Comput. Struct.*, 2021, vol. 256, 113120. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2020.113120>.
35. Hill R. A theory of the yielding and plastic flow of anisotropic metals, *Proc. R. Soc. Lond. A*, 1948, vol. 193, no. 1033, pp. 281–297. DOI: <https://doi.org/10.1098/rspa.1948.0045>.
36. Ganczarski A. W., Skrzypek J. J. Constraints on the applicability range of Hill's criterion: Strong orthotropy or transverse isotropy, *Acta Mech.*, 2014, vol. 225, no. 9, pp. 2563–2582. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00707-014-1089-1>.
37. Hu L. W., Marin J. Anisotropic loading functions for combined stresses in the plastic range, *J. Appl. Mech.*, 1955, vol. 22, no. 1, pp. 77–85. DOI: <https://doi.org/10.1115/1.4010973>.
38. Caddell R. M., Raghava R. S., Atkins A. G. A yield criterion for anisotropic and pressure dependent solids such as oriented polymers, *J. Mater. Sci.*, 1973, vol. 8, no. 11, pp. 1641–1646. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00754900>.
39. Chen L., Wen W., Cui H. Generalization of Hill's yield criterion to tension-compression asymmetry materials, *Sci. China Technol. Sci.*, 2013, vol. 56, no. 1, pp. 89–97. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11431-012-5037-9>.
40. Kim J. H., Lee M.-G., Chung K., et al. Anisotropic-asymmetric yield criterion and anisotropic hardening law for composite materials: Theory and formulations, *Fiber. Polym.*, 2006, vol. 7, no. 1, pp. 42–50. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF02933601>.



УДК 539.374

## Стохастические сверхупругие свойства материалов с фазовыми превращениями

*Л. А. Сараев*

Самарский национальный исследовательский университет  
имени академика С. П. Королева,  
Россия, 443086, Самара, ул. Московское ш., 34.

### Аннотация

Проведено исследование влияния стохастических изотермических фазовых превращений в нестабильном материале на его сверхупругое упрочнение.

Получено стохастическое дифференциальное уравнение, описывающее динамику образования и роста объема новой фазы, а также ее взаимодействие с исходной фазой в зависимости от уровня необратимых структурных деформаций.

Установлены макроскопические определяющие соотношения для нестабильного материала, учитывающие стохастическую природу фазовых превращений и зависимость от структурных деформаций. На основе этих соотношений вычислены эффективные модули упругости материала.

Сформулированы стохастические дифференциальные уравнения для прямых и обратных фазовых переходов.

Результаты численного моделирования демонстрируют высокую согласованность с экспериментальными данными, подтверждая адекватность предложенной модели.

**Ключевые слова:** фазы, макроскопические свойства, модули упругости, статистическая однородность, структура, структурные деформации, фазовый переход, эргодичность, эффективные соотношения.

Получение: 5 ноября 2024 г. / Исправление: 16 декабря 2024 г. /

Принятие: 20 декабря 2024 г. / Публикация онлайн: 25 декабря 2024 г.

---

### Механика деформируемого твердого тела

#### Научная статья

© Коллектив авторов, 2024

© СамГТУ, 2024 (составление, дизайн, макет)

📄 🌐 Контент публикуется на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

#### Образец для цитирования

Сараев Л. А. Стохастические сверхупругие свойства материалов с фазовыми превращениями // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2024. Т. 28, № 4. С. 721–739. EDN: NOXAGA. DOI: 10.14498/vsgtu2129.

#### Сведения об авторе

Леонид Александрович Сараев ✉ <https://orcid.org/0000-0003-3625-5921>

доктор физико-математических наук, профессор; профессор; кафедра математики и бизнес-информатики; e-mail: [saraev\\_leo@mail.ru](mailto:saraev_leo@mail.ru)

**Введение.** Материалы, обладающие эффектом памяти формы и сверхупругости, широко применяются в современном машиностроении, теплоэнергетическом комплексе, медицине и других отраслях экономики.

Теоретическое прогнозирование физико-механических свойств таких материалов представляет собой актуальное направление современной механики деформируемого твердого тела.

Нелинейное упрочнение при нагрузке и нелинейное разупрочнение при разгрузке изначально упругих формозапоминающих металлов и сплавов объясняется внутренними фазовыми превращениями, в результате которых в сплошной среде образуется и развивается стохастическая фазовая структура.

Адекватная оценка механических свойств таких материалов, их сверхупругого поведения и эффектов памяти формы требует разработки стохастических структурных математических моделей превращений фазовых структур.

Существует ряд подходов к решению подобных задач. Например, в рамках феноменологического подхода разработаны математические модели, в которых механическое поведение материалов с памятью формы описывается реологическими соотношениями, а непрерывное изменение структуры среды в условиях фазовых превращений задается набором параметров определяющих соотношений, определяемых экспериментально [1–5].

В рамках более сложного структурно-феноменологического подхода исходными данными являются физико-механические константы и геометрические особенности взаимного расположения фаз в пространстве. В этом случае макроскопические определяющие уравнения для сред с памятью формы устанавливаются методами механики композиционных материалов [6–17].

В настоящем исследовании предполагается, что под воздействием внешних нагрузок из-за трансформации кристаллической и доменной структуры материала возникают необратимые структурные деформации. В объеме старой фазы образуются и развиваются объемы компонентов новой фазы, причем в процессе фазовых превращений не только изменяются объемы фаз, но и случайным образом трансформируется связность их компонентов. Уровень структурных деформаций при этом ограничен предельными сдвигами двойниковых доменов.

Целью данной работы является разработка новых стохастических структурно-феноменологических моделей сверхупругого упрочнения материалов с нестабильной фазовой структурой.

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим однородный упругий материал, в котором под воздействием внешних напряжений образуются зародыши новой фазы сферической формы, сопровождающиеся фазовым переходом первого рода. Объем возникающей и развивающейся новой фазы  $V_q$  и объем старой фазы  $V_p$  составляют полный объем материала  $V$ , ограниченный поверхностью  $S$ .

Вытеснение старой фазы новой под воздействием внешних нагрузок, вызванное перестройкой кристаллической и доменной структуры материала

$$\begin{aligned} V_q &\rightarrow V, \\ V_p &\rightarrow V - V_q \rightarrow 0, \end{aligned}$$

сопровождается возникновением необратимых структурных деформаций  $\omega_{ij}(\mathbf{r})$ , ограниченных предельными сдвигами двойниковых доменов:

$$0 \leq \omega_{ij} \leq \Omega_{ij}.$$

Здесь  $\Omega_{ij}$  — максимальный уровень структурных деформаций, удовлетворяющий условию несжимаемости  $\omega_{ss}(\mathbf{r}) = 0$ .

Закон Гука для компонент рассматриваемой среды имеет вид

$$\begin{cases} \sigma_{ij} = 2\mu_p \varepsilon_{ij} + \delta_{ij} \lambda_p \varepsilon_{ss}, & \mathbf{r} \in V_p, \\ \sigma_{ij} = 2\mu_q (\varepsilon_{ij} - \omega_{ij}) + \delta_{ij} \lambda_q \varepsilon_{ss}, & \mathbf{r} \in V_q. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь  $\sigma_{ij}$ ,  $\varepsilon_{ij}$  — тензоры напряжений и полных деформаций;  $\mu_s$ ,  $\lambda_s$  — параметры Ламе фаз.

Уровни напряжений, соответствующие началу прямого и обратного фазовых переходов, задаются поверхностями линейного кинематического упрочнения в шестимерном пространстве напряжений:

$$\begin{cases} (s_{ij} - 2n_q \omega_{ij})(s_{ij} - 2n_q \omega_{ij}) = s_q^2, & V_q \rightarrow V, \\ (s_{ij} - 2n_p \omega_{ij})(s_{ij} - 2n_p \omega_{ij}) = s_p^2, & V_p \rightarrow V. \end{cases} \quad (2)$$

Здесь  $s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \sigma_{ss}$  — девиаторные компоненты тензора напряжений;  $s_p$ ,  $s_k$  — пределы прямого и обратного фазовых переходов;  $n_p$ ,  $n_k$  — коэффициенты линейного упрочнения двойниковых доменов соответственно. Величины  $s_k$  и  $n_k$  зависят от температуры, а их численные значения задают тип поведения неустойчивой среды. Это может быть либо сверхупругое поведение образцов материала, либо деформирование с эффектом «памяти формы», либо обычное пластическое течение.

Следует отметить, что коэффициенты  $n_q$  и  $n_p$  описывают линейное сопротивление деформациям сдвига двойниковых доменов и являются «вторыми модулями упругости» фаз за пределами прямого и обратного фазовых переходов.

Особенности геометрии внутренней структуры неустойчивого материала могут быть описаны случайными индикаторными функциями координат  $\varkappa_p(\mathbf{r})$  и  $\varkappa_q(\mathbf{r})$ , каждая из которых принимает значение 1 внутри объемов  $V_p$ ,  $V_q$  и 0 вне этих областей. Очевидно, выполняется тождество  $\varkappa_p(\mathbf{r}) + \varkappa_q(\mathbf{r}) \equiv 1$ .

С помощью этих функций закон Гука (1) принимает вид

$$\begin{aligned} s_{ij}(\mathbf{r}) &= 2(\mu_p \varkappa_p(\mathbf{r}) + \mu_q \varkappa_q(\mathbf{r})) e_{ij}(\mathbf{r}) - 2\mu_q \varkappa_q(\mathbf{r}) \omega_{ij}(\mathbf{r}), \\ \sigma_{ss}(\mathbf{r}) &= 3(K_p \varkappa_p + K_q \varkappa_q(\mathbf{r})) \varepsilon_{ss}(\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь  $e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \varepsilon_{ss}$  — девиаторные компоненты тензора полных деформаций,  $K_k = \frac{2}{3} \mu_k + \lambda_k$ ,  $k \in \{p, q\}$  — объемные модули упругости фаз,  $\mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3)$  — радиус-вектор координат. Для определенности принимается, что  $\mu_p \leq \mu_q$  и  $K_p \leq K_q$ .

Хаотический характер образования и развитие в полном объеме  $V$  сферических зародышей новой фазы позволяет отнести индикаторные функции  $\varkappa_s(\mathbf{r})$ , компоненты тензоров напряжений  $\sigma_{ij}(\mathbf{r})$ , полных деформаций  $\varepsilon_{ij}(\mathbf{r})$

и структурных деформаций  $\omega_{ij}(\mathbf{r})$  к статистически однородным и эргодическим полям. Математические ожидания этих величин и их средние значения по полному объему и объемам фаз совпадают [18–20]:

$$\langle f \rangle = \frac{1}{V} \int_V f(\mathbf{r}) d\mathbf{r}, \quad \langle f \rangle_p = \frac{1}{V_p} \int_{V_p} f(\mathbf{r}) d\mathbf{r}, \quad \langle f \rangle_q = \frac{1}{V_q} \int_{V_q} f(\mathbf{r}) d\mathbf{r};$$

здесь угловыми скобками обозначена операция осреднения.

Напряженно-деформированное состояние образца, изготовленного из неустойчивого материала, может быть представлено в виде макроскопических определяющих уравнений, устанавливающих связь между макроскопическими напряжениями  $\langle \sigma_{ij} \rangle$ , полными деформациями  $\langle \varepsilon_{ij} \rangle$  и структурными деформациями  $\langle \omega_{ij} \rangle$ . Такие макроскопические определяющие уравнения получаются в результате усреднения по полному объему локального закона Гука (3):

$$\begin{cases} \langle s_{ij} \rangle = 2\mu_p \langle e_{ij} \rangle + 2(\mu_q - \mu_p) c_q \langle e_{ij} \rangle_q - 2\mu_q c_q \langle \omega_{ij} \rangle_q, \\ \langle \sigma_{ss} \rangle = 3K_p \langle \varepsilon_{ss} \rangle + 3(K_q - K_p) c_q \langle \varepsilon_{ss} \rangle_q. \end{cases} \quad (4)$$

Здесь  $c_p = V_p/V$ ,  $c_q = V_q/V$  — объемные содержания фаз.

Соотношения (4) показывают, что установление макроскопического закона Гука требует исключить усредненные по объему  $V_q$  деформации  $\langle \varepsilon_{ij} \rangle_q$ , выразив их через макроскопические деформации  $\langle \varepsilon_{ij} \rangle$ .

Для этого к локальному закону Гука (3) следует присоединить систему уравнений равновесия

$$\sigma_{is,s}(\mathbf{r}) = 0 \quad (5)$$

и соотношения Коши

$$2\varepsilon_{ij}(\mathbf{r}) = u_{i,j}(\mathbf{r}) + u_{j,i}(\mathbf{r}), \quad (6)$$

связывающие компоненты тензора деформаций с компонентами вектора перемещений  $u_i(\mathbf{r})$ .

Граничными условиями такой системы являются условия отсутствия флуктуаций величин на поверхности  $S$  полного объема  $V$ :

$$Z(\mathbf{r})|_{\mathbf{r} \in S} = \langle Z \rangle. \quad (7)$$

**2. Эффективные модули упругости неустойчивой микронеоднородной среды.** Введем модули упругости тела сравнения  $\mu$  и  $K$ , определяющие тип связности составляющих компонентов микронеоднородной среды. В самом общем случае величины  $\mu$  и  $K$  являются функциями объемных содержаний компонентов и могут быть представлены соотношениями [19]

$$\mu = v_p(c_p)\mu_p + v_q(c_q)\mu_q, \quad K = v_p(c_p)K_p + v_q(c_q)K_q. \quad (8)$$

Здесь величины  $v_p$  и  $v_q$  — монотонно возрастающие функции, описывающие связность составляющих компонентов композитов и удовлетворяющие условиям

$$\begin{aligned} 0 \leq v_p(c_p) \leq 1, \quad v_p(0) = 0, \quad v_p(1) = 1, \\ 0 \leq v_q(c_q) \leq 1, \quad v_q(0) = 0, \quad v_q(1) = 1, \\ v_p(c_p) + v_q(c_q) \equiv 1. \end{aligned}$$

Исключая из системы уравнений (3), (5) и (6) компоненты тензоров напряжений и деформаций, получаем систему уравнений равновесия микронеоднородной среды в перемещениях [18]:

$$\mu u'_{i,ss}(\mathbf{r}) + (\mu + \lambda) u'_{s,si}(\mathbf{r}) - \tau'_{is,s}(\mathbf{r}) = 0. \quad (9)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \tau_{ij} &= t_{ij} + \frac{1}{3} \delta_{ij} \tau_{ss}, \\ t_{ij} &= -2\mu((m_p - 1)\chi_p + (m_q - 1)\chi_q) e_{ij} + 2\mu_q \chi_q \omega_{ij}, \\ \tau_{ss} &= -3K((k_p - 1)\chi_p + (k_q - 1)\chi_q) \varepsilon_{ss}; \end{aligned} \quad (10)$$

штрихами обозначены  $Z' = Z - \langle Z \rangle$  — флуктуации величин в полном объеме  $V$ ;  $m_p = \mu_p/\mu$ ,  $m_q = \mu_q/\mu$ ,  $k_p = K_p/K$ ,  $k_q = K_q/K$ .

С помощью тензора Грина

$$\mathbf{G}_{ik}(\mathbf{r}) = \frac{1}{8\pi\mu} \left( \delta_{ik} r_{,ss} - \frac{3K + 5\mu}{3K + 8\mu} r_{,ik} \right), \quad r = |\mathbf{r}|,$$

систему уравнений (9), (10) с граничными условиями (7) заменим системой интегральных уравнений [18–20]:

$$\varepsilon'_{ij}(\mathbf{r}) = \int_V \mathbf{G}_{ik,lj}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \tau'_{kl}(\mathbf{r}_1) d\mathbf{r}_1. \quad (11)$$

Величины  $\langle \varepsilon_{ij} \rangle_q$  находятся из известного соотношения [20]

$$\langle \varepsilon_{ij} \rangle_q = \langle \varepsilon_{ij} \rangle + c_q^{-1} \langle \chi' \varepsilon'_{ij} \rangle. \quad (12)$$

Подстановка уравнений (11) в соотношения (12) и использование свойства изотропности индикаторных функций  $\chi_r(\mathbf{r})$  дает

$$\begin{aligned} \langle e_{ij} \rangle_q &= (1 + \alpha(m_p - 1)) \xi \langle e_{ij} \rangle + \alpha m_q c_p \xi \langle \omega_{ij} \rangle_q, \\ \langle \varepsilon_{ss} \rangle_q &= (1 + \gamma(k_p - 1)) \eta \langle \varepsilon_{ss} \rangle. \end{aligned} \quad (13)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{1}{1 + \alpha((m_p - 1) + c_p(m_q - m_p))}, & \eta &= \frac{1}{1 + \gamma((k_p - 1) + c_p(k_q - k_p))}, \\ \alpha &= \frac{2}{15} \frac{4 - 5\nu}{1 - \nu}, & \gamma &= \frac{1}{3} \frac{1 + \nu}{1 - \nu}, & \nu &= \frac{1}{2} \frac{3K - 2\mu}{3K + 2\mu}. \end{aligned}$$

Подставляя формулы (13) в соотношения (4), находим макроскопический закон Гука:

$$\langle s_{ij} \rangle = 2\mu^* \langle e_{ij} \rangle - 2\mu^\omega \langle \omega_{ij} \rangle, \quad \langle \sigma_{ss} \rangle = 3K^* \langle \varepsilon_{ss} \rangle.$$

Макроскопические структурные деформации  $\langle \omega_{ij} \rangle$  выражаются через макроскопические остаточные деформации  $\langle e_{ij}^* \rangle$ , возникающие при снятии внешних нагрузок с поверхности  $S$  объема  $V$ :

$$\langle s_{ij} \rangle = 2\mu^* (\langle e_{ij} \rangle - \langle e_{ij}^* \rangle), \quad \langle \sigma_{ss} \rangle = 3K^* \langle \varepsilon_{ss} \rangle, \quad \langle e_{ij}^* \rangle = \frac{\mu^\omega}{\mu^*} \langle \omega_{ij} \rangle. \quad (14)$$

Здесь

$$\begin{aligned}\mu^* &= \mu(m_p + c_q(m_q - m_p)(1 + \alpha(m_p - 1))\xi), \\ K^* &= K(k_p + c_q(k_q - k_p)(1 + \gamma(k_p - 1))\eta), \\ \mu^\omega &= \mu_q(1 - \alpha c_p(m_q - m_p)\xi).\end{aligned}\tag{15}$$

Процесс фазовых превращений в нестабильном материале описывается с помощью соотношений (8) и величины  $v_q$ . Его можно условно разделить на три этапа.

На первом этапе при малых объемных содержаниях новой фазы нестабильного материала возникающие включения-зародыши практически не влияют друг на друга. Связность между новой и старой фазами на этом этапе минимальна, а взаимодействием между зародышами можно пренебречь. В этом случае функция  $v_q(c_q)$  принимает значения, близкие к нулю, а основной вклад в несущую способность материала вносит старая фаза, содержащая хаотически распределенные включения-зародыши новой фазы.

На втором этапе с ростом объемной концентрации новой фазы  $c_q$  и увеличением значений функции  $v_q(c_q)$  взаимодействие между включениями-зародышами усиливается. Они образуют группы и структуры, формирующие в конечном итоге взаимопроникающие каркасы фазовой матричной смеси.

На третьем этапе при значениях  $c_q$  и  $v_q(c_q)$ , близких к единице, функциональные роли старой и новой фаз меняются. Новая фаза  $V_q$  становится связующей матрицей, а старая фаза  $V_p$  сохраняется в виде изолированных включений, взаимодействием которых можно пренебречь.

Таким образом, положительное приращение функции связности  $\Delta v_q > 0$  будет пропорционально относительному приращению старой фазы:

$$\Delta v_q \sim -\frac{\Delta V_p}{V_p} = \frac{\Delta V_q}{V_p} = \frac{\Delta(c_q V)}{c_p V} = \frac{\Delta c_q}{1 - c_q}.\tag{16}$$

Приращение функции связности  $\Delta v_q = v_q(c_q + \Delta c_q) - v_q(c_q)$  на малом отрезке  $\Delta c_q$  можно представить в виде двух слагаемых:

$$\Delta v_q = \Delta v_q^a + \Delta v_q^b,\tag{17}$$

где  $\Delta v_q^a$  — частичное приращение функции связности за счет слабого взаимодействия отдельных частиц, а  $\Delta v_q^b$  — приращение, обусловленное существенным взаимодействием частиц, образующих каркасные структуры.

С помощью формулы (16) величины  $\Delta v_q^a$  и  $\Delta v_q^b$  можно представить в виде

$$\begin{cases} \Delta v_q^a = a(1 - v_q) \frac{\Delta c_q}{1 - c_q}, \\ \Delta v_q^b = b v_q (1 - v_q) \frac{\Delta c_q}{1 - c_q}. \end{cases}\tag{18}$$

Здесь  $a$  — коэффициент, описывающий взаимодействие включений-зародышей на начальном этапе развития новой фазы;  $b$  — коэффициент, характеризующий последующее интенсивное взаимодействие зародышей и формирование из них матричных смесей новой фазы. Множитель  $(1 - v_q)$  отражает

процесс насыщения, при котором образование новой фазы замедляется. На этом этапе старая и новая фазы меняются функциональными ролями: новая фаза  $V_q$  формирует связующую матрицу, а старая фаза  $V_p$  сохраняется в виде изолированных включений, взаимодействием которых можно пренебречь.

Подставляя формулы (18) в соотношение (17), вычислим приращение функции связности  $\Delta v_q$ :

$$\Delta v_q = \frac{(a + bv_q)(1 - v_q)}{1 - c_q} \Delta c_q. \quad (19)$$

Переходя к пределу в соотношении (19) при  $\Delta c_q \rightarrow 0$ , получаем дифференциальное уравнение, описывающее процесс вытеснения старой фазы новой [21]:

$$\frac{dv_q}{dc_q} = \frac{(a + bv_q)(1 - v_q)}{1 - c_q}. \quad (20)$$

Начальное условие для уравнения (20) задается выражением

$$v_q|_{c_q=0} = 0. \quad (21)$$

Решение задачи Коши (20), (21) имеет вид

$$v_q = a \frac{1 - (1 - c_q)^{a+b}}{a + b(1 - c_q)^{a+b}}. \quad (22)$$

На рис. 1 представлен график функции связности  $v_q(c_q)$ , рассчитанной по формуле (22) при  $a = 0.2$  и  $b = 3.33$ .

На рис. 2 показана зависимость эффективного модуля упругости сдвига (сплошная линия), полученная по формулам (15) и (22) при  $\mu_p = 1$ ,  $\nu_p = 0.29$ ,  $\mu_q = 20$ ,  $\nu_q = 0.3$ . Результаты расположены внутри вилки Хашина—Штрикмана, где верхняя и нижняя границы обозначены штриховыми линиями.

Анализ зависимости эффективного модуля упругости сдвига показывает:

- при малых значениях объемной концентрации новой фазы  $c_q$  эффективный модуль упругости близок к нижней границе Хашина—Штрикмана;
- при  $c_q \rightarrow 1$  значения эффективного модуля асимптотически приближаются к верхней границе.

**3. Эффективные параметры упрочнения сверхупругого деформирования нестабильного материала.** Определяющие макроскопические уравнения упрочнения и разупрочнения нестабильного материала для прямого и обратного фазовых переходов определяются посредством усреднения локальных пороговых условий (2) по объему новой фазы  $V_q$ :

$$\begin{aligned} (\langle s_{ij} \rangle_q - 2n_p \langle \omega_{ij} \rangle_q) (\langle s_{ij} \rangle_q - 2n_p \langle \omega_{ij} \rangle_q) &= s_p^2, \\ (\langle s_{ij} \rangle_q - 2n_q \langle \omega_{ij} \rangle_q) (\langle s_{ij} \rangle_q - 2n_q \langle \omega_{ij} \rangle_q) &= s_q^2. \end{aligned} \quad (23)$$

Уравнениям поверхностей (23) в шестимерном пространстве напряжений соответствует ассоциированный закон деформирования:

$$\begin{aligned} \langle s_{ij} \rangle_q &= s_p \frac{\langle \dot{\omega}_{ij} \rangle}{\sqrt{\langle \dot{\omega}_{kl} \rangle \langle \dot{\omega}_{kl} \rangle}} + 2n_p \langle \omega_{ij} \rangle_q, \\ \langle s_{ij} \rangle_q &= s_q \frac{\langle \dot{\omega}_{ij} \rangle}{\sqrt{\langle \dot{\omega}_{kl} \rangle \langle \dot{\omega}_{kl} \rangle}} + 2n_q \langle \omega_{ij} \rangle_q. \end{aligned} \quad (24)$$

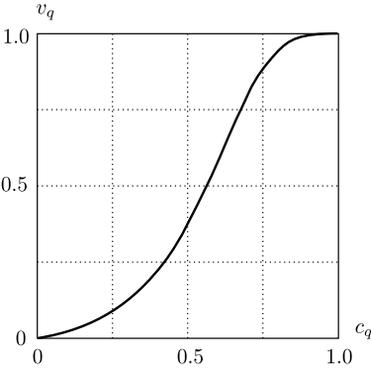


Рис. 1. График функции связности  $v_q(c_q)$ , построенный по формуле (22) при  $a = 0.2$  и  $b = 3.33$

[Figure 1. Plot of the connectivity function  $v_q(c_q)$  calculated using formula (22) with  $a = 0.2$  and  $b = 3.33$ ]

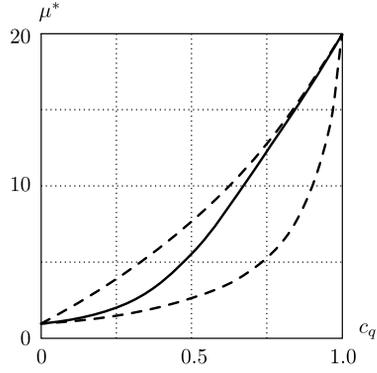


Рис. 2. Зависимость эффективного модуля упругости сдвига (сплошная линия), полученная по формулам (15) и (22) при  $\mu_p = 1$ ,  $\nu_p = 0.29$ ,  $\mu_q = 20$ ,  $\nu_q = 0.3$ ; штриховые линии —вилка Хашина—Штрикмана

[Figure 2. Dependence of the effective shear modulus (solid line) calculated using equations (15) and (22) with  $\mu_p = 1$ ,  $\nu_p = 0.29$ ,  $\mu_q = 20$ ,  $\nu_q = 0.3$ ; dashed lines indicate the Hashin–Shtrikman bounds]

Исключение девиаторных компонентов тензора напряжений  $\langle s_{ij} \rangle_q$  из соотношений (24) с помощью локального закона Гука (1) приводит к уравнениям

$$\begin{aligned} 2\mu_q \langle e_{ij} \rangle_q - 2(\mu_q + n_p) \langle \omega_{ij} \rangle_q &= s_p \theta_{ij}, \\ 2\mu_q \langle e_{ij} \rangle_q - 2(\mu_q + n_q) \langle \omega_{ij} \rangle_q &= s_q \theta_{ij}, \end{aligned} \quad (25)$$

где

$$\theta_{ij} = \frac{\langle \dot{\omega}_{ij} \rangle_q}{\sqrt{\langle \dot{\omega}_{kl} \rangle_q \langle \dot{\omega}_{kl} \rangle_q}} = \frac{\langle \dot{\omega}_{ij} \rangle}{\sqrt{\langle \dot{\omega}_{kl} \rangle \langle \dot{\omega}_{kl} \rangle}},$$

а точка обозначает производную по времени компонентов тензора структурных деформаций  $\omega_{ij}$ .

Подстановка уравнений (13) в (25) приводит к соотношениям

$$\begin{aligned} (1 + \alpha(m_p - 1))\xi \langle e_{ij} \rangle + \left( \alpha m_q c_p \xi - \left( 1 + \frac{n_p}{\mu_q} \right) \right) \langle \omega_{ij} \rangle_q &= \frac{s_p}{2\mu_q} \langle \theta_{ij} \rangle, \\ (1 + \alpha(m_p - 1))\xi \langle e_{ij} \rangle + \left( \alpha m_q c_p \xi - \left( 1 + \frac{n_q}{\mu_q} \right) \right) \langle \omega_{ij} \rangle_q &= \frac{s_q}{2\mu_q} \langle \theta_{ij} \rangle. \end{aligned}$$

Исключение макродеформаций  $\langle e_{ij} \rangle$  из данных соотношений и макроскопического закона Гука (14) дает

$$\begin{aligned} (1 + \alpha(m_p - 1))\xi \left( \frac{\langle s_{ij} \rangle}{2\mu^*} + \langle e_{ij}^* \rangle \right) + \left( \alpha m_q c_p \xi - \left( 1 + \frac{n_p}{\mu_q} \right) \right) \frac{\mu^*}{c_q \mu^\omega} \langle e_{ij}^* \rangle &= \frac{s_p}{2\mu_q} \langle \theta_{ij} \rangle, \\ (1 + \alpha(m_p - 1))\xi \left( \frac{\langle s_{ij} \rangle}{2\mu^*} + \langle e_{ij}^* \rangle \right) + \left( \alpha m_q c_p \xi - \left( 1 + \frac{n_q}{\mu_q} \right) \right) \frac{\mu^*}{c_q \mu^\omega} \langle e_{ij}^* \rangle &= \frac{s_q}{2\mu_q} \langle \theta_{ij} \rangle, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}
 (1 + \alpha(m_p - 1))\xi \langle s_{ij} \rangle + 2\mu^* \left( (1 + \alpha(m_p - 1))\xi + \right. \\
 \left. + \left( \alpha m_q c_p \xi - \left( 1 + \frac{n_p}{\mu_q} \right) \frac{\mu^*}{c_q \mu^\omega} \langle e_{ij}^* \rangle \right) \right) = s_p \frac{\mu^*}{\mu_q} \theta_{ij}, \\
 (1 + \alpha(m_p - 1))\xi \langle s_{ij} \rangle + 2\mu^* \left( (1 + \alpha(m_p - 1))\xi + \right. \\
 \left. + \left( \alpha m_q c_p \xi - \left( 1 + \frac{n_q}{\mu_q} \right) \frac{\mu^*}{c_q \mu^\omega} \langle e_{ij}^* \rangle \right) \right) = s_q \frac{\mu^*}{\mu_q} \theta_{ij}.
 \end{aligned} \tag{26}$$

Соотношения (26) представляют собой макроскопический закон деформирования:

$$\langle s_{ij} \rangle = s_p^* \theta_{ij} + 2n_p^* e_{ij}^*, \quad \langle s_{ij} \rangle = s_q^* \theta_{ij} + 2n_q^* e_{ij}^*. \tag{27}$$

Поверхность кинематического упрочнения, ассоциированная с законом (27), задается уравнениями

$$\begin{aligned}
 (\langle s_{ij} \rangle - 2n_p^* e_{ij}^*)(\langle s_{ij} \rangle - 2n_p^* e_{ij}^*) &= s_p^{*2}, \\
 (\langle s_{ij} \rangle - 2n_q^* e_{ij}^*)(\langle s_{ij} \rangle - 2n_q^* e_{ij}^*) &= s_q^{*2},
 \end{aligned} \tag{28}$$

где

$$s_p^* = s_p \frac{\mu^*}{\mu_q} \frac{1}{(1 + \alpha(m_p - 1))\xi}, \quad s_q^* = s_q \frac{\mu^*}{\mu_q} \frac{1}{(1 + \alpha(m_p - 1))\xi} \tag{29}$$

— эффективные пределы прямого и обратного фазовых переходов, а

$$\begin{aligned}
 n_p^* &= \mu^* \left( \frac{s_p^*}{c_q s_p} \left( \frac{1 - \alpha(1 - c_q m_p)}{1 + \alpha(m_p - 1)} + \frac{n_p}{\mu^\omega} \right) - 1 \right), \\
 n_q^* &= \mu^* \left( \frac{s_q^*}{c_q s_q} \left( \frac{1 - \alpha(1 - c_q m_p)}{1 + \alpha(m_p - 1)} + \frac{n_q}{\mu^\omega} \right) - 1 \right)
 \end{aligned} \tag{30}$$

— эффективные коэффициенты упрочнения, характеризующие скорость перемещения поверхности (28) в шестимерном пространстве макронапряжений.

Для малых объемных концентраций новой фазы  $c_q$  формулы (29), (30) принимают вид

$$\begin{aligned}
 s_p^* &= s_p \left( \frac{1}{m} + (\alpha_p c_p + c_q) \left( 1 - \frac{1}{m} \right) \right), \\
 n_p^* &= \mu^* \left( \frac{s_p^*}{c_q s_p} \left( (1 - \alpha_p c_p) + \frac{n_p}{\mu_q} (1 + \alpha_p c_p (m - 1)) \right) - 1 \right); \\
 s_q^* &= s_q \left( \frac{1}{m} + (\alpha_p c_p + c_q) \left( 1 - \frac{1}{m} \right) \right), \\
 n_q^* &= \mu^* \left( \frac{s_q^*}{c_q s_q} \left( (1 - \alpha_p c_p) + \frac{n_q}{\mu_q} (1 + \alpha_p c_p (m - 1)) \right) - 1 \right).
 \end{aligned} \tag{31}$$

При  $n_q = n_p = 0$  формулы (31) совпадают с выражениями, полученными в работе [19].

Определяющие уравнения (27) с эффективными параметрами (29) и (30) представляют собой макроскопический закон нелинейного упрочнения рассматриваемого нестабильного материала.

Для практического применения данного закона необходимо установить связь между средними структурными деформациями  $\langle \omega_{ij} \rangle_q$  и объемным содержанием новой фазы  $c_q$ .

В процессе фазового превращения можно условно выделить два этапа. На первом этапе происходит интенсивное образование отдельных зон новой фазы в виде зародышей. Для этого этапа характерен достаточно быстрый рост объемного содержания зародышей и относительно медленный рост уровня структурных деформаций. Затем, на втором этапе, прирост объемного содержания новой фазы осуществляется в основном за счет увеличения объемов самих зародышей, внутри которых структурные деформации развиваются до своих максимальных значений. Выделение таких двух последовательных этапов в процессе фазового превращения является условным, поскольку различные элементы обоих этапов могут наблюдаться одновременно, а на разных стадиях развития уровни структурных деформаций могут демонстрировать преобладание одного из них над другим [22].

Как правило, при повторных нагружениях образцов, изготовленных из нестабильных материалов, процесс фазового превращения в них каждый раз протекает несколько иначе. Это позволяет сделать вывод о том, что характер формирования внутренней структуры материала является случайным. Поэтому функцию объемного содержания новой фазы  $c_q$  целесообразно считать стохастической величиной.

Для прогнозирования изменения величины объемного содержания  $c_q$  от уровня средних структурных деформаций  $\langle \omega_{ij} \rangle_q$  целесообразно ввести безразмерную величину

$$\omega = \frac{\Omega_q}{\Omega} = \sqrt{\frac{\langle \omega_{ij} \rangle_q \langle \omega_{ij} \rangle_q}{\Omega_{ij} \Omega_{ij}}},$$

где  $\Omega_q = \sqrt{\langle \omega_{ij} \rangle_q \langle \omega_{ij} \rangle_q}$ ,  $\Omega = \sqrt{\Omega_{ij} \Omega_{ij}}$ .

Очевидно, что изменение величины объемного содержания  $c_q$  должно соответствовать изменениям уровня средних структурных деформаций  $\langle \omega_{ij} \rangle_q$ . Чем ближе будут значения величин  $\langle \omega_{ij} \rangle_q$  к своим максимальным значениям ( $\langle \omega_{ij} \rangle_q \rightarrow \Omega_{ij}$ ,  $\omega \rightarrow 1$ ), тем ближе будут значения величины объемного содержания  $c_q$  к единице ( $c_q \rightarrow 1$ ). Поэтому будем предполагать, что положительное приращение величины объемного содержания  $\Delta c_q > 0$  будет пропорционально относительному приращению уровня структурных деформаций:

$$\Delta c_q \sim -\frac{\Delta(\Omega - \Omega_q)}{\Omega - \Omega_q} = \frac{\Delta \Omega_q}{\Omega - \Omega_q} = \frac{\Delta \omega}{1 - \omega}.$$

Приращение объемного содержания  $\Delta c_q(\omega) = c_q(\omega + \Delta\omega) - c_q(\omega)$  на некотором малом отрезке  $\Delta\omega$  можно представить в виде суммы двух слагаемых:

$$\Delta c_q(\omega) = \Delta c_q^\omega(\omega) + \Delta c_q^w(\omega).$$

Здесь  $\Delta c_q^\omega(\omega)$  — частичное приращение величины объемного содержания  $c_q$  на отрезке  $\Delta\omega$  за счет развития структурных деформаций;  $\Delta c_q^w(\omega)$  — частич-

ное приращение величины объемного содержания  $c_q$  на отрезке  $\Delta\omega$  за счет случайного характера образования областей фазового превращения.

Будем предполагать, что скорость роста объемного содержания новой фазы пропорциональна объемному содержанию старой фазы:  $c_p(\omega) = 1 - c_q(\omega)$ .

Учитывая при этом, что стохастический процесс фазовых превращений в нестабильном материале в начале (при  $\omega \rightarrow 0$ ) и конце (при  $\omega \rightarrow 1$ ) становится практически детерминированным, величины  $\Delta c_q^\omega$  и  $\Delta c_q^w$  можно представить в виде

$$\begin{aligned}\Delta c_q^\omega(\omega) &= \lambda(1 - c_q(\omega)) \frac{\Delta\omega}{1 - \omega}, \\ \Delta c_q^w(\omega) &= \lambda\sigma c_q(\omega)(1 - c_q(\omega))\varepsilon(\omega)\Delta w.\end{aligned}$$

Здесь  $\lambda$  — коэффициент, описывающий удельную скорость возникновения и развития новой фазы;  $\sigma$  — среднеквадратичное отклонение величины объемного содержания  $c_q$  от своего математического ожидания;  $w$  — стандартный винеровский процесс;

$$\Delta w = \varepsilon(\omega) \sqrt{\frac{\Delta\omega}{1 - \omega}},$$

$\varepsilon(\omega) = N(0, 1)$  — случайная величина с нормальным законом распределения, нулевым средним значением  $\overline{\varepsilon(\omega)} = 0$  и единичной дисперсией  $\overline{\varepsilon^2(\omega)} = 1$  [23].

Вычисляя приращение величины объемного содержания

$$\Delta c_q(\omega) = \lambda \left( \frac{\Delta\omega}{1 - \omega} + \sigma c_q(\omega)\varepsilon(\omega) \sqrt{\frac{\Delta\omega}{1 - \omega}} \right) (1 - c_q(\omega))$$

и переходя к пределу при  $\Delta\omega \rightarrow 0$ , получаем стохастическое дифференциальное уравнение Ито, описывающее процесс изменения объемного содержания новой фазы  $c_q$  нестабильного материала в зависимости от уровня структурных деформаций [21]:

$$dc_q(\omega) = P(c_q(\omega))d\omega + Q(c_q(\omega))\sqrt{d\omega}, \quad (32)$$

где

$$P(c_q(\omega)) = \frac{\lambda(1 - c_q(\omega))}{1 - \omega}, \quad Q(c_q(\omega)) = \frac{\lambda\sigma\varepsilon(\omega)(1 - c_q(\omega))}{\sqrt{1 - \omega}} \quad (33)$$

— коэффициенты уравнения (32).

Начальное условие для уравнения (32) задается выражением

$$c_q|_{\omega=0} = 0. \quad (34)$$

Алгоритм численного решения уравнения (32) с коэффициентами (33) и условием (34) методом Эйлера–Маруямы [23] имеет вид

$$c_q^{(i+1)} = c_q^{(i)} + \lambda(1 - c_q^{(i)}) \left( \frac{\Delta\omega^{(i)}}{(1 - \omega^{(i)})} + \sigma c_q^{(i)} \varepsilon^{(i)} \sqrt{\frac{\Delta\omega^{(i)}}{1 - \omega^{(i)}}} \right). \quad (35)$$

При реализации алгоритма (35) на каждом малом шаге  $\Delta\omega^{(i)} > 0$  (начиная с  $\omega^{(0)} = 0$ ):

- 1) генерируется случайное число  $\varepsilon^{(i)} = \varepsilon(\omega^{(i)})$ ;
- 2) вычисляется следующее значение  $c_q^{(i+1)}$ .

В результате формируются последовательности  $\{\omega^{(i)}\}$  и  $\{c_q^{(i)}\}$ , образующие на координатной плоскости набор точек  $\{\omega^{(i)}, c_q^{(i)}\}$  и соответствующую стохастическую траекторию. Каждое повторение алгоритма порождает новую траекторию благодаря случайному характеру  $\varepsilon^{(i)}$ .

В численных расчетах отрезок  $0 \leq \omega \leq 1$  разбивался на  $n = 100$  равных частей с шагом  $\Delta\omega^{(i)} = \Delta\omega = 0.01$ .

Следует отметить, что вблизи начальной  $\{\omega^{(0)} = 0, c_q^{(0)} = 0\}$  и конечной  $\{\omega^{(n+1)} = 1, c_q^{(n+1)} = 1\}$  точек случайная функция  $c_q = c_q(\omega)$  становится практически детерминированной.

Для вычисления математического ожидания  $\overline{c_q}$  случайной функции  $c_q$  необходимо статистически усреднить стохастическое дифференциальное уравнение (32)

$$\frac{d\overline{c_q}}{d\omega} = \frac{\lambda(1 - \overline{c_q})}{1 - \omega}, \quad (36)$$

с начальным условием

$$\overline{c_q}|_{\omega=0} = 0. \quad (37)$$

Решение задачи Коши (36), (37) имеет вид

$$\overline{c_q} = 1 - (1 - \omega)^\lambda. \quad (38)$$

Сравнение результатов численного решения задачи Коши (36), (37) с численными значениями статистического среднего, вычисленного по  $m = 50$  реализациям алгоритма (35), демонстрирует их практическое совпадение.

На рис. 3 представлены численные реализации решений алгоритма (35) в виде стохастических траекторий функции роста объемного содержания  $c_q$  от уровня структурных деформаций  $\omega$ , а также кривая ее математического ожидания  $\overline{c_q}$ , построенная по формуле (38).

Применим полученные результаты к расчету диаграмм сверхупругого осесимметричного растяжения–сжатия монокристалла Au-47.5 ат.% Cd [24].

В данном случае ненулевой компонент тензора макроскопических напряжений единственный:

$$\langle \sigma_{11} \rangle \neq 0,$$

остальные компоненты равны нулю.

Из всех компонентов тензоров макроскопических полных деформаций  $\langle \varepsilon_{ij} \rangle$  и остаточных деформаций  $e_{ij}^*$  отличными от нуля являются диагональные элементы:  $\langle \varepsilon_{11} \rangle$ ,  $\langle \varepsilon_{22} \rangle$ ,  $\langle \varepsilon_{33} \rangle$  и  $e_{11}^*$ ,  $e_{22}^*$ ,  $e_{33}^*$ . В силу осесимметричности задачи выполняются соотношения

$$\langle \varepsilon_{22} \rangle = \langle \varepsilon_{33} \rangle, \quad e_{22}^* = e_{33}^*.$$

Условие несжимаемости для остаточных деформаций

$$e_{ss}^* = e_{11}^* + e_{22}^* + e_{33}^* = 0$$

позволяет получить

$$e_{22}^* = e_{33}^* = -e_{11}^*/2.$$

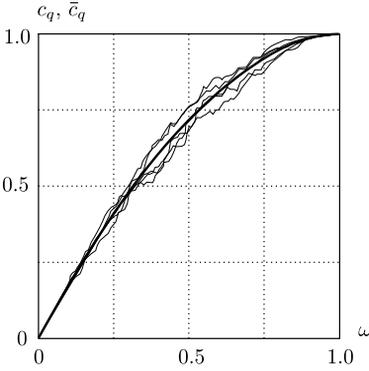


Рис. 3. Сплошные тонкие линии — стохастические траектории функции объемного содержания  $c_q$  от уровня структурных деформаций  $\omega$ , построенные в соответствии с численными реализациями алгоритма (35); сплошная жирная линия — кривая математического ожидания  $\bar{c}_q$ , построенная по формуле (38) при значении параметра  $\lambda = 1.8$

[Figure 3. Thin solid lines — stochastic trajectories of the volumetric content function  $c_q$  versus the level of structural deformations  $\omega$  constructed according to numerical implementations of the algorithm (35); bold solid line — mathematical expectation curve  $\bar{c}_q$  constructed using the formula (38) with the parameter value  $\lambda = 1.8$ ]

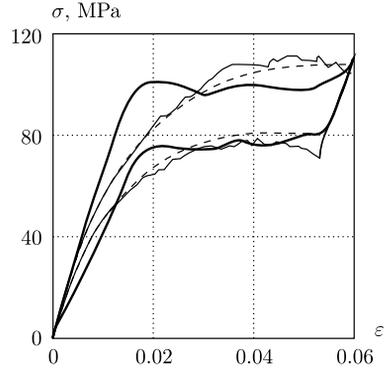


Рис. 4. Сплошные жирные линии — экспериментальные диаграммы сверхупругого поведения монокристалла Au-47.5 ат. % Cd [24]; сплошные тонкие линии — теоретические диаграммы сверхупругого растяжения–сжатия, рассчитанные по формулам (14), (15), (22), (27), (29), (30), (35), (38)–(40) при следующих значениях параметров:  $E_p = 6802.72$  МПа,  $E_q = 4006.42$  МПа,  $\nu_p = 0.29$ ,  $\nu_q = 0.30$ ,  $\sigma_p = 8.11$  МПа,  $\sigma_q = 6.05$  МПа,  $n_p = 469.20$  МПа,  $n_q = 270.01$  МПа,  $\Omega = 0.08$ ; штриховые линии — кривые математического ожидания

[Figure 4. Bold solid lines — experimental diagrams of the superelastic behavior of the Au-47.5 at.% Cd monocystal [24]; thin solid lines — theoretical diagrams of superelastic tension–compression calculated using formulas (14), (15), (22), (27), (29), (30), (35), (38)–(40) with the following parameter values:  $E_p = 6802.72$  МПа,  $E_q = 4006.42$  МПа,  $\nu_p = 0.29$ ,  $\nu_q = 0.30$ ,  $\sigma_p = 8.11$  МПа,  $\sigma_q = 6.05$  МПа,  $n_p = 469.20$  МПа,  $n_q = 270.01$  МПа,  $\Omega = 0.08$ ; dashed lines — mathematical expectation curves]

В области упругого деформирования макроскопические поперечные деформации  $\langle \varepsilon_{22} \rangle = \langle \varepsilon_{33} \rangle$  связаны с продольной деформацией  $\langle \varepsilon_{11} \rangle$  через эффективный коэффициент Пуассона  $\nu^*$ :

$$\langle \varepsilon_{22} \rangle = \langle \varepsilon_{33} \rangle = -\frac{1}{2}\nu^*\langle \varepsilon_{11} \rangle, \quad \nu^* = \frac{3K^* - 2\mu^*}{6K^* + 2\mu^*}.$$

Макроскопический закон Гука (14) и закон упрочнения (21) для случая одноосного растяжения–сжатия принимают вид

$$\sigma = \begin{cases} E^*\varepsilon, & \varepsilon \leq \varepsilon_p^*; \\ \frac{E^*}{E^* + 3n_p^*}\sigma_p^* + \frac{3E^*n_p^*}{E^* + 3n_p^*}\varepsilon, & \varepsilon \geq \varepsilon_p^*; \end{cases} \quad (39)$$

$$\sigma = \begin{cases} E^* \varepsilon, & \varepsilon \leq \varepsilon_q^*; \\ \frac{E^*}{E^* + 3n_q^*} \sigma_q^* + \frac{3E^* n_q^*}{E^* + 3n_q^*} \varepsilon, & \varepsilon \geq \varepsilon_q^*. \end{cases} \quad (40)$$

Здесь  $\sigma = \langle \sigma_{11} \rangle$  и  $\varepsilon = \langle \varepsilon_{11} \rangle$  — макроскопические напряжение и деформация при одноосном нагружении;  $\sigma_p^* = \sqrt{3/2} s_p^*$ ,  $\sigma_q^* = \sqrt{3/2} s_q^*$  — пределы прямого и обратного фазовых переходов;  $\varepsilon_p^* = \sigma_p^*/E^*$ ,  $\varepsilon_q^* = \sigma_q^*/E^*$  — граничные деформации, разделяющие области упругого и сверхупругого поведения.

На рис. 4 представлено сравнение теоретических диаграмм сверхупруго-растяжения–сжатия, рассчитанных по формулам (14), (15), (22), (27), (29), (30), (35), (38)–(40), с экспериментальными данными для монокристалла Au-47.5 ат.% Cd [24]. Здесь жирные сплошные линии — экспериментальные кривые; тонкие сплошные линии — стохастические траектории; штриховые линии — кривые математического ожидания.

**Заключение.** Разработана новая стохастическая модель изотермических фазовых превращений первого рода в нестабильной однородной упругой среде. Модель описывает процесс зарождения и эволюции новой фазы в объеме исходной фазы, включая

- формирование зародышей новой фазы в виде изолированных включений;
- развитие стохастических структур в форме взаимопроникающих каркасов;
- завершающую стадию, при которой новая фаза образует связную матрицу с включениями остатков исходной фазы.

В рамках разработанной модели получены следующие результаты.

1. Вычислены эффективные модули упругости материала с изменяющейся стохастической структурой. Показано, что их значения локализованы внутри вилки Хашина–Штрикмана.
2. Получены стохастические дифференциальные уравнения для параметра связности фаз и для описания прямого и обратного фазовых переходов.
3. Установлены макроскопические критерии фазовых превращений, определены их эффективные пределы и коэффициенты упрочнения.

Результаты численного моделирования продемонстрировали высокую согласованность с экспериментальными данными для монокристаллов Au-47.5 ат.% Cd [24], что подтверждает адекватность предложенного подхода.

**Конфликт интересов.** Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

**Ответственность автора.** Автор несет полную ответственность за подготовку окончательной версии рукописи и подтверждает ее одобрение для публикации.

**Финансирование.** Исследование выполнено без привлечения внешнего финансирования.

## Библиографический список

1. Исупова И. Л., Трусов П. В. Математическое моделирование фазовых превращений в сталях при термомеханической нагрузке // *Вестник ПНИПУ. Механика*, 2013. № 3. С. 126–156. EDN: RDKNHT.

2. Мишустин И. В., Мовчан А. А. Моделирование фазовых и структурных превращений в сплавах с памятью формы, происходящих под действием немонотонно меняющихся напряжений // *Изв. РАН. МТТ*, 2014. № 1. С. 37–53. EDN: SAKMWR.
3. Мишустин И. В., Мовчан А. А. Аналог теории пластического течения для описания деформации мартенситной неупругости в сплавах с памятью формы // *Изв. РАН. МТТ*, 2015. № 2. С. 78–95. EDN: TRPBQN.
4. Казарина С. А., Мовчан А. А., Сильченко А. Л. Экспериментальное исследование взаимодействия фазовых и структурных деформаций в сплавах с памятью формы // *Механика композиционных материалов и конструкций*, 2016. Т. 22, № 1. С. 85–98. EDN: VWWEBJ.
5. Мовчан А. А., Сильченко А. Л., Казарина С. А. Экспериментальное исследование и теоретическое моделирование эффекта перекрестного упрочнения сплавов с памятью формы // *Деформация и разрушение материалов*, 2017. № 3. С. 20–27. EDN: YFYNPD.
6. Трусов П. В., Вологов П. С., Исупова И. Л. [и др.] Многоуровневая модель для описания твердотельных фазовых превращений в многокомпонентных сплавах // *Вестник Пермского научного центра УрО РАН*, 2016. № 4. С. 82–90. EDN: XHOMKN.
7. Тихомирова К. А. Изотермическое деформирование сплава с памятью формы в разных температурных интервалах. Случай одноосного растяжения // *Механика композиционных материалов и конструкций*, 2017. Т. 23, № 2. С. 263–282. EDN: ZFCCHD.
8. Тихомирова К. А. Феноменологическое моделирование фазовых и структурных деформаций в сплавах с памятью формы. Одномерный случай // *Вычислительная механика сплошных сред*, 2018. Т. 11, № 1. С. 36–50. EDN: UODJWG. DOI: <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2018.11.1.4>.
9. Тихомирова К. А. Экспериментальное и теоретическое исследование взаимосвязи фазовой и структурной деформаций в сплавах с памятью формы // *Вестник ПНИПУ. Механика*, 2018. № 1. С. 40–57. EDN: YUPEYL. DOI: <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2018.1.04>.
10. Mutter D., Nielaba P. Simulation of the shape memory effect in a NiTi nano model system // *J. Alloys Comp.*, 2013. vol. 577 (Suppl. 1). pp. S83–S87. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jallcom.2012.01.095>.
11. Auricchio F., Bonetti E., Scalet G., Ubertini F. Theoretical and numerical modeling of shape memory alloys accounting for multiple phase transformations and martensite reorientation // *Int. J. Plasticity*, 2014. vol. 59. pp. 30–54. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2014.03.008>.
12. Yu C., Kang G., Kan Q. Crystal plasticity based constitutive model of NiTi shape memory alloy considering different mechanisms of inelastic deformation // *Int. J. Plasticity*, 2014. vol. 54. pp. 132–162. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2013.08.012>.
13. Elibol C., Wagner M. F.-X. Investigation of the stress-induced martensitic transformation in pseudoelastic NiTi under uniaxial tension, compression and compression–shear // *Mater. Sci. Eng. A*, 2015. vol. 621. pp. 76–81. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.msea.2014.10.054>.
14. Lobo P. S., Almeida J., Guerreiro L. Shape memory alloys behaviour: A review // *Procedia Eng.*, 2015. vol. 114. pp. 776–783. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.proeng.2015.08.025>.
15. Yoo Y.-I., Kim Y.-J., Shin D.-K., Lee J.-J. Development of martensite transformation kinetics of NiTi shape memory alloys under compression // *Int. J. Solids Struct.*, 2015. vol. 64–65. pp. 51–61. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2015.03.013>.
16. Cisse C., Zaki W., Ben Zineb T. A review of constitutive models and modeling techniques for shape memory alloys // *Int. J. Plasticity*, 2016. vol. 76. pp. 244–284. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2015.08.006>.
17. Fabrizio M., Pecoraro M., Tibullo V. A shape memory alloy model by a second order phase transition // *Mech. Research Commun.*, 2016. vol. 74. pp. 20–26. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.mechrescom.2016.03.005>.

18. Ильина Е. А., Сараев Л. А. Моделирование фазовых превращений и сверхупругого упрочнения нестабильных материалов // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2018. Т. 22, № 3. С. 407–429. EDN: Y0YJ0H. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1626>.
19. Ильина Е. А., Сараев Л. А. Влияние кинетики фазовых превращений на сверхупругое упрочнение нестабильного материала // *Современные материалы, техника и технологии*, 2017. № 7. С. 28–38. EDN: YLTBDG.
20. Сараев Л. А. *Математическое моделирование упругопластических свойств многокомпонентных композиционных материалов*. Самара: Самарский научный центр, 2017. 222 с. EDN: SHDNIT.
21. Сараев Л. А. К теории упругости микронеоднородных сред, учитывающей стохастические изменения связности составляющих компонентов // *Вестник ПНИПУ. Механика*, 2021. № 2. С. 132–143. EDN: 0YVQLK. DOI: <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2021.2.12>.
22. Cahn R. W., Haasen P. *Physical Metallurgy*. Amsterdam: North-Holland Physics Publ., 1983. xxxiv+1957 pp.
23. Кузнецов Д. Ф. *Стохастические дифференциальные уравнения: теория и практика численного решения*. СПб.: Политехнич. ун-т, 2007. 777 с. EDN: QJRVXX. DOI: <https://doi.org/10.18720/SPBPU/2/s17-228>.
24. Беляев С. П., Волков А. Е., Ермолаев В. А. [и др.] *Материалы с эффектом памяти формы*. Т. 3. СПб.: НИИХ СПбГУ, 1998. 474 с.

MSC: 74A60, 74A40, 74A05

## Stochastic superelastic properties of materials with phase transformations

L. A. Saraev

Samara National Research University,  
34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russian Federation.

### Abstract

The study is devoted to the impact of stochastic isothermal phase transformations in an unstable material on its superelastic hardening.

A stochastic differential equation is derived to describe the dynamics of nucleation, growth of the new phase volume, and its interaction with the parent phase, depending on the level of irreversible structural deformations.

Macroscopic constitutive relations are established for the unstable material, incorporating the stochastic nature of phase transformations and their dependence on structural deformations. Effective elastic moduli of the material are calculated based on these relations.

Stochastic differential equations for direct and reverse phase transitions are formulated.

Numerical simulations demonstrate strong agreement with experimental data, validating the proposed model.

**Keywords:** phases, macroscopic properties, elastic moduli, statistical homogeneity, structure, structural deformations, phase transition, ergodicity, effective relations.

Received: 5<sup>th</sup> November, 2024 / Revised: 16<sup>th</sup> December, 2024 /

Accepted: 20<sup>th</sup> December, 2024 / First online: 25<sup>th</sup> December, 2024

**Conflict of interest.** The author declares no conflict of interest.

**Author's Responsibilities.** The author is solely responsible for preparing the final version of the manuscript and approves it for publication.

**Funding.** The research was conducted without external funding.

**Mechanics of Solids**

**Research Article**

© The Author(s), 2024

© Samara State Technical University, 2024 (Compilation, Design, and Layout)

© The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

**Please cite this article in press as:**

Saraev L. A. Stochastic superelastic properties of materials with phase transformations, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2024, vol. 28, no. 4, pp. 721–739. EDN: NOXAGA. DOI: 10.14498/vsgtu2129 (In Russian).

**Author's Details:**

Leonid A. Saraev  <https://orcid.org/0000-0003-3625-5921>

Dr. Phys. & Math. Sci., Professor; Professor; Dept. of Mathematics and Business Informatics;  
e-mail: [saraev\\_leo@mail.ru](mailto:saraev_leo@mail.ru)

## References

1. Isupova I. L., Trusov P. V. Mathematical modeling of phase transformations in steel under thermomechanical loading, *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2013, no. 3, pp. 126–156 (In Russian). EDN: RDKNHT.
2. Mishustin I. V., Movchan A. A. Modeling of phase and structure transformations occurring in shape memory alloys under nonmonotonically varying stresses, *Mech. Solids*, 2014, vol. 49, no. 1, pp. 27–39. EDN: SKPPWJ. DOI: <https://doi.org/10.3103/S002565441401004X>.
3. Mishustin I. V., Movchan A. A. Analog of the plastic flow theory for describing martensitic inelastic strains in shape memory alloys, *Mech. Solids*, 2015, vol. 50, no. 2, pp. 176–190. EDN: UFVFZX. DOI: <https://doi.org/10.3103/S0025654415020077>.
4. Experimental study of the interaction of phase and structural deformations in alloys with shape memory, *Mekh. Kompoz. Mater. Konstr.*, 2016, vol. 22, no. 1, pp. 85–98 (In Russian). EDN: VWWEBJ.
5. Movchan A. A., Sil'chenko A. L., Kazarina S. A. Experimental study and theoretical simulation of the cross hardening effect in shape memory alloys, *Russ. Metall.*, 2017, vol. 2017, no. 10, pp. 779–784. EDN: XXPTSH. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0036029517100147>.
6. Trusov P. V., Volegov P. S., Isupova I. L., et al. Multilevel model for describing solid phase transformations in multicomponent alloys, *Vestnik Permskogo Nauchnogo Tsentra UrO RAN*, 2016, no. 4, pp. 82–90 (In Russian). EDN: XHOMKN.
7. Tikhomirova K. A. Isothermal deformation of shape memory alloy in different temperature ranges. Uniaxial case, *Mekh. Kompoz. Mater. Konstr.*, 2017, vol. 23, no. 2, pp. 263–282 (In Russian). EDN: ZFCCHD.
8. Tikhomirova K. A. Phenomenological modeling of phase and structural deformations in shape memory alloys. One-dimensional case, *Computational Continuum Mechanics*, 2018, vol. 11, no. 1, pp. 36–50 (In Russian). EDN: UODJWG. DOI: <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2018.11.1.4>.
9. Tikhomirova K. A. Experimental and theoretical study of the relationship between phase and structural deformations in alloys with shape memory, *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2018, no. 1, pp. 40–57 (In Russian). EDN: YUPEYL. DOI: <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2018.1.04>.
10. Mutter D., Nielaba P. Simulation of the shape memory effect in a NiTi nano model system, *J. Alloys Comp.*, 2013, vol. 577 (Suppl. 1), pp. S83–S87. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jallcom.2012.01.095>.
11. Auricchio F., Bonetti E., Scalet G., Ubertini F. Theoretical and numerical modeling of shape memory alloys accounting for multiple phase transformations and martensite reorientation, *Int. J. Plasticity*, 2014, vol. 59, pp. 30–54. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2014.03.008>.
12. Yu C., Kang G., Kan Q. Crystal plasticity based constitutive model of NiTi shape memory alloy considering different mechanisms of inelastic deformation, *Int. J. Plasticity*, 2014, vol. 54, pp. 132–162. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2013.08.012>.
13. Elibol C., Wagner M. F.-X. Investigation of the stress-induced martensitic transformation in pseudoelastic NiTi under uniaxial tension, compression and compression–shear, *Mater. Sci. Eng. A*, 2015, vol. 621, pp. 76–81. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.msea.2014.10.054>.
14. Lobo P. S., Almeida J., Guerreiro L. Shape memory alloys behaviour: A review, *Procedia Eng.*, 2015, vol. 114, pp. 776–783. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.proeng.2015.08.025>.
15. Yoo Y.-I., Kim Y.-J., Shin D.-K., Lee J.-J. Development of martensite transformation kinetics of NiTi shape memory alloys under compression, *Int. J. Solids Struct.*, 2015, vol. 64–65, pp. 51–61. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2015.03.013>.
16. Cisse C., Zaki W., Ben Zineb T. A review of constitutive models and modeling techniques for shape memory alloys, *Int. J. Plasticity*, 2016, vol. 76, pp. 244–284. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2015.08.006>.
17. Fabrizio M., Pecoraro M., Tibullo V. A shape memory alloy model by a second order phase transition, *Mech. Research Commun.*, 2016, vol. 74, pp. 20–26. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.mechrescom.2016.03.005>.

18. Ilyina E. A., Saraev L. A. Modeling of phase transformations and superelastic hardening of unstable materials, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2018, vol. 22, no. 3, pp. 407–429 (In Russian). EDN: YOYJ0H. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1626>.
19. Ilyina E. A., Saraev L. A. Effect of the kinetics of phase transformations on the superelastic hardening of an unstable material, *Sovrem. Mater. Tekhnika Tekhnol.*, 2017, no. 7, pp. 28–38 (In Russian). EDN: YLTBDG.
20. Saraev L. A. *Matematicheskoe modelirovanie uprugoplasticheskikh svoystv mnogokomponentnykh kompozitsionnykh materialov* [Mathematical Modeling of Elastoplastic Properties of Multicomponent Composite Materials]. Samara, Samara Scientific Center, 2017, 222 pp. (In Russian). EDN: SHDNIT.
21. Saraev L. A. On the theory of elasticity of microinhomogeneous media with account for stochastic changes in the connectivity of constituent components, *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2021, no. 2, pp. 132–143 (In Russian). EDN: OYVQLK. DOI: <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2021.2.12>.
22. Cahn R. W., Haasen P. *Physical Metallurgy*. Amsterdam, North-Holland Physics Publ., 1983, xxxiv+1957 pp.
23. Kuznetsov D. F. *Stokhasticheskie differentsial'nye uravneniia: teoriia i praktika chislennogo resheniia* [Stochastic Differential Equations: Theory and Practice of Numerical Solution]. St. Petersburg, Polytechnic Univ., 2007, 777 pp. (In Russian). EDN: QJRVXX. DOI: <https://doi.org/10.18720/SPBPU/2/s17-228>.
24. Belyaev S. P., Volkov A. E., Ermolaev V. A., et al. *Materialy s efektom pamiati formy* [Shape Memory Materials], vol. 3. St. Petersburg, NIIKh SPbGU, 1998, 474 pp. (In Russian)



УДК 539.374

## Антиплоский осесимметричный упругопластический сдвиг в изотропно упрочняющемся материале

Г. М. Севастьянов

Институт машиноведения и металлургии  
Хабаровского федерального исследовательского центра ДВО РАН  
Россия, 681005, Комсомольск-на-Амуре, ул. Металлургов, 1.

### Аннотация

В работе представлено аналитическое решение задачи об осесимметричном антиплоском сдвиге. Деформируемый материал заключен между двумя цилиндрическими поверхностями, одна из которых неподвижна, а другая испытывает смещение вдоль образующей. Эта задача моделирует схему испытания материалов на срез. Мы используем геометрически нелинейную постановку упругопластической задачи, принимая мультипликативное разделение тензора градиента деформации на упругую и пластическую составляющие. Упругие свойства среды описываются законом Муни–Ривлина. Материал образца изотропно упрочняющийся, закон упрочнения есть произвольная монотонная функция накопленной пластической деформации. Использовано условие пластичности Треска. Исходная нелинейная связанная система дифференциальных уравнений в частных производных сведена к обыкновенным линейным дифференциальным уравнениям, для решения которых нужно вычислить определенные интегралы. Полученное решение включает в себя деформирование в упругом диапазоне, зарождение пластического течения, распространение области пластического течения на всю область деформирования и последующее деформирование при развитом пластическом течении. Решение проиллюстрировано примерами материалов с линейным упрочнением, квадратичным упрочнением и упрочнением с насыщением по типу Воше. Для этих материалов приведены расчетные данные «сила – перемещение», распределение накопленной пластической деформации по сечению образца и данные об искривлении материальных волокон, которые до деформирования располагались в радиальном направлении.

**Ключевые слова:** антиплоский сдвиг, упругопластическая задача, аналитическое решение, упрочнение, закон Воше.

Механика деформируемого твердого тела

Научная статья

© Коллектив авторов, 2024

© СамГТУ, 2024 (составление, дизайн, макет)

📄 ©📄 Контент публикуется на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

**Образец для цитирования**

Севастьянов Г. М. Антиплоский осесимметричный упругопластический сдвиг в изотропно упрочняющемся материале // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2024. Т. 28, № 4. С. 740–758. EDN: KQCUGA. DOI: 10.14498/vsgtu2102.

**Сведения об авторе**

Георгий Мамиевич Севастьянов  <https://orcid.org/0000-0003-4755-5305>

кандидат физико-математических наук; ведущий научный сотрудник; лаб. механики материалов и конструкций; e-mail: akela.86@mail.ru

Получение: 8 июля 2024 г. / Исправление: 24 августа 2024 г. /  
 Принятие: 27 сентября 2024 г. / Публикация онлайн: 24 декабря 2024 г.

**Введение.** Механика материалов описывает их поведение в рамках некоторых математических моделей. В теории пластически упрочняющихся тел, например, принимается, что интенсивность напряжений по Мизесу или Треска (в качестве интенсивности могут быть использованы и другие, более сложные конструкции) при пластическом течении есть некоторая функция накопленной пластической деформации (функция упрочнения). Для нее может быть принят тот или иной вид, включающий коэффициенты (материальные константы), которые можно определить опытным путем, сравнивая экспериментальные данные с численными или аналитическими расчетами по выбранной модели. При этом разные схемы нагружения материала могут дать различающиеся между собой наборы материальных констант. Синтетические тесты, в которых применяется несколько различных схем нагружения, показывают более надежные результаты идентификации материальных параметров [1]. Схемы тестирования с неоднородным напряженным состоянием имеют некоторые преимущества перед схемами с однородным состоянием: реализация однородного состояния требует соблюдения достаточно сложных условий тестирования; тесты с неоднородным состоянием могут предоставить большую информацию о поведении материала [1]. Вместе с тем тесты с неоднородным напряженным состоянием сложнее интерпретировать.

Один из примеров теста с неоднородным напряженным состоянием — тест кручения сплошного цилиндрического образца. Этот тест широко используется, и для соответствующей краевой задачи имеется ряд аналитических решений, учитывающих как нелинейно-упругие свойства материала [2, 3], так и нелинейное упрочнение в пластическом диапазоне [4, 5].

В представленном здесь исследовании дается решение для другой достаточно простой схемы неоднородного деформирования, а именно для антиплоского осесимметричного сдвига. Эта схема может быть реализована с помощью оснастки, описанной в работе [6] (см. также [7]) и приведенной на рис. 1.

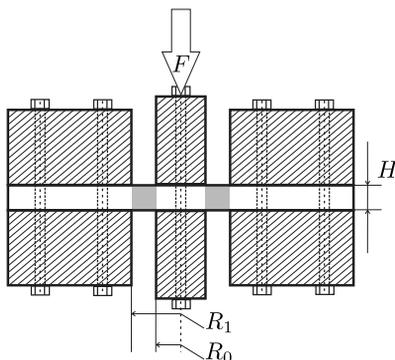


Рис. 1. Реализация антиплоского осесимметричного сдвига (серым цветом выделена область деформации образца; оснастка заштрихована)

[Figure 1. Realization of antiplane axisymmetric shear (the region of sample deformation is highlighted in gray; the equipment is shaded)]

Указанный тест предоставляет данные «перемещение пуансона – приложенная нагрузка». Несмотря на то, что представляемое исследование не учитывает накопление поврежденности материала (а значит, не может описать нисходящую часть кривой нагрузки), оно может дать адекватное аналитическое описание процесса при умеренных деформациях вплоть до пикового значения нагрузки.

Осесимметричное антиплоское движение материала (то есть такое, при котором вектор скорости имеет только осевую компоненту, величина которой зависит только от радиальной координаты) рассматривалось при различных краевых условиях в ряде работ в рамках жестковязкопластического [8, 9], а также упруговязкопластического анализа [10] (см. также цитируемую в этих источниках литературу). Вместе с тем при обычных условиях большинство материалов в пластическом диапазоне в большей степени демонстрируют деформационное упрочнение, нежели зависимость предела текучести от скорости деформации. В этом смысле представленное решение, учитывающее изотропное упрочнение, более пригодно для описания тестирования материалов.

**1. Постановка задачи.** Будем полагать, что область деформации материала расположена между неподвижным внешним кожухом и сердцевинной, на которую давит пуансон (см. рис. 1), т.е. она ограничена цилиндрическими поверхностями с радиусами  $R_1$  и  $R_0$ ,  $R_1 > R_0$  и имеет начальную высоту  $H$ . Остальная часть образца не деформируется. Таким образом, движение деформируемого материала соответствует кинематике антиплоского сдвига:

$$r = R, \quad z = Z + w(R, t), \quad \varphi = \theta, \quad (1)$$

где  $w(R, t) \geq 0$  – функция осевого перемещения с граничными условиями

$$w(R_1, t) = 0, \quad w(R_0, t) = w^*(t). \quad (2)$$

Здесь  $(R, \theta, Z)$  и  $(r, \varphi, z)$  – цилиндрические координаты точки среды в недеформированном и деформированном состоянии соответственно;  $t$  – время.

**1.1. Модель материала.** Для несжимаемой гиперупругой среды примем модель Муни–Ривлина:

$$\sigma = -p\mathbf{I} + 2\mathbf{B}^e \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{B}^e}, \quad \Psi = C_1[I_1(\mathbf{B}^e) - 3] + C_2[I_2(\mathbf{B}^e) - 3]. \quad (3)$$

Условие несжимаемости  $\det \mathbf{B}^e = 1$ . Здесь  $\sigma$  – тензор напряжений Коши;  $\mathbf{I}$  – единичный тензор;  $\mathbf{B}^e$  – упругая часть левого тензора деформаций Коши–Грина  $\mathbf{B} = \mathbf{F}\mathbf{F}^\top$ ;  $\mathbf{F} = (\nabla_X \otimes x)^\top$  – тензор градиента деформации;  $X, x$  – векторы места материальной точки в исходном и деформированном состоянии соответственно;  $I_1(\mathbf{B}^e) = \text{tr} \mathbf{B}^e$ ,  $I_2(\mathbf{B}^e) = \text{tr}^2(\mathbf{B}^e) - \text{tr}(\mathbf{B}^e)^2$  – инварианты  $\mathbf{B}^e$ ;  $\Psi$  – упругий потенциал;  $C_1 > 0$  и  $C_2 \geq 0$  – упругие константы Муни–Ривлина. Удобно ввести следующие обозначения:  $\mu = 2(C_1 + C_2)$ ,  $\alpha = (C_1 - C_2)(C_1 + C_2)^{-1}$ ,  $-1 \leq \alpha \leq 1$ ;  $4C_1 = \mu(1 + \alpha)$ ,  $4C_2 = \mu(1 - \alpha)$ . Неогуковскому материалу соответствует  $\alpha = 1$ ;  $\mu$  – модуль сдвига. Функция свободной энергии (3) – общее представление с погрешностью четвертого порядка относительно градиента перемещения для несжимаемого изотропного

материала [11]. Эта модель обычно используется для резиноподобных и полимерных материалов [12, 13], однако нелинейно-упругий закон (3) с некоторой погрешностью может быть применен и для других слабосжимаемых материалов при умеренных величинах упругой деформации сдвига.

Из (3) следует, что

$$\tilde{\sigma} = -\tilde{p}\mathbf{I} + \left( \frac{1+\alpha}{2} + \frac{1-\alpha}{2} \operatorname{tr} \mathbf{B}^e \right) \mathbf{B}^e - \frac{1-\alpha}{2} (\mathbf{B}^e)^2. \quad (4)$$

Здесь и далее тильда означает безразмерную величину напряжения, полученную нормированием на модуль сдвига  $\mu$ .

Пластическое деформирование описывается условием текучести Треска, обобщенным на случай изотропного упрочнения, и ассоциированным с ним законом:

$$\Phi = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} - \tau_y(q) = 0, \quad (5)$$

$$\mathbf{D}^p = \Lambda \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma}. \quad (6)$$

Здесь  $\tau_y(q)$  — произвольная монотонная функция упрочнения, параметром которой выступает накопленная пластическая деформация  $q$ , определяющаяся уравнением  $\dot{q} = \sqrt{(2/3) \operatorname{tr}(\mathbf{D}^p)^2}$ . Здесь и далее точка над символом обозначает полную материальную производную по времени  $(\dot{\phantom{x}}) = \partial(\phantom{x})/\partial t + (\mathbf{v} \nabla_x)(\phantom{x})$ ;  $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{u}}$  — вектор скорости;  $\nabla_x$  — оператор Гамильтона в базисе деформированного состояния. Тензор  $\mathbf{D}^p$  — скорость пластической деформации,  $\Lambda$  — неопределенный скалярный множитель Лагранжа. Начальный предел текучести на сдвиг обозначим  $\tau_{y0} = \tau_y(0)$ .

**1.2. Разделение деформации на упругую и пластическую составляющие.** Будем использовать мультипликативное разделение тензора градиента деформации  $\mathbf{F}$  на упругую и пластическую составляющие [14–16]:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^e \mathbf{F}^p, \quad \mathbf{F}^p = (\mathbf{F}^p)^\top.$$

Последнее равенство означает, что пластическая деформация осуществляется без вращения (подробнее см. [15, 17]).

Такое разделение приводит к эволюционному уравнению для тензора упругой деформации  $\mathbf{B}^e$  [18]:

$$\partial_{Old}(\mathbf{B}^e) = \dot{\mathbf{B}}^e - \mathbf{L}\mathbf{B}^e - \mathbf{B}^e\mathbf{L}^\top = -2\mathbf{B}^e\mathbf{D}^p. \quad (7)$$

Здесь  $\partial_{Old}(\phantom{x})$  обозначает производную Олдройда;  $\mathbf{L} = (\nabla_x \otimes \mathbf{v})^\top$  — пространственный тензор градиента скорости. Уравнение (7) описывает изменение тензора упругой деформации в области пластического течения, при этом начальные значения компонент этого тензора определяются решением упругой задачи.

**1.3. Кинематика антиплоского сдвига.** Исходя из (1), несимметричный тензор градиента деформации  $\mathbf{F}$  отличается от единичного тензора единственной компонентой  $F_{zR} = \partial w / \partial R$ . Левый тензор деформации Коши–Грина

имеет координатное представление

$$[\mathbf{B}] = [\mathbf{F}\mathbf{F}^\top] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \partial w / \partial R \\ 0 & 1 & 0 \\ \partial w / \partial R & 0 & 1 + (\partial w / \partial R)^2 \end{bmatrix}. \quad (8)$$

Вектор перемещений имеет единственную ненулевую компоненту  $u_z = w$ , аналогично, единственная ненулевая компонента вектора скорости  $v_z = \partial w / \partial t$ .

**2. Упругое деформирование.** На стадии чисто упругого деформирования во всем теле тензоры полной деформации и упругой деформации совпадают,  $\mathbf{B}^e = \mathbf{B}$  и по (4) и (8) компоненты тензора напряжений имеют выражение

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_{rr} &= -\tilde{p} + \frac{3 - \alpha}{2}, \\ \tilde{\sigma}_{\varphi\varphi} &= \tilde{\sigma}_{rr} + \frac{1 - \alpha}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial r} \right)^2, \\ \tilde{\sigma}_{zz} &= \tilde{\sigma}_{rr} + \left( \frac{\partial w}{\partial r} \right)^2, \\ \tilde{\sigma}_{rz} &= \frac{\partial w}{\partial r}. \end{aligned} \quad (9)$$

Поскольку деформирование осуществляется не за счет градиента давления, а только за счет перемещения цилиндрических поверхностей  $R = R_0$  и  $R = R_1$  друг относительно друга, разумно предположить, что напряженное состояние не зависит от продольной координаты  $z$ , и, в частности,  $\partial \tilde{p} / \partial z = 0$ .

Тогда условие равновесия  $\nabla \cdot \sigma = \mathbf{0}$  приводит к следующим уравнениям:

$$r \frac{\partial \tilde{\sigma}_{rr}}{\partial r} = \tilde{\sigma}_{\varphi\varphi} - \tilde{\sigma}_{rr}, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tilde{\sigma}_{rz}) = -\frac{\partial \tilde{\sigma}_{zz}}{\partial z} = \frac{\partial \tilde{p}}{\partial z} = 0. \quad (10)$$

Второе из этих уравнений с учетом последнего уравнения (9) позволяет найти

$$\tilde{\sigma}_{rz} = -\frac{A}{r}, \quad \frac{\partial w}{\partial r} = -\frac{A}{r}, \quad w = w_0 - A \ln r,$$

где  $A = A(t) \geq 0$  и  $w_0 > 0$  есть константы интегрирования. Учитывая граничные условия (2), имеем

$$A(t) = \frac{w^*(t)}{\ln \delta}, \quad w_0 = w^*(t) \frac{\ln R_1}{\ln \delta}, \quad \delta = \frac{R_1}{R_0} > 1 \quad (11)$$

и

$$\tilde{\sigma}_{rz} = \frac{\partial w}{\partial r} = -\frac{w^*}{\ln \delta} \frac{1}{r}, \quad w = \frac{w^*}{\ln \delta} \ln \frac{R_1}{r}. \quad (12)$$

Первое уравнение (10) служит для установления функции добавочного давления  $\tilde{p}$ .

**3. Возникновение пластического течения.** Формулы (9) позволяют получить выражения для главных напряжений:

$$\tilde{\sigma}_I = \frac{\tilde{\sigma}_{zz} + \tilde{\sigma}_{rr}}{2} + \sqrt{\left( \frac{\tilde{\sigma}_{zz} - \tilde{\sigma}_{rr}}{2} \right)^2 + \tilde{\sigma}_{rz}^2} =$$

$$\begin{aligned}
 &= -\tilde{p} + \frac{3-\alpha}{2} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 + \sqrt{\left( \frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{4} \left( \frac{\partial w}{\partial r} \right)^4}, \\
 \tilde{\sigma}_{II} = \tilde{\sigma}_{\varphi\varphi} &= -\tilde{p} + \frac{3-\alpha}{2} + \frac{1-\alpha}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial r} \right)^2, \\
 \tilde{\sigma}_{III} &= \frac{\tilde{\sigma}_{zz} + \tilde{\sigma}_{rr}}{2} - \sqrt{\left( \frac{\tilde{\sigma}_{zz} - \tilde{\sigma}_{rr}}{2} \right)^2 + \tilde{\sigma}_{rz}^2} = \\
 &= -\tilde{p} + \frac{3-\alpha}{2} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 - \sqrt{\left( \frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{4} \left( \frac{\partial w}{\partial r} \right)^4}.
 \end{aligned}$$

Далее имеем

$$\begin{aligned}
 \tilde{\sigma}_I - \tilde{\sigma}_{II} &= \frac{\alpha}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 + \sqrt{\left( \frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{4} \left( \frac{\partial w}{\partial r} \right)^4} > \\
 &> \frac{\alpha}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 = \frac{1+\alpha}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial r} \right)^2, \\
 \tilde{\sigma}_{II} - \tilde{\sigma}_{III} &= -\frac{\alpha}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 + \sqrt{\left( \frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{4} \left( \frac{\partial w}{\partial r} \right)^4} > \\
 &> -\frac{\alpha}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 = \frac{1-\alpha}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial r} \right)^2.
 \end{aligned}$$

Поскольку  $-1 \leq \alpha \leq 1$ ,  $\sigma_{II} = \sigma_{\varphi\varphi}$  — промежуточное главное напряжение,  $\sigma_I = \sigma_I$  — максимальное главное напряжение,  $\sigma_3 = \sigma_{III}$  — минимальное главное напряжение.

Запишем условие возникновения пластического течения, которое должно выполняться на упругопластической границе  $r = r_{ep}$  (с учетом того, что на упругопластической границе накопленная пластическая деформация равна нулю,  $q|_{r=r_{ep}} = 0$ ):

$$\frac{\tilde{\sigma}_I - \tilde{\sigma}_3}{2} \Big|_{r=r_{ep}} = \left| \frac{\partial w}{\partial r} \right|_{r=r_{ep}} \sqrt{1 + \frac{1}{4} \left[ \frac{\partial w}{\partial r} \Big|_{r=r_{ep}} \right]^2} = \frac{\tau_{y0}}{\mu} = \tilde{\tau}_{y0}.$$

Отсюда

$$\frac{\partial w}{\partial r} \Big|_{r=r_{ep}} = -\sqrt{2 \left( \sqrt{1 + \tilde{\tau}_{y0}^2} - 1 \right)}. \quad (13)$$

Поскольку, согласно (12), величина  $\partial w / \partial r$  обратно пропорциональна радиальной координате, пластическое течение зарождается на внутренней границе области деформирования  $r = r_0$  при величине смещения

$$w^* = w_{cr1}^* = R_0 \ln \delta \sqrt{2 \left( \sqrt{1 + \tilde{\tau}_{y0}^2} - 1 \right)}.$$

При  $w_{cr1}^* < w^* < w_{cr2}^*$  в теле существуют две области: область  $R_0 \leq r < r_{ep}$ , в которой происходит упругопластическое деформирование, и область  $r_{ep} < r \leq R_1$ , которая остается деформированной чисто упруго. При  $w^* \geq w_{cr2}^*$  упругая область полностью исчезает, пластическое течение охватывает все

тело. Выражение для  $w_{cr2}^*$  будет приведено позже. Полагается, что  $w$  и  $\partial w/\partial r$  непрерывны на упругопластической границе.

**4. Область упругого деформирования.** В упругой области  $r_{ep} < r \leq R_1$  сохраняется равенство  $\mathbf{V}^e = \mathbf{B}$ , где  $\mathbf{B}$  определяется по (8), и верны выражения (9) для компонент напряжения, а также равенства

$$\tilde{\sigma}_{rz} = -\frac{A^e}{r}, \quad w = w_0^e - A^e \ln r. \quad (14)$$

Однако теперь  $A^e$  и  $w_0^e$  уже не совпадают с  $A$  и  $w_0$  из чисто упругого решения (11). Граничное условие  $w|_{r=R_1} = 0$  как и прежде позволяет выразить  $w_0^e = A^e \ln R_1$  и, следовательно,

$$w = A^e \ln \frac{R_1}{r}, \quad \frac{\partial w}{\partial r} = -\frac{A^e}{r}. \quad (15)$$

По (13) с учетом (15) имеем

$$\frac{A^e}{r_{ep}} = \sqrt{2\left(\sqrt{1 + \tilde{\tau}_{y0}^2} - 1\right)}. \quad (16)$$

Для определения закона движения упругопластической границы  $r = r_{ep}(w^*)$  необходимо знать  $A^e(w^*)$ . А для определения этой функции по формуле (15) требуется значение  $w|_{r=r_{ep}}$ , которое может быть найдено только из решения в области упругопластического деформирования.

**5. Область упругопластического деформирования.** В этой области  $\mathbf{V}^e \neq \mathbf{B}$ ; тензор упругой деформации определяется эволюционным уравнением (7). Мы будем искать координатное представление этого тензора в области пластического течения в виде

$$[\mathbf{V}^e] = \begin{bmatrix} B_{rr}^e & 0 & B_{rz}^e \\ 0 & 1 & 0 \\ B_{rz}^e & 0 & B_{zz}^e \end{bmatrix}, \quad \det \mathbf{V}^e = B_{rr}^e B_{zz}^e - (B_{rz}^e)^2 = 1. \quad (17)$$

Несимметричный тензор градиента скорости  $\mathbf{L} = (\nabla_x \otimes \mathbf{v})^T$  в (7) имеет единственную ненулевую компоненту:

$$L_{zr} = \frac{\partial v_z}{\partial r} = \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial t}. \quad (18)$$

Компоненты тензора  $\mathbf{V}^e$  не зависят от координаты  $z$ , тогда  $(\mathbf{v} \nabla_x) \mathbf{V}^e = \mathbf{0}$ . Упругий закон (4) с учетом (17) позволяет выразить в пластической области компоненты напряжений в виде

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_{rr} &= -\tilde{p} + \frac{1 - \alpha}{2} + B_{rr}^e, \\ \tilde{\sigma}_{\varphi\varphi} &= -\tilde{p} + \frac{1 + \alpha}{2} + \frac{1 - \alpha}{2}(B_{rr}^e + B_{zz}^e), \\ \tilde{\sigma}_{zz} &= -\tilde{p} + \frac{1 - \alpha}{2} + B_{zz}^e, \\ \tilde{\sigma}_{rz} &= B_{rz}^e. \end{aligned} \quad (19)$$

Уравнение равновесия в пластической области так же, как и в упругой, дает  $\partial(\tilde{\sigma}_{rz}r)/\partial r = 0$ , и непрерывность касательного напряжения на упруго-пластической границе позволяет получить равенство, идентичное (14):

$$\tilde{\sigma}_{rz} = B_{rz}^e = -\frac{A^e}{r}.$$

Из (19) можно получить

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_{\text{I,III}} &= \frac{\tilde{\sigma}_{zz} + \tilde{\sigma}_{rr}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\tilde{\sigma}_{zz} - \tilde{\sigma}_{rr}}{2}\right)^2 + \tilde{\sigma}_{rz}^2} = -\tilde{p} + \frac{1 - \alpha}{2} + \Sigma \pm \sqrt{\Sigma^2 - 1}, \\ \tilde{\sigma}_{\text{II}} &= \tilde{\sigma}_{\varphi\varphi} = -\tilde{p} + \frac{1 + \alpha}{2} + \Sigma(1 - \alpha) \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\tilde{\sigma}_{\text{I}} - \tilde{\sigma}_{\text{II}} = \alpha(\Sigma - 1) + \sqrt{\Sigma^2 - 1} > \alpha(\Sigma - 1) + (\Sigma - 1) = (\alpha + 1)(\Sigma - 1) \geq 0,$$

$$\tilde{\sigma}_{\text{II}} - \tilde{\sigma}_{\text{III}} = \alpha(1 - \Sigma) + \sqrt{\Sigma^2 - 1} > \alpha(1 - \Sigma) + (\Sigma - 1) = (\Sigma - 1)(1 - \alpha) \geq 0.$$

Здесь введено обозначение  $\Sigma = (B_{rr}^e + B_{zz}^e)/2$ . Таким образом,  $\sigma_{\text{II}} = \sigma_{\varphi\varphi}$  остается промежуточным главным напряжением в пластической области;  $\sigma_1 = \sigma_{\text{I}}$ ,  $\sigma_3 = \sigma_{\text{III}}$ .

Условие пластичности (5) может быть записано в виде

$$\frac{\tilde{\sigma}_1 - \tilde{\sigma}_3}{2} = \tilde{\tau}_y = \sqrt{\Sigma^2 - 1}. \quad (20)$$

По (6) с учетом (19) тензор скорости пластической деформации имеет следующие ненулевые компоненты:

$$\begin{aligned} D_{zz}^p &= -D_{rr}^p = \frac{\Lambda}{2\tilde{\tau}_y} \frac{\tilde{\sigma}_{zz} - \tilde{\sigma}_{rr}}{2} = \frac{\Lambda}{2\tilde{\tau}_y} \frac{B_{zz}^e - B_{rr}^e}{2}, \\ D_{rz}^p &= \frac{\Lambda}{2\tilde{\tau}_y} \tilde{\sigma}_{rz} = \frac{\Lambda}{2\tilde{\tau}_y} B_{ez}^e. \end{aligned} \quad (21)$$

Уравнение для накопленной пластической деформации с учетом (19) и (21) принимает вид

$$\dot{q} = \sqrt{(2/3)\mathbf{D}^p : \mathbf{D}^p} = (2/\sqrt{3})\sqrt{(D_{zz}^p)^2 + (D_{rz}^p)^2} = \frac{\Lambda}{\sqrt{3}\tilde{\tau}_y} \sqrt{\Sigma^2 - 1} = \frac{\Lambda}{\sqrt{3}}.$$

При этом, учитывая, что  $\partial q/\partial z = 0$ , имеем  $\dot{q} = \partial q/\partial t$ .

Подставляя (17), (18), (21) в (7), запишем уравнения изменения компонент тензора упругой деформации  $\mathbf{B}^e$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_{rr}^e}{\partial t} &= -\frac{\sqrt{3}}{\tilde{\tau}_y} \frac{\partial q}{\partial t} \left( B_{rr}^e \frac{B_{zz}^e + B_{rr}^e}{2} - 1 \right), \\ \frac{\partial B_{rz}^e}{\partial t} - B_{rr}^e \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial r} &= -\frac{\sqrt{3}}{\tilde{\tau}_y} \frac{\partial q}{\partial t} \frac{B_{rr}^e + B_{zz}^e}{2} B_{rz}^e, \\ \frac{\partial B_{zz}^e}{\partial t} - 2B_{rz}^e \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial r} &= -\frac{\sqrt{3}}{\tilde{\tau}_y} \frac{\partial q}{\partial t} \left( B_{zz}^e \frac{B_{rr}^e + B_{zz}^e}{2} - 1 \right), \end{aligned} \quad (22)$$

остальные компоненты не изменяются при пластическом деформировании; из трех уравнений выше независимы только два из-за условия несжимаемости  $B_{rr}^e B_{zz}^e - 1 = (B_{rz}^e)^2$ .

Далее, согласно (20), нам известно выражение для  $\Sigma = (B_{rr}^e + B_{zz}^e)/2$  в виде функции накопленной пластической деформации:

$$\Sigma = \sqrt{\tilde{\tau}_y^2 + 1}.$$

Если теперь предположить, что компоненты упругой деформации, а также функция  $G = \partial w / \partial r$ , которая характеризует искривление материальных волокон, расположенных в недеформированном состоянии в радиальном направлении, являются функциями одной переменной  $q$  (накопленной пластической деформации), то система уравнений (22) может быть записана в следующем виде:

$$\frac{1}{\sqrt{\tilde{\tau}_y^2 + 1}} \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{d\tilde{\tau}_y}{dq} = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{B_{rz}^e}{\tilde{\tau}_y} \frac{dG}{dq} - 1,$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \frac{dB_{rz}^e}{dq} = \left[ \sqrt{\tilde{\tau}_y^2 + 1} - \sqrt{\tilde{\tau}_y^2 - (B_{rz}^e)^2} \right] \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{dG}{dq} - \frac{\sqrt{\tilde{\tau}_y^2 + 1}}{\tilde{\tau}_y} B_{rz}^e.$$

Здесь учтено, что  $B_{rr}^e = \sqrt{\tilde{\tau}_y^2 + 1} - \sqrt{\tilde{\tau}_y^2 - (B_{rz}^e)^2}$ . Это выражение следует из условия несжимаемости  $B_{rr}^e B_{zz}^e - 1 = (B_{rz}^e)^2$  и равенства  $\Sigma = (B_{rr}^e + B_{zz}^e)/2 = \sqrt{\tilde{\tau}_y^2 + 1}$ .

Или, исключая  $dG/dq$  из первого уравнения этой системы:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{dG}{dq} &= \frac{\tilde{\tau}_y}{B_{rz}^e} \left( \frac{1}{\sqrt{\tilde{\tau}_y^2 + 1}} \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{d\tilde{\tau}_y}{dq} + 1 \right), \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{dB_{rz}^e}{dq} B_{rz}^e &= -\frac{\sqrt{\tilde{\tau}_y^2 + 1}}{\tilde{\tau}_y} (B_{rz}^e)^2 + \\ &+ \left[ \sqrt{\tilde{\tau}_y^2 + 1} - \sqrt{\tilde{\tau}_y^2 - (B_{rz}^e)^2} \right] \left[ \frac{\tilde{\tau}_y}{\sqrt{\tilde{\tau}_y^2 + 1}} \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{d\tilde{\tau}_y}{dq} + \tilde{\tau}_y \right]. \end{aligned} \quad (23)$$

ЗАМЕЧАНИЕ (СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕШЕНИЯ). Поскольку условия равновесия требуют, чтобы касательное напряжение по абсолютной величине убывало обратно пропорционально радиальной координате  $r$ , а накопленная пластическая деформация также убывает с ростом  $r$ , правая часть в последнем уравнении системы (23) должна быть положительной. Можно понять, что это возможно не при любых функциях упрочнения.

В частности, для неупрочняемого материала в момент начала пластического течения (при  $B_{rz}^e = -\sqrt{2(\sqrt{1 + \tilde{\tau}_{y0}^2} - 1)}$ ) имеем

$$\begin{aligned}
 & -\frac{\sqrt{\tilde{\tau}_{y0}^2 + 1}}{\tilde{\tau}_{y0}}(B_{rz}^e)^2 + \left[ \sqrt{\tilde{\tau}_{y0}^2 + 1} - \sqrt{\tilde{\tau}_{y0}^2 - (B_{rz}^e)^2} \right] \tilde{\tau}_{y0} = \\
 & = -\frac{2\sqrt{\tilde{\tau}_{y0}^2 + 1}(\sqrt{\tilde{\tau}_{y0}^2 + 1} - 1)}{\tilde{\tau}_{y0}} + \tilde{\tau}_{y0} = -\frac{(\sqrt{\tilde{\tau}_{y0}^2 + 1} - 1)^2}{\tilde{\tau}_{y0}} < 0.
 \end{aligned}$$

Уравнение, совпадающее с последним уравнением в системе (23), было получено для кругового упругопластического сдвига в [18]. Там же были приведены условия, налагаемые на функцию упрочнения, которые обеспечивают существование решения (правда, достаточно жесткие; для существования решения в некотором интервале нагрузки достаточно просто монотонного роста предела текучести с ростом пластической деформации).

Введем новую функцию  $\Omega = \sqrt{1 - (\tilde{\sigma}_{rz}/\tilde{\tau}_y)^2} = \sqrt{1 - (B_{rz}^e/\tilde{\tau}_y)^2}$ ,  $\Omega \in [0, 1]$ , которая показывает, насколько напряженное состояние в точке отличается от состояния чистого сдвига. Тогда система уравнений (23) принимает простой вид:

$$\frac{dG}{dq} = -\frac{f_1}{\sqrt{1 - \Omega^2}}, \quad \frac{d\Omega}{dq} = (1 - \Omega f_2)f_1,$$

где  $f_1(q) = \sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{\tilde{\tau}_y^2(q) + 1}} \frac{d\tilde{\tau}_y(q)}{dq}$ ,  $f_2(q) = \frac{\sqrt{\tilde{\tau}_y^2(q) + 1}}{\tilde{\tau}_y(q)}$ . Второе из этих уравнений — линейное ОДУ с решением

$$\Omega(q) = \Omega(0) + \int_0^q f_1(\xi) e^{-\int_\xi^q f_1(\zeta) f_2(\zeta) d\zeta} d\xi, \quad (24)$$

первое же, после того как найдена функция  $\Omega(q)$ , позволяет найти функцию  $G(q) = \partial w / \partial r$  прямым интегрированием:

$$G(q) = G(0) - \int_0^q \frac{f_1(\varsigma)}{\sqrt{1 - \Omega^2(\varsigma)}} d\varsigma. \quad (25)$$

Значения  $\Omega(0)$  и  $G(0)$  соответствуют упругопластической границе, где согласно (14), (15) и (16)

$$B_{rz}^e|_{r=r_{ep}} = \frac{\partial w}{\partial r}|_{r=r_{ep}} = G(0) = -\frac{A^e}{r_{ep}} = -\sqrt{2(\sqrt{1 + \tilde{\tau}_{y0}^2} - 1)} \quad (26)$$

и, следовательно,

$$\Omega(0) = \sqrt{1 - (B_{rz}^e|_{r=r_{ep}}/\tilde{\tau}_{y0})^2} = \frac{\sqrt{1 + \tilde{\tau}_{y0}^2} - 1}{\tilde{\tau}_{y0}}. \quad (27)$$

Равенство

$$B_{rz}^e = -\frac{A^e}{r} = -\tilde{\tau}_y(q) \sqrt{1 - \Omega^2(q)} \quad (28)$$

позволяет (в неявном виде) установить распределение накопленной пластической деформации по радиусу образца. Остается только связать величину  $A^e$  с величиной осевого смещения  $w^*$  внутренней цилиндрической поверхности относительно внешней. Далее удобно использовать в качестве параметра нагружения (после начала пластического течения) величину накопленной пластической деформации на внутренней цилиндрической поверхности  $q|_{r=R_0} = q^{in}$ . Величина  $A^e$  связана с этим параметром выражением  $A^e = R_0 \tilde{\tau}_y(q^{in}) \sqrt{1 - \Omega^2(q^{in})}$ .

Поле перемещений в области упругопластического деформирования  $r_{ep} < r < R_0$  определяется интегрированием функции  $G(q) = \partial w / \partial r$ . С учетом (28), накопленная пластическая деформация является функцией автономной переменной  $A^e / r$ , тогда можно записать следующие равенства:

$$G(q) = \frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial w}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial r} = \frac{\partial w}{\partial q} \frac{dq}{d(A^e/r)} \frac{\partial(A^e/r)}{\partial r} = -\frac{\partial w}{\partial q} \frac{1}{A^e} \left(\frac{A^e}{r}\right)^2 \left[\frac{d(A^e/r)}{dq}\right]^{-1}.$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial q} &= -A^e G \frac{d(A^e/r)}{dq} \left(\frac{A^e}{r}\right)^{-2} = \\ &= R_0 \tilde{\tau}_y(q^{in}) \sqrt{1 - \Omega^2(q^{in})} G \frac{d}{dq} \left[\frac{1}{\tilde{\tau}_y \sqrt{1 - \Omega^2}}\right]. \end{aligned} \quad (29)$$

Интегрируя (29) по частям с граничным условием на упругопластической границе, которое следует из (15) и (16)

$$\begin{aligned} w|_{r=r_{ep}} &= A^e \ln \frac{R_1}{r_{ep}} = A^e \ln \left\{ \frac{R_1}{A^e} \sqrt{2 \left( \sqrt{1 + \tilde{\tau}_{y0}^2} - 1 \right)} \right\} = \\ &= R_0 \tilde{\tau}_y(q^{in}) \sqrt{1 - \Omega^2(q^{in})} \ln \left\{ \frac{R_1 \sqrt{2 \left( \sqrt{1 + \tilde{\tau}_{y0}^2} - 1 \right)}}{R_0 \tilde{\tau}_y(q^{in}) \sqrt{1 - \Omega^2(q^{in})}} \right\}, \end{aligned}$$

имеем

$$\begin{aligned} w &= w|_{r=r_{ep}} + R_0 \tilde{\tau}_y(q^{in}) \sqrt{1 - \Omega^2(q^{in})} \int_0^q G \frac{d}{dq} \left[\frac{1}{\tilde{\tau}_y \sqrt{1 - \Omega^2}}\right] dq = \\ &= w|_{r=r_{ep}} + R_0 \tilde{\tau}_y(q^{in}) \sqrt{1 - \Omega^2(q^{in})} \times \\ &\times \left\{ \frac{G(q)}{\tilde{\tau}_y(q) \sqrt{1 - \Omega^2(q)}} - \frac{G(0)}{\tilde{\tau}_{y0} \sqrt{1 - \Omega^2(0)}} + \int_0^q \frac{f_1}{\tilde{\tau}_y(1 - \Omega^2)} dq \right\} = \\ &= R_0 \tilde{\tau}_y(q^{in}) \sqrt{1 - \Omega^2(q^{in})} \times \\ &\times \left\{ \ln \left[ \frac{R_1 \sqrt{2 \left( \sqrt{1 + \tilde{\tau}_{y0}^2} - 1 \right)}}{R_0 \tilde{\tau}_y(q^{in}) \sqrt{1 - \Omega^2(q^{in})}} \right] + \frac{G(q)}{\tilde{\tau}_y(q) \sqrt{1 - \Omega^2(q)}} + 1 + \int_0^q \frac{f_1}{\tilde{\tau}_y(1 - \Omega^2)} dq \right\}. \end{aligned}$$

Это равенство при  $q = q^{in}$  связывает  $w^*$  с параметром  $q^{in}$ . Теперь по (16) можно указать, при каком значении смещения  $w^*$  пластическое течение достигнет внешней границы области деформирования:

$$w_{cr2}^* = w|_{q=q_{cr2}^{in}},$$

где  $q_{cr2}^{in}$  — корень алгебраического уравнения

$$\tilde{\tau}_y(q^{in})\sqrt{1 - \Omega^2(q^{in})} = \frac{R_1}{R_0}\sqrt{2\left(\sqrt{1 + \tilde{\tau}_{y0}^2} - 1\right)}. \quad (30)$$

**6. Деформирование при развитии пластическом течении.** Когда смещение цилиндрических поверхностей образца друг относительно друга превышает величину  $w_{cr2}^*$ , которая определена в предыдущем разделе, вся область деформирования находится в состоянии пластического течения.

В этом случае решение строится таким же образом, как и в предыдущем разделе, за исключением того, что константа интегрирования в уравнении (29) находится не из условия на упругопластической границе, а из условия на внешней границе области деформирования образца  $w|_{r=R_1} = 0$ :

$$\begin{aligned} w &= R_0\tilde{\tau}_y(q^{in})\sqrt{1 - \Omega^2(q^{in})} \int_{q^{out}}^q G \frac{d}{dq} \left[ \frac{1}{\tilde{\tau}_y\sqrt{1 - \Omega^2}} \right] dq = \\ &= R_0\tilde{\tau}_y(q^{in})\sqrt{1 - \Omega^2(q^{in})} \times \\ &\times \left\{ \frac{G(q)}{\tilde{\tau}_y(q)\sqrt{1 - \Omega^2(q)}} - \frac{G(q^{out})}{\tilde{\tau}_y(q^{out})\sqrt{1 - \Omega^2(q^{out})}} + \int_{q^{out}}^q \frac{f_1(\zeta)}{\tilde{\tau}_y(\zeta)[1 - \Omega^2(\zeta)]} d\zeta \right\}. \end{aligned}$$

Здесь  $q^{out}$  — величина накопленной пластической деформации на внешней границе области деформирования, которая, согласно (28), связана с величиной  $q^{in}$  равенством  $R_0\tilde{\tau}_y(q^{in})\sqrt{1 - \Omega^2(q^{in})} = R_1\tilde{\tau}_y(q^{out})\sqrt{1 - \Omega^2(q^{out})}$ ; функции  $\Omega(q)$  и  $G(q)$  определены равенствами (24) и (25) из предыдущего раздела с теми же константами интегрирования  $\Omega(0)$  и  $G(0)$ , определенными формулами (26) и (27).

**7. Расчет величины силового воздействия.** В качестве характеристики силового воздействия примем безразмерную величину  $F/(2\pi R_0 H \mu)$ , где  $F$  — действующая на пуансон сила,  $H$  — начальная высота образца [7]. Работа механических сил равна  $w^* F$ . С другой стороны, она равна  $2\pi R_0 H |\sigma_{rz}|_{r=R_0} w^*$ . Тогда

$$F/(2\pi R_0 H \mu) = |\tilde{\sigma}_{rz}|_{r=R_0} = |B_{rz}^e|_{r=R_0} = \tilde{\tau}_y(q^{in})\sqrt{1 - \Omega^2(q^{in})}.$$

Из последней формулы с учетом (30) следует, что моменту перехода всего образца в пластическое состояние соответствует приложенная к пуансону сила

$$F_{fp} = 2\pi R_1 H \mu \sqrt{2\left(\sqrt{1 + \tilde{\tau}_{y0}^2} - 1\right)} \approx 2\pi R_1 H \tau_{y0}.$$

Эта величина не зависит от функции упрочнения материала. Последнее приближенное равенство верно при небольших значениях  $\tilde{\tau}_{y0}$ .

**8. Пример решения.** В заключение рассмотрим поведение материалов с различными законами упрочнения при антиплоском осесимметричном сдвиге. Для сравнения выберем три варианта функции упрочнения:

– линейная  $\tau_y/\tau_{y0} = 1 + h_1 q$ ;

– квадратичная  $\tau_y/\tau_{y0} = 1 + h_2 q^2$ ,

– с насыщением по типу Восе  $\tau_y/\tau_{y0} = \tau_{y\infty}/\tau_{y0} - (\tau_{y\infty}/\tau_{y0} - 1)e^{-h_3 q}$ .

Параметры во всех трех функциях выбраны так, чтобы пределы текучести при величине накопленной пластической деформации, равной 1, совпадали (см. рис. 2):  $h_1 = h_2 = 1.8$ ,  $\tau_{y\infty}/\tau_{y0} = 3$ ,  $h_3 = 2.3$ . Другие параметры материалов совпадают: начальный предел текучести  $\tau_{y0} = 20$  МПа, модуль сдвига  $\mu = 1$  ГПа. Геометрическая характеристика образца  $R_1/R_0 = 2$ .

На рис. 3 приведена расчетная величина силового воздействия с использованием полученного аналитического решения. Одним и тем же величинам приложенной нагрузки соответствуют существенно различающиеся значения перемещений пуансона, зависящие от функции упрочнения. Это говорит о хорошей чувствительности такого теста и его пригодности для идентификации параметров закона упрочнения. Полный переход образца в пластическое состояние происходит при наименьшем перемещении пуансона для модели Восе и при наибольшем — для квадратичного закона упрочнения.

На рис. 4 приведены расчетные данные о распределении пластической деформации по сечению образца. Уровень пластических деформаций наименьший в материале с законом упрочнения Восе, наибольший — в материале с квадратичным законом упрочнения. При этом с ростом нагрузки распределение пластической деформации более однородно в материале с квадратичным законом упрочнения. На рис. 5 приведены графики искривления материальных волокон при антиплоском осесимметричном сдвиге для указанных моделей упрочнения.

**Заключение.** Получено аналитическое решение задачи об осесимметричном антиплоском упругопластическом сдвиге. Полученные результаты описывают как стадию упругого деформирования с зарождающимся пластическим течением, так и дальнейшее нагружение материала, когда вся область деформирования образца охвачена пластическим течением.

Результаты расчетов показывают, что решение достаточно чувствительно к выбору закона упрочнения, поэтому описанная схема деформирования может быть использована для идентификации параметров законов изотропного упрочнения материалов, способных выдерживать большие упругие и пластические деформации.

Аналитические решения нелинейных упругопластических задач достаточно редки, еще одним возможным применением полученных результатов может выступать тестирование программ МКЭ-моделирования.

**Конкурирующие интересы.** Нет конфликта интересов.

**Авторский вклад и ответственность.** Я несу полную ответственность за предоставление окончательной версии рукописи в печать. Окончательная версия рукописи мною одобрена.

**Финансирование.** Работа выполнена в рамках госзадания ХФИЦ ДВО РАН.

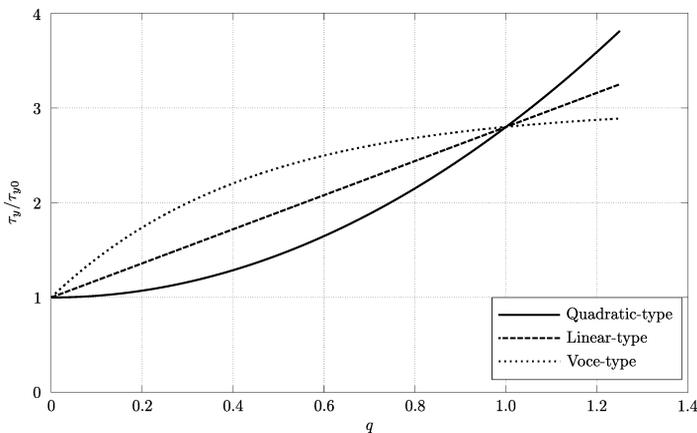


Рис. 2. Варианты функции упрочнения  
 [Figure 2. Types of hardening functions]

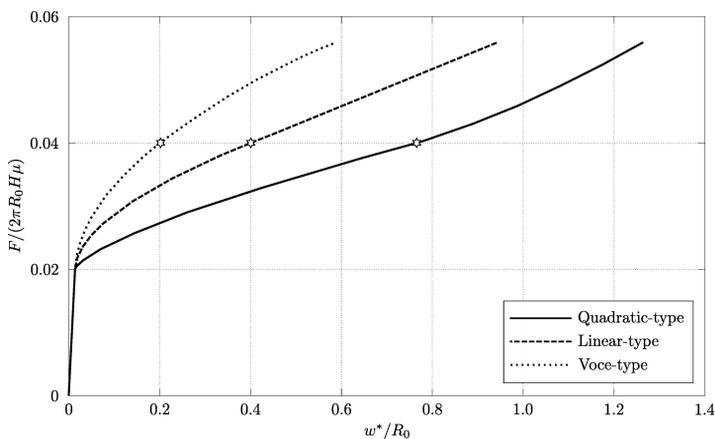


Рис. 3. Зависимость приложенной нагрузки от перемещения пуансона. Звездочками отмечен момент полного перехода образца в пластическое состояние. Самая правая точка каждого графика соответствует величине накопленной пластической деформации на внутренней поверхности образца, равной 1. Линейный участок каждого графика соответствует чисто упругому деформированию

[Figure 3. Dependence of the applied load on the punch displacement. The asterisks mark the moment of complete transition of the sample to the plastic state. The rightmost point of each graph corresponds to the value of accumulated plastic strain on the inner surface of the sample equal to 1. The linear section of each graph corresponds to purely elastic deformation]

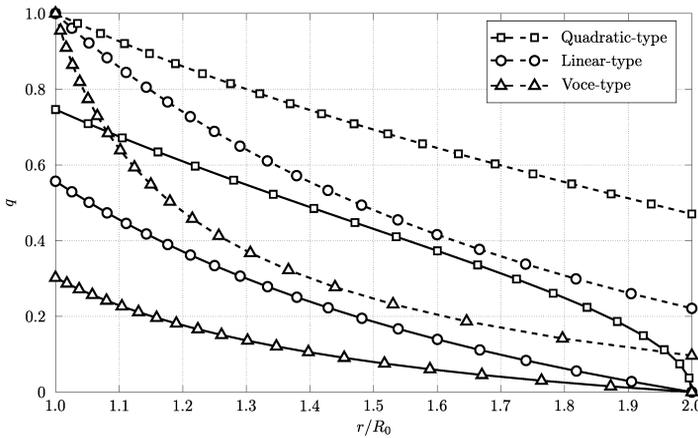


Рис. 4. Распределение пластической деформации по сечению образца для трех функций упрочнения: сплошные линии — в момент полного перехода образца в пластическое состояние; пунктирные линии — в момент, когда величина накопленной пластической деформации на внутренней поверхности образца достигает величины 1

[Figure 4. Distribution of plastic strain over the sample cross-section for three hardening functions: solid lines — at the moment of complete transition of the sample to the plastic state, dashed lines — at the moment when the amount of accumulated plastic strain on the inner surface of the sample reaches a value of 1]

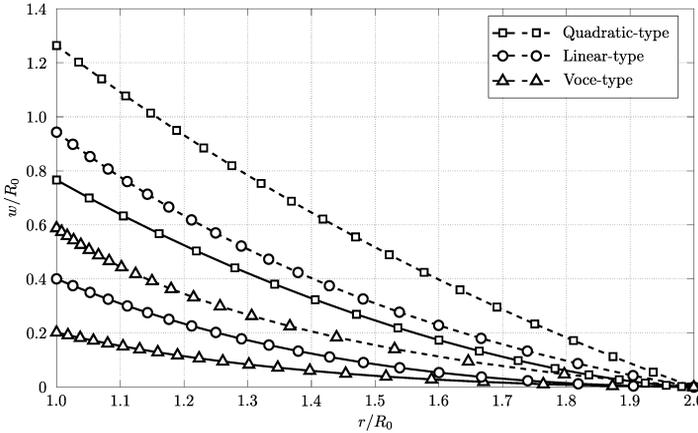


Рис. 5. Искривление материальных волокон, которые изначально располагались в радиальном направлении (безразмерное осевое перемещение  $w(r/R_0)/R_0$ ): сплошные линии — в момент полного перехода образца в пластическое состояние, пунктирные линии — в момент, когда величина накопленной пластической деформации на внутренней поверхности образца достигает величины 1

[Figure 5. Distortion of the material fibers that were initially located in the radial direction (dimensionless axial displacement  $w(r/R_0)/R_0$ ): solid lines — at the moment of complete transition of the sample to the plastic state, dashed lines — at the moment when the amount of accumulated plastic strain on the inner surface of the sample reaches a value of 1]

## Библиографический список

1. Shutov A. V., Kaygorodtseva A. A. Sample shapes for reliable parameter identification in elasto-plasticity // *Acta Mech.*, 2020. vol. 231. pp. 4761–4780. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00707-020-02758-9>.
2. Арутюнян Н. Х., Радаев Ю.Н. Упругопластическое кручение цилиндрического стержня при конечных деформациях // *ПММ*, 1989. Т. 53, № 6. С. 1014–1022.
3. Севастьянов Г. М., Буренин А. А. О больших деформациях при кручении несжимаемого упругопластического цилиндра // *ДАН*, 2018. Т. 482, № 3. С. 285–287. EDN: VVWLE. DOI: <https://doi.org/10.31857/S086956520003134-0>.
4. Севастьянов Г. М., Бормотин К. С. Упругопластическое кручение с конечными деформациями: сравнение аналитического и МКЭ-моделирования для немонотонно упрочняющихся полимеров // *Вестн. ПНИПУ. Механика*, 2023. № 3. С. 124–136. EDN: wQVCPT. DOI: <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2023.3.11>.
5. Sevastyanov G. M. Finite-strain elastic-plastic torsion: Comparison of von Mises and Tresca materials // *Materials Physics and Mechanics*, 2023. vol. 51, no. 2. pp. 140–150. EDN: KEMBBZ. DOI: [https://doi.org/10.18149/MPM.5122023\\_13](https://doi.org/10.18149/MPM.5122023_13).
6. Xue Z., Pontin M. G., Zok F. W., Hutchinson J. W. Calibration procedures for a computational model of ductile fracture // *Eng. Fract. Mech.*, 2010. vol. 77, no. 3. pp. 492–509. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2009.10.007>.
7. Tvergaard V., Hutchinson J. W. Numerical simulation of cropping // *J. Appl. Mech.*, 2014. vol. 81, no. 7, 071002. DOI: <https://doi.org/10.1115/1.4026891>.
8. Александров С. Е., Гольдштейн Р. В. Движение жесткого стержня в жестковязкопластической среде: влияние типа модели на поведение решения // *Изв. РАН. МТТ*, 2015. № 4. С. 28–37. EDN: UXVZEB.
9. Alexandrov S., Date P. An alternative interpretation of axial friction test results for viscoplastic materials // *Mech. Time-Depend. Mater.*, 2018. vol. 22. pp. 259–271. EDN: VBBPGU. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11043-017-9372-x>.
10. Буренин А. А., Ковтанюк Л. В., Мазелис А. Л. Развитие прямолинейного осесимметричного вязкопластического течения и упругое последствие после его остановки // *ПМТФ*, 2010. Т. 51, № 2. С. 140–147. EDN: MWMXSH.
11. Liu I. S. A note on the Mooney–Rivlin material model // *Continuum Mech. Thermodyn.*, 2012. vol. 24. pp. 583–590. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00161-011-0197-6>.
12. Kellermann D. C., Attard M. M. An invariant-free formulation of neo-Hookean hyperelasticity // *ZAMM*, 2016. vol. 96, no. 2. pp. 233–252. DOI: <https://doi.org/10.1002/zamm.201400210>.
13. Korobeynikov S. N. Families of Hooke-like isotropic hyperelastic material models and their rate formulations // *Arch. Appl. Mech.*, 2023. vol. 93. pp. 3863–3893. EDN: GMCDFC. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00419-023-02466-5>.
14. Lee E. H. Elastic-plastic deformation at finite strains // *J. Appl. Mech.*, 1969. vol. 36, no. 1. pp. 1–6. DOI: <https://doi.org/10.1115/1.3564580>.
15. Levitas V. I. *Large deformation of materials with complex rheological properties at normal and high pressure*. New York: Nova Science Publ., 1996.
16. Feng B., Levitas V. I., Hemley R. J. Large elastoplasticity under static megabar pressures: Formulation and application to compression of samples in diamond anvil cells // *Int. J. Plasticity*, 2016. vol. 84. pp. 33–57. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2016.04.017>.
17. Роговой А. А. *Формализованный подход к построению моделей механики деформируемого твердого тела. Часть II*. М.; Ижевск: Ижевский институт компьютерных исследований, 2023. 318 с.
18. Севастьянов Г. М., Бегун А. С., Буренин А. А. Большие упругопластические деформации кругового сдвига в изотропно упрочняющемся материале // *ПММ*, 2024. Т. 88, № 2. С. 313–340. EDN: XUAKYF. DOI: <https://doi.org/10.31857/S0032823524020108>.

MSC: 74C15

## Antiplane axisymmetric elastic-plastic shear in an isotropic hardening material

*G. M. Sevastyanov*

Institute of Machinery and Metallurgy,  
Khabarovsk Federal Research Center, Far-East Branch of RAS,  
1, Metallurgov st., Komsomolsk-on-Amur, 681005, Russian Federation.

### Abstract

The paper presents an analytical solution to the problem of axisymmetric antiplane shear. The deformable material is enclosed between two cylindrical surfaces, one of which is fixed, and the other moves along the generatrix. This problem models a shear-off testing scheme. We use a geometrically nonlinear formulation of the elastic-plastic problem, taking the multiplicative decomposition of the deformation gradient tensor into elastic and plastic parts. The elastic properties of the specimen are described by the Mooney–Rivlin hyperelastic model. We consider an isotropic hardening material with the hardening law that is an arbitrary monotonic function of the accumulated plastic strain. The Tresca yield condition is utilized. The original nonlinear coupled system of partial differential equations is reduced to ordinary linear differential equations, the solution of which requires the calculation of definite integrals. The resulting solution includes deformation in the elastic range, the initiation of plastic flow, propagation of the plastic deformation region, and subsequent intensive plastic flow. The solution is illustrated with examples of materials with linear hardening, quadratic hardening, and Voce-type hardening with saturation. For these examples, “force – displacement” relationships, the distribution of accumulated plastic strain over the sample cross-section, and data on the distortion of material fibers, which were located in the radial direction before deformation, are presented.

**Keywords:** antiplane shear, elastoplastic problem, analytical solution, strain hardening, Voce-type hardening.

Received: 8<sup>th</sup> July, 2024 / Revised: 24<sup>th</sup> August, 2024 /

Accepted: 27<sup>th</sup> September, 2024 / First online: 24<sup>th</sup> December, 2024

### Mechanics of Solids

#### Research Article

© The Author(s), 2024

© Samara State Technical University, 2024 (Compilation, Design, and Layout)

© © The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

#### Please cite this article in press as:

Sevastyanov G. M. Antiplane axisymmetric elastic-plastic shear in an isotropic hardening material, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2024, vol. 28, no. 4, pp. 740–758. EDN: KQCGUA. DOI: 10.14498/vsgtu2102 (In Russian).

#### Author’s Details:

Georgiy M. Sevastyanov  <https://orcid.org/0000-0003-4755-5305>

Cand. Phys. & Math. Sci.; Leading Researcher; Lab. of Mechanics of Materials and Structures;  
e-mail: akela.86@mail.ru

**Competing interests.** I have no competing interests.

**Authors' contributions and responsibilities.** I take full responsibility for providing the final version of the manuscript for publication. The final version of the manuscript has been approved by me.

**Funding.** The study was performed within the framework of the State Contract of the Khabarovsk Federal Research Center of the Far-East Branch of the Russian Academy of Sciences.

## References

1. Shutov A. V., Kaygorodtseva A. A. Sample shapes for reliable parameter identification in elasto-plasticity, *Acta Mech.*, 2020, vol. 231, pp. 4761–4780. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00707-020-02758-9>.
2. Arutyunyan N. Kh., Radayev Yu. N. Elastoplastic torsion of a cylindrical rod for finite deformations, *J. Appl. Math. Mech.*, 1989, vol. 53, no. 6, pp. 804–811. DOI: [https://doi.org/10.1016/0021-8928\(89\)90090-7](https://doi.org/10.1016/0021-8928(89)90090-7).
3. Sevastyanov G. M., Burenin A. A. Finite strain upon elastic-plastic torsion of an incompressible circular cylinder, *Dokl. Phys.*, 2018, vol. 63, pp. 393–395. EDN: NFBQYY. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1028335818090094>.
4. Sevastyanov G. M., Bormotin K. S. Finite-strain elastic-plastic torsion: Analytical and FEM modeling for nonmonotonically hardening polymers, *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2023, no. 3, pp. 124–136. EDN: WQVCPT. DOI: <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2023.3.11>.
5. Sevastyanov G. M. Finite-strain elastic-plastic torsion: Comparison of von Mises and Tresca materials, *Materials Physics and Mechanics*, 2023, vol. 51, no. 2, pp. 140–150. EDN: KEMBBZ. DOI: [https://doi.org/10.18149/MPM.5122023\\_13](https://doi.org/10.18149/MPM.5122023_13).
6. Xue Z., Pontin M. G., Zok F. W., Hutchinson J. W. Calibration procedures for a computational model of ductile fracture, *Eng. Fract. Mech.*, 2010, vol. 77, no. 3, pp. 492–509. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2009.10.007>.
7. Tvergaard V., Hutchinson J. W. Numerical simulation of cropping, *J. Appl. Mech.*, 2014, vol. 81, no. 7, 071002. DOI: <https://doi.org/10.1115/1.4026891>.
8. Aleksandrov S. E., Goldstein R. V. Motion of a rigid bar in a rigid-viscoplastic medium: The influence of the model type on the solution behavior, *Mech. Solids*, 2015, vol. 50, no. 4, pp. 389–396. EDN: UZWWOB. DOI: <https://doi.org/10.3103/S0025654415040044>.
9. Alexandrov S., Date P. An alternative interpretation of axial friction test results for viscoplastic materials, *Mech. Time-Depend. Mater.*, 2018, vol. 22, pp. 259–271. EDN: VBBPGU. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11043-017-9372-x>.
10. Burenin A. A., Kovtanyuk L. V., Mazelis A. L. Development of a rectilinear axisymmetric viscoplastic flow and elastic aftereffect after its stop, *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2010, vol. 51, no. 2, pp. 261–268. EDN: MXCWLJ. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10808-010-0036-8>.
11. Liu I. S. A note on the Mooney–Rivlin material model, *Continuum Mech. Thermodyn.*, 2012, vol. 24, pp. 583–590. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00161-011-0197-6>.
12. Kellermann D. C., Attard M. M. An invariant-free formulation of neo-Hookean hyperelasticity, *ZAMM*, 2016, vol. 96, no. 2, pp. 233–252. DOI: <https://doi.org/10.1002/zamm.201400210>.
13. Korobeynikov S. N. Families of Hooke-like isotropic hyperelastic material models and their rate formulations, *Arch. Appl. Mech.*, 2023, vol. 93, pp. 3863–3893. EDN: GMCDFC. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00419-023-02466-5>.
14. Lee E. H. Elastic-plastic deformation at finite strains, *J. Appl. Mech.*, 1969, vol. 36, no. 1, pp. 1–6. DOI: <https://doi.org/10.1115/1.3564580>.
15. Levitas V. I. *Large deformation of materials with complex rheological properties at normal and high pressure*. New York, Nova Science Publ., 1996.

16. Feng B., Levitas V. I., Hemley R. J. Large elastoplasticity under static megabar pressures: Formulation and application to compression of samples in diamond anvil cells, *Int. J. Plasticity*, 2016, vol. 84, pp. 33–57. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2016.04.017>.
17. Rogovoi A. A. *Formalizovannyi podkhod k postroeniiu modelei mekhaniki deformiruemogo tverdogo tela. Chast' II* [Formalized Approach to Constructing Models of the Mechanics of a Deformable Solid. Part II]. Moscow; Izhevsk, Izhevskii Institut Komp'yuternykh Issledovaniy, 2023, 318 pp. (In Russian)
18. Sevastyanov G. M., Begun A. S., Burenin A. A. Finite-strain elastic-plastic circular shear in materials with isotropic hardening, *Prkl. Mat. Mekh.*, 2024, vol. 88, no. 2, pp. 313–340 (In Russian). EDN: XUAKYF. DOI: <https://doi.org/10.31857/S0032823524020108>.

MSC: 76D05, 35G20

## Exact solution to the velocity field description for Couette–Poiseuille flows of binary liquids



V. V. Bashurov<sup>1,2</sup>, N. V. Burmasheva<sup>2,3</sup>,  
E. Yu. Prosviryakov<sup>1,2,3</sup>

<sup>1</sup> Ural State University of Railway Transport,

66, Kolmogorova st., Ekaterinburg, 620034, Russian Federation.

<sup>2</sup> Ural Federal University named after the first President of Russia B. N. Yeltsin,

19, Mira st., Ekaterinburg, 620002, Russian Federation.

<sup>3</sup> Institute of Engineering Science, Ural Branch of RAS,

34, Komsomolskaya st., Ekaterinburg, 620049, Russian Federation.

### Abstract

Exact solution of the Oberbeck–Boussinesq equations for describing steady flows of binary Poiseuille-type fluids is proposed and studied. The fluid motion is considered in the infinite horizontal layer. Shear flows are described by overdetermined system of equations. Nontrivial exact solution for the Oberbeck–Boussinesq system exists in the class of velocities with two vector components and depends only on the transverse coordinate. This structure of the velocity vector coordinates ensures naturally the fulfillment of the continuity equation as an “extra” equation. The pressure field, the temperature field, and the concentration field of the dissolved substance are described by linear functions of horizontal (longitudinal) coordinates with coefficients that functionally depend on the third coordinate. Fluid layer, as it is shown, can have two points where the velocity becomes zero. In this case, the spiral flow is realized (the hodograph of the velocity vector has a turning point).

### Mathematical Modeling, Numerical Methods and Software Complexes Research Article

© The Author(s), 2024

© Samara State Technical University, 2024 (Compilation, Design, and Layout)

© The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

#### Please cite this article in press as:

Bashurov V. V., Burmasheva N. V., Prosviryakov E. Yu. Exact solution to the velocity field description for Couette–Poiseuille flows of binary liquids, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2024, vol. 28, no. 4, pp. 759–772. EDN: GJRNAA. DOI: 10.14498/vsgtu2098.

#### Authors' Details:

Vyacheslav V. Bashurov <https://orcid.org/0000-0002-6507-169X>

Cand. Phys. & Math. Sci.; Dean; Electrotechnical Faculty<sup>1</sup>; Associate Professor; Dept. of Information Technology and Automation<sup>2</sup>; e-mail: vbashurov@usurt.ru

Natalya V. Burmasheva <https://orcid.org/0000-0003-4711-1894>

Cand. Tech. Sci.; Associate Professor; Dept. of Information Technology and Automation<sup>2</sup>; Senior Researcher; Sect. of Nonlinear Vortex Hydrodynamics<sup>3</sup>; e-mail: nat\_burm@mail.ru

Evgeniy Yu. Prosviryakov <https://orcid.org/0000-0002-2349-7801>

Dr. Phys. & Math. Sci.; Professor; Dept. of Natural Sciences<sup>1</sup>; Professor; Dept. of Information Technology and Automation<sup>2</sup>; Head of Sector; Sect. of Nonlinear Vortex Hydrodynamics<sup>3</sup>; e-mail: evgen\_pros@mail.ru

**Keywords:** viscous fluid, binary fluid, Couette flow, Poiseuille flow, convection, diffusion, exact solution, counterflows, overdetermined system.

Received: 11<sup>th</sup> June, 2024 / Revised: 25<sup>th</sup> November, 2024 /

Accepted: 29<sup>th</sup> November, 2024 / First online: 25<sup>th</sup> December, 2024

---

**1. Introduction.** Theoretical study of convection started with consideration of the motion of liquids of homogeneous composition [1–9]. It is known, the assumption of liquid homogeneity does not always satisfy accuracy. Sea water and sugar syrup are the classic examples of non-homogeneous liquids where the distribution of salt and sugar induces more intense mixing of the medium than the motion caused by non-uniform temperature distribution [10–13]. Thus, the influence of dissolved substances in the solution on the structure of convection in a hydrodynamic thermal diffusion flow must be taken into account while studying the convective motion of a real liquid [10–12, 14].

The cross dissipative effects of Soret and Dufour should be regarded to describe thermal diffusion in solutions [15–24]. The Soret effect (the influence of temperature change on the impurity distribution) is traditionally included in solution while studying the flows of binary liquids considering the Dufour effect (inverse effect) to be negligibly small [19–22].

The study of binary fluid flows is carried out similarly to the study of convective flows in the Boussinesq approximation. The density dependence on temperature and concentration of the dissolved substance according to the linear law is considered in the term for the density of the Archimedes force and is neglected for the inertial forces [1–3, 18, 22, 25–33]. Consequently, the structure of exact solutions of the equations of binary fluid convection coincides with the expressions of motions generated by heat sources [30].

The exact solution for unidirectional steady convective flows can be presented as the Ostroumov–Birikh–Shliomis solution type  $V_x = U(z)$ ,  $P = P_0(z) + xP_1(z)$ ,  $T = T_0(z) + xT_1(z)$  [25, 26, 34–38]. This exact solution describes the superposition of gravitational convection and fluid motion caused by horizontal temperature gradients (Marangoni convection) [26, 39–45]. The Ostroumov–Birikh–Shliomis solution type was used to solve various one-dimensional convective boundary value problems with subsequent study of ansatzes on hydrodynamic stability for various classes of disturbances [2, 3, 27, 29]. The application of this type of exact solutions to unsteady flows was undertaken in several scientific researches [2, 3, 27].

The generalization of the Ostroumov–Birikh–Shliomis solution type was implemented in the papers [18, 19, 21, 22, 32, 46–51] to describe steady-state shear flows in velocity field  $V_x = U(z)$ ,  $V_y = V(z)$  with linear two coordinate forms for the temperature and pressure fields:  $T = T_0(z) + xT_1(z) + yT_2(z)$  and  $P = P_0(z) + xP_1(z) + yP_2(z)$ . This exact solution for description of binary fluids was announced in [18]. The linear forms of the force fields of pressure, concentration, and temperature were used to construct classes of exact solutions describing inhomogeneous shear flows [19, 21, 32].

After publication of paper [46], the announced exact solution was used to study shear thermal convective flows. The study of shear flows of binary fluids in infinite horizontal layer was started with the description of Couette-type flows in paper [18]. In this paper, the influence of horizontal pressure gradients (Poiseuille

flow [52–55]) on the structure of hydrodynamic fields of moving solutions with one dissolved substance is studied.

**2. Motion equations and exact solution.** We consider steady-state shear flow of binary viscous incompressible fluid in extended horizontal layer with boundaries formed by a pair of non-deformable parallel planes spaced apart by a distance  $h$ . We will also assume that the lower plane is absolutely rigid and motionless, and the upper plane is free. The assumption of negligible deformation of the upper boundary does not allow us to consider fluid motions comparable in scale to the thickness of the studied layer, for example, gravitational, thermoscapillary and other types of surface waves [1–3, 6]. We introduce Cartesian coordinate system  $Oxyz$  where the  $Oxy$  plane coincides with the lower boundary of the layer, and the  $Oz$  axis is directed perpendicular to this boundary toward the upper plane (boundary), spaced by a distance  $h$  (Fig. 1).

We use the system of thermal diffusion equations regarding the Boussinesq hypothesis of the density dependence to describe the steady-state liquid [1, 18, 30]:

$$\begin{aligned} V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} &= -\frac{\partial P}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2} \right), \\ V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} &= -\frac{\partial P}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 V_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial z^2} \right), \\ \frac{\partial P}{\partial z} &= g(\beta_1 T + \beta_2 C), \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} V_x \frac{\partial T}{\partial x} + V_y \frac{\partial T}{\partial y} &= (\chi + \alpha^2 dn) \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \alpha dn \left( \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} \right), \\ V_x \frac{\partial C}{\partial x} + V_y \frac{\partial C}{\partial y} &= \alpha \left( \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} \right) + \alpha d \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right), \\ \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} &= 0. \end{aligned}$$

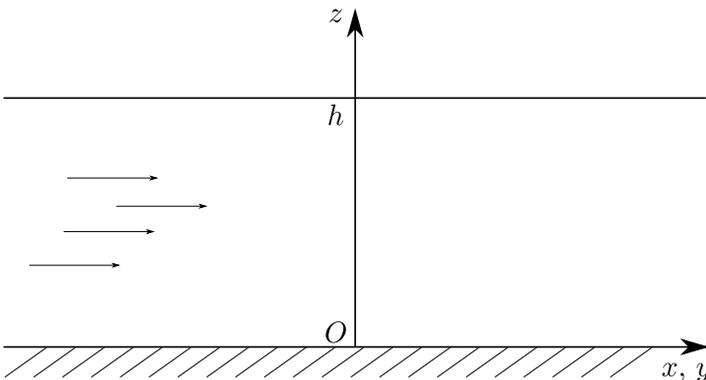


Figure 1. Liquid flow diagram (the  $Ox$  and  $Oy$  axes are “glued” together in figure; in reality the space is considered as three-dimensional)

We use the following designations in system (1):  $V_x, V_y$  are the components of the velocity vector;  $P$  is the pressure normalized to the constant average density of the liquid  $\rho$ ;  $\nu$  is the kinematic (molecular) viscosity of the mixture;  $C, T$  are the concentration of the light component and the temperature of the liquid, respectively, measured from the equilibrium value;  $g$  is the gravity acceleration;  $\chi, d, \alpha$  are the coefficients of thermal diffusivity, diffusion, thermal diffusion, respectively;  $\beta_1$  and  $\beta_2$  are the coefficients of temperature and concentration volume expansion of the liquid, respectively;  $n = \left[ \frac{T}{c_p} \left( \frac{\partial \mu}{\partial C} \right)_{T,P} \right]_0$  is the thermodynamic parameter.

The main feature of system (1) (in addition to its nonlinearity) is its over-determination: there are six equations to determine the five unknown functions that describe the behavior of the velocity, pressure, temperature, and concentration fields. We assume the relationship between the hydrodynamic fields that allows us to restore the balance between the number of unknown functions and the number of their relations solving the system (1) [30, 49–51]. We consider such relationship as following:

$$\begin{aligned} V_x &= U(z), & V_y &= V(z), \\ T &= T_0(z) + xT_1(z) + yT_2(z), & P &= P_0(z) + xP_1(z) + yT_2(z), \\ C &= C_0(z) + xC_1(z) + yC_2(z). \end{aligned} \quad (2)$$

The velocity field of the form (2) describes many classical flows, for example, the Couette flow [56], the Poiseuille flow [52–55], the Birikh–Ostroumov flow [25, 26] and many others. The use of the class of exact solutions (2) generalizes the well-known exact Ostroumov–Birikh solution for describing unidirectional convective flows. In [46], it was shown how the exact solution was modified for two-dimensional flows in velocities. Such flows cannot be reduced to unidirectional ones [46]. In the articles [18, 48, 49] similar solutions of shear flows were constructed. The exact solution (2) allows to linearize the equation for the transfer of angular momentum, but this is not an artificial postulation of linear approximation of the Oberbeck–Boussinesq equations (1). It is an opportunity to study the transverse structure of the flow, in which direct calculations of the flow characteristics are impossible. This solution exactly allows to study the structure of horizontal and vertical convection of binary fluid for the boundary value problem announced below for infinite horizontal layer. The exact solution (2) is the simplest solution for the overdetermined system (1) and is necessary for studying flows with non-uniform velocities.

The structure of correlation (2) for the velocity field allows identical satisfaction of the incompressibility equation in system (1). And substitution of correlation (2) into the remaining equations of system (1) leads (due to the independence of the coordinates of the selected Cartesian system) to the system of eleven ordinary differential equations to define eleven unknown functions:

$$\begin{aligned} (\chi + \alpha^2 dn)T_1'' + \alpha dnC_1'' &= 0, & (\chi + \alpha^2 dn)T_2'' + \alpha dnC_2'' &= 0; \\ C_1'' + dT_1'' &= 0, & \alpha C_2'' + \alpha dT_2'' &= 0; \\ P_1' &= g\beta_1 T_1 + g\beta_2 C_1, & P_2' &= g\beta_1 T_2 + g\beta_2 C_2, \\ \nu U'' &= P_1, & \nu V'' &= P_2; \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned}
 UT_1 + VT_2 &= (\chi + \alpha^2 dn)T_0'' + \alpha dnC_0'', & UC_1 + VC_2 &= \alpha C_0'' + \alpha dT_0''; \\
 P_0' &= g\beta_1 T_0 + g\beta_2 C_0.
 \end{aligned}$$

Here the prime denotes the derivative with respect to the vertical coordinate  $z$ . The coincidence of the number of equations and the number of unknown functions in the system (3) indicates that the selected class of solutions (2) removes the overdetermination of the original Oberbeck–Boussinesq system (1).

The second derivatives of the gradients of the temperature and concentration fields are shown in [18] to be only zero values:

$$T_1'' = 0, \quad T_2'' = 0, \quad C_1'' = 0, \quad C_2'' = 0. \quad (4)$$

The constant coefficients in the linear forms (4) are determined from the boundary conditions. Based on expressions (4), one can obtain exact solution for the horizontal pressure gradients and expression for the components of the velocity vector:

$$\begin{aligned}
 P_1 &= g\beta_1 \left( c_1 \frac{z^2}{2} + c_2 z \right) + g\beta_2 \left( c_5 \frac{z^2}{2} + c_6 z \right) + c_9, \\
 P_2 &= g\beta_1 \left( c_3 \frac{z^2}{2} + c_4 z \right) + g\beta_2 \left( c_7 \frac{z^2}{2} + c_8 z \right) + c_{10}, \\
 U &= \frac{g\beta_1}{\nu} \left( c_1 \frac{z^4}{24} + c_2 \frac{z^3}{6} \right) + \frac{g\beta_2}{\nu} \left( c_5 \frac{z^4}{24} + c_6 \frac{z^3}{6} \right) + c_9 \frac{z^2}{2} + c_{11} z + c_{12}, \\
 V &= \frac{g\beta_1}{\nu} \left( c_3 \frac{z^4}{24} + c_4 \frac{z^3}{6} \right) + \frac{g\beta_2}{\nu} \left( c_7 \frac{z^4}{24} + c_8 \frac{z^3}{6} \right) + c_{10} \frac{z^2}{2} + c_{13} z + c_{14}.
 \end{aligned} \quad (5)$$

The final integration of the equation system (3) needs in definition of exact solution for uniform (background) components of pressure, temperature and concentration fields. The revealed view of these bulky relations are not shown but can be easily obtained on the base of above written relations. The background temperature  $T_0$  and background concentration  $C_0$  are presented as seventh power polynomials upon the  $z$  variable. The background pressure  $P_0$  is eighth power polynomials upon the  $z$  variable. The exact solution for velocity field is studied in details in this paper.

**3. Boundary value problem.** The coefficients appeared from the integration of some equations of system (3), as mentioned above, must be determined from the boundary conditions. We formulate them.

We assume that the no-slip condition is satisfied at the lower boundary (bottom):

$$V_x(0) = V_y(0) = 0.$$

At the upper boundary  $z = h$  we assume given uniform distribution of velocities, which corresponds to the motion of the upper boundary as a solid surface:

$$V_x(h) = W \cos \phi, \quad V_y(h) = W \sin \phi.$$

Here  $W$  is the value of the velocity at the upper boundary,  $\psi$  is the angle the velocity vector forms with the abscissa axis  $Ox$ . In other words, the movement

of the solid boundary (plate) kinematically causes steady convective flow of the binary liquid.

The boundary condition for pressure is presented as

$$P(h) = S_0 + S_1x + S_2y,$$

where  $S_0$  is the atmospheric pressure on the free surface. The condition of impermeability and ideal heat exchange is established for the concentration and temperature at the boundary  $z = 0$ , respectively:

$$\frac{\partial C}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial z} = 0.$$

In addition, we assume that the temperature and concentration are determined by the following linear forms at the upper boundary of the layer:

$$T(h) = ax + by, \quad C(h) = mx + ny.$$

According to representation (2) for hydrodynamic fields, the formulated boundary conditions are reduced to the following conditions:

$$U = V = 0, \quad \frac{dT_0}{dz} = 0, \quad \frac{dT_1}{dz} = \frac{dT_2}{dz} = 0, \quad \frac{dC_0}{dz} = 0, \quad \frac{dC_1}{dz} = \frac{dC_2}{dz} = 0 \quad (6)$$

at the lower boundary;

$$\begin{aligned} U &= W \cos \phi, & V &= W \sin \phi, & T_0 &= 0, & T_1 &= a, & T_2 &= b, \\ P_0 &= S_0, & P_1 &= S_1, & P_2 &= S_2, & C_0 &= 0, & C_1 &= m, & C_2 &= n \end{aligned} \quad (7)$$

at the upper boundary of the studied layer.

**4. Solution of the boundary value problem.** The fulfilment of the boundary conditions (6) and (7) in expressions (4) and (5) leads to the following exact solution:

$$\begin{aligned} V_x = U(z) &= \frac{Z}{6\nu} [6W\nu \cos \varphi + h^2(-1 + Z)(3\nu(S_1 - ghE) + ghE(1 + Z))], \\ V_y = V(z) &= \frac{Z}{6\nu} [6W\nu \sin \varphi + h^2(-1 + Z)(3\nu(S_2 - ghF) + ghF(1 + Z))]. \end{aligned} \quad (8)$$

$Z = z/h \in [0, 1]$  is the normalized vertical coordinate in expressions (8), and the following notations are introduced for the coefficients:

$$E = (a\beta_1 + m\beta_2), \quad F = (b\beta_1 + n\beta_2).$$

As was already mentioned above (constructing the general solution (5)), the main focus of the article is concentrated on the study of the velocity field, therefore the exact solutions for the temperature, concentration and pressure fields are bulky and are not given here. We will only note that they have the following structure:

$$T = T_0(z) + ax + by, \quad C = C_0(z) + mx + ny,$$

$$P = P_0(z) + P_1(z)x + P(z)y.$$

In other words, the gradients of the temperature field and the concentration field are constant values determined by the boundary conditions (7). Contrarily the pressure gradients in the studied problem can vary across the layer:

$$P_1 = S_1 + Egh(-1 + Z), \quad P_2 = S_2 + Fgh(-1 + Z).$$

Moreover, these components of the pressure field can change sign for a certain correlation of values specified at the boundary of the flow region, i.e. the pressure can either increase or decrease across the layer.

The expressions (8) for both components of the velocity field have the same structure and can be obtained from each other by simultaneous replacement  $\cos \phi \rightarrow \sin \phi$ ,  $S_1 \rightarrow S_2$  and  $E \rightarrow F$ . This is the reason that we will study in detail the properties of one component (e.g., the velocity  $U$ ) and extend the obtained conclusions to the behavior of the second component (the velocity  $V$ ). For a uniform form of notation, we do not assume that  $\sin \phi = 0$ , which, generally speaking, we have the right to do without loss of generality, since the orientation of the axes  $Ox$ ,  $Oy$  has not been specified anywhere above.

So, the velocity profile  $U$  is determined, in particular, by the number of its zero points. And we begin with analysis of their number and position.

First of all, we note that if the condition  $E = S_1 = 0$  is fulfilled (i.e. the influence of thermal diffusion factors and pressure is ignored), then the solution (8) degenerates into a linear dependence

$$U|_{S_1=E=0} = W \cos \varphi \nu Z.$$

In other words, the velocity profile is described by exact Couette-type solution [56], which means that the counter-flows in the direction of the  $Ox$  axis are not possible. Therefore the counter-flows are induced by the superposition of the temperature and concentration fields in combination with the non-uniformity of the pressure distribution.

Obviously, some point  $Z_* \in (0, 1)$  is zero if it is zero solution of the function

$$\begin{aligned} f(z) &= 6W\nu \cos \varphi + h^2(-1 + Z)(3\nu(S_1 - ghE) + ghE(1 + Z)) = \\ &= gh^3E(z^2 - 1) + 3\nu(S_1 - ghE)h^2(-1 + Z) + 6W\nu \cos \varphi = \\ &= gh^3Ez^2 + 3\nu(S_1 - ghE)h^2Z + (6W\nu \cos \varphi - gh^3E - 3\nu(S_1 - ghE)h^2). \end{aligned}$$

There are no more than two such zeros, since the function  $f$  defines a quadratic dependence on the vertical coordinate. There is only one zero point in the layer (near which a zone with reverse flow appears), if the function  $f$  takes values of different signs at the ends of the interval  $(0, 1)$ :

$$f(0)f(1) = 6W\nu \cos \varphi (6W\nu \cos \varphi - gh^3E - 3\nu(S_1 - ghE)h^2) < 0.$$

The values of the function  $f$  at the boundaries of the interval  $(0, 1)$  must coincide in sign for the existence of two points of velocity stratification  $U$ :

$$f(0)f(1) = 6W\nu \cos \varphi (6W\nu \cos \varphi - gh^3E - 3\nu(S_1 - ghE)h^2) > 0.$$

This condition is necessary, but not sufficient. Additionally, it is necessary to require that the values of the function  $f$  at its extremum point and at any end of the interval  $(0, 1)$  should be of different signs (the values at the ends coincide in sign due to the necessary condition, so, for simplicity, we will take the point  $Z = 1$ ):

$$f(1)f(Z_{extr}) < 0.$$

Regarding the structure of the function  $f$ , this condition takes an equivalent form:

$$W \cos \varphi (-h(-3S_1\nu + Egh(-2 + 3\nu)))^2 + 24WEg\nu \cos \varphi E^{-1} < 0.$$

The coefficient  $E$  is naturally assumed to be non-zero when we consider the presence of two zero points for the velocity  $U$ , since this parameter is a multiplier in the coefficient at the highest (second) power of the polynomial  $U$ .

Figure 2 shows the velocity  $U$  profiles with and without countercurrents. The velocity profile  $U$  is not monotonic in all cases shown in Fig. 2. Nonlinear dependence of expressions (8) on the normalized vertical coordinate  $Z$  explains this effect. Constructing the profiles (Fig. 2), the values of the parameters specified at the boundaries of the fluid layer were varied. The values of the angle, layer thickness  $h$ , and kinematic viscosity  $\nu$  were taken constant ( $\nu = 1.006 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ ,  $h = 1 \text{ m}$ ,  $\phi = \pi/3$ ). The mentioned conclusions about the number of counter-current zones are also applicable to the velocity  $V$  due to the structure of expressions (8).

Figure 3 shows the hodograph of the velocity vector in the case where the velocity  $U$  has two zero points in the layer, and the velocity  $V$  has one zero point.

The solution of the boundary value problem is locally spiral flow with the illustrations in Fig. 3. This effect (the formation of a loop on the hodograph) is characteristic of the classical Ekman flow, which describes the rotation of liquid. But there is no explicit rotation, only the vorticity is present:

$$\Omega = \text{rot } V = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_x & V_y & 0 \end{vmatrix} = -V'i + U'j.$$

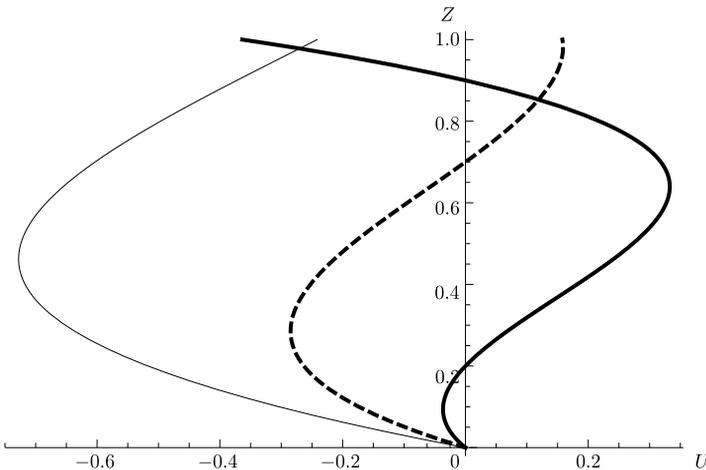


Figure 2. Velocity  $U$  profiles with countercurrents (solid heavy line and dash heavy line) and without countercurrents (solid thin line)

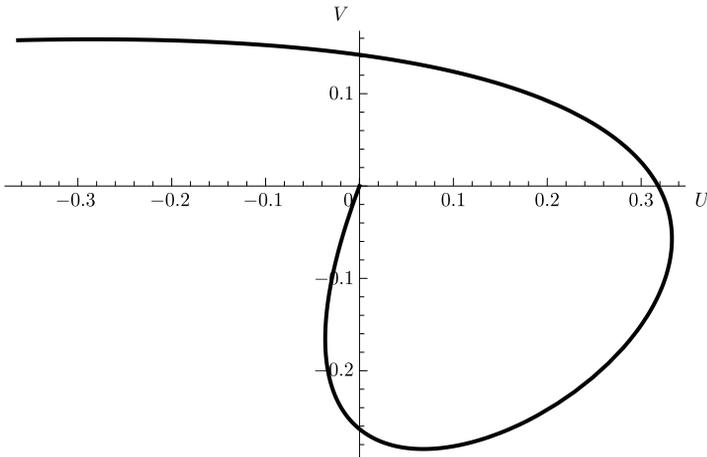


Figure 3. Hodograph of the velocity vector

The considered velocity vector field can be locally potential if the first derivatives of both velocities  $U$ ,  $V$  are simultaneously zero, for some value of the normalized vertical coordinate  $Z$  within the interval. In other words, we indicate only on the extremum points of the functions  $U$ ,  $V$ , and these points must coincide.

**5. Conclusion.** The paper presents a new exact solution describing steady-state thermos-diffusion flows of the Couette type. The solution is obtained in the class of linear functions of the coordinates with nonlinear dependence of the coefficients on remaining coordinates. The presented solution structure, with its formal external simplicity, allows to mark nonlinear effects observed in liquid during its flow and to study the methods of control of these effects. The main attention in the article is focused on the analysis of the number of zero points of the velocity field components and constructing zones with reverse flow. It is shown that the velocity field under certain conditions can be stratified into three zones, in each of which the flow has its own direction. Characteristic flow profiles are given. The local helicity of the flow is illustrated.

**Competing interests.** The authors declare that they have no competing interests.

**Authors' contributions and responsibilities.** Each author participated in the article concept development; the authors contributed equally to this article. The authors are absolutely responsible for submitting the final manuscript for print. Each author has approved the final version of the manuscript.

**Funding.** This research did not receive any funding.

## References

1. Gershuni G. Z., Zhukhovitskii E. M. *Convective Stability of Incompressible Fluids*, Israel Program for Scientific Translations. Jerusalem, Keter Publishing House, 1976, 330 pp.
2. Aristov S.N., Schwartz K.G. *Vikhrevye techeniia advektivnoi prirody vo vrashchaiushchemsya sloe zhidkosti* [Vortical Flows of Advective Nature in a Rotating Fluid Layer]. Perm, Perm State Univ., 2006, 153 pp. (In Russian)
3. Aristov S.N., Schwartz K.G. *Vikhrevye techeniia v tonkikh sloiakh zhidkosti* [Vortical Flows in Thin Fluid Layers]. Kirov, Vyatka State Univ. Publ., 2011, 207 pp. (In Russian)

4. Chandrasekhar S. *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability*, International Series of Monographs on Physics. Oxford, Clarendon Press, 1961, xix+652 pp.
5. Pedlosky J. *Geophysical Fluid Dynamics*. New York, Heidelberg, Berlin, Springer-Verlag, 1979, xii+624 pp.
6. Polyinin A. D., Kutepov A. M., Kazenin D. A., Vyazmin A. V. *Hydrodynamics, Mass and Heat Transfer in Chemical Engineering*. London, CRC Pres, 2001, 408 pp. DOI: <https://doi.org/10.1201/9781420024517>.
7. Shliomis M.I. Convective instability of a ferrofluid, *Fluid Dyn.*, 1973, vol. 8, no. 6, pp. 957–961. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01014273>.
8. Drazin P. G., Reid W. H. *Hydrodynamic Stability*. Cambridge, Cambridge Univ., 2004, xx+605 pp. DOI: <https://doi.org/10.1017/CB09780511616938>.
9. Dikii L. A. *Hydrodynamical Stability and Dynamics of Atmosphere*. Leningrad, Gidrometeoizdat, 1976, 110 pp.
10. Bulatov V. V., Vladimirov Yu. V. *Volny v stratifitsirovannykh sredakh* [Waves in Stratified Medium]. Moscow, Nauka, 2015, 735 pp. (In Russian)
11. Bulgakov S. N., Korotaev G. K. Analytical model of jet circulation in confined water bodies, *Morsk. Gidrofiz. Zh.*, 1987, no. 3, pp. 434–446.
12. Aristov S. N., Shvarts K. G. On the influence of salinity exchange on the circulation of a fluid in an enclosed basin, *Sov. J. Phys. Ocean.*, 1991, vol. 2, no. 4, pp. 293–298. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF02346081>.
13. Antontsev S. N., Kazhikhov A. V., Monakhov V. N. *Boundary Value Problems in Mechanics of Nonhomogeneous Fluids*, Studies in Mathematics and Its Applications, vol. 22. Amsterdam, North-Holland, 1990, xii+309 pp.
14. de Groot S. R., Mazur P. *Non-equilibrium Thermodynamics*, Series in Physics. Amsterdam, North-Holland, 1962, x+510 pp.
15. Dufour L. Über die Diffusion der Gase durch poröse Wände und die sie begleitenden Temperaturveränderungen, *Ann. Phys.*, 1873, vol. 224, no. 3, pp. 490–492. DOI: <https://doi.org/10.1002/andp.18732240311>.
16. Soret Ch. Sur l'état d'équilibre que prend, au point de vue de sa concentration, une dissolution saline primitivement homogène dont deux parties sont portées à des températures différentes, *C. R. Arch. Sci. Phys. Natur., Genève*, 1879, vol. 2, pp. 48–61.
17. Kovalenko A. V., Uzdenova A. M., Ovsyannikova A. V., et al. Mathematical modeling of the effect of spacers on mass transfer in electromembrane systems, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2022, vol. 26, no. 3, pp. 520–543 (In Russian). DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1944>.
18. Bashurov V. V., Prosviryakov E. Yu. Steady thermo-diffusive shear Couette flow of incompressible fluid. Velocity field analysis, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2021, vol. 25, no. 4, pp. 763–775. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1878>.
19. Burmasheva N. V., Prosviryakov E. Yu. Exact solutions to the Oberbeck–Boussinesq equations for shear flows of a viscous binary fluid with allowance made for the Soret effect, *Bulletin of Irkutsk State Univ., Ser. Mathematics*, 2021, vol. 37, pp. 17–30. DOI: <https://doi.org/10.26516/1997-7670.2021.37.17>.
20. Burmasheva N. V., Prosviryakov E. Yu. Influence of the Dufour effect on shear thermal diffusion flows, *Dynamics*, 2022, vol. 2, no. 4, pp. 367–379. DOI: <https://doi.org/10.3390/dynamics2040021>.
21. Ershkov S. V., Burmasheva N. V., Leshchenko D. D., Prosviryakov E. Yu. Exact solutions of the Oberbeck–Boussinesq equations for the description of shear thermal diffusion of newtonian fluid flows, *Symmetry*, 2023, vol. 15, no. 9, 1730. DOI: <https://doi.org/10.3390/sym15091730>.
22. Ershkov S. V., Prosviryakov E. Yu., Burmasheva N. V., Christianto V. Solving the hydrodynamical system of equations of inhomogeneous fluid flows with thermal diffusion: A review, *Symmetry*, 2023, vol. 15, no. 10, 1825. DOI: <https://doi.org/10.3390/sym15101825>.

23. Shliomis M. I., Smorodin B. L. Onset of convection in colloids stratified by gravity, *Phys. Rev. E*, 2005, vol. 71, 036312. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.71.036312>.
24. Siva Ramana N., Sivagnana Prabhua K. K., Kandasamyb R. Soret and dufour effects on MHD free convective heat and mass transfer with thermophoresis and chemical reaction over a porous stretching surface: Group theory transformation, *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2012, vol. 53, no. 6, pp. 78–87. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0021894412060090>.
25. Ostroumov G. A. *Free Convection under the Condition of the Internal problem*, NACA Technical Memorandum 1407. Washington, NACA, 1958, 239 pp <https://ntrs.nasa.gov/citations/20030068786>.
26. Birikh R. V. Thermocapillary convection in a horizontal layer of liquid, *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 1966, vol. 7, no. 3, pp. 43–44. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00914697>.
27. Pukhnachev V. V. Non-stationary analogues of the Birikh solution, *Izv. Alt. Gos. Univ.*, 2011, no. 1–2, pp. 62–69 (In Russian). EDN: OKHJMH.
28. Prigogine I., Defay R. *Chemical Thermodynamics*. London, New York, Toronto, Longmans, Green and Co., 1954, 584 pp.
29. Andreev V. K. *Birikh solutions to convection equations and some of its extensions*, The ICM SB RAS Preprint no. 1–10. Krasnoyarsk, 2010, 68 pp. (In Russian)
30. Aristov S. N., Prosviryakov E. Yu. A new class of exact solutions for three-dimensional thermal diffusion equations, *Theor. Found. Chem. Eng.*, 2016, vol. 50, no. 3, pp. 286–293. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0040579516030027>.
31. Andreev V. K., Gaponenko Ya. A., Goncharova O. N., Pukhnachev V. V. *Mathematical models of convection*, De Gruyter Studies in Mathematical Physics, vol. 5. Berlin, Boston, De Gruyter, 2012, xv+417 pp. DOI: <https://doi.org/10.1515/9783110258592>.
32. Burmasheva N. V., Prosviryakov E. Yu. Exact solutions for steady convective layered flows with a spatial acceleration, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2021, vol. 65, no. 7, pp. 8–16. DOI: <https://doi.org/10.3103/S1066369X21070021>.
33. Chernatynskii V. I., Shliomis M. I. Convection near critical Rayleigh numbers with an almost vertical temperature gradient, *Fluid Dyn.*, 1973, vol. 8, no. 1, pp. 55–61. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01017637>.
34. Shliomis M. I., Yakushin V. I. Convection in a two-layer binary system with evaporation, *Uch. Zap. Permsk. Gos. Univ., Ser. Gidrodinamika*, 4. Perm, Perm State Univ., 1972, pp. 129–141 (In Russian).
35. Smorodin B. L., Cherepanov I. N., Myznikova B. I., Shliomis M. I. Traveling-wave convection in colloids stratified by gravity, *Phys. Rev. E*, 2011, vol. 84, no. 2, 026305. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.84.026305>.
36. Shliomis M. I. Magnetic fluids, *Sov. Phys. Usp.*, 1974, vol. 17, no. 2, pp. 153–269. DOI: <https://doi.org/10.1070/PU1974v017n02ABEH004332>.
37. Smith M. K., Davis S. H. Instabilities of dynamic thermocapillary liquid layers. Part 1. Convective instabilities, *J. Fluid Mech.*, 1983, vol. 132, pp. 119–144. DOI: <https://doi.org/10.1017/S0022112083001512>.
38. Ortiz-Pérez A. S., Dávalos-Orozco L. A. Convection in a horizontal fluid layer under an inclined temperature gradient, *Phys. Fluids*, 2011, vol. 28, no. 3, 23. DOI: <https://doi.org/10.1063/1.3626009>.
39. Burmasheva N. V., Prosviryakov E. Yu. Convective layered flows of a vertically whirling viscous incompressible fluid. Temperature field investigation, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2020, vol. 24, no. 3, pp. 528–541. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1770>.
40. Schwarz K. G. Stability of thermocapillary advective flow in a slowly rotating liquid layer under microgravity conditions, *Fluid Dyn.*, 2012, vol. 47, no. 1, pp. 37–49. DOI: <https://doi.org/10.1134/S001546281201005X>.
41. Knutova N. S., Schwarz K. G. A study of behavior and stability of an advective thermocapillary flow in a weakly rotating liquid layer under microgravity, *Fluid Dyn.*, 2015, vol. 50, no. 3, pp. 340–350. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0015462815030047>.

42. Napolitano L. G. Plane Marangoni–Poiseuille flow of two immiscible fluids, *Acta Astronaut.*, 1980, vol. 7, no. 4–5, pp. 461–478. DOI: [https://doi.org/10.1016/0094-5765\(80\)90036-3](https://doi.org/10.1016/0094-5765(80)90036-3).
43. Bénard H. *Les tourbillons cellulaires dans une nappe liquide propageant de la chaleur par convection, en régime permanent*. Paris, Gauthier-Villars, 1901, 88 pp <https://archive.org/details/lestourbillonsce00bena>.
44. Bénard H. Étude expérimentale des courants de convection dans une nappe liquide. – Régime permanent: tourbillons cellulaires, *J. Phys. Theor. Appl.*, 1900, vol. 9, no. 1, pp. 513–524. DOI: <https://doi.org/10.1051/jphysap:019000090051300>.
45. Bénard H. Les tourbillons cellulaires dans une nappe liquide. – Méthodes optiques d'observation et d'enregistrement, *J. Phys. Theor. Appl.*, 1901, vol. 10, no. 1, pp. 254–266. DOI: <https://doi.org/10.1051/jphysap:0190100100025400>.
46. Aristov S. N., Prosviryakov E. Yu. On laminar flows of planar free convection, *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2013, vol. 9, no. 4, pp. 651–657. DOI: <https://doi.org/10.20537/nd1304004>.
47. Burmasheva N. V., Prosviryakov E. Yu. A large-scale layered stationary convection of a incompressible viscous fluid under the action of shear stresses at the upper boundary. Temperature and pressure field investigation, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2017, vol. 21, no. 4, pp. 736–751 (In Russian). DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1568>.
48. Burmasheva N. V., Prosviryakov E. Yu. Thermocapillary convection of a vertical swirling liquid, *Theor. Found. Chem. Eng.*, 2020, vol. 54, no. 1, pp. 230–239. DOI: <https://doi.org/10.1134/S004057951906>.
49. Burmasheva N. V., Prosviryakov E. Yu. Exact solution for Couette-type steady convective concentration flows, *J. Appl. Mech. Techn. Phys.*, 2021, vol. 62, no. 7, pp. 1199–1210. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0021894421070051>.
50. Burmasheva N. V., Prosviryakov E. Yu. On Marangoni shear convective flows of inhomogeneous viscous incompressible fluids in view of the Soret effect, *J. King Saud Univ. Sci.*, 2020, vol. 32, no. 8, pp. 3364–3371. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jksus.2020.09.023>.
51. Burmasheva N. V., Privalova V. V., Prosviryakov E. Yu. Layered Marangoni convection with the Navier slip condition, *Sādhanā*, 2021, vol. 46, 55. DOI: <https://doi.org/10.1007/s12046-021-01585-5>.
52. Hagen G. Über die Bewegung des Wassers in engen cylindrischen Röhren, *Ann. Phys.*, 1839, vol. 122, no. 3, pp. 423–442. DOI: <https://doi.org/10.1002/andp.18391220304>.
53. Poiseuille J.-L.-M. Recherches expérimentales sur le mouvement des liquides dans les tubes de très-petits diamètres, *C. R. Hebd. Séances Acad. Sci.*, 1840, vol. 11, pp. 961–967.
54. Poiseuille J.-L.-M. Recherches expérimentales sur le mouvement des liquides dans les tubes de très-petits diamètres, *C. R. Hebd. Séances Acad. Sci.*, 1840, vol. 11, pp. 1041–1048.
55. Poiseuille J.-L.-M. Recherches expérimentales sur le mouvement des liquides dans les tubes de très-petits diamètres, *C. R. Hebd. Séances Acad. Sci.*, 1841, vol. 12, pp. 112–115.
56. Couette M. Études sur le frottement des liquids, *Ann. Chim. Phys.*, 1890, vol. 6-21, pp. 433–510.

УДК 517.958:531.32

## Точное решение для описания поля скоростей течений Куэтта–Пуазейля бинарных жидкостей

*В. В. Башуров*<sup>1,2</sup>, *Н. В. Бурмашева*<sup>2,3</sup>,  
*Е. Ю. Просвиряков*<sup>1,2,3</sup>

<sup>1</sup> Уральский государственный университет путей сообщения, Россия, 620034, Екатеринбург, ул. Колмогорова, 66.

<sup>2</sup> Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б. Н. Ельцина, Россия, 620002, Екатеринбург, ул. Мира, 19.

<sup>3</sup> Институт машиноведения УрО РАН, Россия, 620049, Екатеринбург, ул. Комсомольская, 34.

### Аннотация

Предложено и изучено точное решение уравнений Обербека–Буссинеска для описания установившихся течений бинарных жидкостей типа Пуазейля. Движение жидкости рассматривается в бесконечном горизонтальном слое. Сдвиговые течения описываются переопределенной системой уравнений. Нетривиальное точное решение для системы Обербека–Буссинеска существует в классе скоростей (две компоненты вектора), зависящих только от поперечной координаты. Данная структура координат вектора скорости обеспечивает автоматическое выполнение уравнения неразрывности («лишнего» уравнения). Поле давления, поле температуры и поле концентрации растворенного вещества описываются линейными формами от горизонтальных (продольных) координат с коэффициентами, функционально зависящими от третьей координаты. Показано, что в слое жидкости могут существовать две точки, где скорость обращается в нуль. В этом случае реализуется спиралевидное течение (годограф вектора скорости имеет точку поворота).

Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ  
Научная статья

© Коллектив авторов, 2024

© СамГТУ, 2024 (составление, дизайн, макет)

Контент публикуется на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

### Образец для цитирования

Bashurov V. V., Burmasheva N. V., Prosviryakov E. Yu. Exact solution to the velocity field description for Couette–Poiseuille flows of binary liquids, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2024, vol. 28, no. 4, pp. 759–772. EDN: GJRNAА. DOI: 10.14498/vsgtu2098.

### Сведения об авторах

*Вячеслав Владимирович Башуров*  <https://orcid.org/0000-0002-6507-169X>  
кандидат физико-математических наук; декан; электротехнический факультет<sup>1</sup>; доцент; департамент информационных технологий и автоматизи<sup>2</sup>; e-mail: vbashurov@usurt.ru

*Наталья Владимировна Бурмашева*   <https://orcid.org/0000-0003-4711-1894>  
кандидат технических наук; доцент; департамент информационных технологий и автоматизи<sup>2</sup>; старший научный сотрудник; сектор нелинейной вихревой гидродинамики<sup>3</sup>; e-mail: nat\_burm@mail.ru

*Евгений Юрьевич Просвиряков*  <https://orcid.org/0000-0002-2349-7801>  
доктор физико-математических наук; профессор; каф. естественнонаучных дисциплин<sup>1</sup>; профессор; департамент информационных технологий и автоматизи<sup>2</sup>; заведующий сектором; сектор нелинейной вихревой гидродинамики<sup>3</sup>; e-mail: evgen\_pros@mail.ru

**Ключевые слова:** вязкая жидкость, бинарная жидкость, течение Куэтта, течение Пуазейля, конвекция, диффузия, точное решение, противотечения, переопределенная система.

Получение: 11 июня 2024 г. / Исправление: 25 ноября 2024 г. /

Принятие: 29 ноября 2024 г. / Публикация онлайн: 25 декабря 2024 г.

---

**Конкурирующие интересы.** Конфликта интересов в отношении авторства и публикации этой статьи нет.

**Авторский вклад и ответственность.** Все авторы принимали участие в разработке концепции статьи и в написании рукописи. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

**Финансирование.** Исследование выполнялось без финансирования.



УДК 517.958:531.332(534-14)

## Математическое моделирование колебаний газа в реакторе пиролиза метана

*И. В. Кудинов, К. В. Трубицын,  
А. В. Еремин, В. Д. Долгих*

Самарский государственный технический университет,  
Россия, 443100, Самара, ул. Молодогвардейская, 244.

### Аннотация

Разработана математическая модель колебаний газа, возникающих под действием внешней гармонической нагрузки, с учетом пространственно-временной нелокальности. Модель построена на основе уравнения равновесия (движения) и модифицированного закона Гука, в который включены релаксационные члены, учитывающие длину и время свободного пробега микрочастиц (электронов, атомов, молекул, ионов и др.).

Численное исследование модели показало, что при совпадении собственной частоты колебаний газа с частотой внешней нагрузки возникает резонанс, характеризующийся резким увеличением амплитуды колебаний, величина которой ограничивается коэффициентом трения газа. В случае, когда частота внешней нагрузки близка к собственной частоте колебаний газа, наблюдаются бифуркационно-флаттерные колебания (биения), сопровождающиеся периодическим увеличением и уменьшением амплитуды колебаний в каждой точке пространственной переменной. При этом колебания газа характеризуются бесконечным множеством амплитуд и частот.

Периодические изменения перемещений и давления газа, варьирующиеся от нуля до некоторого максимального значения и распространяющиеся вдоль реактора пиролиза метана, способствуют очистке его

### Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ Научная статья

© Коллектив авторов, 2024

© СамГТУ, 2024 (составление, дизайн, макет)

Контент публикуется на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

### Образец для цитирования

Кудинов И. В., Трубицын К. В., Еремин А. В., Долгих В. Д. Математическое моделирование колебаний газа в реакторе пиролиза метана // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2024. Т. 28, № 4. С. 773–789. EDN: SRKXEK. DOI: 10.14498/vsgtu2115.

### Сведения об авторах

*Игорь Васильевич Кудинов* <https://orcid.org/0000-0002-9422-0367>  
доктор технических наук, профессор; заведующий кафедрой; каф. физики;  
e-mail: igor-kudinov@bk.ru

*Константин Викторович Трубицын* <https://orcid.org/0000-0003-1888-2905>  
кандидат экономических наук, доцент; декан; теплоэнергетический факультет;  
e-mail: tef-samgtu@yandex.ru

*Антон Владимирович Еремин* <https://orcid.org/0000-0002-2614-6329>  
доктор технических наук, доцент; заведующий кафедрой; каф. промышленной теплоэнергетики; e-mail: a.v.eremin@list.ru

*Виктор Дмитриевич Долгих* <https://orcid.org/0000-0003-1505-3810>  
ассистент; каф. физики; e-mail: torressva12@yandex.ru

внутренних поверхностей от рыхлых углеродных отложений. Удаленный со стенок реактора углерод скапливается в нижней части между двумя газоплотными задвижками, что позволяет удалять его без остановки процесса пиролиза.

Данная модель может быть полезна для оптимизации процессов очистки реакторов и повышения эффективности пиролиза метана.

**Ключевые слова:** реактор пиролиза метана, получение водорода и углерода, математическая модель колебаний газа, учет пространственно-временной нелокальности, гармоническая внешняя нагрузка, численное решение, резонансные и бифуркационно-флаттерные колебания, способ удаления углерода.

Получение: 11 сентября 2024 г. / Исправление: 28 октября 2024 г. /

Принятие: 19 ноября 2024 г. / Публикация онлайн: 27 декабря 2024 г.

---

**Введение.** Известные методы промышленного получения водорода, такие как паровая конверсия метана, электролиз воды и газификация угля, характеризуются высокой энергоемкостью и сопровождаются выбросами углекислого газа в окружающую среду [1,2]. Более экологичным и менее энергозатратным является метод получения водорода путем пиролиза [3–6]. Процесс термokatалитического разложения метана позволяет получать высокочистый водород без образования оксидов углерода [7–8]. Однако данный процесс сопровождается интенсивным отложением углерода (пиролизного графита) на внутренних стенках реактора, что может привести к его полному зауглероживанию и остановке процесса пиролиза [9–11]. В работе [5] предложена схема устройства поплавкового типа для барботажных реакторов, позволяющая удалять сажевые частицы без остановки процесса производства водорода. Данное устройство обеспечивает контроль уровня жидкометаллической среды, который может значительно изменяться в зависимости от скорости подачи газа, что в некоторых режимах может приводить к аварийным ситуациям, связанным с переливом жидкого металла за пределы тигеля реактора. Тем не менее эффективные методы очистки стенок газозафазных реакторов пиролиза метана от углеродных отложений в процессе их непрерывной работы до сих пор не разработаны, что существенно ограничивает промышленное применение пиролизного метода получения водорода.

В настоящей работе предлагается акустический метод очистки внутренней поверхности газозафазного реактора пиролиза метана от углеродных отложений. Основная идея метода заключается в организации колебательных процессов изменения давления и перемещения газа в каждой точке по длине реактора. Исследования математических моделей автоколебаний газа позволяют создать теоретическую основу для управления процессами в различных акустических системах, таких как двигатели внутреннего сгорания, выхлопные системы, турбины электростанций и др. [12–14].

Разработка математической модели колебательных процессов в газе требует учета пространственно-временной нелокальности реальных процессов, что позволяет учесть внутреннюю структуру среды (длину и время свободного пробега микрочастиц) путем введения в определяющие уравнения соответствующих релаксационных коэффициентов. Вывод классических уравне-

ний колебательных процессов в твердых телах, газах и жидкостях основан на уравнении равновесия (движения), получаемом из второго закона Ньютона, а также на эмпирических законах Гука и Ньютона (для касательного напряжения в движущихся жидкостях и газах). Поскольку в эмпирических законах напряжения и деформации (градиенты перемещения) не разделены во времени, любое изменение деформации приводит к мгновенному изменению напряжения, что подразумевает бесконечную скорость передачи импульса. В результате решения классических волновых уравнений описывают скачкообразные изменения напряжений и перемещений. Это связано с допущениями о локальном термодинамическом равновесии и сплошности среды, которые не учитывают молекулярно-атомное строение веществ. Для учета этого строения при выводе волновых уравнений используются модифицированные формулы эмпирических законов Гука и Ньютона, включающие временные слагаемые с релаксационными коэффициентами, связанными с длиной и временем свободного пробега микрочастиц [12–17].

Классические уравнения, описывающие колебания упругих тел, являются гиперболическими. Нахождение их точных аналитических решений для случаев незатухающих колебаний представляет значительные трудности. Решения подобных задач получены лишь в отдельных частных случаях при конкретно заданных законах возмущений нагрузки [12, 13, 18]. Проблема, заложенная в формуле Гука и связанная с бесконечной скоростью распространения потенциалов исследуемых полей, ранее рассматривалась только в работе [19] применительно к колебаниям упругого стержня. Как показали проведенные исследования, учет релаксационных свойств среды позволяет существенно уточнить математическую модель колебательного процесса по сравнению с моделью, в которой эти свойства не учитываются. Так, погрешность классической теоретической модели при описании экспериментальных данных была снижена с 42 до 15 % за счет учета релаксационных явлений.

В настоящей работе получена математическая модель упругих колебаний газа с учетом его релаксационных свойств и сил внутреннего трения при воздействии внешней нагрузки, изменяющейся по гармоническому закону. При выводе модели используется релаксационная формула закона Гука, учитывающая временную зависимость избыточного давления и деформации.

**1. Математическая постановка задачи.** Согласно закону Гука, возникающее в газе избыточное давление пропорционально деформации [13]:

$$p = \rho_0 e^2 \varepsilon, \quad (1)$$

где  $p$  — избыточное давление;  $\rho_0$  — плотность газа в свободном состоянии;  $e = \sqrt{\partial p / \partial \rho}$  — скорость волны;  $\varepsilon = du/dx$  — деформация;  $u$  — перемещение;  $x$  — координата.

В работе [8] показано, что избыточное давление и избыточная плотность, а также избыточная плотность и деформация связаны линейными соотношениями:

$$p = e\rho; \quad \rho = -\rho_0 \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Из второго закона Ньютона следует:

$$F = m \frac{d^2 u}{dt^2} = \rho_0 S \Delta x \frac{d^2 u}{dt^2}, \quad (2)$$

где  $F$  — результирующая сила, действующая на газ;  $m$  — масса газа;  $S$  — площадь поперечного сечения цилиндрической трубы;  $\Delta x$  — длина элементарного участка.

Сила давления на элементарном участке газовой среды  $x + \Delta x$  равна произведению площади сечения на разность давлений в сечениях:

$$F = S\Delta x \frac{dp}{dx}.$$

Подставляя это выражение в (2), получаем уравнение равновесия

$$\rho_0 S \Delta x \frac{d^2 u}{dt^2} = S \Delta x \frac{dp}{dx}. \quad (3)$$

Подставляя (1) в (3), находим

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = e^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}. \quad (4)$$

Уравнение (4) представляет собой классическое волновое уравнение, описывающее незатухающие колебания среды, так как оно не учитывает внутреннее сопротивление среды. Для учета сопротивления предположим, что сила сопротивления пропорциональна изменению перемещения во времени:

$$F = r \frac{\partial u}{\partial t}, \quad (5)$$

где  $r$  — коэффициент сопротивления.

Подставляя (5) (как дополнительную силу, действующую на газ) в (3), получаем

$$\rho_0 S \Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + r \frac{\partial u}{\partial t} = S \Delta x \frac{\partial p}{\partial x}.$$

Отсюда следует, что

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{r}{\Delta v} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (6)$$

где  $\Delta v = S \Delta x$  — объем элементарного участка.

Второе слагаемое в левой части уравнения (6) представляет силу сопротивления, отнесенную к единице объема газа.

Подставляя (1) в (6), получаем

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} + \gamma \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = e^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (7)$$

где  $\gamma = r/(\rho_0 \Delta v)$ .

Уравнение (7) описывает колебания газовой среды с учетом внутреннего сопротивления, то есть затухающие колебания. При его выводе использован закон Гука (1), исключая причинно-следственную связь явлений. Причину (движущую силу) в законе Гука представляет деформация, а следствием является избыточное давление  $p$ . Причина и следствие здесь не связаны со

временем. В связи с этим любое изменение причины вызывает мгновенное (скачкообразное — с бесконечной скоростью) изменение следствия. Однако в реальных средах перенос возмущений (импульса) происходит с некоторым запаздыванием, учитываемым временами релаксации. С целью его учета запишем формулу (1) в виде

$$p + \tau_1 \frac{\partial p}{\partial t} + \tau_1^2 \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \rho_0 e^2 \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \tau_2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + \tau_2^2 \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial t^2} \right), \quad (8)$$

где  $\tau_1, \tau_2$  — времена релаксации давления и градиента перемещения.

Формула (8) представляет собой эмпирическую формулу закона Гука (1), модифицированную с учетом релаксационных явлений, то есть с учетом эффектов запаздывания. Их учет выполняется слагаемыми, включающими производные по времени от давления и градиента перемещения в произведении с коэффициентами релаксации и позволяющими учесть конечную скорость передачи импульса, что связано с учетом длины и времени свободного пробега микрочастиц (носителей энергии).

Выражая  $p$  из (8) и подставляя в (6), получаем

$$\begin{aligned} \rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \tau_1 \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \tau_1^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \\ + \frac{r}{\Delta v} \frac{\partial u}{\partial t} = \rho_0 e^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \tau_2 \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} + \tau_2^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2} \right). \end{aligned} \quad (9)$$

Подставляя  $\partial p / \partial x$  из (6) в (9), находим

$$\tau_1^2 \frac{\partial^4 u}{\partial t^4} + \tau_1 \eta \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} + \eta \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \gamma \frac{\partial u}{\partial t} = e^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \tau_2 \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} + \tau_2^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2} \right), \quad (10)$$

где  $\eta = 1 + \tau_1 \gamma$  — безразмерный комплекс.

Соотношение (10) представляет собой волновое (гиперболическое) уравнение продольных колебаний газа с учетом его релаксационных свойств и внутреннего трения. Если принять  $\tau_1 = \tau_2 = \gamma = 0$ , то уравнение (10) принимает вид уравнения (4).

Рассмотрим краевую задачу о колебаниях газа в цилиндрическом канале, один конец которого закрыт, а второй свободен, при некотором начальном перемещении, изменяющемся линейно от пространственной переменной. Математическая постановка задачи включает уравнение (10) и краевые условия вида

$$u(x, 0) = \alpha(\delta - x); \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0; \quad \frac{\partial^2 u(x, 0)}{\partial t^2} = 0; \quad \frac{\partial^3 u(x, 0)}{\partial t^3} = 0; \quad (11)$$

$$\frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = 0; \quad u(\delta, t) = 0, \quad (12)$$

где  $\alpha$  — коэффициент, характеризующий начальное перемещение газа;  $\delta$  — длина канала.

В случае, когда давление на открытом конце системы изменяется по некоторому гармоническому закону, первое граничное условие (12) примет вид

$$\frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = A_1 \cos(\omega t), \quad (13)$$

где  $A_1 = F/(ES)$  — безразмерная амплитуда колебаний;  $F$  — сила, вызывающая колебания газа на открытом конце;  $\omega = 2\pi\nu$  — круговая частота;  $\nu$  — частота колебаний;  $E$  — модуль упругости;  $S$  — площадь сечения канала.

Для приведения задачи (10), (11), (12) к безразмерному виду введем следующие обозначения:

$$\Theta = u/u_0, \quad \xi = x/\delta, \quad \text{Fo} = et/\delta, \quad \text{Fo}_1 = e\tau_1/\delta, \quad \text{Fo}_2 = e\tau_2/\delta, \quad \text{Fo}_3 = \delta\gamma/e, \quad u_0 = \alpha\delta,$$

где  $\Theta, \xi, \text{Fo}, \text{Fo}_1, \text{Fo}_2$  — соответственно безразмерные перемещение, координата, время и коэффициенты релаксации;  $\text{Fo}_3$  — безразмерный коэффициент сопротивления;  $u_0 = m\delta$  — длина столба газа в начальный момент времени ( $t = 0$ ).

С учетом введенных обозначений задача (10)–(12) принимает вид

$$\begin{aligned} \text{Fo}_1^2 \frac{\partial^4 \Theta}{\partial \text{Fo}^4} + \text{Fo}_1 \eta \frac{\partial^3 \Theta}{\partial \text{Fo}^3} + \eta \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \text{Fo}^2} + \text{Fo}_3 \frac{\partial \Theta}{\partial \text{Fo}} = \\ = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \xi^2} + \text{Fo}_2 \frac{\partial^3 \Theta}{\partial \xi^2 \partial \text{Fo}} + \text{Fo}_2^2 \frac{\partial^4 \Theta}{\partial \xi^2 \partial \text{Fo}^2}, \quad \text{Fo} > 0, \quad 0 < \xi < 1; \end{aligned} \quad (14)$$

$$\Theta(\xi, 0) = 1 - \xi; \quad \frac{\partial \Theta(\xi, 0)}{\partial \text{Fo}} = 0; \quad \frac{\partial^2 \Theta(\xi, 0)}{\partial \text{Fo}^2} = 0; \quad \frac{\partial^3 \Theta(\xi, 0)}{\partial \text{Fo}^3} = 0; \quad (15)$$

$$\frac{\partial \Theta(0, \text{Fo})}{\partial \xi} = 0; \quad \Theta(1, \text{Fo}) = 0. \quad (16)$$

Граничное условие (13) в безразмерном виде записывается так:

$$\frac{\partial \Theta(0, \text{Fo})}{\partial \xi} = A_1 \cos(A_2 \text{Fo}), \quad (17)$$

где  $A_2 = 2\pi\nu\delta/e$  — безразмерная частота колебаний.

## 2. Аналитическое решение задачи без учета внешней нагрузки.

Решение задачи (14), (15), (16) представляется в виде

$$\Theta(\xi, \text{Fo}) = \sum_{k=1}^{\infty} \phi_k(\text{Fo}) \psi_k(\xi), \quad (18)$$

где  $\phi_k(\text{Fo})$  — неизвестные функции времени;  $\psi_k(\xi) = \cos(r\pi\xi/2)$ ,  $r = 2k - 1$ .

Подставляя (18) в (14), получаем

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \text{Fo}_1^2 \frac{d^4 \phi_k}{d \text{Fo}^4} + \text{Fo}_1 \eta \frac{d^3 \phi_k}{d \text{Fo}^3} + \eta \frac{d^2 \phi_k}{d \text{Fo}^2} + \text{Fo}_3 \frac{d \phi_k}{d \text{Fo}} + \right. \\ \left. + \nu_k \left( \phi_k + \text{Fo}_2 \frac{d \phi_k}{d \text{Fo}} + \text{Fo}_2^2 \frac{d^2 \phi_k}{d \text{Fo}^2} \right) \right] \cos \frac{r\pi\xi}{2} = 0, \end{aligned} \quad (19)$$

где  $\nu_k = r^2\pi^2/4$ .

Соотношение (19) можно преобразовать к виду

$$\text{Fo}_1^2 \frac{d^4 \phi_k}{d\text{Fo}^4} + l_1 \frac{d^3 \phi_k}{d\text{Fo}^3} + l_1 \frac{d^2 \phi_k}{d\text{Fo}^2} + l_2 \frac{d\phi_k}{d\text{Fo}} + \nu_k \phi_k = 0, \quad (20)$$

где  $l = \text{Fo}_1 \eta$ ,  $l_1 = \eta + \nu_k \text{Fo}_2^2$ ,  $l_2 = \text{Fo}_3 + \nu_k \text{Fo}_2$ .

Характеристическое уравнение для (20) имеет вид

$$\text{Fo}_1^2 z^4 + lz^3 + l_1 z^2 + l_2 z + \nu_k = 0. \quad (21)$$

Уравнение (21) имеет следующие корни:

$$z_{jk} = -\frac{BD_{jk}}{4\text{Fo}_1^2}, \quad j = 1, 2, 3, 4; \quad k = \overline{1, \infty},$$

где  $B = \text{Fo}_1 - \sqrt{3}/3$ ;  $D_{jk}$  — некоторые постоянные.

С учетом найденных значений  $z_{jk}$  общее решение уравнения (20) записывается так:

$$\phi_k(\text{Fo}) = C_{1k} e^{z_{1k} \text{Fo}} + C_{2k} e^{z_{2k} \text{Fo}} + C_{3k} e^{z_{3k} \text{Fo}} + C_{4k} e^{z_{4k} \text{Fo}}, \quad (22)$$

где  $C_{ik}$  — константы интегрирования,  $i = 1, 2, 3, 4$ ;  $k = \overline{1, \infty}$ .

Подставляя (22) в (18), находим

$$\Theta(\xi, \text{Fo}) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^4 C_{ik} e^{z_{ik} \text{Fo}} \cos \frac{r\pi\xi}{2}. \quad (23)$$

Соотношение (23) точно удовлетворяет граничным условиям (16) и уравнению (14), но не соответствует начальным условиям (15). Составляя невязку и требуя ее ортогональности координатным функциям  $\psi_k(\xi)$ , для  $C_{ik}$  получим систему алгебраических уравнений, решение которой имеет вид

$$\begin{aligned} C_{1k} &= \frac{\mu_k z_{2k} z_{3k} z_{4k}}{(z_{1k} - z_{4k})(z_{3k} - z_{1k})(z_{2k} - z_{1k})}, \\ C_{2k} &= -\frac{\mu_k z_{1k} z_{3k} z_{4k}}{(z_{2k} - z_{1k})(z_{2k} - z_{4k})(z_{3k} - z_{2k})}, \\ C_{3k} &= \frac{\mu_k z_{1k} z_{2k} z_{4k}}{(z_{3k} - z_{4k})[z_{1k} z_{2k} - z_{3k}(z_{3k} - z_{2k} - z_{1k})]}, \\ C_{4k} &= -\frac{\mu_k z_{1k} z_{2k} z_{3k}}{z_{4k}^2 (z_{1k} + z_{2k} + z_{3k} - z_{4k}) - z_{1k} z_{4k} (z_{2k} + z_{3k}) - z_{2k} z_{3k} (z_{4k} + z_{1k})}, \end{aligned}$$

где  $\mu_k = 8[\cos(r\pi\xi/2) - 1]/(r^2\pi^2)$ ,  $k = \overline{1, \infty}$ .

После определения  $C_{ik}$  точное решение краевой задачи (14)–(16) находится из (23). Результаты расчетов по формуле (23) представлены на рис. 1, 2. Анализ показывает, что увеличение коэффициентов релаксации приводит к уменьшению амплитуды и частоты колебаний, а также сглаживанию кривых колебательного процесса (рис. 1). Расчеты демонстрируют разнонаправленное движение газа в различных точках канала в одинаковые моменты

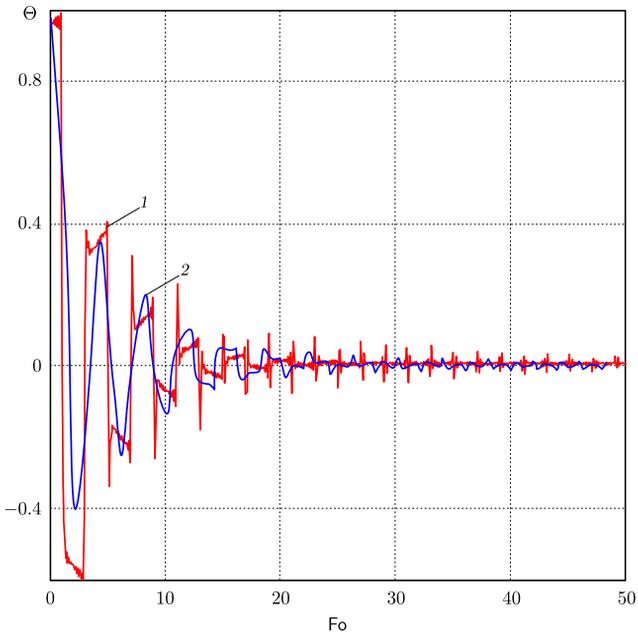


Рис. 1. Колебания газа в точке  $\xi = 0$ : 1 —  $Fo_1 = 0.1$ ,  $Fo_2 = 0.001$ ,  $\eta = 0.5$ ; 2 —  $Fo_1 = 0.5$ ,  $Fo_2 = 0.001$ ,  $\eta = 0.5$  ( $k = 1000$  — число членов ряда (23))

[Figure 1. Gas oscillations at  $\xi = 0$ : 1 —  $Fo_1 = 0.1$ ,  $Fo_2 = 0.001$ ,  $\eta = 0.5$ ; 2 —  $Fo_1 = 0.5$ ,  $Fo_2 = 0.001$ ,  $\eta = 0.5$  ( $k = 1000$  — the number of terms in the series (23))]

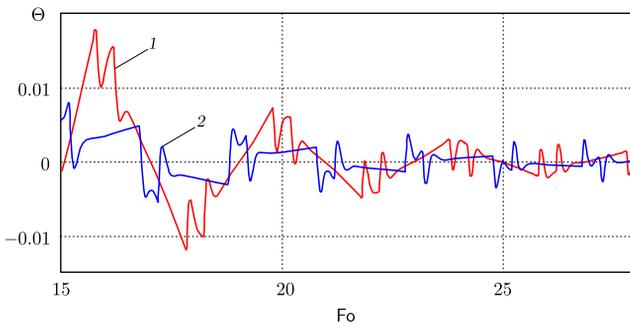


Рис. 2. Колебания газа в точках  $\xi = 0.2$  (линия 1) и  $\xi = 0.8$  (линия 2);  $Fo_1 = 0.1$ ,  $Fo_2 = 0.001$ ,  $\eta = 0.5$ ,  $k = 1000$

[Figure 2. Gas oscillations at points  $\xi = 0.2$  (line 1), and  $\xi = 0.8$  (line 2);  $Fo_1 = 0.1$ ,  $Fo_2 = 0.001$ ,  $\eta = 0.5$ ,  $k = 1000$ ]

времени (см. рис. 2). Наблюдается уменьшение амплитуды и увеличение частоты колебаний при приближении к точке закрепления  $\xi = 1$ . В целом колебания газа по длине цилиндрического канала характеризуются бесконечным числом амплитуд и частот.

**3. Численное решение задачи с учетом внешней нагрузки.** Для выполнения расчетов с учетом внешней нагрузки (17) необходимо ввести понятие волновых пакетов. Для этого решение уравнения (4) для волны, движущейся вдоль оси  $x$ , представим в виде [20]:

$$u(x, t) = A \cos(\omega t + kx + \varphi), \quad (24)$$

где  $A$  — амплитуда колебаний;  $\omega$  — круговая частота;  $k = 2\pi/\lambda$  — волновое число;  $\lambda$  — длина волны;  $\varphi$  — фаза волны.

Подставляя (24) в (4), получаем

$$\omega = ke.$$

Данное соотношение является дисперсионным и позволяет определить фазовую скорость волны:

$$e = \omega/k.$$

Если  $\omega$  и  $k$  изменяются пропорционально, то фазовая скорость остается постоянной. В этом случае волна называется недиспергирующей. Если зависимость  $\omega$  от  $k$  нелинейна, то фазовая скорость становится частотно-зависимой, и волна приобретает дисперсионные свойства. Такие волны не могут быть описаны простой гармонической функцией. Вид дисперсии определяется соотношением между частотами собственных колебаний газа и внешней нагрузки. Изменение частоты нагрузки приводит к формированию волновых пакетов, возникающих при суперпозиции колебаний с близкими частотами. В данной работе волновые пакеты моделируются наложением собственных колебаний газа и внешней нагрузки с переменной частотой.

Для моделирования таких пакетов в задаче (14)–(16) первое граничное условие (16) заменяется на (17). Аналитическое решение модифицированной задачи затруднительно, поэтому перейдем к численному методу. Упростим уравнение (14), пренебрегая членами с  $\text{Fo}_1^2$  и  $\text{Fo}_2^2$ .

Для построения разностной схемы введем равномерную сетку в области  $0 \leq \xi \leq 1$ ,  $0 \leq \text{Fo} \leq T$  с шагами  $\Delta\xi = 0.005$ ,  $\Delta\text{Fo} = 0.005$ , и узлами сетки

$$\xi_k = k\Delta\xi, \quad k = \overline{0, K}; \quad \text{Fo}_i = i\Delta\text{Fo}, \quad i = \overline{0, J}$$

при  $K = 200$ ,  $J = 50000$ .

Используя сеточные функции  $\Theta_k^i = \Theta(\xi_k, \text{Fo}_i)$  и аппроксимируя производные центральными разностями, запишем задачу в виде

$$\begin{aligned} & \text{Fo}_3 \frac{\Theta_k^{i+1} - \Theta_k^i}{\Delta\text{Fo}} + \text{Fo}_1 \eta \frac{\Theta_k^{i+1} - 3\Theta_k^i + 3\Theta_k^{i-1} - \Theta_k^{i-2}}{\Delta\text{Fo}^3} + \eta \frac{\Theta_k^{i-1} - 2\Theta_k^i + \Theta_k^{i+1}}{\Delta\text{Fo}^2} = \\ & = \frac{\Theta_{k-1}^i - 2\Theta_k^i + \Theta_{k+1}^i}{\Delta\xi^2} + \text{Fo}_2 \left( \frac{\Theta_{k-1}^i - 2\Theta_k^i + \Theta_{k+1}^i}{\Delta\xi^2 \Delta\text{Fo}} - \frac{\Theta_{k-1}^i - 2\Theta_k^i + \Theta_{k+1}^i}{\Delta\xi^2 \Delta\text{Fo}} \right) \end{aligned}$$

со следующими начальными и граничными условиями:

$$\Theta_k^0 = 1 - \xi_k; \quad \frac{\Theta_k^1 - \Theta_k^0}{\Delta F_0} = 0; \quad \frac{\Theta_k^0 - 2\Theta_k^1 + \Theta_k^2}{\Delta F_0^2} = 0;$$

$$\frac{\Theta_1^i - \Theta_0^i}{\Delta \xi} = A_1 \cos(A_2 F_{0i}); \quad \Theta_K^i = 0.$$

Результаты расчетов показывают следующее:

- при  $F_{01} = F_{02} = F_{03} = 0$  имеют место незатухающие колебания (консервативная система);
- при  $F_{01} = F_{02} = A_1 = A_2 = 0$ ,  $F_{03} = 0.3$  наблюдается экспоненциальное затухание амплитуды (рис. 3);
- при резонансе ( $A_2 = 1.575$ ) происходит рост амплитуды, ограниченный трением (рис. 4);
- вблизи резонанса ( $A_2 = 1.5$ ) имеют место бифуркационно-флаттерные колебания с периодической модуляцией амплитуды (рис. 5).

**4. Акустический метод очистки реактора пиролиза метана от углерода.** В настоящей работе на основе результатов исследования локально-неравновесных колебаний газа с учетом внешней нагрузки предлагается метод очистки реактора пиролиза метана от углеродных отложений.

Схема реактора пиролиза метана с устройством для организации бифуркационно-флаттерных колебаний газа представлена на рис. 6.

Предлагаемая установка предназначена для автоматической очистки внутренних поверхностей реактора от углеродных отложений и их удаления без прерывания процесса пиролиза. Конструкция установки включает следующие элементы: 1 — поршень, выполняющий функцию внешней нагрузки; 2 — трубка для отбора водорода; 3 — корпус реактора; 4 — трубка для подачи метана; 5, 6 — газоплотные задвижки; 7 — камера для сбора углерода; 8 — электрические нагревательные спирали.

При нагреве метана до температуры пиролиза происходит его разложение на водород и углерод. Наибольшая температура наблюдается вблизи стенок реактора, что приводит к интенсивному образованию углеродных отложений, как было установлено в результате экспериментов.

Поршень 1 выполняет возвратно-поступательные движения с частотой, близкой к собственной частоте колебаний газа. Это инициирует бифуркационно-флаттерные колебания, которые разрушают углеродные отложения. При открытии задвижки 5 (при закрытой задвижке 6) отложения под действием силы тяжести поступают в камеру 7.

Процесс удаления углерода из камеры 7 выполняется в следующей последовательности: задвижка 5 закрывается, а задвижка 6 открывается. Углерод выводится в окружающую среду без остановки процесса пиролиза.

Процессы очистки и удаления отложений выполняются периодически. Интервалы между циклами определяются скоростью образования углерода.

**Заключение.** Представлена математическая модель колебаний газа, учитывающая его релаксационные свойства, внутреннее трение и воздействие внешней нагрузки, изменяющейся по гармоническому закону с заданной частотой. Модель разработана на основе модифицированного закона Гука, в котором избыточное давление и деформация рассматриваются как зависящие

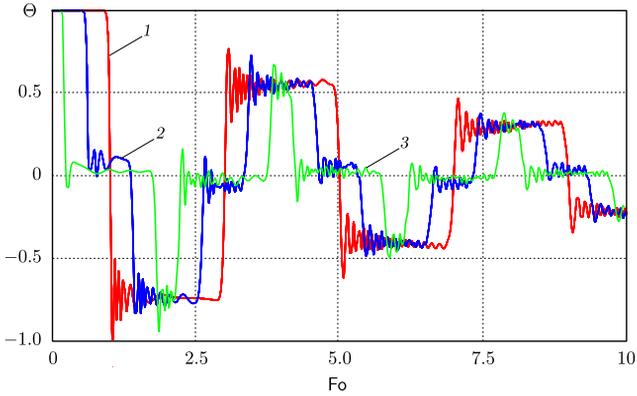


Рис. 3. Колебания газа в точках  $\xi = 0$  (линия 1),  $\xi = 0.4$  (линия 2) и  $\xi = 0.8$  (линия 3) ( $Fo_1 = Fo_2 = A_1 = A_2 = 0$ ,  $Fo_3 = 0.3$ )

[Figure 3. Gas oscillations at points  $\xi = 0$  (line 1),  $\xi = 0.4$  (line 2), and  $\xi = 0.8$  (line 3) ( $Fo_1 = Fo_2 = A_1 = A_2 = 0$ ,  $Fo_3 = 0.3$ )]

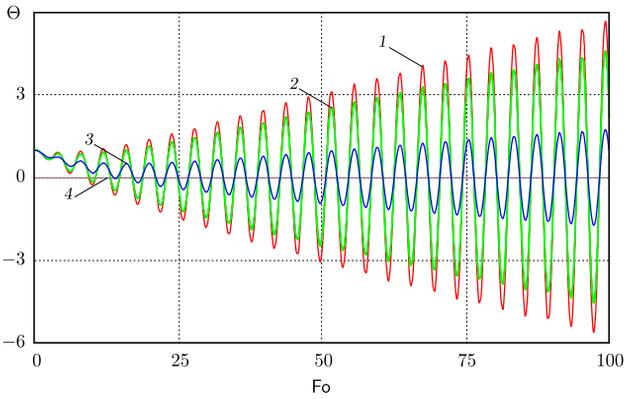


Рис. 4. Резонансные колебания газа в точках  $\xi = 0$  (линия 1),  $\xi = 0.4$  (линия 2),  $\xi = 0.8$  (линия 3) и  $\xi = 1$  (линия 4) ( $Fo_1 = Fo_2 = 10$ ,  $Fo_3 = 0.3$ ,  $A_1 = 0.1$ ,  $A_2 = 1.575$ )

[Figure 4. Resonant gas oscillations at points  $\xi = 0$  (line 1),  $\xi = 0.4$  (line 2),  $\xi = 0.8$  (line 3), and  $\xi = 1$  (line 4) ( $Fo_1 = Fo_2 = 10$ ,  $Fo_3 = 0.3$ ,  $A_1 = 0.1$ ,  $A_2 = 1.575$ )]

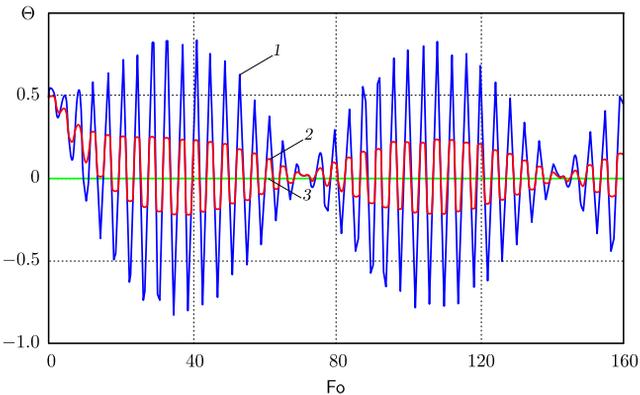


Рис. 5. Бифуркационно-флаттерные колебания газа в точках  $\xi = 0$  (линия 1),  $\xi = 0.8$  (линия 2) и  $\xi = 1$  (линия 3) ( $Fo_1 = Fo_2 = 10$ ,  $Fo_3 = 0.3$ ,  $A_1 = 0.1$ ,  $A_2 = 1.5$ )

[Figure 5. Bifurcation-flutter gas oscillations at points  $\xi = 0$  (line 1),  $\xi = 0.8$  (line 2), and  $\xi = 1$  (line 3) ( $Fo_1 = Fo_2 = 10$ ,  $Fo_3 = 0.3$ ,  $A_1 = 0.1$ ,  $A_2 = 1.5$ )]

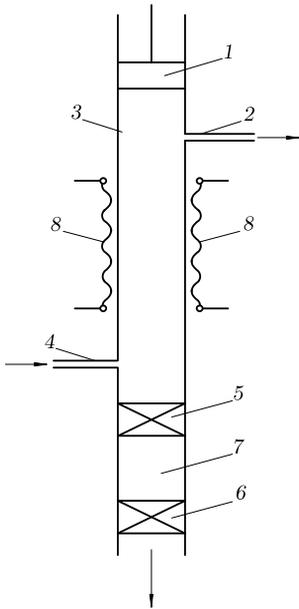


Рис. 6. Схематическое представление реактора пиролиза метана: 1 – поршень; 2 – трубка для отбора водорода; 3 – цилиндрический корпус реактора; 4 – трубка для подачи метана; 5, 6 – газоплотные задвижки; 7 – камера для сбора углерода; 8 – электрические нагревательные спирали

[Figure 6. Schematic representation of a methane pyrolysis reactor: 1 – piston; 2 – hydrogen collection tube; 3 – cylindrical reactor body; 4 – methane inlet tube; 5, 6 – gas-tight valves; 7 – carbon storage vessel; 8 – electric heating coils for the reactor]

от времени. Целью разработки модели является изучение динамики колебаний газа в различных условиях.

Для модели, не учитывающей внешнюю нагрузку, получено точное аналитическое решение. Оно показало, что увеличение коэффициентов релаксации приводит к уменьшению амплитуды и частоты колебаний, а также к сглаживанию кривых колебательного процесса.

Анализ численного решения модели с учетом внешней нагрузки выявил, что при частотах внешней нагрузки, близких к резонансным, возникают бифуркационно-флаттерные биения газа. Эти биения характеризуются периодическим увеличением и затуханием амплитуды колебаний.

Предложен метод очистки реактора пиролиза метана от углеродных отложений. Он основан на использовании бифуркационно-флаттерных колебаний газа в реакционной зоне, которые создаются путем организации возвратно-поступательных движений поршня на частотах, близких к резонансным.

**Конкурирующие интересы.** Конкурирующих интересов не имеем.

**Авторский вклад и ответственность.** Все авторы внесли равный вклад в разработку концепции исследования, проведение расчетов и подготовку рукописи. Авторы несут совместную ответственность за достоверность представленных результатов и окончательное содержание статьи. Окончательная версия рукописи утверждена всеми соавторами.

**Финансирование.** Исследование выполнено при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках реализации государственного задания Самарского государственного технического университета (проект № FSSE-2024-0014).

**Благодарность.** Авторы выражают признательность рецензентам за детальный анализ работы и конструктивные замечания, существенно повысившие качество публикации.

## Библиографический список

1. Баранов Н. Н. *Нетрадиционные источники и методы преобразования энергии*. М.: МЭИ, 2012. 384 с. EDN: U00WV.
2. Фортов В. Е., Попель О. С. *Энергетика в современном мире*. М.: Интеллект, 2011. 168 с. EDN: QMLDHF.
3. Dagle R. A, Dagle V. L., Bearden M. D., et al. *An overview of natural gas conversion technologies for co-production of hydrogen and value added solid carbon products*: OSTI Technical Report. Washington: U.S. Department of Energy, 2017. DOI: <https://doi.org/10.2172/1411934>.
4. Кудинов И. В., Пименов А. А., Михеева Г. В. Моделирование термического разложения метана и образования твердых углеродных частиц // *Нефтехимия*, 2020. Т. 60, № 6. С. 781–785. EDN: NXMKAM. DOI: <https://doi.org/10.31857/S002824212006012X>.
5. Kudinov I. V., Pimenov A. A., Kryukov Y. A., Mikheeva G. V. A theoretical and experimental study on hydrodynamics, heat exchange and diffusion during methane pyrolysis in a layer of molten tin // *Int. J. Hydrogen Energy*, 2021. vol. 46, no. 17. pp. 10183–10190. EDN: ВРАКJI. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijhydene.2020.12.138>.
6. Кудинов И. В., Великанова Ю. В., Ненашев М. В. [и др.] Пиролиз метана в расплавленных средах для получения водорода: обзор современных достижений // *Нефтехимия*, 2023. Т. 63, № 5. С. 627–639. EDN: SBYGPE. DOI: <https://doi.org/10.31857/S0028242123050015>.
7. Machhammer O., Bode A., Hormuth W. Financial and ecological evaluation of hydrogen production processes on large scale // *Chem. Eng. Technol.*, 2016. vol. 39, no. 6. pp. 1185–1193. DOI: <https://doi.org/10.1002/ceat.201600023>.
8. Leal Perez B., Medrano Jiménez J. A., Bhardwaj R., et al. Methane pyrolysis in a molten gallium bubble column reactor for sustainable hydrogen production: Proof of concept & techno-economic assessment // *Int. J. Hydrogen Energy*, 2021. vol. 46, no. 7. pp. 4917–4935. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijhydene.2020.11.079>.
9. Zhao Q., Wang Y., Wang Y.N., et al. Steam reforming of CH<sub>4</sub> at low temperature on Ni/ZrO<sub>2</sub> catalyst: Effect of H<sub>2</sub>O/CH<sub>4</sub> ratio on carbon Q<sub>5</sub> deposition // *Int. J. Hydrogen Energy*, 2020. vol. 45, no. 28. pp. 14281–14292. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijhydene.2020.03.112>.
10. Steinberg M. The Carnol process for CO<sub>2</sub> mitigation from power plants and the transportation sector // *Energy Conv. Manag.*, 1996. vol. 37, no. 6–8. pp. 843–848. DOI: [https://doi.org/10.1016/0196-8904\(95\)00266-9](https://doi.org/10.1016/0196-8904(95)00266-9).
11. Steinberg M. Fossil fuel decarbonization technology for mitigating global warming // *Int. J. Hydrogen Energy*, 1999. vol. 24, no. 8. pp. 771–777. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0360-3199\(98\)00128-1](https://doi.org/10.1016/S0360-3199(98)00128-1).
12. Бабаков И. М. *Теория колебаний*. М.: Дрофа, 2004. 592 с. EDN: QJNGJV.
13. Кабисов К. С., Камалов Т. Ф., Лурье В. А. *Колебания и волновые процессы*. М.: КомКнига, 2010. 360 с. EDN: QJOEGP.
14. Кудинов И. В. rarep Разработка математических моделей и исследование неравновесных явлений с учетом пространственно-временной нелокальности // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2018. Т. 22, № 1. С. 116–152. EDN: UTXSMC. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1566>.
15. Соболев С. Л. Локально-неравновесные модели процессов переноса // *УФН*, 1997. Т. 167, № 10. С. 1095–1106. DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNr.0167.199710f.1095>.
16. Соболев С. Л. Процессы переноса и бегущие волны в локально-неравновесных системах // *УФН*, 1991. Т. 161, № 3. С. 5–29. DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNr.0161.199103b.0005>.
17. Лойцянский Л. Г. *Механика жидкости и газа*. М.: Дрофа, 2003. 840 с.
18. Филин А. П. *Прикладная механика твердого деформируемого тела*. Т. 1. М.: Наука, 1976. 353 с.

19. Kudinov I. V., Eremin A. V., Kudinov V. A., et al. Mathematical model of damped elastic rod oscillations with dual-phase-lag // *Int. J. Solids Struct.*, 2020. vol. 200–201. pp. 231–241. EDN: LVYXJK. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2020.05.018>.
20. Паршаков А. Н. *Физика линейных и нелинейных волновых процессов в избранных задачах. Электромагнитные и акустические волны*. М.: Интеллект, 2014. 144 с.

MSC: 76V05, 80A32

## Mathematical modeling of gas oscillations in a methane pyrolysis reactor

*I. V. Kudinov, K. V. Trubitsyn, A. V. Eremin, V. D. Dolgikh*

Samara State Technical University,

244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russian Federation.

### Abstract

A mathematical model of gas oscillations induced by external harmonic loading has been developed, taking into account spatiotemporal nonlocality. The model is based on the equilibrium (motion) equation and a modified Hooke's law, which incorporates relaxation terms accounting for the mean free path and time of microparticles (electrons, atoms, molecules, ions, etc.).

Numerical studies of the model have shown that resonance occurs when the natural frequency of gas oscillations coincides with the frequency of the external load. This resonance is characterized by a sharp increase in the amplitude of oscillations, which is limited by the gas friction coefficient. When the frequency of the external load is close to the natural frequency of gas oscillations, bifurcation-flutter oscillations (beats) are observed, accompanied by periodic increases and decreases in the oscillation amplitude at each point of the spatial variable. In this case, the gas oscillations exhibit an infinite number of amplitudes and frequencies.

Periodic variations in gas displacement and pressure, ranging from zero to a certain maximum value and propagating along the length of the methane pyrolysis reactor, contribute to the cleaning of its internal surfaces from loose carbon deposits. The carbon removed from the reactor walls accumulates in

### Mathematical Modeling, Numerical Methods and Software Complexes

#### Research Article

© The Author(s), 2024

© Samara State Technical University, 2024 (Compilation, Design, and Layout)

 The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

#### Please cite this article in press as:

Kudinov I. V., Trubitsyn K. V., Eremin A. V., Dolgikh V. D. Mathematical modeling of gas oscillations in a methane pyrolysis reactor, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2024, vol. 28, no. 4, pp. 773–789. EDN: SRXKEK. DOI: 10.14498/vsgtu2115 (In Russian).

#### Authors' Details:

*Igor V. Kudinov*  <https://orcid.org/0000-0002-9422-0367>

Dr. Techn. Sci., Professor; Head of the Department; Dept. of Physics;

e-mail: [igor-kudinov@bk.ru](mailto:igor-kudinov@bk.ru)

*Konstantin V. Trubitsyn*  <https://orcid.org/0000-0003-1888-2905>

Cand. Econ. Sci., Associate Professor; Dean; Faculty of Thermal Power Engineering;

e-mail: [tef-samgtu@yandex.ru](mailto:tef-samgtu@yandex.ru)

*Anton V. Eremin*  <https://orcid.org/0000-0002-2614-6329>

Dr. Techn. Sci, Associate Professor; Head of Department; Dept. of Industrial Thermal Power Engineering; e-mail: [a.v.eremin@list.ru](mailto:a.v.eremin@list.ru)

*Victor D. Dolgikh*  <https://orcid.org/0000-0003-1505-3810>

Assistant; Dept. of Physics; e-mail: [torressva12@yandex.ru](mailto:torressva12@yandex.ru)

the lower part between two gas-tight shut-off valves, allowing for its removal without interrupting the pyrolysis process.

This model can be useful for optimizing reactor cleaning processes and improving the efficiency of methane pyrolysis.

**Keywords:** methane pyrolysis reactor, hydrogen and carbon production, mathematical model of gas oscillations, accounting for spatiotemporal nonlocality, harmonic external load, numerical solution, resonant and bifurcation-flutter oscillations, method of carbon removal.

Received: 11<sup>th</sup> September, 2024 / Revised: 28<sup>th</sup> October, 2024 /

Accepted: 19<sup>th</sup> November, 2024 / First online: 27<sup>th</sup> December, 2024

---

**Competing interests.** The authors declare no competing interests.

**Authors' contributions and responsibilities.** All authors contributed equally to the conceptualization of the research, conducting calculations, and preparation of the manuscript. The authors share collective responsibility for the accuracy of the presented results and the final content of the article. The final version of the manuscript has been approved by all co-authors.

**Funding.** This study was supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation under the state assignment of Samara State Technical University (Project No. FSSE-2024-0014).

**Acknowledgments.** The authors express their gratitude to the reviewers for their thorough analysis of the work and constructive feedback, which significantly improved the quality of the publication.

## References

1. Baranov N. N. *Netraditsionnye istochniki i metody preobrazovaniia energii* [Unconventional Sources and Methods of Energy Conversion]. Moscow, Moscow University of Economics, 2012, 384 pp. (In Russian). EDN: U00WV.
2. Fortov V. E., Popel O. S. *Energetika v sovremennom mire* [Energetics in the Modern World]. Moscow, Intellect, 2011, 168 pp. (In Russian). EDN: QMLDHF.
3. Dagle R. A., Dagle V. L., Bearden M. D., et al. *An overview of natural gas conversion technologies for co-production of hydrogen and value added solid carbon products*, OSTI Technical Report. Washington, U.S. Department of Energy, 2017. DOI: <https://doi.org/10.2172/1411934>.
4. Kudinov I. V., Pimenov A. A., Mikheeva G. V. Modeling of the thermal decomposition of methane and the formation of solid carbon particles, *Petroleum Chem.*, 2020, vol. 60, no. 11, pp. 1239–1243. EDN: PBZZQR. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0965544120110122>.
5. Kudinov I. V., Pimenov A. A., Kryukov Y. A., Mikheeva G. V. A theoretical and experimental study on hydrodynamics, heat exchange and diffusion during methane pyrolysis in a layer of molten tin, *Int. J. Hydrogen Energy*, 2021, vol. 46, no. 17, pp. 10183–10190. EDN: BPAKJI. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijhydene.2020.12.138>.
6. Kudinov I. V., Vellikanova Yu. V., Nenashev M. V., et al. Methane pyrolysis in molten media for hydrogen production: A review of current advances, *Petr. Chem.*, 2023, vol. 63, no. 9, pp. 1017–1026. EDN: ANDKEP. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0965544123080078>.
7. Machhammer O., Bode A., Hormuth W. Financial and ecological evaluation of hydrogen production processes on large scale, *Chem. Eng. Technol.*, 2016, vol. 39, no. 6, pp. 1185–1193. DOI: <https://doi.org/10.1002/ceat.201600023>.
8. Leal Perez B., Medrano Jiménez J. A., Bhardwaj R., et al. Methane pyrolysis in a molten gallium bubble column reactor for sustainable hydrogen production: Proof of concept &

- techno-economic assessment, *Int. J. Hydrogen Energy*, 2021, vol. 46, no. 7, pp. 4917–4935. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijhydene.2020.11.079>.
9. Zhao Q., Wang Y., Wang Y.N., et al. Steam reforming of CH<sub>4</sub> at low temperature on Ni/ZrO<sub>2</sub> catalyst: Effect of H<sub>2</sub>O/CH<sub>4</sub> ratio on carbon Q<sub>5</sub> deposition, *Int. J. Hydrogen Energy*, 2020, vol. 45, no. 28, pp. 14281–14292. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijhydene.2020.03.112>.
  10. Steinberg M. The Carnol process for CO<sub>2</sub> mitigation from power plants and the transportation sector, *Energy Conv. Manag.*, 1996, vol. 37, no. 6–8, pp. 843–848. DOI: [https://doi.org/10.1016/0196-8904\(95\)00266-9](https://doi.org/10.1016/0196-8904(95)00266-9).
  11. Steinberg M. Fossil fuel decarbonization technology for mitigating global warming, *Int. J. Hydrogen Energy*, 1999, vol. 24, no. 8, pp. 771–777. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0360-3199\(98\)00128-1](https://doi.org/10.1016/S0360-3199(98)00128-1).
  12. Babakov I. M. *Teoriia kolebanii* [Theory of Oscillations]. Moscow, Drofa, 2004, 592 pp. (In Russian). EDN: QJNGJV.
  13. Kabisov K. S., Kamalov T. F., Lurie V. A. *Kolebaniia i volnovye protsessy* [Oscillations and Wave Processes]. Moscow, KomKniga, 2010, 360 pp. (In Russian). EDN: QJOEGP.
  14. Kudinov I. V. Development of mathematical models and research strongly nonequilibrium developments taking into account space-time nonlocality, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2018, vol. 22, no. 1, pp. 116–152 (In Russian). EDN: UTXSMC. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1566>.
  15. Sobolev S. L. Local non-equilibrium transport models, *Phys. Usp.*, 1997, vol. 40, no. 10, pp. 1043–1053. DOI: <https://doi.org/10.1070/PU1997v040n10ABEH000292>.
  16. Sobolev S. L. Transport processes and traveling waves in systems with local nonequilibrium, *Phys. Usp.*, 1991, vol. 34, no. 3, pp. 217–229. DOI: <https://doi.org/10.1070/PU1991v034n03ABEH002348>.
  17. Loitsiansky L. G. *Mekhanika zhidkosti i gaza* [Mechanics of Fluid and Gas]. Moscow, Drofa, 2003, 840 pp. (In Russian)
  18. Filin A. P. *Prikladnaia mekhanika tverdogo deformiruemogo tela* [Applied Mechanics of Deformable Solid Body], vol. 1. Moscow, Nauka, 1976, 353 pp. (In Russian)
  19. Kudinov I. V., Eremin A. V., Kudinov V. A., et al. Mathematical model of damped elastic rod oscillations with dual-phase-lag, *Int. J. Solids Struct.*, 2020, vol. 200–201, pp. 231–241. EDN: LVYXJK. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2020.05.018>.
  20. Parshakov A. N. *Fizika lineinykh i nelineinykh volnovykh protsessov v izbrannykh zadachakh. Elektromagnitnye i akusticheskie volny* [Physics of Linear and Nonlinear Wave Processes in Selected Problems. Electromagnetic and Acoustic Waves]. Moscow, Intellect, 2014, 144 pp. (In Russian)

MSC: 47H09, 47H10, 54H25

## A common fixed-point result via a supplemental function with an application

Y. Touail<sup>1</sup>, A. Jaid<sup>2</sup>, D. El Moutawakil<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Université Sidi Mohamed Ben Abdellah, Fez, Morocco.

<sup>2</sup> Université Sultan Moulay Slimane, Beni-Mellal, Morocco.

<sup>3</sup> Université Chouaib Doukkali, El Jadida, Morocco.

### Abstract

In this paper, we prove a novel common fixed-point theorem for two commuting mappings. This assertion is proved using the measure of non-compactness in Banach spaces. Moreover, an application is given to demonstrate the usability of the obtained results.

**Keywords:** fixed point, measure of non-compactness,  $\mathcal{T}$ -contraction.

Received: 1<sup>st</sup> October, 2023 / Revised: 23<sup>rd</sup> October, 2024 /

Accepted: 16<sup>th</sup> December, 2024 / First online: 25<sup>th</sup> December, 2024

**1. Introduction.** One of the most widely used techniques for proving that a certain system of equations has a solution is to reformulate the problem as a common fixed point problem and see if the latter can be solved using this approach. Measures of non-compactness play an important role in fixed point theory and have many applications in various branches of nonlinear analysis, including differential equations, optimization, variational inequalities, etc. We refer the reader to [1–10].

### Differential Equations and Mathematical Physics

#### Short Communication

© The Author(s), 2024

© Samara State Technical University, 2024 (Compilation, Design, and Layout)

♾️ The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

#### Please cite this article in press as:

Touail Y., Jaid A., El Moutawakil D. A common fixed-point result via a supplemental function with an application, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2024, vol. 28, no. 4, pp. 790–798. EDN: PXHWMS. DOI: 10.14498/vsgtu2074.

#### Authors' Details:

Youssef Touail ✉️ <https://orcid.org/0000-0003-3593-8253>

Département de Mathématique; FSDM, Faculté des Sciences Dhar El Mahraz;

e-mail: [youssef9touail@gmail.com](mailto:youssef9touail@gmail.com)

Amine Jaid <https://orcid.org/0000-0001-7322-2008>

Equipe de Recherche en Mathématiques Appliquées, Technologies de l'Information et de la Communication; Faculté Polydisciplinaire de Khouribga; e-mail: [aminejaid1990@gmail.com](mailto:aminejaid1990@gmail.com)

Driss El Moutawakil <https://orcid.org/0000-0003-3082-0125>

Département de Mathématique; Ecole Supérieure de l'Éducation et de la Formation;

e-mail: [d.elmoutawakil@gmail.com](mailto:d.elmoutawakil@gmail.com)

As a very important result in fixed point theory, the Darbo fixed-point theorem [11] has novel applications in both linear and nonlinear models and generalizes both the classical Schauder fixed point principle [12] and a special type of Banach contraction principle [13].

In 1998, Jungck [14] introduced the concept of weakly compatible pairs of mappings, which are mappings that commute at their coincidence points. In a recent paper [15], the authors proved a common fixed point result for this type of mappings in a bounded metric space  $(X, d)$ , without assuming compactness, and satisfying the condition:

$$\inf_{x \neq y \in X} \{d(fx, fy) - d(gx, gy)\} > 0.$$

For more information, see [16–21]. Similarly, the authors in [22] showed a result for a class of condensing mappings without using the regularity of the measure  $\mu$ , under the condition:

$$\inf\{\mu(\Omega) - \mu(T(\Omega)) : \Omega \subset X, \mu(\Omega) > 0\} > 0. \tag{1}$$

Our main purpose in this work is to extend condition (1) to a pair of mappings  $S$  and  $T$  under the condition:

$$\inf\{\mu(\Omega) - \mu(ST(\Omega)) + \beta(\Omega) : \Omega \subset X, \mu(\Omega) > 0\} > 0, \tag{2}$$

without using the regularity of  $\mu$ , where  $\beta$  is an auxiliary function to ensure the extension in the same direction (i.e., without regularity).

In this paper, we introduce the concept of a  $\mathcal{T}$ -contractive mapping in Banach spaces and thus a new common fixed point theorem for the new type mentioned in (2).

Finally, in the last section, we provide an existence result for a class of systems of the type:

$$\begin{cases} x(t) = k(t, x(t)), \\ x(t) = k(t, Tx(t)), \end{cases}$$

where  $x \in X = \mathcal{C}([0, \tau], \mathbb{R})$  is the space of all continuous functions from  $[0, \tau]$  into  $\mathbb{R}$ , with  $\tau > 0$ .

**2. Preliminary.** Here, we recall some facts that will be used in our main result. Let  $X$  be a real Banach space. Furthermore, we suppose that  $\overline{B}$  and  $\text{Co}(B)$  denote the closure and convex hull of  $B$ , respectively. Moreover, let us denote by  $\mathcal{M}_X$  the family of all nonempty and bounded subsets of  $X$ , and by  $\mathcal{N}_X$  its subfamily consisting of all relatively compact sets.

**DEFINITION 1** [23]. A map  $\mu : \mathcal{M}_X \rightarrow [0, +\infty)$  is called a measure of non-compactness defined on  $X$  if it satisfies the following properties:

- (i) The family  $\ker \mu = \{B \in \mathcal{M}_X : \mu(B) = 0\}$  is nonempty and  $\ker \mu \subset \mathcal{N}_X$ ;
- (ii)  $A \subset B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$ ;
- (iii)  $\mu(B) = \mu(\overline{B}) = \mu(\text{Co}(B))$ ;
- (iv)  $\mu(\lambda A + (1 - \lambda)B) \leq \lambda\mu(A) + (1 - \lambda)\mu(B)$  for all  $\lambda \in [0, 1]$  and  $A, B \in \mathcal{M}_X$ ;
- (v) If  $\{B_n\}$  is a decreasing sequence of nonempty, closed, and bounded subsets of  $X$  with  $\lim \mu(B_n) = 0$ , then  $B_\infty = \bigcap_n B_n \neq \emptyset$ .

We distinguish important classes of measures of non-compactness.

DEFINITION 2 [23]. Let  $\mu$  be a measure of non-compactness in a Banach space  $X$ . The measure  $\mu$  is homogeneous if  $\mu(\lambda A) = |\lambda|\mu(A)$  for all  $\lambda \in \mathbb{R}$ . If the measure  $\mu$  satisfied the condition  $\mu(A + B) \leq \mu(A) + \mu(B)$ , it is called subadditive. A measure  $\mu$  that is both homogeneous and subadditive is said to be sublinear.

DEFINITION 3 [23]. We say that a measure of non-compactness  $\mu$  has the maximum property if  $\mu(A \cup B) = \max\{\mu(A), \mu(B)\}$ .

DEFINITION 4 [23]. A sublinear measure of non-compactness  $\mu$  that has the maximum property and  $\ker \mu = \mathcal{N}_X$  is called a regular measure.

THEOREM 1 [12]. Let  $C$  be a closed, convex subset of a Banach space  $X$ . Then every compact, continuous map  $T : C \rightarrow C$  has at least one fixed point.

THEOREM 2 (DARBO'S THEOREM) [11]. Let  $C$  be a nonempty, bounded, closed and convex subset of a Banach space  $X$ , and let  $T : C \rightarrow C$  be a continuous mapping. Assume that there exists a constant  $k \in [0, 1)$  such that:

$$\mu(T(\Omega)) \leq k\mu(\Omega)$$

for any subset  $\Omega$  of  $C$ . Then,  $T$  has at least one fixed point. Here,  $\mu$  is an arbitrary measure of non-compactness.

LEMMA 1 [22]. If  $\mu$  is a measure of non-compactness, then  $\nu = e^\mu - 1$  is a measure of non-compactness.

We present generalizations of Darbo's theorem.

THEOREM 3 [24]. Suppose that  $C$  is a nonempty, bounded, closed, and convex subset of a Banach space  $X$  and  $T : C \rightarrow C$  a continuous mapping. If for any nonempty subset  $\Omega$  of  $C$  with  $\mu(\Omega) > 0$  we have:

$$\mu(T(\Omega)) < \mu(\Omega).$$

Then,  $T$  has at least one fixed point in  $C$ . Here,  $\mu$  is a regular measure of non-compactness in  $X$ .

THEOREM 4 [25]. Let  $X$  be a Hausdorff complete and locally convex space, whose topology is defined by a family of semi-norms  $\mathcal{P}$ . Let  $C$  be a convex closed bounded subset of  $X$ , let  $I$  be a set of indices, and let  $\{T_i\}_{i \in I}$  and  $S$  be two continuous functions from  $C$  into  $C$  such that:

- (i) For any  $i \in I$ ,  $T_i$  commutes with  $S$ ;
- (ii) For any  $\Omega \subset C$  and  $i \in I$ , we have  $T_i(\text{Co}(\Omega)) \subset \text{Co}(T(\Omega))$ ;
- (iii) There exists  $k \in (0, 1)$  such that for any  $\Omega \subset C$

$$\mu(S(\Omega))(p) \leq k \sup_{i \in I} \mu(T_i(\Omega))(p), \quad p \in \mathcal{P};$$

- (iv) For any  $i \in I$ ,  $T_i$  is a commuting family.

Then,  $T_i$  and  $S$  have a common fixed point.

**3. The main theorem.** In this section, we prove our main theorem. To this end, we introduce a definition and establish a lemma.

DEFINITION 5. Let  $X$  be a bounded Banach space and  $T : X \rightarrow X$  be a mapping.  $T$  is called  $\mathcal{T}$ -contractive if:

$$\inf\{\mu(\Omega) - \mu(T(\Omega)) + \beta(\Omega) : \Omega \subset X, \mu(\Omega) > 0\} > 0.$$

Where  $\beta : \mathcal{M}_X \rightarrow \mathbb{R}$  is an arbitrary function.

LEMMA 2. Let  $X$  be a bounded Banach space and  $S, T : X \rightarrow X$  be two continuous commuting mappings. Suppose that there exists a function  $\alpha : \mathcal{M}_X \rightarrow [0, +\infty)$  such that:

- (i) There exists a nonempty set  $\Omega_0 \subset X$  such that  $\alpha(\Omega_0) = 1$ ;
- (ii)  $T$  is a linear mapping;
- (iii) There exists  $k \in (0, 1)$  such that for any  $\Omega \subset X$  we have

$$\alpha(\Omega)\mu(ST(\Omega)) \leq k\mu(\Omega).$$

Then,  $S$  and  $T$  have at least one common fixed point. Where  $\mu$  is a sublinear measure of non-compactness.

*Proof.* Let  $\emptyset \neq \Omega \subset X$ . Consider the operator  $A_\Omega$  defined on  $X$  by

$$A_\Omega(x) = k\alpha(\Omega)ST(x) + (1 - k)T(x).$$

It is clear that the operator  $A_\Omega$  commutes with  $T$ . By using sublinearity of  $\mu$  and hypothesis (iii), we obtain:

$$\begin{aligned} \mu(A_\Omega(\Omega)) &\leq k\alpha(\Omega)\mu(ST(\Omega)) + (1 - k)\mu(T(\Omega)) \leq \\ &\leq k^2\mu(\Omega) + (1 - k)\mu(T(\Omega)) \leq \\ &\leq (k^2 + 1 - k) \sup\{\mu(\Omega), \mu(T(\Omega))\}. \end{aligned}$$

Since  $k \in (0, 1)$ , we have  $k^2 < k \Rightarrow k^2 + 1 - k < k + 1 - k = 1$ . It follows by applying Theorem 4 that  $\mathcal{F} = \{x \in X : A_\Omega(x) = T(x) = x\} \neq \emptyset$  for all  $\Omega$ .

Now, let  $x \in \mathcal{F}$ , we have  $A_\Omega(x) = k\alpha(\Omega)ST(x) + (1 - k)T(x) = T(x) = x$ , which leads to  $\alpha(\Omega)S(x) = x = T(x)$  for all  $\Omega$ . Since  $\alpha(\Omega_0) = 1$ , we deduce that  $S$  and  $T$  have at least one common fixed point.  $\square$

REMARKS. We present some remarks about Lemma 2:

- For  $\alpha(\Omega) = 1$  for all  $\Omega$  and  $T = Id_X$ , we obtain a new extension of Darbo's theorem (Theorem 2).
- It is well known that if the operator  $ST$  has a fixed point, then  $S$  and  $T$  do not necessarily have a fixed point or a common fixed point. In comparison, our lemma ensures the existence of common fixed points of  $S$  and  $T$  whenever  $ST$  has a fixed point.

Now, we are ready to prove the main theorem of this paper, which can be considered as a real extension of [22, Theorem 3.2].

THEOREM 5 (MAIN THEOREM). Let  $X$  be a bounded Banach space, and let  $S, T : X \rightarrow X$  be two continuous commuting mappings such that:

- (i) There exists a nonempty set  $\Omega_0 \subset X$  such that  $\beta(\Omega_0) = 0$ ;
- (ii)  $T$  is a linear mapping;
- (iii)  $ST$  is a  $\mathcal{T}$ -contractive operator;
- (iv)  $\beta(B) \leq \inf\{\mu(\Omega) - \mu(ST(\Omega)) + \beta(\Omega) : \Omega \subset X, \mu(\Omega) > 0\}$  for all  $B \subset X$ .

Then,  $S$  and  $T$  have at least one common fixed point. Here,  $\mu$  is a sublinear measure of non-compactness.

*Proof.* Letting:

$$M = \inf\{\mu(\Omega) - \mu(ST(\Omega)) + \beta(\Omega) : \Omega \subset X, \mu(\Omega) > 0\}.$$

So, we have:

$$\mu(ST(\Omega)) - \beta(\Omega) \leq \mu(\Omega) - M,$$

for all  $\Omega \subset X$ , with  $\mu(\Omega) > 0$ .

Hence,

$$\alpha(\Omega)e^{\mu(ST(\Omega))} \leq ke^{\mu(\Omega)},$$

where

$$k = e^{-M} < 1 \quad \text{and} \quad \alpha(\Omega) = e^{-\beta(\Omega)}.$$

Thus, by using (iv), we get:

$$\alpha(\Omega)\nu(ST(\Omega)) \leq k\nu(\Omega),$$

where  $\nu$  is the measure of non-compactness proved in Lemma 1.

According to Lemma 2, we deduce that  $S$  and  $T$  have at least one common fixed point.  $\square$

EXAMPLE. Let  $X = \mathbb{R}$  and  $C = [-1, 1] \subset X$  endowed with the usual metric  $d(x, y) = |x - y|$ . Define two self-mappings  $S, T$  on  $C$  by:

$$Sx = x/3 \quad \text{and} \quad Tx = x/2.$$

We have:

$$STx = x/6 = TSx.$$

Consider the measure of non-compactness of the norm [23], defined on  $X$  by:

$$\mu(\Omega) = \sup_{x \in \Omega} \|x\|.$$

It is clear that  $\mu$  is a sublinear measure of non-compactness and not regular, because:

$$\ker \mu = \{0\} \neq \mathcal{N}_X.$$

Let  $\beta$  be the function defined by:

$$\beta(\Omega) = \begin{cases} 0, & \text{if } \Omega = \{0\}, \\ 1 - 5\|\Omega\|/6, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Let  $\Omega \subset X$  such that  $\mu(\Omega) > 0$ . We have:

$$\mu(\Omega) - \mu(ST(\Omega)) + \beta(\Omega) = 1.$$

Then,

$$\inf \{ \mu(\Omega) - \mu(ST(\Omega)) + \beta(\Omega) : \Omega \subset X, \mu(\Omega) > 0 \} \geq \beta(B),$$

for all  $B \subset X$ .

Hence, all assumptions of Theorem 5 are satisfied, and  $0 = S0 = T0$ .

REMARK. The operators  $S, T$  defined in the above example are such that  $\mu(ST(\Omega)) \leq \mu(\Omega)$ . Thus, our result guarantees the existence of a class of contractions of this type without using regularity.

COROLLARY [22]. Let  $X$  be a bounded Banach space, and let  $T : X \rightarrow X$  be a continuous mapping such that:

$$\inf\{\mu(\Omega) - \mu(T(\Omega)) : \Omega \subset X, \mu(\Omega) > 0\} > 0.$$

Then,  $T$  has at least one fixed point.

**4. Application.** In this section, we investigate the existence of solutions for the system of equations:

$$\begin{cases} x(t) = k(t, x(t)), \\ x(t) = k(t, Tx(t)), \end{cases} \tag{3}$$

where  $x \in \mathcal{C}([0, \tau], \mathbb{R})$  is the space of all continuous functions from  $[0, \tau]$  into  $\mathbb{R}$ , with  $\tau > 0$ .

The function  $k : [0, \tau] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  is continuous, and  $T : X \rightarrow X$  is a linear continuous mapping.

Let  $X = \mathcal{C}([0, \tau], \mathbb{R})$  be equipped with the norm  $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}^+$  defined by:

$$\|x\| = \sup_{t \in [0, \tau]} |x(t)|.$$

Let us now consider the mapping  $S : X \rightarrow X$  defined as follows:

$$Sx(t) = k(t, x(t)),$$

for all  $x \in X$ .

Therefore, (3) has a solution if and only if  $S$  and  $T$  have a common fixed point.

Under the above assumptions, we have the following theorem.

**THEOREM 6.** Assume that there exist  $M > 0$  and a function  $\theta : [0, \tau] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  such that for any  $t \in [0, \tau]$  and  $x \in X$ , we have:

$$\begin{aligned} \theta(t, x(t)) \geq 0 &\implies k(t, T(x(t))) \leq x(t) - M, \\ \theta(t, x(t)) < 0 &\implies k(t, T(x(t))) \leq x(t), \end{aligned}$$

and

$$T(k(t, x(t))) = k(t, T(x(t))), \tag{4}$$

for any  $(t, x) \in [0, \tau] \times X$ .

Then,  $S$  and  $T$  have at least one common fixed point.

*Proof.* Note that (4) implies that  $S$  and  $T$  are commuting mappings.

Now, let  $t \in [0, \tau]$ ,  $\Omega \subset X$ , and  $x \in \Omega$ . We discuss two cases:

**Case 1:** If  $\theta(t, x(t)) \geq 0$ , we have:

$$ST(x)(t) = k(t, Tx(t)) \leq x(t) - M \leq \|x\| - M \leq \sup_{x \in \Omega} \|x\| - M.$$

**Case 2:** If  $\theta(t, x(t)) < 0$ , we have:

$$ST(x)(t) = k(t, Tx(t)) \leq x(t) \leq \|x\| \leq \sup_{x \in \Omega} \|x\|.$$

By considering:

$$\beta(\Omega) = \begin{cases} M, & \text{if } \theta(t, x(t)) < 0, \\ 0, & \text{if } \theta(t, x(t)) \geq 0, \end{cases}$$

we obtain:

$$\inf \{ \|\Omega\| - \|ST(\Omega)\| + \beta(\Omega) : \Omega \subset X, \|\Omega\| > 0 \} \geq \beta(B),$$

for all  $B \subset X$ , where  $\|\cdot\|$  is the measure of non-compactness of the norm [23].

By applying Theorem 5, we deduce that  $S$  and  $T$  have a common fixed point.  $\square$

**Competing interests.** On behalf of all authors, the corresponding author states that there is no conflict of interest.

**Authors' contributions and responsibilities.** Each author contributed to the development of the concept of the article and to the writing of the manuscript. The authors take full responsibility for submitting the final manuscript for publication. Each author has approved the final version of the manuscript.

**Data availability.** No data were used to support this study.

## References

1. Aghajani A., Pourhadi E., Trujillo J. Application of measure of noncompactness to a Cauchy problem for fractional differential equations in Banach spaces, *Fract. Calc. Appl. Anal.*, 2013, vol. 16, no. 4, pp. 962–977. DOI: <https://doi.org/10.2478/s13540-013-0059-y>.
2. Ali A. A., Amar A. B. Measures of weak noncompactness, nonlinear Leray–Schauder alternatives in Banach algebras satisfying condition (p) and an application, *Quaest. Math.*, 2016, vol. 39, no. 3, pp. 319–340. DOI: <https://doi.org/10.2989/16073606.2015.1070378>.
3. Ammar A., Jeribi A. Measures of noncompactness and essential pseudospectra on Banach space, *Math. Methods Appl. Sci.*, 2014, vol. 37, no. 3, pp. 447–452. DOI: <https://doi.org/10.1002/mma.2808>.
4. Arab R., Allahyari R., Haghghi A. S. Existence of solutions of infinite systems of integral equations in two variables via measure of noncompactness, *Appl. Math. Comput.*, 2014, vol. 246, pp. 283–291. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.amc.2014.08.023>.
5. Banaś J. Measures of noncompactness in the study of solutions of nonlinear differential and integral equations, *Open Math.*, 2012, vol. 10, no. 6, pp. 2003–2011. DOI: <https://doi.org/10.2478/s11533-012-0120-9>.
6. Lixin C., Qingjin C., Qinrui S., et al. A new approach to measures of noncompactness of Banach spaces, *Stud. Math.*, 2018, vol. 240, pp. 21–45. DOI: <https://doi.org/10.4064/sm8448-2-2017>.
7. Mursaleen M. Application of measure of noncompactness to infinite systems of differential equations, *Can. Math. Bull.*, 2013, vol. 56, no. 2, pp. 388–394. DOI: <https://doi.org/10.4153/CMB-2011-170-7>.
8. Nikbakhtsarvestani F., Vaezpour S. M., Asadi M.  $F(\psi, \varphi)$ -Contraction in terms of measure of noncompactness with application for nonlinear integral equations, *J. Inequal. Appl.*, 2017, vol. 2017, 271. DOI: <https://doi.org/10.1186/s13660-017-1545-2>.
9. Vetro C., Vetro F. On the existence of at least a solution for functional integral equations via measure of noncompactness, *Banach J. Math. Anal.*, 2017, vol. 11, no. 3, pp. 497–512. DOI: <https://doi.org/10.1215/17358787-2017-0003>.
10. Kuratowski K. Sur les espaces complets, *Fundam. Math.*, 1930, vol. 15, pp. 301–309 (In French).
11. Darbo G. Punti uniti in trasformazioni a codominio non compatto, *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova*, 1955, vol. 24, pp. 84–92 (In Italian).

12. Schauder J. Der Fixpunktsatz in Funktionalräumen, *Stud. Math.*, 1930, vol. 2, pp. 171–180 (In German).
13. Banach St. Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales, *Fund. Math.*, 1922, vol. 3, pp. 133–181 (In French).
14. Jungck G., Rhoades B. E. Fixed points for set valued functions without continuity, *Indian J. Pure Appl. Math.*, 1998, vol. 29, no. 3, pp. 227–238.
15. Touail Y., El Moutawakil D. New common fixed point theorems for contractive self mappings and an application to nonlinear differential equations, *Int. J. Nonlinear Anal. Appl.*, 2021, vol. 12, no. 1, pp. 903–911. DOI: <https://doi.org/10.22075/ijnaa.2021.21318.2245>.
16. Touail Y., El Moutawakil D., Bennani S. Fixed point theorems for contractive self-mappings of a bounded metric space, *J. Funct. Spaces*, vol. 2019, no. 2019, 4175807. DOI: <https://doi.org/10.1155/2019/4175807>.
17. Touail Y., El Moutawakil D. Fixed point results for new type of multivalued mappings in bounded metric spaces with an application, *Ric. Mat.*, 2022, vol. 71, no. 2, pp. 315–323. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11587-020-00498-5>.
18. Touail Y., El Moutawakil D. Some new common fixed point theorems for contractive selfmappings with applications, *Asian-Eur. J. Math.*, 2022, vol. 15, no. 4, 2250080. DOI: <https://doi.org/10.1142/S1793557122500802>.
19. Touail Y., El Moutawakil D. Fixed point theorems for new contractions with application in dynamic programming, *Vestnik St. Petersburg Univ. Math.*, 2021, vol. 54, no. 2, pp. 206–212. EDN: ZJHFQW. DOI: <https://doi.org/10.1134/s1063454121020126>.
20. Touail Y., El Moutawakil D. Fixed point theorems on orthogonal complete metric spaces with an application, *Int. J. Nonlinear Anal. Appl.*, 2021, vol. 12, no. 2, pp. 1801–1809. DOI: <https://doi.org/10.22075/ijnaa.2021.23033.2464>.
21. Touail Y., Jaid A., El Moutawakil D. New contribution in fixed point theory via an auxiliary function with an application, *Ric. Mat.*, 2023, vol. 72, no. 1, pp. 181–191. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11587-021-00645-6>.
22. Touail Y., Jaid A., El Moutawakil D. Fixed point results for condensing operators via measure of non-compactness, *Vestnik St. Petersburg Univ. Math.*, 2022, vol. 55, pp. 347–352. EDN: KVHCVR. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1063454122030153>.
23. Banaś, J., Goebel K. *Measures of Noncompactness in Banach Spaces*, Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, vol. 60. New York, Basel, Marcel Dekker, 1980, vii+97 pp.
24. Sadovskii B. N. A fixed-point principle, *Funct. Anal. Appl.*, 1967, vol. 1, pp. 151–153. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01076087>.
25. Hajji A., Hanebaly E. Commuting mappings and  $\alpha$ -compact type fixed point theorems in locally convex spaces, *Int. J. Math. Anal.*, 2007, vol. 1, no. 14, pp. 661–680.

УДК 517.988.523

## Результат об общей неподвижной точке, полученный через вспомогательную функцию, и его применение

Y. Touail<sup>1</sup>, A. Jaid<sup>2</sup>, D. El Moutawakil<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Университет Сиди Мохамеда бен Абделлы, Фес, Марокко.

<sup>2</sup> Университет Султана Мулая Слимана, Бени-Меллаль, Марокко.

<sup>3</sup> Университет Шуайба Дуккали, Эль-Джадида, Марокко.

### Аннотация

Представлена новая теорема об общей неподвижной точке для двух отображений, обладающих свойством коммутативности. Для доказательства теоремы используется мера некомпактности в банаховых пространствах. В заключительной части приводится пример практического применения полученной теоремы.

**Ключевые слова:** неподвижная точка, мера некомпактности,  $\mathcal{T}$ -сжимающее отображение.

Получение: 1 октября 2023 г. / Исправление: 23 октября 2024 г. /  
Принятие: 16 декабря 2024 г. / Публикация онлайн: 25 декабря 2024 г.

**Конкурирующие интересы.** От имени всех авторов автор-корреспондент заявляет об отсутствии конфликта интересов.

**Авторский вклад и ответственность.** Все авторы принимали участие в разработке концепции статьи; все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

**Доступность данных.** Никакие данные не использовались в этом исследовании.

### Дифференциальные уравнения и математическая физика Краткое сообщение

© Коллектив авторов, 2024

© СамГТУ, 2024 (составление, дизайн, макет)

Контент публикуется на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

### Образец для цитирования

Touail Y., Jaid A., El Moutawakil D. A common fixed-point result via a supplemental function with an application, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2024, vol. 28, no. 4, pp. 790–798. EDN: PXHWMS. DOI: 10.14498/vsgtu2074.

### Сведения об авторах

Youssef Touail  <https://orcid.org/0000-0003-3593-8253>  
e-mail: [youssef9touail@gmail.com](mailto:youssef9touail@gmail.com)

Amine Jaid  <https://orcid.org/0000-0001-7322-2008>  
e-mail: [aminejaid1990@gmail.com](mailto:aminejaid1990@gmail.com)

Driss El Moutawakil  <https://orcid.org/0000-0003-3082-0125>  
e-mail: [d.elmoutawakil@gmail.com](mailto:d.elmoutawakil@gmail.com)



УДК 517.956.3

## Матрица Римана для некоторых систем уравнений гиперболического типа высокого порядка

Ю. О. Яковлева

Самарский государственный технический университет,  
Россия, 443100, Самара, ул. Молодогвардейская, 244.

### Аннотация

Решение некоторых краевых задач для систем дифференциальных уравнений гиперболического типа может быть построено в явном виде в терминах матрицы Римана. В связи с этим актуален вопрос о построении матрицы Римана в явном виде для систем гиперболических уравнений высокого порядка.

Рассматривается система дифференциальных уравнений гиперболического типа третьего порядка от трех независимых переменных. Для указанной системы построена матрица Римана как решение специальной задачи Гурса. Кроме того, матрица Римана удовлетворяет интегральному уравнению Вольтерра. Матрица Римана выражена в явном виде через гипергеометрическую функцию матричного аргумента. Аналогично рассматривается система дифференциальных уравнений гиперболического типа четвертого порядка от четырех независимых переменных. Данные результаты обобщены для системы дифференциальных уравнений гиперболического типа порядка  $n$ , не содержащей производные порядка меньше  $n$ .

**Ключевые слова:** система дифференциальных уравнений гиперболического типа порядка  $n$ , матрица Римана, задача Гурса, гипергеометрическая функция матричного аргумента.

Получение: 13 мая 2024 г. / Исправление: 29 октября 2024 г. /

Принятие: 1 ноября 2024 г. / Публикация онлайн: 25 декабря 2024 г.

---

### Дифференциальные уравнения и математическая физика

#### Краткое сообщение

© Коллектив авторов, 2024

© СамГТУ, 2024 (составление, дизайн, макет)

📄 🌐 Контент публикуется на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

#### Образец для цитирования

Яковлева Ю. О. Матрица Римана для некоторых систем уравнений гиперболического типа высокого порядка // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2024. Т. 28, № 4. С. 799–808. EDN: UZAIUX. DOI: 10.14498/vsgtu2092.

#### Сведения об авторе

Юлия Олеговна Яковлева ✉  <https://orcid.org/0000-0002-9839-3740>

кандидат физико-математических наук, доцент; доцент; каф. высшей математики;

e-mail: julia.yakovleva@mail.ru

**Введение.** Известно, что краевые задачи для дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений в частных производных с некротными характеристиками могут быть решены методом Римана [1, гл. 1, п. 4°]. Метод Римана предполагает существование вспомогательной функции, так называемой функции Римана, обладающей известными свойствами [2–4]. Функция Римана играет фундаментальную роль в теории линейных уравнений гиперболического типа, и с ее помощью удается, как правило, записать решение задач Коши и Гурса в явном виде [5–8].

Решение краевых задач для ряда систем гиперболического типа также можно получить в явном виде с помощью матрицы Римана [9, 10]. Поэтому особый интерес представляют исследования, посвященные построению в явном виде матрицы Римана для некоторых видов систем дифференциальных уравнений. При построении матрицы Римана важно, что с помощью интерполяционного многочлена Лагранжа—Сильвестра [11, гл. 5, § 1] можно определить значение аналитической функции на множестве постоянных квадратных матриц. Если ограничиться множеством матриц, являющихся значениями некоторых аналитических функций от одной матрицы, то определение легко обобщается на случай аналитических функций многих комплексных переменных, что позволяет, в свою очередь, доопределять целый ряд специальных функций на матричные значения входящих в них параметров.

**1. Построение матрицы Римана для системы дифференциальных уравнений гиперболического типа третьего и четвертого порядка.** В пространстве  $\mathbb{R}^3$  рассмотрим систему дифференциальных уравнений в частных производных, не содержащую производные порядка меньше третьего,

$$MU \equiv U_{x_1 x_2 x_3} + \Omega U = 0, \quad (1)$$

где  $U(x_1, x_2, x_3)$  — искомая  $m$ -мерная вектор-функция,  $\Omega$  — постоянная действительная  $(m \times m)$ -матрица.

Оператор  $M^*V \equiv -V_{x_1 x_2 x_3} + V\Omega$ , где  $V(x_1, x_2, x_3, \xi_1, \xi_2, \xi_3)$  — квадратная матрица порядка  $m$ , является сопряженным оператором по Лагранжу для  $MU \equiv U_{x_1 x_2 x_3} + \Omega U$ .

Матрицей Римана  $V = V(x_1, x_2, x_3, \xi_1, \xi_2, \xi_3)$  для системы уравнений (1) называется решение задачи

$$\begin{aligned} M^*V &= 0, \\ V(\xi_1, x_2, x_3, \xi_1, \xi_2, \xi_3) &= E, \\ V(x_1, \xi_2, x_3, \xi_1, \xi_2, \xi_3) &= E, \\ V(x_1, x_2, \xi_3, \xi_1, \xi_2, \xi_3) &= E, \end{aligned}$$

где  $(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  — произвольная точка пространства  $\mathbb{R}^3$ ,  $E$  — единичная матрица порядка  $m$ .

Очевидно, что матрица Римана удовлетворяет интегральному уравнению Вольтерра [6], [7, с. 26]

$$V(x_1, x_2, x_3, \xi_1, \xi_2, \xi_3) - \int_{\xi_1}^{x_1} \int_{\xi_2}^{x_2} \int_{\xi_3}^{x_3} V(\alpha, \beta, \gamma) \Omega d\alpha d\beta d\gamma = E. \quad (2)$$

При этом следует отметить, что два определения матрицы Римана — посредством интегрального уравнения и как решение задачи Гурса для сопряженного уравнения эквивалентны.

Введем новые переменные  $t = x_1 - \xi_1$ ,  $s = x_2 - \xi_2$ ,  $p = x_3 - \xi_3$ . Тогда матрица Римана  $V(t, s, p)$  удовлетворяет уравнению

$$V_{tsp} - V\Omega = 0 \quad (3)$$

и условиям

$$V(t, 0, 0) = E, \quad V(0, s, 0) = E, \quad V(0, 0, p) = E. \quad (4)$$

Решение задачи (3), (4) будем искать в следующем виде:

$$V = W(\sigma),$$

где  $\sigma = tsp$ .

Матричное уравнение  $M^*V = 0$  при этом преобразуется к виду

$$\sigma^2 W'''(\sigma) + 3\sigma W'' + W' - W\Omega = 0 \quad (5)$$

при  $W(0) = E$ .

Пусть  $\delta \equiv \sigma \frac{d}{d\sigma}$ , тогда  $\sigma^2 \frac{d^2}{d\sigma^2} \equiv \delta^2 - \delta$ , откуда

$$\sigma^3 \frac{d^3}{d\sigma^3} \equiv \delta^3 - 3\delta^2 + 2\delta. \quad (6)$$

Подставляя (6) в (5), получим матричное уравнение

$$\delta^3 W = \sigma W\Omega. \quad (7)$$

Ищем решение матричного уравнения в виде  $W(\sigma) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \sigma^k$ , где  $A_k$  — постоянные квадратные матрицы порядка  $m$ .

Так как

$$k^3 A_k = A_{k-1}, \quad A_0 = E,$$

используя символ Похгаммера, получим следующую формулу:

$$A_k = \frac{1}{(1)_k (1)_k k!} \Omega^k.$$

Следовательно,

$$W(\sigma) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(1)_k (1)_k k!} \sigma^k \Omega^k.$$

Пользуясь определением обобщенной гипергеометрической функции [13, гл. 4], получим, что матрица Римана для системы уравнений (1) имеет вид

$$V(x_1, x_2, x_3, \xi_1, \xi_2, \xi_3) = {}_0F_2(1; 1; (x_1 - \xi_1)(x_2 - \xi_2)(x_3 - \xi_3)\Omega), \quad (8)$$

где  ${}_0F_2(1; 1; (x_1 - \xi_1)(x_2 - \xi_2)(x_3 - \xi_3)\Omega)$  — обобщенная гипергеометрическая функция матричного аргумента.

Для системы дифференциальных уравнений гиперболического типа четвертого порядка матрица Римана, выраженная через обобщенную гипергеометрическую функцию, имеет аналогичный вид.

Действительно, для системы дифференциальных уравнений в частных производных, не содержащей производные порядка меньше четвертого,

$$MU \equiv U_{x_1 x_2 x_3 x_4} + \Omega U = 0, \quad (9)$$

где  $U(x_1, x_2, x_3, x_4)$  — искомая  $m$ -мерная вектор-функция,  $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}$ ,  $\Omega$  — постоянная действительная  $(m \times m)$ -матрица, матрица Римана может быть найдена как решение специальной задачи Гурса:

$$M^*V = 0,$$

$$V(\xi_1, x_2, x_3, x_4, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) = E,$$

$$V(x_1, \xi_2, x_3, x_4, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) = E,$$

$$V(x_1, x_2, \xi_3, x_4, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) = E,$$

$$V(x_1, x_2, x_3, \xi_4, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) = E,$$

где  $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}$ ,  $E$  — единичная матрица порядка  $m$ .

Также матрица Римана для системы (9) удовлетворяет следующему интегральному уравнению:

$$V(x_1, x_2, x_3, x_4; \xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) + \int_{\xi_1}^{x_1} \int_{\xi_2}^{x_2} \int_{\xi_3}^{x_3} \int_{\xi_4}^{x_4} V(\alpha, \beta, \gamma, \sigma) \Omega d\alpha d\beta d\gamma d\sigma = E.$$

Выполняя преобразования и построения, аналогичные тем, что были сделаны для системы третьего порядка (1), легко получить матрицу Римана для системы дифференциальных уравнений в частных производных, не содержащей производные порядка меньше четвертого (9), в следующем виде:

$$\begin{aligned} V(x_1, x_2, x_3, x_4; \xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) &= \\ &= {}_0F_3(1; 1; 1; -(x_1 - \xi_1)(x_2 - \xi_2)(x_3 - \xi_3)(x_4 - \xi_4)\Omega), \end{aligned}$$

где  ${}_0F_3(1; 1; 1; -(x_1 - \xi_1)(x_2 - \xi_2)(x_3 - \xi_3)(x_4 - \xi_4)\Omega)$  — обобщенная гипергеометрическая функция.

В работах [9, 10] функция Римана определяется как решение специальной задачи Гурса и доказаны ее существование и единственность. Опираясь на представление матрицы Римана как решения интегрального уравнения Вольтерра, можно утверждать, что матрица Римана существует и единственна в классе непрерывных матриц.

**2. Задача Гурса для системы дифференциальных уравнений гиперболического типа третьего порядка.** Для системы уравнений

$$MU \equiv U_{x_1 x_2 x_3} + \Omega U = 0$$

рассмотрим задачу Гурса.

ЗАДАЧА ГУРСА. В односвязной области  $\Delta = \{(x_1, x_2, x_3) : 0 < x_1 < 1, 0 < x_2 < 1, 0 < x_3 < 1\}$  независимых переменных  $(x_1, x_2, x_3)$  найти регулярное решение  $U(x_1, x_2, x_3)$  системы уравнений (1), удовлетворяющее условиям

$$\begin{aligned} U(0, x_2, x_3) &= \Lambda_1(x_2, x_3), & 0 \leq x_2 \leq 1, & 0 \leq x_3 \leq 1, \\ U(x_1, 0, x_3) &= \Lambda_2(x_1, x_3), & 0 \leq x_1 \leq 1, & 0 \leq x_3 \leq 1, \\ U(x_1, x_2, 0) &= \Lambda_3(x_1, x_2), & 0 \leq x_1 \leq 1, & 0 \leq x_2 \leq 1, \end{aligned} \quad (10)$$

где  $\Lambda_1(x_2, x_3)$ ,  $\Lambda_2(x_1, x_3)$ ,  $\Lambda_3(x_1, x_2)$  — заданные вектор-функции.

Матрица Римана  $V = V(x_1, x_2, x_3, \xi_1, \xi_2, \xi_3)$  удовлетворяет интегральному уравнению Вольтерра (2). Будем писать  $V = R(x_1, x_2, x_3, \xi_1, \xi_2, \xi_3)$  [7, с. 27], тогда справедливо тождество

$$\begin{aligned} (RU)_{x_1x_2x_3} &= RMU + (R_{x_3}U)_{x_1x_2} + (R_{x_1}U)_{x_2x_3} + (R_{x_2}U)_{x_1x_3} - \\ &\quad - (R_{x_2x_3}U)_{x_1} - (R_{x_1x_3}U)_{x_2} - (R_{x_1x_2}U)_{x_3}. \end{aligned}$$

При этом

$$R_{x_3}|_{x_1=\xi_1, x_2=\xi_2} = 0, \quad R_{x_1x_2}|_{x_3=\xi_3} = 0, \quad R_{x_2x_3}|_{x_1=\xi_1} = 0, \quad R_{x_1x_3}|_{x_2=\xi_2} = 0,$$

где  $R = R(x_1, x_2, x_3, \xi_1, \xi_2, \xi_3)$ .

Формула решения задачи Гурса (10) принимает вид [7, с. 28]

$$\begin{aligned} U(x_1, x_2, x_3) &= R(x_1, x_2, 0)\Lambda_3(x_1, x_2) + R(x_1, 0, x_3)\Lambda_2(x_1, x_3) + \\ &\quad + R(0, x_2, x_3)\Lambda_3(x_2, x_3) - R(x_1, 0, 0)\Lambda_3(x_1, 0) - R(0, x_2, 0)\Lambda_3(0, x_2) - \\ &\quad - R(0, 0, x_3)\Lambda_2(0, x_3) + R(0, 0, 0)\Lambda_1(0, 0) + \\ &+ \int_0^{x_1} (R_{x_1}(\alpha, 0, 0)\Lambda_3(\alpha, 0) - R_{x_1}(\alpha, x_2, 0)\Lambda_3(\alpha, x_2) - R_{x_1}(\alpha, 0, x_3)\Lambda_2(\alpha, x_3))d\alpha + \\ &+ \int_0^{x_2} (R_{x_2}(0, \beta, 0)\Lambda_3(0, \beta) - R_{x_2}(x_1, \beta, 0)\Lambda_3(x_1, \beta) - R_{x_2}(0, \beta, x_3)\Lambda_1(\beta, x_3))d\beta + \\ &+ \int_0^{x_3} (R_{x_3}(0, 0, \gamma)\Lambda_2(0, \gamma) - R_{x_3}(x_1, 0, \gamma)\Lambda_2(x_1, \gamma) - R_{x_3}(0, x_2, \gamma)\Lambda_1(x_2, \gamma))d\gamma. \end{aligned}$$

Поскольку матрица Римана для системы (1) получена в явном виде (8), регулярное решение задачи Гурса (10) также записывается в явном виде через гипергеометрическую функцию матричного аргумента.

**3. Матрица Римана для системы дифференциальных уравнений гиперболического типа порядка  $n$ .** Построим матрицу Римана для системы дифференциальных уравнений в частных производных, не содержащей производные порядка меньше  $n$ ,

$$MU \equiv U_{x_1x_2x_3\dots x_n} + \Omega U = 0, \quad (11)$$

где  $U(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$  — искомая  $m$ -мерная вектор-функция,  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ ,  $\Omega$  — постоянная действительная  $(m \times m)$ -матрица.

Для системы (11) сопряженным по Лагранжу оператором является оператор

$$M^*V \equiv (-1)^n V_{x_1x_2x_3\dots x_n} + V\Omega,$$

где  $V(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n; \xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n)$  — квадратная матрица порядка  $m$ .  
 Матрица Римана для системы (11) удовлетворяет следующей задаче:

$$\begin{aligned} M^*V &= 0, \\ V(\xi_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n)|_{x_1=\xi_1} &= E, \\ V(x_1, \xi_2, x_3, \dots, x_n, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n)|_{x_2=\xi_2} &= E, \\ V(x_1, x_2, \xi_3, \dots, x_n, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n)|_{x_3=\xi_3} &= E, \\ &\dots, \\ V(x_1, x_2, x_3, \dots, \xi_n, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n)|_{x_n=\xi_n} &= E, \end{aligned}$$

где  $x_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots, n$ ,  $E$  — единичная матрица порядка  $m$ .

Ясно, что матрица Римана удовлетворяет интегральному уравнению Вольтерра:

$$\begin{aligned} &V(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n) + \\ &+ (-1)^n \int_{\xi_1}^{x_1} \int_{\xi_2}^{x_2} \int_{\xi_3}^{x_3} \dots \int_{\xi_n}^{x_n} V(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n) \Omega d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3 \dots d\alpha_n = E. \end{aligned}$$

Следовательно, матрица Римана существует и единственна в классе непрерывных матриц.

Пусть  $t_1 = x_1 - \xi_1$ ,  $t_2 = x_2 - \xi_2$ , ...,  $t_n = x_n - \xi_n$ , тогда матрицей Римана  $V(t_1, t_2, \dots, t_n)$  является решение матричного уравнения

$$(-1)^n V_{t_1, t_2, \dots, t_n} + V\Omega = 0, \tag{12}$$

удовлетворяющее условиям

$$V(t_1, 0, \dots, 0) = E, \quad V(0, t_2, \dots, 0) = E, \quad \dots, \quad V(0, 0, \dots, t_n) = E. \tag{13}$$

Тогда решение задачи (12), (13) можно найти в виде

$$V = W(\sigma),$$

где  $\sigma = t_1 t_2 \dots t_n$ .

Аналогично предыдущему пункту получим

$$k^n A_k = (-1)^{n-1} A_{k-1}, \quad A_0 = E.$$

Справедливы формулы

$$A_k = \frac{(-1)^k}{(1)_k^{n-1} k!} \Omega^k,$$

если  $n$  — четное число, и

$$A_k = \frac{1}{(1)_k^{n-1} k!} \Omega^k,$$

если  $n$  — нечетное число.

В итоге получаем, что

$$W(\sigma) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(1)_k^{n-1} k!} \sigma^k \Omega^k,$$

если  $n$  — четное число, и

$$W(\sigma) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(1)_k^{n-1} k!} \sigma^k \Omega^k,$$

если  $n$  — нечетное число.

Таким образом, матрица Римана для системы уравнений (11) имеет вид

$$\begin{aligned} V(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n) = \\ = {}_0F_{n-1}(1; 1; 1; \dots; 1; (-1)^{n-1}(x_1 - \xi_1)(x_2 - \xi_2)(x_3 - \xi_3) \cdots (x_n - \xi_n)\Omega), \end{aligned}$$

где  ${}_0F_{n-1}(1; 1; 1; \dots; 1; (-1)^{n-1}(x_1 - \xi_1)(x_2 - \xi_2)(x_3 - \xi_3) \cdots (x_n - \xi_n)\Omega)$  — обобщенная гипергеометрическая функция матричного аргумента.

Существование матрицы Римана для системы дифференциальных уравнений гиперболического типа порядка  $n$  (11) доказано конструктивным путем. Единственность матрицы Римана как функции матричного аргумента следует из единственности функции Римана, определенной как решение специальной задачи Гурса [2, 9]. И, опираясь на представление матрицы Римана как решения интегрального уравнения Вольтерра, можно утверждать, что матрица Римана существует и единственна в классе непрерывных матриц.

**Заключение.** Таким образом, в данной работе для систем гиперболических уравнений высокого порядка построены матрицы Римана как функции матричного аргумента в терминах обобщенных гипергеометрических функций. Матрицы Римана построены как решение специальной задачи Гурса. Особый интерес представляет тот факт, что матрицы получены в явном виде, что позволяет с их помощью найти решение краевых задач для систем дифференциальных уравнений гиперболического типа высокого порядка также в явном виде. В качестве примера приведена задача Гурса для системы гиперболических уравнений третьего порядка, регулярное решение которой получено в явном виде.

**Конкурирующие интересы.** Конкурирующих интересов не имею.

**Авторская ответственность.** Я несу полную ответственность за предоставление окончательной версии рукописи в печать. Окончательная версия рукописи мною одобрена.

**Финансирование.** Исследование выполнялось без финансирования.

**Благодарность.** Автор благодарен рецензентам за тщательное прочтение статьи и ценные предложения и комментарии.

## Библиографический список

1. Бицадзе А. В. *Некоторые классы уравнений в частных производных*. М.: Наука, 1981. 448 с.
2. Солдатов А. П., Шхануков М. Х. Краевые задачи с общим нелокальным условием А. А. Самарского для псевдопараболических уравнений высокого порядка // *Докл. АН СССР*, 1987. Т. 297, № 3. С. 547–552. EDN: QYUJSM.
3. Зикиров О. С. Локальные и нелокальные краевые задачи для гиперболических уравнений третьего порядка // *Соврем. мат. прилож.*, 2011. Т. 68. С. 101–120.
4. Zeitsch P. J. On the Riemann function // *Mathematics*, 2018. vol. 6, no. 12, 316. DOI: <https://doi.org/10.3390/math6120316>.

5. Жегалов В. И., Миронов А. Н. О задачах Коши для двух уравнений в частных производных // *Изв. вузов. Матем.*, 2002. № 5. С. 23–30. EDN: HQUCVD.
6. Миронов А. Н., Миронова Л. Б., Яковлева Ю. О. Метод Римана для уравнений с доминирующей частной производной (обзор) // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2021. Т. 25, № 2. С. 207–240. EDN: FPSRYB. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1853>.
7. Жегалов В. И., Миронов А. Н. *Дифференциальные уравнения со старшими частными производными*. Казань: Казанск. матем. общ-во, 2001. 226 с. EDN: XPWCQP.
8. Scott E. J. The Riemann function for a class of equations of the form  $\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \nu(x)\mu(y)v = 0$  // *Ganita*, 1975. vol. 26, no. 1. pp. 19–28.
9. Андреев А. А., Яковлева Ю. О. Задача типа Гурса для гиперболического уравнения и для одной системы гиперболических уравнений третьего порядка // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2019. Т. 23, № 1. С. 186–194. EDN: JKPBDE. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1666>.
10. Яковлева Ю. О., Тарасенко А. В. Решение задачи Коши для системы уравнений гиперболического типа четвертого порядка методом Римана // *Вестн. Самар. ун-та. Естественн. сер.*, 2019. Т. 25, № 3. С. 33–38. EDN: EANDKS. DOI: <https://doi.org/10.18287/2541-7525-2019-25-3-33-38>.
11. Гантмахер Ф. Р. *Теория матриц*. М.: Наука, 1988. 549 с.
12. Volterra V. *Theory of Functionals and of Integral and Integro-Differential Equations*. New York: Dover Publ., 1959. 226 pp.
13. Бейтмен Г., Эрдейи А. *Высшие трансцендентные функции*. Т. 1: Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра. М.: Наука, 1973. 296 с.

MSC: 35K70, 35K35

## The Riemann matrix for some systems of the differential hyperbolic-type equations of the high order

*J. O. Yakovleva*

Samara State Technical University,  
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russian Federation.

### Abstract

Solutions to some boundary value problems for systems of hyperbolic partial differential equations can be constructed explicitly in terms of the Riemann matrix. In this regard, the question of explicitly constructing the Riemann matrix for high-order hyperbolic systems of equations is relevant.

We consider a system of third-order hyperbolic partial differential equations with three independent variables. For the specified system, the Riemann matrix is constructed as a solution to a special Goursat problem. Furthermore, the Riemann matrix satisfies a Volterra integral equation. The Riemann matrix is expressed explicitly in terms of a hypergeometric function of a matrix argument. Similarly, a system of fourth-order hyperbolic partial differential equations with four independent variables is considered. These results are generalized for a system of hyperbolic partial differential equations of order  $n$  that does not contain derivatives of order less than  $n$ .

**Keywords:** system of  $n$ -th order hyperbolic PDEs, Riemann matrix, Goursat problem, hypergeometrical function of matrix argument.

Received: 13<sup>th</sup> May, 2024 / Revised: 29<sup>th</sup> October, 2024 /

Accepted: 1<sup>st</sup> November, 2024 / First online: 25<sup>th</sup> December, 2024

---

**Competing interests.** I declare that I have no competing interests.

**Authors' contributions and responsibilities.** I bear full responsibility for submitting the final version of the manuscript for publication. I have approved the final version of the manuscript.

**Funding.** This research was conducted without any funding.

---

### Differential Equations and Mathematical Physics Short Communication

© The Author(s), 2024

© Samara State Technical University, 2024 (Compilation, Design, and Layout)

♾️ © ⓘ The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

#### Please cite this article in press as:

Yakovleva J. O. The Riemann matrix for some systems of the differential hyperbolic-type equations of the high order, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2024, vol. 28, no. 4, pp. 799–808. EDN: UZAIUX. DOI: 10.14498/vsgtu2092 (In Russian).

#### Author's Details:

Julia O. Yakovleva  <https://orcid.org/0000-0002-9839-3740>

Cand. Phys. & Math. Sci., Associate Professor; Associate Professor; Dept. of Higher Mathematics; e-mail: [julia.yakovleva@mail.ru](mailto:julia.yakovleva@mail.ru)

**Acknowledgments.** The author is grateful to the reviewers for their thorough reading of the article and for their valuable suggestions and comments.

## References

1. Bitsadze A. V. *Some Classes of Partial Differential Equations*, Advanced Studies in Contemporary Mathematics, vol. 4. New York, Gordon & Breach Science Publ., 1988, xi+504 pp.
2. Soldatov A. P., Shkhanukov M. Kh. Boundary value problems with Samarskiy general non-local condition for higher-order pseudoparabolic equations, *Soviet Math. Dokl.*, 1988, vol. 36, no. 3, pp. 507–511.
3. Zikirov O. S. Local and nonlocal boundary-value problems for third-order hyperbolic equations, *J. Math. Sci.*, 2011, vol. 175, no. 1, pp. 104–123. EDN: RVKAZX. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10958-011-0337-3>.
4. Zeitsch P. J. On the Riemann function, *Mathematics*, 2018, vol. 6, no. 12, 316. DOI: <https://doi.org/10.3390/math6120316>.
5. Zhegalov V. I., Mironov A. N. Cauchy problems for two partial differential equations, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2002, vol. 46, no. 5, pp. 21–28.
6. Mironov A. N., Mironova L. B., Yakovleva J. O. The Riemann method for equations with a dominant partial derivative (A Review), *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2021, vol. 25, no. 2, pp. 207–240 (In Russian). EDN: FPSRYB. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1853>.
7. Zhegalov V. I., Mironov A. N. *Differentsial'nye uravneniia so starshimi chastnymi proizvodnymi* [Differential Equations with Higher Partial Derivatives]. Kazan, Kazan Math. Society, 2001, 226 pp. (In Russian). EDN: XPWCQP.
8. Scott E. J. The Riemann function for a class of equations of the form  $\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \nu(x)\mu(y)v = 0$ , *Ganita*, 1975, vol. 26, no. 1, pp. 19–28.
9. Andreev A. A., Yakovleva J. O. The Goursat-type problem for a hyperbolic equation and system of third order hyperbolic equations, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2019, vol. 23, no. 1, pp. 186–194 (In Russian). EDN: JKPBE. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1666>.
10. Yakovleva J. O., Tarasenko A. V. The solution of Cauchy problem for the hyperbolic differential equations of the fourth order by the Riman method, *Vestn. Samar. Univ. Estestvennon. Ser.* [Vestnik of Samara University. Natural Science Series], vol. 25, no. 3, pp. 33–38 (In Russian). EDN: EANDKS. DOI: <https://doi.org/10.18287/2541-7525-2019-25-3-33-38>.
11. Gantmakher F. R. *Teoriia matrits* [Theory of Matrices]. Moscow, Nauka, 1988, 549 pp. (In Russian)
12. Volterra V. *Theory of Functionals and of Integral and Integro-Differential Equations*. New York, Dover Publ., 1959, 226 pp.
13. Erdélyi A., Magnus W., Oberhettinger F., Tricomi F. G. *Higher transcendental functions*, vol. I, ed. H. Bateman. New York – Toronto – London, McGraw-Hill Book Co, 1953, 302 pp.

Подписной индекс 18108

ISSN 1991-8615 (print)



9 771991 861246



04

Цена свободная