

ИТЕРАЦИОННЫЙ АЛГОРИТМ ОЦЕНКИ СМЕЩЕНИЙ, УГЛА ПОВОРОТА И МАСШТАБА ДЛЯ СОВМЕЩЕНИЯ КОНТУРОВ

Диязитдинов Р.Р.

Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики, Самара, РФ

E-mail: rinat.diyazitdinov@gmail.com

В статье представлен итерационный алгоритм для совмещения контуров. Совмещаемые контуры связаны между собой преобразованием, включающим смещение, угол поворота и масштаб. Точки обрабатываемых контуров не имеют однозначного соответствия. Для оценки параметров совмещения была разработана процедура. Она включает оценку смещений в декартовой системе координат, поворот и масштаб в логарифмически-полярной системе координат. Низкая погрешность оценки параметров обеспечивается итерационной процедурой. Оценка смещений используется для уточнения поворота и масштаба и наоборот. Для оценки погрешности параметров совмещения в зависимости от мощности шума проведено численное моделирование. Погрешность оценки параметров разработанного алгоритма сопоставима с погрешностями алгоритма полного перебора, но скорость обработки выше. Алгоритм может быть использован в измерительных системах, ориентированных на работу в режиме реального времени.

Ключевые слова: совмещение, контур, итерационный, смещение, поворот, масштаб, численное моделирование

Введение

Совмещение контуров, у которых определено соответствие между точками, является достаточно известной задачей, которая очень часто решается методом наименьших квадратов.

Преобразование, связывающее два контура, содержит шесть неизвестных параметров. И для оценки этих параметров необходимы три и более точки.

В общем случае преобразование координат точек описывается выражением (1):

$$\begin{pmatrix} u_i \\ w_i \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B & C \\ D & E & F \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где (x_i, y_i) , (u_i, w_i) , $i = 1 \dots N$ – это совмещаемые контуры с количеством точек, равные N ; A, B, C, D, E, F – параметры совмещения.

Алгоритм оценки параметров совмещения по методу наименьших квадратов определяется выражениями (2) и (3):

$$G = \sum_{i=1}^N (Ax_i + By_i + C - u_i)^2 + \quad (2)$$

$$+ (Dx_i + Ey_i + F - w_i)^2 \rightarrow \min,$$

$$\frac{\partial G}{\partial A} = 0, \quad \frac{\partial G}{\partial B} = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial G}{\partial F} = 0, \quad (3)$$

Раскрывая выражения под знаком квадрата в формуле (2) и вычисляя частные производные в формуле (3), определяем систему линейных уравнений (4), которая может быть решена любым известным способом (методом Крамера, матричным способом и т. д.):

$$\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ex & Zxy & Sx & 0 & 0 & 0 \\ Zxy & Ey & Sy & 0 & 0 & 0 \\ Sx & Sy & N & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Ex & Zxy & Sx \\ 0 & 0 & 0 & Zxy & Ey & Sy \\ 0 & 0 & 0 & Sx & Sy & N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Zux \\ Zuy \\ Su \\ Zwx \\ Zwy \\ Sw \end{pmatrix}, \quad (4)$$

где

$$Ey = \sum_{i=1}^N y_i^2, \quad Sx = \sum_{i=1}^N x_i, \quad Sy = \sum_{i=1}^N y_i,$$

$$Zxy = \sum_{i=1}^N x_i y_i, \quad Zux = \sum_{i=1}^N u_i x_i, \quad Zwx = \sum_{i=1}^N w_i x_i,$$

$$Zuy = \sum_{i=1}^N u_i y_i, \quad Zwy = \sum_{i=1}^N w_i y_i,$$

$$Su = \sum_{i=1}^N u_i, \quad Sw = \sum_{i=1}^N w_i.$$

Однако в ряде случаев на данную задачу накладываются ограничения, что совмещаемые контуры отличаются:

- смещением,
- углом поворота,
- масштабом.

В этом случае использование формул (1)–(4) приводит к появлению неоднозначности в интерпретации параметров.

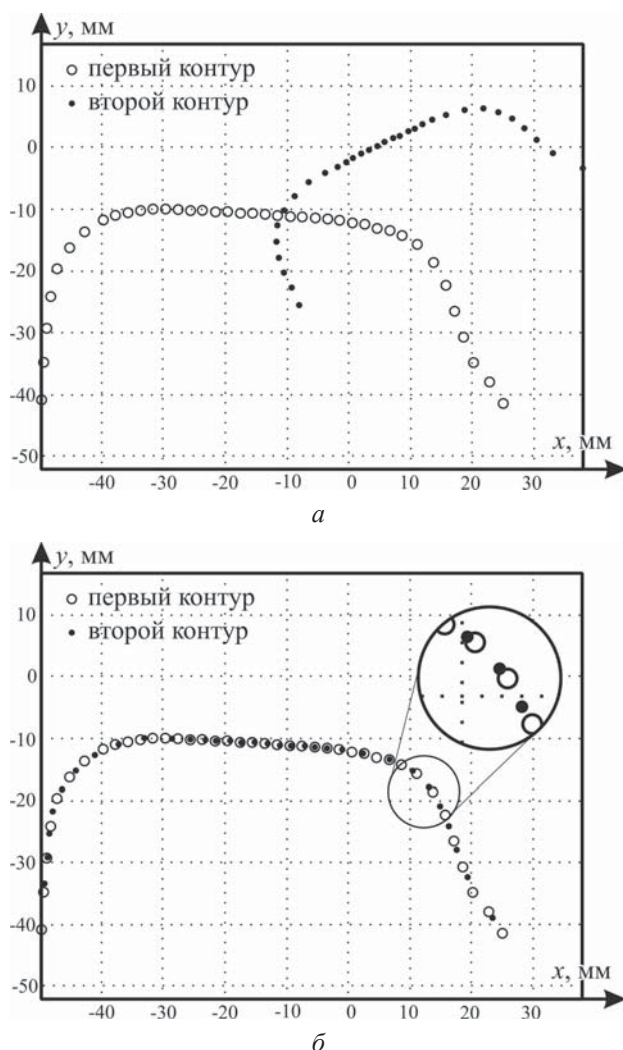


Рисунок 1. Контуры головок рельсов: исходные данные (а), совмещение (б)

Ниже представлены формулы, которые показывают неоднозначность интерпретации.

Пусть матрица преобразования описывается выражениями (5) и (6):

$$V = M_1 M_2 M_3, \quad (5)$$

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & h \\ 0 & 1 & p \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$M_3 = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (6)$$

В этом случае контуры (x_i, y_i) , (u_i, w_i) будут связаны выражением (7):

$$\begin{pmatrix} u_i \\ w_i \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \cos(\varphi) & -\alpha \sin(\varphi) & h \\ \alpha \sin(\varphi) & \alpha \cos(\varphi) & p \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (7)$$

где h , p – смещения, φ – угол, α – масштаб.

Сравнивая между собой выражения (1) и (7), можно написать, что $A = \alpha \cos(\varphi)$, $A = -\alpha \sin(\varphi)$, $C = h$ и т. д.

Однозначная интерпретация возможна, если $A = E = \alpha \cos(\varphi)$, $D = -B = \alpha \sin(\varphi)$.

В этом случае выражение (1) запишется в виде выражения (8):

$$\begin{pmatrix} u_i \\ w_i \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & -B & C \\ B & A & F \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (8)$$

А система линейных уравнений (4) запишется в виде выражения (9):

$$\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ExEy & 0 & Sx & Sy \\ 0 & ExEy & mSx & Sx \\ Sx & mSy & 1 & 0 \\ Sy & Sx & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b1 \\ b2 \\ b3 \\ b4 \end{pmatrix}, \quad (9)$$

где

$$ExEy = \sum_{i=1}^N (x_i^2 + y_i^2), \quad Sx = \sum_{i=1}^N x_i, \quad Sy = \sum_{i=1}^N y_i,$$

$$mSy = -Sy, \quad b1 = \sum_{i=1}^N (u_i x_i + w_i y_i),$$

$$b2 = \sum_{i=1}^N (-u_i y_i + w_i x_i), \quad b3 = \sum_{i=1}^N u_i, \quad b4 = \sum_{i=1}^N w_i.$$

А параметры h, p, φ, α будут определяться по формуле (10):

$$h = C, \quad p = F, \quad \alpha = \sqrt{A^2 + B^2},$$

$$\varphi = \arcsin\left(\frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right). \quad (10)$$

При рассмотрении контуров, которые имеют одну и ту же форму, но не имеют однозначного соответствия между точками и отличаются смещением, углом поворота и масштабом, использовать формулы (8)–(10) нельзя.

На рисунке 1 приведены пример конкурсов – головок рельсов, которые измеряются триангуляционным оптическим датчиком.

На рисунке 1, а показаны исходные данные.

На рисунке 1, б содержится результат совмещения контуров. Из рисунка 1, б видно, что точки не совпадают друг с другом. В таблице 1 и 2 показаны координаты точек контуров, представленных на рисунке 1, а. Эти данные будут использоваться для проведения численного моделирования для оценки погрешности параметров совмещения. Параметры преобразования для перевода контура (x_i, y_i) , $i=1..N$ в (u_j, w_j) , $j=1..K$ следующие: $h=10$ мм, $p=10$ мм, $\varphi=30^\circ$, $\alpha=0,7$.

Таблица 1. Координаты первого контура (x_i, y_i)

№	координата, мм	№	координата, мм
1	(24,860; -41,530)	21	(-15,540; -10,715)
2	(22,685; -37,945)	22	(-17,560; -10,540)
3	(20,195; -34,755)	23	(-19,580; -10,450)
4	(18,465; -30,745)	24	(-21,600; -10,330)
5	(17,025; -26,465)	25	(-23,620; -10,255)
6	(15,600; -22,230)	26	(-25,640; -10,125)
7	(13,600; -18,650)	27	(-27,660; -10,040)
8	(11,025; -15,695)	28	(-29,680; -10,010)
9	(8,700; -14,290)	29	(-31,700; -10,035)
10	(6,680; -13,495)	30	(-33,720; -10,185)
11	(4,660; -12,945)	31	(-35,740; -10,575)
12	(2,640; -12,540)	32	(-37,760; -11,110)
13	(0,620; -12,150)	33	(-39,780; -11,915)
14	(-1,400; -11,870)	34	(-42,650; -13,615)
15	(-3,420; -11,605)	35	(-45,155; -16,330)
16	(-5,440; -11,455)	36	(-47,155; -19,680)
17	(-7,460; -11,265)	37	(-48,235; -24,200)
18	(-9,480; -11,155)	38	(-48,795; -29,445)
19	(-11,500; -11,015)	39	(-49,340; -34,815)
20	(-13,520; -10,765)	40	(-49,560; -40,705)

Таблица 2. Координаты первого контура (u_j, w_j)

№	координата, мм	№	координата, мм
1	(37,808; -3,460)	17	(4,587; 0,249)
2	(32,980; -0,883)	18	(3,221; -0,422)
3	(30,437; 1,231)	19	(2,076; -0,997)
4	(28,373; 3,061)	20	(0,553; -1,801)
5	(26,325; 4,587)	21	(-0,515; -2,348)
6	(24,106; 5,726)	22	(-1,939; -3,076)
7	(21,665; 6,374)	23	(-3,915; -4,116)
8	(18,683; 6,137)	24	(-6,423; -5,651)
9	(15,748; 5,249)	25	(-8,769; -7,705)
10	(13,546; 4,425)	26	(-10,547; -10,141)
11	(11,910; 3,737)	27	(-11,479; -12,722)
12	(10,641; 3,127)	28	(-11,725; -15,339)
13	(9,687; 2,711)	29	(-11,333; -17,866)
14	(8,224; 1,964)	30	(-10,491; -20,305)
15	(7,144; 1,465)	31	(-9,370; -22,748)
16	(5,805; 0,878)	32	(-8,185; -25,488)

Существующие работы

В работе [1] предлагается метод, состоящий из двух этапов. На первом этапе проводятся грубая оценка смещения путем вычисления центра масс контуров (медианы вектора, содержащего координаты точек контуров) и оценка угла поворота, вычисленная по прямой линии, которая проходит через центр масс и наиболее удаленную от него точку контура. На втором этапе осуществляется точная оценка параметров путем оптимизации (вычисление дополнительных точек на контуре для совмещения, выбор такого преобразования,

при котором минимизируется евклидово расстояние между контурами). Алгоритм предназначен для совмещения контуров на изображениях, при этом не учитываются масштабные искажения.

В работе [2] предлагается алгоритм совмещения на основании выделения характерных точек контура (пересечения прямых линий), сопоставления их друг с другом и оценки параметров по двум наборам данных. Ограничение алгоритма заключается в наличии таких характерных точек на контуре. Если их нельзя выделить (на рисунке 1 представлен именно такой контур), то и нельзя вычислить параметры совмещения.

В работах [3; 4] предложено совмещать контуры путем предварительного разделения точек одного контура на подмножество точек. Этим подмножествам точек в соответствие ставятся линии, которые описываются аналитически. Эти линии описывают второй контур. Параметры совмещения определяются путем совмещения подмножества точек и этих линий. Этот алгоритм также нельзя применить для рассматриваемой в статье задачи.

В работе [5] предлагается использовать специальное кодирование контуров на изображении в виде вектора комплексных чисел. Параметры совмещения вычисляются путем нахождения максимума скалярного произведения. Однако этот способ имеет ряд ограничений: контуры должны быть одного размера (нет масштабных искажений), замкнутыми, количество точек в контурах должно совпадать. По этой причине этот подход не подходит для решения рассматриваемой задачи.

В работах [6–8] рассматривается задача совмещения контуров, представляющих собой эллипсы. Однако его нельзя модифицировать на случай произвольных контуров.

В работах [9–11] предложен способ совмещения, который не касается напрямую контуров, а используется для совмещения изображений. Однако в нем закладывается идея раздельной оценки двух групп параметров: смещений в декартовой системе, поворота и масштаба в логарифмически полярной системе координат. Зная приближенное значение одной группы параметров, можно оценить параметры второй группы. Если этот процесс можно повторить несколько раз, то погрешность оценки резко уменьшается с каждой новой итерацией.

Этот итерационный подход можно распространить на обработку контуров.

В статье представлено исследование по разработке итерационного алгоритма совмещения контуров.

Оценка угла поворота и масштаба

Угол поворота и масштаб при совмещении контуров могут быть оценены в логарифмически полярной системе координат.

Рассмотрим следующий пример. Пусть точка (x, y) первого контура связана с точкой (u, w) первого контура. Связаны они между собой формулами (11) и (12):

$$u = \alpha \cos(\varphi)x - \alpha \sin(\varphi)y + h, \quad (11)$$

$$w = \alpha \sin(\varphi)x - \alpha \cos(\varphi)y + p. \quad (12)$$

Пусть задана точка (x_0, y_0) , относительно которой произведем переход из декартовой системы координат точки (x, y) в логарифмически полярную систему согласно выражениям (13)–(15):

$$\rho_x = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \quad (13)$$

$$r_x = \log_2(\rho_x), \quad (14)$$

$$\varphi_x = \operatorname{atan} 2(x - x_0, y - y_0), \quad (15)$$

где (φ_x, r_x) – координаты точки (x, y) в логарифмически полярной системе координат.

Примечание: $\operatorname{atan} 2$ – это функция, вычисляющая арктангенс отношения $(y - y_0) / (x - x_0)$, выраженного в радианах и с областью значений $(-\pi; \pi)$, в отличие от арктангенса, у которого область значений $(-\pi / 2; \pi / 2)$.

Координаты (u_0, w_0) определяются согласно формулам (11) и (12), но вместо (x, y) в выражениях будет стоять (x_0, y_0) .

Рассмотрим выражение:

$$\begin{aligned} u - u_0 &= \alpha \cos(\varphi)x - \alpha \sin(\varphi)y + h - \\ &- (\alpha \cos(\varphi)x_0 - \alpha \sin(\varphi)y_0 + h) = \\ &= \alpha(\cos(\varphi)(x - x_0) - \sin(\varphi)(y - y_0)). \end{aligned}$$

Тогда:

$$\begin{aligned} (u - u_0)^2 &= \alpha^2(\cos^2(\varphi)(x - x_0)^2 + \\ &+ \sin^2(\varphi)(y - y_0)^2 - \\ &- 2\cos(\varphi)(x - x_0)\sin(\varphi)(y - y_0)). \end{aligned}$$

Аналогично:

$$\begin{aligned} (w - w_0)^2 &= \alpha^2(\cos^2(\varphi)(x - x_0)^2 + \\ &+ \sin^2(\varphi)(y - y_0)^2 - \\ &- 2\cos(\varphi)(x - x_0)\sin(\varphi)(y - y_0)). \end{aligned}$$

Тогда:

$$\begin{aligned} (u - u_0)^2 + (w - w_0)^2 &= \\ &= \alpha^2((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2). \end{aligned}$$

По аналогии с выражениями (13) и (14) можно записать выражения (16) и (17):

$$\begin{aligned} \rho_u &= \sqrt{(u - u_0)^2 + (w - w_0)^2} = \\ &= \sqrt{\alpha^2((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2)} = \\ &= |\alpha| \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = |\alpha| \rho_x = \alpha \rho_x. \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} r_u &= \log_2(\rho_u) = \log_2(\alpha \rho_x) = \\ &= \log_2(\alpha) + \log_2(\rho_x) = \log_2(\alpha) + r_x, \\ r_u &= \log_2(\alpha) + r_x. \end{aligned} \quad (17)$$

Рассмотрим выражение:

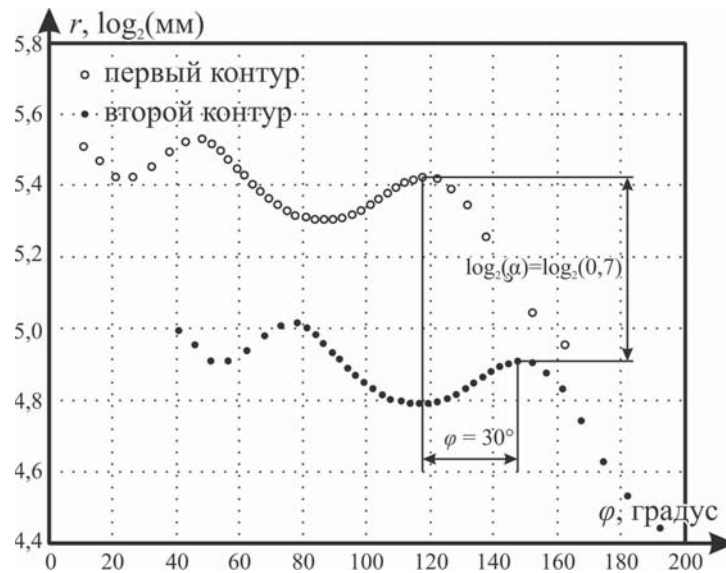


Рисунок 2. Оценка угла поворота и масштаба в логарифмически полярной системе

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(\varphi_u) &= \frac{w - w_0}{u - u_0} = \\ &= \frac{\alpha(\sin(\varphi)(x - x_0) + \cos(\varphi)(y - y_0))}{\alpha(\cos(\varphi)(x - x_0) - \sin(\varphi)(y - y_0))}. \end{aligned}$$

Умножим делитель и знаменатель дроби на выражение $\frac{1}{\cos(\varphi)(x - x_0)}$.

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(\varphi_u) &= \frac{\alpha \left(\frac{\sin(\varphi)(x - x_0)}{\cos(\varphi)(x - x_0)} + \frac{\cos(\varphi)(y - y_0)}{\cos(\varphi)(x - x_0)} \right)}{\alpha \left(\frac{\cos(\varphi)(x - x_0)}{\cos(\varphi)(x - x_0)} - \frac{\sin(\varphi)(y - y_0)}{\cos(\varphi)(x - x_0)} \right)} = \\ &= \frac{\operatorname{tg}(\varphi) + \frac{(y - y_0)}{(x - x_0)}}{1 - \operatorname{tg}(\varphi) \frac{(y - y_0)}{(x - x_0)}} = \frac{\operatorname{tg}(\varphi) + \operatorname{tg}(\varphi_x)}{1 - \operatorname{tg}(\varphi) \operatorname{tg}(\varphi_x)} = \\ &= \operatorname{tg}(\varphi_x + \varphi), \\ \operatorname{tg}(\varphi_u) &= \operatorname{tg}(\varphi_x + \varphi). \end{aligned}$$

Таким образом, можем записать выражение (18):

$$\varphi_u = \varphi_x + \varphi. \quad (18)$$

где (φ_u, r_u) – координаты точки (u, w) в логарифмически полярной системе координат.

Сравнивая между собой выражения (14) и (17), а также (15) и (18), можно сделать вывод, что координаты (φ_u, r_u) связаны с координатами (φ_x, r_x) через аддитивные составляющие $\log_2(\alpha)$ и φ .

Таким образом, совмещая контуры в логарифмически полярной системе координат, производим оценку угла поворота φ и масштаба α .

В качестве примера рассмотрим контур (x_i, y_i) , $i = 1..N$ (см. таблицу 1). Преобразуем его в контур (u_i, w_i) , $i = 1..N$ согласно формулам (11) и (12) с параметрами $h = 10$ мм, $p = 10$ мм, $\varphi = 30^\circ$, $\alpha = 0,7$,

Произведем переход контура (x_i, y_i) из декартовой системы в логарифмически полярную систему относительно точки $(x_0, y_0) = (-20; -50)$ (примеч.: координаты точки были выбраны произвольно).

Аналогичную операцию проведем для контура (u_i, w_i) относительно точки $(u_0, w_0) = (15,376; -25,311)$ (примеч.: координаты точки были рассчитаны по формулам (11) и (12), но вместо (x, y) в выражениях стояли (x_0, y_0)).

На рисунке 2 показаны контуры (x_i, y_i) и (u_i, w_i) в логарифмически полярной системе и параметры φ и α .

Принцип совмещения контуров

Принцип совмещения контуров (x_i, y_i) , $i = 1..N$ и (u_j, w_j) , $j = 1..K$ заключается в предварительном выборе точек (x_0, y_0) и (u_0, w_0) , относительно которых производится переход из декартовой системы с логарифмически полярную систему (см. рисунок 3, а).

Фактически точки (x_0, y_0) и (u_0, w_0) определяют смещения h и p . Чем точнее будут рассчитаны эти точки, тем более похожи будут графики контуров в логарифмически полярной системе, подобно тем, что представлены на рисунке 2.

Используя графики контуров, оцениваются параметры φ и α (см. рисунок 3, б). С использованием параметров φ и α графики совмещаются, поле чего передискретизируются на один и тот же шаг дискретизации (см. рисунок 3, в).

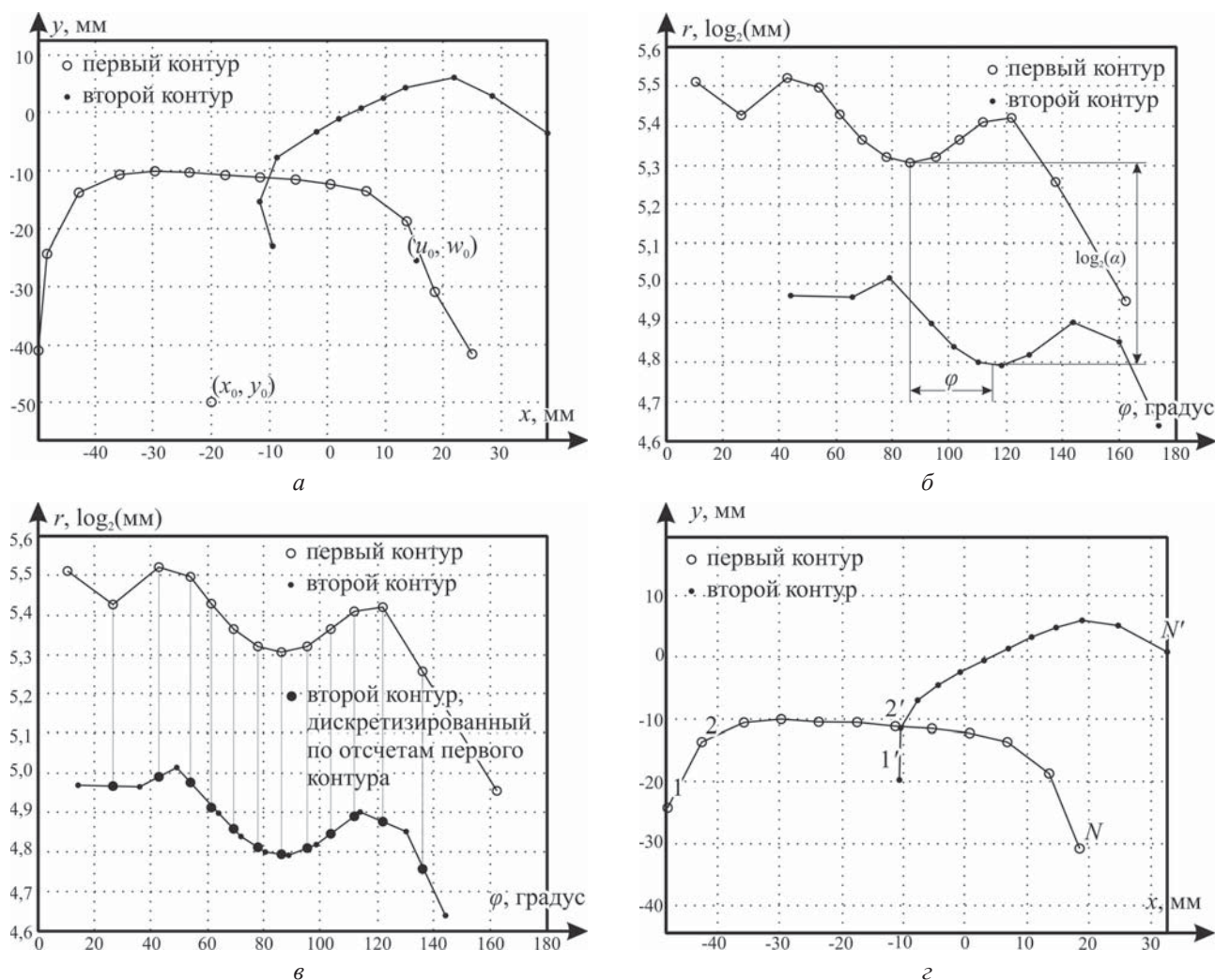


Рисунок 3. Этапы совмещения

Обратный переход из логарифмически полярной системы в декартовую систему образует два контура, у которых точки имеют однозначное соответствие: точка 1 первого контура соответствует точке 1' второго контура, точка 2 – точке 2' и т. д. (см. рисунок 3, г).

Оценить параметры по двум последовательностям точек с однозначным соответствием позволяют формулы (9) и (10).

Описанную процедуру оценки параметров можно повторить несколько раз. При этом координаты точки (x_0, y_0) , выбранные для первого приближения, остаются неизменными, а (u_0, w_0) могут быть приравнены к (x_0, y_0) на второй и последующих итерациях.

С каждой новой итерацией погрешность оценки будет становиться меньше.

Предварительный выбор точек

Координаты точек (x_0, y_0) и (u_0, w_0) для первой итерации совмещения будут определяться как средние значения от координат всех точек контура согласно выражению (19):

$$x_0 = \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N}, \quad y_0 = \frac{\sum_{i=1}^N y_i}{N}, \quad (19)$$

$$u_0 = \frac{\sum_{j=1}^K u_j}{K}, \quad w_0 = \frac{\sum_{j=1}^K w_j}{K}.$$

При этом полагается, что выражения (11) и (12) будут выполняться приближенно для полученных точек.

Алгоритм совмещения

Исходные данные:

(x_i, y_i) , $i = 1..N$ – первый контур,

(u_j, w_j) , $j = 1..K$ – второй контур.

Выходные данные:

$\hat{h}, \hat{p}$ – смещения вдоль координатных осей;

$\hat{\phi}, \hat{\alpha}$ – угол поворота и масштаб.

Алгоритм состоит из следующих шагов.

1. Загрузка контуров (x_i, y_i) и (u_j, w_j) .

2. Вычисление координат (x_0, y_0) и (u_0, w_0) по формуле (19).

3. Выбор количества итераций L (примеч.: в работе $L = 9$).

4. Инициализация матрицы преобразования в соответствии с количеством итераций:

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\dots, \quad M_L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. Цикл по количеству итераций, $k = 1$.

5.1. Определение промежуточной матрицы преобразования M_{res} :

если $k = 1$, то $M_{res} = M_1$,

если $k = 2$, то $M_{res} = M_2 M_1$,

...

если $k = L$, то $M_{res} = M_L \dots M_2 M_1$.

5.2. Вычисление положения контура (u'_j, w'_j) в соответствии с матрицей преобразования M_{res} :

$$u'_j = u_j M_{res}(1,1) + w_j M_{res}(1,2) + M_{res}(1,3), \quad (20)$$

$$w'_j = u_j M_{res}(2,1) + w_j M_{res}(2,2) + M_{res}(2,3). \quad (21)$$

5.3. Вычисление матрицы M_k по данным (x_i, y_i) , (x_0, y_0) , (u'_j, w'_j) , (u_0, w_0) согласно процедуре оценки параметров, описанной ниже.

5.4. Приравнивание точки (u_0, w_0) к точке (x_0, y_0) (примеч.: если первоначальное приближение по п. 5.3 было выбрано верно, то в дальнейшем нет необходимости делать оценки этой координаты, так как после первой итерации будут вычислены достаточно точные значения параметров преобразования и на последующих итерациях можно считать, что точка $(u_0, w_0) = (x_0, y_0)$).

5.5. Проверка на выход из цикла: $k = k + 1$, если $k \geq L$, то выход из цикла, в противном случае переход к п. 5.1.

6. Оценка параметров $\hat{h}, \hat{p}, \hat{\phi}, \hat{\alpha}$ по матрице M_{res} :

$$\hat{h} = M_{res}(1,3), \quad (22)$$

$$\hat{p} = M_{res}(2,3),$$

$$\hat{\alpha} = \sqrt{M_{res}^2(1,1) + M_{res}^2(1,2)}, \quad (23)$$

$$\hat{\phi} = \arcsin \left(\frac{M_{res}(2,1)}{\sqrt{M_{res}^2(1,1) + M_{res}^2(1,2)}} \right) \frac{180}{\pi}. \quad (24)$$

7. Выход из программы.

Процедура оценки параметров п. 5.3 описана ниже.

Входные данные: (x_i, y_i) , $i = 1..N$ – первый контур, (u'_j, w'_j) , $j = 1..K$ – второй контур, (x_0, y_0) , (u_0, w_0) – точки для преобразования из декартовой в логарифмически полярную систему.

Выходное значение: M – матрица преобразования размером 3×3 .

1. Преобразование контура (x_i, y_i) в логарифмически полярную систему относительно точки (x_0, y_0) :

$$rx_i = \log_2 \left(\sqrt{(x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2} \right), \quad (25)$$

$$\phi x_i = \text{atan} 2(x_i - x_0, y_i - y_0). \quad (26)$$

2. Преобразование контура (u'_j, w'_j) в логарифмически полярную систему относительно точки (u_0, w_0) :

$$ru_j = \log_2 \left(\sqrt{(u'_j - u_0)^2 + (w'_j - w_0)^2} \right), \quad (27)$$

$$\phi u_j = \text{atan} 2(u'_j - u_0, w'_j - w_0). \quad (28)$$

3. Дискретизация сигнала $(\phi x_i, rx_i)$ на равномерную сетку аргумента с шагом $step$: $\phi x_n = \phi x_1$, $\phi x_1 + step$, ..., ϕx_N . Формирование вектора $\mathbf{rxn}$.

Примеч.: для обозначения векторов использовался полужирный шрифт, чтобы не вводить дополнительных индексов и не затруднять восприятие, ранее при обозначении векторов использовались индексы, как, например, « rx_i », « ϕx_i », чтобы показать связь с исходными данными « x_i », « y_i ».

4. Дискретизация сигнала $(\phi u_j, ru_j)$ на равномерную сетку аргумента с шагом $step$: $\phi u_n = \phi u_1$, $\phi u_1 + step$, ..., ϕu_K . Формирование вектора $\mathbf{run}$.

5. Вычисление первоначального смещения вдоль оси «угол полярной системы координат»:

$$d0 = \phi k_1 - \phi u_1. \quad (29)$$

6. Совмещение векторов $\mathbf{rxn}$ и $\mathbf{run}$ с использованием корреляционно-экстремального алгоритма (по максимуму коэффициента корреляции) [12].

Результатом будет являться значение смещения d (в отсчетах) между векторами $\mathbf{rxn}$ и $\mathbf{run}$.

7. Компенсация смещения:

$$\mathbf{rum} = \mathbf{run}, \quad (30)$$

$$\phi u_m = \phi u_n + d0 + d \cdot step, \quad (31)$$

8. Дискретизация сигнала $(\phi u_m, rum)$ на сетку аргумента ϕx_i . Формирование сигнала $(\phi u_{ki}, ru_{ki})$, $\phi u_{ki} = \phi x_i$.

9. Преобразование в декартову систему координат:

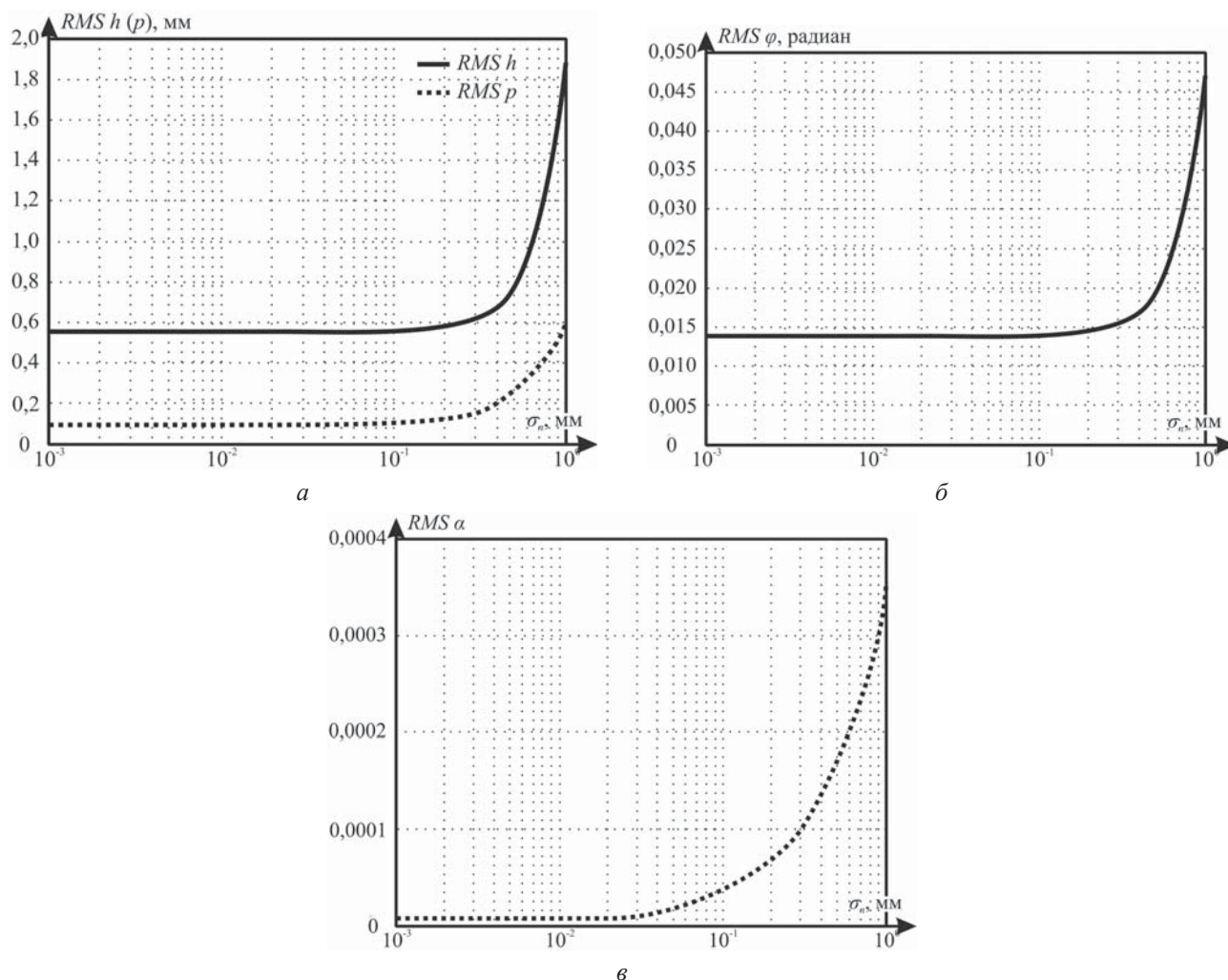


Рисунок 4. Погрешность оценки параметров в зависимости от СКО помехи

$$u_i'' = 2^{ruk_i} \cos(\varphi uk_i - (d0 + d \cdot step)) + u_0, \quad (32)$$

$$u_i'' = 2^{ruk_i} \sin(\varphi uk_i - (d0 + d \cdot step)) + w_0. \quad (33)$$

10. Оценка матрицы преобразования M согласно формулам (7)–(9) по точкам контуров (x_i, y_i) , (u_i'', w_i'') .

Численное моделирование

Для определения погрешности оценки параметров совмещения было проведено численное моделирование, которое заключалось в добавлении помехи с гауссовым распределением к абсциссе и ординате каждой точки контуров.

При выбранном значении мощности (дисперсии помехи, σ_n^2) проводилась серия опытов, по которым оценивалась погрешность оценки параметра.

В качестве погрешности выступало значение среднеквадратичной величины (RMS):

$$RMS = \sqrt{\sum_{i=1}^n (a_i - a)^2 / n}, \quad (4)$$

где a – действительное значение параметра; a_i – измеренное значение параметра в i -м опыте; n – количество опытов.

По результатам численного моделирования был построен график зависимости RMS от среднеквадратичного отклонения (СКО) помехи (σ_n).

Результаты численного моделирования приведены на рисунке 4.

Разработанный алгоритм сравнивался с алгоритмом полного перебора (проверка гипотез относительно измеряемых параметров с выбором той гипотезы, которая определяет минимальное евклидово расстояние между контурами). Погрешности обоих алгоритмов совпадают. Но у разработанного алгоритма скорость вычисления приблизительно в 140 раз выше.

Как видно из графиков (см. рисунок 4), значение погрешности практически не меняется на интервале $\sigma_n [10^{-2}; 10^{-1}]$ (мм). Это связано с тем, что линейная интерполяция при дискретизации контура приводит к появлению погрешности координат точек контура, которая по мощности выше, чем мощность аддитивной помехи. И только при

превышении СКО помехи более 10^{-1} мм становится заметно ее влияние на погрешность оценки параметров совмещения.

Таким образом, разработанный алгоритм характеризуется низкой погрешностью оценки параметров, совпадающей с погрешностями по алгоритму полного перебора, и высоким быстродействием.

Заключение

Разработанный алгоритм совмещения апробирован на данных, полученных в измерительных системах вагонов-путеизмерителей.

Кроме железнодорожной сферы разработанный алгоритм может быть применен для прецизионного совмещения медицинских данных (гистологические измерения, трехмерная реконструкция), для данных, полученных при аэросъемке (совмещение подстилающей поверхности), а также в других промышленных сферах.

Погрешность оценки параметров у разработанного алгоритма сравнима с погрешностью по алгоритму полного перебора, при этом скорость обработки выше более чем на два порядка.

Это преимущество позволяет применить разработанный алгоритм в измерительных системах, ориентированных на работу в режиме реального времени.

Литература

1. Сунгатуллина Д.И., Крылов А.В. Быстрый алгоритм совмещения контуров изображений, связанных изотропным аффинным преобразованием // *Графикон*. 2014. С. 92–95.
2. Ефимов А.И., Новиков А.И. Алгоритм поэтапного уточнения проективного преобразования для совмещения изображений // *Компьютерная оптика*. 2016. Т. 40, № 2. С. 258–265. DOI: <https://doi.org/10.18287/2412-6179-2016-40-2-258-265>
3. Васин Н.Н., Диязитдинов Р.Р. Обработка данных оптических триангуляционных сканеров для измерения профилей рельсов // *Компьютерная оптика*. 2018. Т. 42, № 6. С. 1054–1061. DOI: <https://doi.org/10.18287/2412-6179-2018-42-6-1054-1061>
4. Диязитдинов Р.Р. Восстановление видеосигнала измерительных системах с оптическими триангуляционными датчиками // *Инфокоммуникационные технологии*. 2019. Т. 17, № 3. С. 324–331. DOI: <https://doi.org/10.18469/ikt.2019.17.3.09>
5. Макаров М.А. Контурный анализ в решении задач описания и классификации объектов // *Современные проблемы науки и образования*. 2014. № 3. С. 38–38.
6. Ellis T., Abbood A., Brillault B. Ellipse detection and matching with uncertainty // *Image and Vision Computing*. 1992. Vol. 10. P. 271–276. DOI: [https://doi.org/10.1016/0262-8856\(92\)90041-Z](https://doi.org/10.1016/0262-8856(92)90041-Z)
7. Gander W., Golub G.H., Strebels R. Least-square fitting of circles and ellipses // *BIT Numerical Mathematics*. 1994. Vol. 34. P. 558–578. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01934268>
8. Bookstein F.L. Fitting conic sections to scattered data // *Computer Graphics and Image Processing*. 1979. Vol. 34. P. 558–578. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01934268>
9. Мясников Е.В. Определение параметров геометрических трансформаций для совмещения портретных изображений // *Компьютерная оптика*. 2007. Т. 31, № 3. С. 77–82.
10. Reddy B., Chatterji B. An FFT-based technique for translation, rotation, and scale-invariant image registration // *IEEE Transactions on Image Processing*. 1996. Vol. 5. P. 1266–1271. DOI: <https://doi.org/10.1109/83.506761>
11. Evangelidis G., Psarakis E. Parametric image alignment using enhanced correlation coefficient maximization // *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*. 2008. Vol. 30. P. 1858–1865. DOI: <https://doi.org/10.1109/TPAMI.2008.113>
12. Васин Н.Н., Куринский В.Ю. Обработка видеосигналов для измерения скорости движения железнодорожных вагонов на сортировочной горке // *Компьютерная оптика*. 2005. № 27. С. 185–188.

Получено 19.05.2021

Диязитдинов Ринат Радмирович, к.т.н., доцент кафедры сетей и систем связи Поволжского государственного университета телекоммуникаций и информатики. 443010, Российская Федерация, г. Самара, ул. Льва Толстого, 23. Тел. +7 927 708-47-39. E-mail: rinat.diyazitdinov@gmail.com

ITERATIVE ALGORITHM FOR OFFSETS, ROTATION AND SCALE ESTIMATION FOR CONTOUR SUPERPOSITION

Diyazitdinov R.R.

Povolzhskiy State University of Telecommunications and Informatics, Samara, Russian Federation
E-mail: rinat.diyazitdinov@gmail.com

The article presents an iterative algorithm for contour superposition. The contours to be superposed are linked by a transformation that includes offsets, angle of rotation, and scale. The points of the contours to be machined do not have a one-to-one correspondence. We have developed the procedure to estimate superposition parameters. This procedure includes the offsets estimation in the Cartesian coordinate system, the rotate and scale estimation in the log-polar coordinate system. The low error in evaluation of parameters is provided by the iteration procedure. The offset rating is used for correction of the angle of rotation and scale, and vice versa. Numerical modeling was used to estimate the error of the superposition parameters depending on the noise power. The error of the developed algorithm is similar to the brute force algorithm but speed processing is faster. The algorithm can be used in real-time measuring systems.

Keywords: *superposition, contour, iterative, offset, rotation, scale, numerical simulation*

DOI: 10.18469/ikt.2021.19.3.03

Diyazitdinov Rinat Radmirovich, Povolzhskiy State University of Telecommunications and Informatics, 23, L. Tolstoy Street, Samara, 443010, Russian Federation; Associated Professor of Network and Telecommunication System Department, PhD in Technical Sciences. Tel. +7 927 708-47-39. E-mail: rinat.diyazitdinov@gmail.com

References

1. Sungatullina D.I., Krylov A.V. Fast alignment algorithm for contours of images associated with isotropic affine transform. *Grafikon*, 2014, pp. 92–95. (In Russ.)
2. Efimov A.I., Novikov A.I. Algorithm for step-by-step refinement of projective transformation for aligning images. *Komp'yuternaya optika*, 2016, vol. 40, no. 2, pp. 258–265. DOI: <https://doi.org/10.18287/2412-6179-2016-40-2-258-265> (In Russ.)
3. Vasin N.N., Diyazitdinov R.R. Data processing of optical triangulation scanners for measuring rail profiles. *Komp'yuternaya optika*, 2018, vol. 42, no. 6, pp. 1054–1061. DOI: <https://doi.org/10.18287/2412-6179-2018-42-6-1054-1061> (In Russ.)
4. Diyazitdinov R.R. Video signal recovery for measuring systems with optical triangulation sensors. *Infokommunikacionnye tehnologii*, 2019, vol. 17, no. 3, pp. 324–331. DOI: <https://doi.org/10.18469/ikt.2019.17.3.09> (In Russ.)
5. Makarov M.A. Contour analysis in solving problems of description and classification of objects. *Sovremennye problemy nauki i obrazovaniya*, 2014, no. 3, pp. 38–38. (In Russ.)
6. Ellis T., Abbood A., Brillault B. Ellipse detection and matching with uncertainty. *Image and Vision Computing*, 1992, vol. 10, pp. 271–276. DOI: [https://doi.org/10.1016/0262-8856\(92\)90041-Z](https://doi.org/10.1016/0262-8856(92)90041-Z)
7. Gander W., Golub G.H., Strebel R. Least-square fitting of circles and ellipses. *BIT Numerical Mathematics*, 1994, vol. 34, pp. 558–578. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01934268>
8. Bookstein F.L. Fitting conic sections to scattered data. *Computer Graphics and Image Processing*, 1979, vol. 34, pp. 558–578. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01934268>
9. Mjasnikov E.V. Determination of parameters of geometric transformations for blending portrait images. *Komp'yuternaya optika*, vol. 31, 2007, no. 3, pp. 77–82. (In Russ.)
10. Reddy B., Chatterji B. An FFT-based technique for translation, rotation, and scale-invariant image registration. *IEEE Transactions on Image Processing*, 1996, vol. 5, pp. 1266–1271. DOI: <https://doi.org/10.1109/83.506761>
11. Evangelidis G., Psarakis E. Parametric image alignment using enhanced correlation coefficient maximization. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2008, vol. 30, pp. 1858–1865. DOI: <https://doi.org/10.1109/TPAMI.2008.113>
12. Vasin N.N., Kurinskij V.Yu. Video signal processing for measuring the speed of railway cars on the marshalling hill. *Komp'yuternaya optika*, 2005, no. 27, pp. 185–188. (In Russ.)

Received 19.05.2021