

4. Haustov P.A. Algorithm for segmentation of handwritten text based on the construction of structural models. *Fundamental'nye issledovanija*, 2017, no. 4–1, pp. 88–93. URL: <http://fundamental-research.ru/ru/article/view?id=41440> (accessed: 16.04.2021). (In Russ.)
5. Haustov P.A. Algorithms for recognizing handwritten characters based on the construction of structural models. *Komp'yuternaja optika*, 2017, vol. 41, no. 1, pp. 67–78. DOI: <https://doi.org/10.18287/2412-6179-2017-41-1-67-78> (In Russ.)
6. Gonsales R., Vuds R. *Digital Image Processing*. 3rd ed., rev. and add. Moscow: Tehnosfera, 2012, 1104 p. (In Russ.)
7. Zalivin A.N., Zhilyakov E.G., Chernomorets A.A. On the efficiency of the method for estimating the values of the energy fractions of images based on frequency representations. *Informatsionnye sistemy i tehnologii*, 2009, no. 2/52, pp. 12–22. (In Russ.)
8. Zhilyakov E.G. et al. Image decomposition on the orthogonal basis of subband matrices eigenvectors. *Journal of Engineering and Applied Sciences*, 2017, vol. 12, no. 12, pp. 3194–3197.
9. Zhilyakov E.G. et al. On some properties of eigenvalues and vectors of subband matrices. *Nauchnye vedomosti Belgorodskogo gosudarstvennogo universiteta. Serija: Ekonomika. Informatika*, 2016, no. 16 (237), pp. 180–186. (In Russ.)
10. Zhilyakov E.G. Optimal sub-band methods of analysis and synthesis of signals of finite duration. *Avtomatika i telemekhanika*, 2015, no. 4, pp. 51–66. (In Russ.)
11. Zhilyakov E.G. Plotting trends in time series segments. *Avtomatika i telemekhanika*, 2017, no. 3, pp. 80–95. (In Russ.)
12. Gantmaher F.R. *Matrix Theory*. Moscow: Fizmatlit, 2004, 560 p. (In Russ.)
13. Akimov A.V., Sirota A.A. Models and algorithms for artificial data propagation for training face recognition algorithms using the Viola-Jones method. *Komp'yuternaja optika*, 2016, vol. 40, no. 6, DOI: <https://doi.org/10.18287/2412-6179-2016-40-6-911-918> (In Russ.)

Received 27.05.2021

УДК 621.3911:621.395

СРЕДНЕМАКСИМАЛЬНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ОЧЕРЕДЕЙ В СИСТЕМАХ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С ГРУППОВЫМИ ПУАССОНОВСКИМИ ПОТОКАМИ

Лихтциндер Б.Я.

Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики, Самара, РФ

E-mail: lixt@psuti.ru

В качестве модели телекоммуникационного трафика предлагается использовать групповой неординарный пуассоновский поток. Рассмотрены интервальные характеристики указанных потоков, и показана перспективность их применения. Вводится понятие среднemaxимальных значений очередей. Получены соотношения, устанавливающие зависимость среднemaxимальных значений очередей от загрузки и характеристик групповых пуассоновских потоков. Показано, что при малых загрузках среднemaxимальные значения очередей существенно превышают их средние значения. Показана перспективность применения полученных соотношений при анализе пакетного трафика телекоммуникационных сетей.

Ключевые слова: *системы массового обслуживания, групповые пуассоновские потоки, модели, очереди, формула Хинчина – Поллачека, пакетный трафик*

Введение

Одной из разновидностей ВМАР-потоков [1–3] является неординарный пуассоновский поток событий [4]. В таком потоке выполняются свойство стационарности и отсутствия последовательности, но не выполняется свойство ординарно-

сти. В работе [4] в качестве модели телекоммуникационного трафика предлагается использовать групповой неординарный пуассоновский поток. Рассмотрены характеристики средних значений очередей неординарных пуассоновских потоков, и показана перспективность их применения.

Максимальные значения очередей

Рассмотрим пуассоновский поток независимых событий с параметром λ и интервалами между соседними событиями ϑ_i . Каждое событие заключается в одновременном появлении в момент t_i «пачки» из n_i независимых случайно распределенных чисел заявок, как это показано в нижней части рисунка 1. Такой поток называют пуассоновским неординарным (групповым) потоком независимых событий. Выделим некоторый интервал времени τ . Примем, что τ – это интервал времени обработки одной заявки в СМО. Пачечный характер поступления заявок приводит к возникновению очередей (верхняя часть рисунка 1). Примем, что непосредственно перед началом i -го участка в СМО имелось s_{i-1} заявок и в начале этого участка в систему поступила пачка заявок размером n_{i-1} , т. е. в момент начала участка в системе имелось q_{i-1} заявок. Начиная с момента времени t_{i-1} число заявок в системе уменьшается со скоростью одна заявка за τ секунд, к концу i -го участка уменьшится на величину ϑ_i / τ и достигнет размера s_i .

$$s_i = s_{i-1} + n_i - \frac{\vartheta_i}{\tau}, \text{ если } s_{i-1} + n_i - \frac{\vartheta_i}{\tau} > 0,$$

$$s_i = 0, \text{ если } s_{i-1} + n_i - \frac{\vartheta_i}{\tau} \leq 0.$$

Случайная переменная ϑ_i распределена экспоненциально, а случайная переменная n_i – по закону Пуассона, и они не зависят друг от друга. Определим значение \bar{s}_i при условии выполнения первого неравенства

$$s_{i-1} + n_i - \frac{\vartheta_i}{\tau} \geq 0.$$

Введем следующее обозначение: $R = \bar{n}\lambda\tau$, где $\lambda = \frac{1}{\vartheta}$.

Возведем в квадрат обе части первого уравнения:

$$\begin{aligned} s_i^2 &= s_{i-1}^2 - 2s_i \left(\frac{\vartheta_i}{\tau} - n_i \right) + \left(\frac{\vartheta_i}{\tau} - n_i \right)^2 = \\ &= s_{i-1}^2 - 2s_i \frac{\vartheta_i}{\tau} + 2s_i n_i + \left(\frac{\vartheta_i}{\tau} \right)^2 - 2 \frac{\vartheta_i}{\tau} n_i + n_i^2. \end{aligned}$$

Поскольку в данном рассмотрении все случайные величины приняты взаимно независимыми, при усреднении получим

$$\begin{aligned} \overline{s_i^2} &= \overline{s_{i-1}^2} - 2\overline{s_{i-1}} \frac{\overline{\vartheta_i}}{\tau} + \\ &+ 2\overline{s_{i-1}} \overline{n_i} + \frac{\overline{\vartheta_i^2}}{\tau^2} - 2 \frac{\overline{\vartheta_i}}{\tau} \overline{n_i} + \overline{n_i^2}, \end{aligned}$$

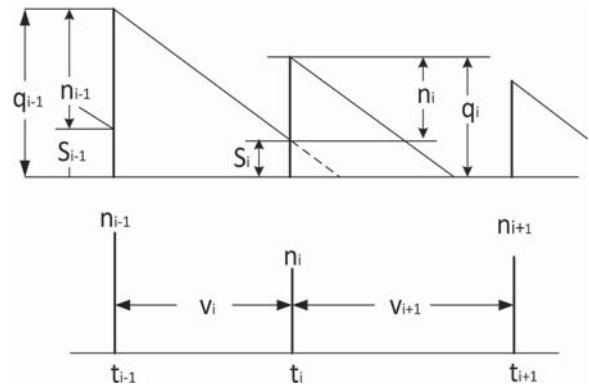


Рисунок 1. Изменение числа заявок в системе

$$\begin{aligned} 2\overline{s_{i-1}} \frac{\overline{\vartheta_i}}{\tau} - 2\overline{s_{i-1}} \overline{n_i} &= \frac{\overline{\vartheta_i^2}}{\tau^2} - 2 \frac{\overline{\vartheta_i}}{\tau} \overline{n_i} + \overline{n_i^2}, \\ 2\overline{s_{i-1}} \frac{\overline{\vartheta_i}}{\tau} (1-R) &= \left(\frac{\overline{\vartheta_i}}{\tau} \right)^2 - 2 \frac{\overline{\vartheta_i}}{\tau} \overline{n_i} + (\overline{n_i})^2 + D_n + D_\vartheta, \\ 2\overline{s_{i-1}} \frac{\overline{\vartheta_i}}{\tau} (1-R) &= \left(\frac{\overline{\vartheta_i}}{\tau} - \overline{n_i} \right)^2 + D_n + D_\vartheta, \\ \overline{s_{i-1}} \frac{\overline{\vartheta_i}}{\tau} (1-R) &= \left(\frac{\overline{\vartheta_i}}{\tau} \right)^2 (1-R)^2 + D_n + D_\vartheta. \end{aligned}$$

Откуда

$$\overline{s_{i-1}} = \bar{s} = \frac{(D_n + D_\vartheta)R}{2(1-R)\bar{n}} + \frac{(1-R)\bar{n}}{2R}.$$

Для экспоненциально распределенной случайной величины ϑ_i / τ дисперсия

$$D_\vartheta = \left(\frac{\overline{\vartheta_i}}{\tau} \right)^2 = \left(\frac{1}{\lambda\tau} \right)^2 = \left(\frac{\bar{n}}{R} \right)^2.$$

Подставляя указанные значения при выполнении первого условия: $s_{i-1} + n_i - \frac{\vartheta_i}{\tau} \geq 0$, получим:

$$\begin{aligned} \bar{s} &= \frac{D_n \frac{R}{\bar{n}} + \frac{\bar{n}}{R}}{2(1-R)} + \frac{(1-R)\bar{n}}{2R} = \\ &= \frac{\frac{D_n}{\bar{n}} R^2 + n}{2(1-R)R} + \frac{(1-R)\bar{n}}{2R}. \end{aligned}$$

Среднее значение максимумов чисел заявок в системе, полученное при первом условии, определится соотношением

$$\bar{q} = \bar{s} + \bar{n} = \frac{\frac{D_n}{\bar{n}} R^2 + n}{2(1-R)R} + \frac{(1-R)\bar{n}}{2R} + \bar{n}.$$

При выполнении второго условия:

$$s_{i-1} + n_i - \frac{\vartheta_i}{\tau} < 0,$$

где \bar{s}_i тождественно равно нулю. Можно показать, что вероятность выполнения первого условия равна коэффициенту загрузки системы R .

С учетом указанной вероятности

$$\begin{aligned}\bar{Q}_{\max} &= \bar{q}R = \frac{\frac{D_n}{n}R^2 + \bar{n}}{2(1-R)} + \frac{(1-R)\bar{n}}{2} + R\bar{n} = \\ &= \frac{\frac{D_n}{n}R^2 + \bar{n} + (1-R)^2\bar{n}}{2(1-R)} + R\bar{n} = \\ &= \frac{\frac{D_n}{n}R^2 + \bar{n} + \bar{n} - 2R\bar{n} + \bar{n}R^2}{2(1-R)} + R\bar{n} = \\ &= \frac{R^2(\frac{D_n}{n} + \bar{n}) + 2\bar{n}(1-R)}{2(1-R)} + R\bar{n} = \\ &= \frac{(\bar{n} + \frac{D_n}{n})R^2}{2(1-R)} + (1+R)\bar{n}.\end{aligned}$$

Окончательно получим

$$\bar{Q}_{\max} = \frac{\bar{n}R^2(1 + v_n^2)}{2(1-R)} + (1+R)\bar{n}, \quad (1)$$

где $v_n^2 = D_n / (\bar{n})^2$ – коэффициент вариации чисел заявок в пачках.

Частные случаи

Рассмотрим частные случаи.

1. Допустим, что число заявок в пачках постоянно $\bar{n} = n$. Дисперсия $D_n = 0$. Коэффициент вариации равен нулю. С учетом этого среднее значение максимумов чисел заявок в системе \bar{Q}_{\max} определяется соотношением

$$\bar{Q}_{\max} = \frac{nR^2}{2(1-R)} + (1+R)n. \quad (2)$$

В соответствии с формулой Хинчина – Поллачека первое слагаемое представляет умноженное на длину пачки среднее значение очереди пуассоновского потока при коэффициенте загрузки R и постоянном времени обслуживания.

2. Допустим, что значения чисел заявок в пачках взаимно независимы, а их вероятности распределены по закону Пуассона. В указанном случае $v_n^2 = 1/\bar{n}$ и справедливо соотношение

$$\bar{Q}_{\max} = \frac{(1+n)R^2}{2(1-R)} + (1+R)n.$$

3. Допустим, что значения чисел заявок в пачках взаимно независимы, а их вероятности распределены по экспоненциальному закону. В этом случае $D_n = (\bar{n})^2$ и $v_n^2 = 1$.

$$\bar{Q}_{\max} = \frac{\bar{n}R^2}{(1-R)} + (1+R)n.$$

4. Наконец, в случае обычного пуассоновского потока, $n = 1$, $v_n^2 = 0$,

$$\bar{Q}_{\max} = \frac{R^2}{2(1-R)} + R + 1,$$

и \bar{Q}_{\max} отличается от среднего значения числа заявок в системе на величину, равную одной заявке.

Заключение

Анализ соотношения (2) показывает, что при малых значениях коэффициента загрузки R СМО с групповыми пуассоновскими потоками средне-максимальные размеры очередей существенно превышают средние размеры, что весьма характерно для пачечного трафика.

Поэтому, для мало загруженных СМО следует ориентироваться именно на среднемаксимальные размеры очередей.

Для обычных пуассоновских потоков из соотношения (2) следует, что при малых значениях коэффициента загрузки среднемаксимальные размеры очередей хотя и не превышают 2 заявки, но также намного превосходят их средние значения. Например, при $R = 0,2$ значение $\bar{Q}_{\max} \approx 1,2$ заявки, а среднее значение очереди $\bar{q} = 0,0225$ заявки.

Однако при больших нагрузках средние размеры очередей практически сравниваются с их среднемаксимальными значениями.

Ранее нами было показано [4], что незначительное влияние корреляционных связей в групповом пуассоновском потоке делает его привлекательным в качестве модели телекоммуникационного трафика.

Полученные соотношения позволяют весьма просто оценить влияние максимальных размеров очередей на характеристики трафика мультисервисных сетей связи.

Литература

1. Вишневикий В.М., Дудин А.Н. Системы массового обслуживания с коррелированными входными потоками и их применение для моделирования телекоммуникационных сетей // Автоматика и телемеханика. 2017. № 8. С. 3–59.
2. Neuts M.F. Versatile Markovian point process // Journal of Applied Probability. 1979. Vol. 16, no. 4. P. 764–779. DOI: <https://doi.org/10.2307/3213143>

3. Дудин А.Н., Клименок В.И. Системы массового обслуживания с коррелированными потоками. Минск: БГУ, 2000. 175 с. трафика телекоммуникационных систем // Инфокоммуникационные технологии. 2020. Т. 18, № 3. С. 302–311.
4. Лихтциндер Б.Я. Интервальные характеристики групповых пуассоновских моделей

Получено 27.05.2021

Лихтциндер Борис Яковлевич, д.т.н., профессор кафедры сетей и систем связи Поволжского государственного университета телекоммуникаций и информатики. 443010, Российская Федерация, г. Самара, ул. Л. Толстого, 23. Тел. +7 846 333-47-69. E-mail: lixt@psuti.ru

THE AVERAGE MAXIMUM VALUES OF QUEUES IN MASS SERVICE SYSTEMS WITH GROUP POISSON FLOWS

Likhttsinder B. Ya.

*Povolzhskiy State University of Telecommunications and Informatics, Samara, Russian Federation
E-mail: lixt@psuti.ru*

As a model of telecommunication traffic, it is proposed to use a group non-ordinary Poisson flow. The interval characteristics of these flows are considered and the prospects of their application are shown. The concept of average maximum values of queues is introduced. Ratios establishing the dependence of the average maximum values of queues on the load and characteristics of group Poisson flows are obtained. It is shown that at low loads, the average maximum values of the queues significantly exceed their average values. The prospects of using the obtained ratios in the analysis of packet traffic of telecommunication networks are shown.

Keywords: *queuing systems, group Poisson flows, models, queues, Khinchin–Pollachek formula, packet traffic*

DOI: 10.18469/ikt.2021.19.3.08

Likhttsinder Boris Yakovlevich, Povolzhskiy State University of Telecommunications and Informatics, 23, L. Tolstoy Street, Samara, 443010, Russian Federation; Professor of Networks and Communication Systems Department, Doctor of Technical Sciences. Tel. +7 846 333-47-69. E-mail: lixt@psuti.ru

References

1. Vishnevskij V.M., Dudin A.N. Queuing systems with correlated input flows and their application for modeling telecommunication networks. *Avtomatika i telemekhanika*, 2017, no. 8, pp. 3–59. (In Russ.)
2. Neuts M.F. Versatile Markovian point process. *Journal of Applied Probability*, 1979, vol. 16, no. 4, pp. 764–779. DOI: <https://doi.org/10.2307/3213143>
3. Dudin A.N., Klimenok V.I. *Queuing Systems with Correlated Flows*. Minsk: BGU, 2000, 175 p. (In Russ.)
4. Likhttsinder B.Ya. Interval characteristics of Poisson group traffic models of telecommunication systems. *Infokommunikacionnye tehnologii*, 2020, vol. 18, no. 3, pp. 302–311. (In Russ.)

Received 27.05.2021