В результате уравнение (50) принимает вид:

$$\left\{\left(\frac{d}{dy}\left|\widetilde{E}_y^{(1)}\right|\right)+i\left|\widetilde{E}_y^{(1)}\right|\frac{d}{dy}\left[\arg\left(\widetilde{E}_y^{(1)}\right)\right]\right\}\exp\left[i\arg\left(\widetilde{E}_y^{(1)}\right)\right]-$$

$$-i\gamma\left|\widetilde{E}_z^{(1)}\right|\exp\left[i\arg\left(\widetilde{E}_z^{(1)}\right)\right]=\frac{1}{\varepsilon_a^{(1)}}\left|\widetilde{\rho}_n^{(1)}\right|\exp\left[i\arg\left(\widetilde{\rho}_n^{(1)}\right)\right].$$

Полагая $y=0$ и используя условия (21)-(22) на границе раздела металл-полупроводник, получаем

$$\left(\frac{d}{dy}\left|\widetilde{E}_y^{(1)}(y)\right|\right)\Bigg|_{y=0}\exp\left\{i\arg\left[\widetilde{E}_y^{(1)}(0)\right]\right\}=$$

$$=\frac{1}{\varepsilon_a^{(1)}}\left|\widetilde{\rho}_n^{(1)}(0)\right|\exp\left\{i\arg\left[\widetilde{\rho}_n^{(1)}(0)\right]\right\}.$$

Приравнивая аргументы комплексных чисел, стоящих в левой и правой частях равенства, приходим к доказуемому фазовому соотношению (49).

Литература

1. Кац Л.И., Попов В.В., Ревзин Р.М. К расчету невзаимных устройств для субмиллиметрового диапазона // Радиотехника и электроника. Т.22, №6, 1977. – С. 1107-1113.
2. Захаров В.А. О медленных волнах плоскопараллельного волновода, заполненного двухслойной структурой диэлектрик – поперечно намагниченная полупроводниковая плазма // Радиотехника и электроника. Т.26, №4, 1981. – С. 673-682.
3. Гусаков В.В., Кац Л.И. Модуляция миллиметрового излучения в МДП структуре // Журнал технической физики. Т.49, №6, 1979. – С. 1306-1309.
4. Гусаков В.В., Кац Л.И. МДП-модулятор СВЧ-диапазона на основе пленок InSb // Радиотехника и электроника. Т.28, №8, 1983. – С. 1671-1673.
5. Барыбин А.А. Волны в тонкопленочных полупроводниковых структурах с горячими электронами. М.: Наука, 1986. – 288 с.

УДК 621.395.8

КОРРЕЛЯЦИОННЫЙ АНАЛИЗ СЛУЧАЙНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ В УСЛОВИЯХ АПРИОРНОЙ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ ОТНОСИТЕЛЬНО ИСКАЖАЮЩЕГО ВОЗДЕЙСТВИЯ

Горячкин О.В., Эрина Е.И.

Статья посвящена задаче восстановления ковариационной матрицы случайных информационных последовательностей, прошедших через линейную систему с неизвестными характеристиками. Такая постановка значительно усложняет задачу, и ее невозможно решить средствами корреляционного анализа. В статье предлагается «слепой» метод решения, в основу которого положено использование полиномиальных представлений конечных случайных последовательностей – так называемых полиномиальных статистик. Эффективность работы предлагаемого алгоритма подтверждается результатами математического моделирования.

Введение

В настоящее время наблюдается широкое распространение методов корреляционного анализа для решения различных практических задач. Необходимость выявления наличия и характера статистической зависимости наблюдаемых величин возникает в подавляющем большинстве областей исследования: это радио- и гидролокация, навигация и связь, химия, астрофизика, экология, и даже социология и психология. По результатам корреляционного анализа можно делать выводы о взаимозависимости случайных величин, проверять гипотезы относительно параметров их распределения, получать оценки коэффициентов парной, частной и множественной корреляции.

В статье рассматривается проблема восстановления ковариационной матрицы случайного дискретизированного сигнала, прошедшего искажающую среду с неизвестными параметрами. Решение этой задачи методами корреляционного анализа невозможно из-за априорной неопределенности как относительно статистических параметров самого сигнала, так и искажающей среды. Предлагаемый подход опирается на использование полиномиальных статистик – полиномиальных представлений случайных последовательностей [1]. Изначально интерес к этим математическим объектам был вызван их свойствами, полезными с точки зрения решения весьма актуальной сегодня проблемы «слепой» обработки сигналов, в частности «слепой» идентификации каналов связи [2].

«Слепой» корреляционный анализ на основе многообразий заданной корреляции

Пусть $\mathbf{x} \in C^n$ – комплексный случайный вектор, описываемый плотностью вероятности $f_X(x_1,...,x_n)$, а $x(z), z \in C$ соответствующий ему комплексный полином $n-1$ степени со случайными коэффициентами.

Полиномиальным моментом порядка $(k+m)$, где $k = k_1 + k_2 + ... + k_r$ и $m = m_1 + m_2 + ... + m_r$, случайного вектора $\mathbf{x} \in C^n$ называется полином из кольца $C[z_1,...,z_r]$ над полем комплексных чисел, сформированный следующим образом:

$$\begin{gathered}\mathrm{P}^{\mathrm{x}}_{\mathrm{k}_1,...,\mathrm{k}_r,\mathrm{m}_1,...,\mathrm{m}_r}(z_1, z_2,..., z_r) = \\ = \mathbf{M}\left\{x(z_1)^{k_1} ... x(z_r)^{k_r} x^*(z_1)^{m_1} ... x^*(z_r)^{m_r}\right\},\end{gathered} \tag{1}$$

где символ * означает комплексное сопряжение, а $\mathbf{M}$ – оператор математического ожидания. Если $y(z) = h(z)x(z)$ – произведение случайного полинома $x(z)$ и неслучайного $h(z)$, тогда соответствующие им полиномиальные моменты будут связаны соотношением

$$\mathrm{P}^{\mathrm{y}}_{\mathrm{l}}(z_1,...,z_l) = \mathrm{P}^{\mathrm{x}}_{\mathrm{l}}(z_1,...,z_l) \cdot h(z_1) \cdot ... \cdot h(z_l). \tag{2}$$

Если же $y(z) = x_1(z)x_2(z)$, где $x_1(z)$ и $x_2(z)$ – случайные полиномы с независимыми коэффициентами, то

$$\mathrm{P}^{\mathrm{y}}_{\mathrm{l}}(z_1,...,z_l) = \mathrm{P}^{\mathrm{x}_1}_{\mathrm{l}}(z_1,...,z_l) \cdot \mathrm{P}^{\mathrm{x}_2}_{\mathrm{l}}(z_1,...,z_l). \tag{3}$$

Теперь определим полиномиальный кумулянт порядка $(k+m)$, где $k = k_1 + k_2 + ... + k_r$ и $m = m_1 + m_2 + ... + m_r$, случайного вектора $\mathbf{x} \in C^n$ как полином от r переменных из кольца $C[z_1 \ ... \ z_r]$:

$$\begin{gathered}\mathrm{K}^{\mathrm{x}}_{\mathrm{k}_1,...,\mathrm{k}_r,\mathrm{m}_1,...,\mathrm{m}_r}(z_1; z_2 \ ... \ z_r) = \\ = \mathrm{cum}\left\{x(z_1)^{k_1} ... x(z_r)^{k_r} x^*(z_1)^{m_1} ... x^*(z_r)^{m_r}\right\},\end{gathered} \tag{4}$$

где cum – кумулянт случайной величины.

Для каждого полиномиального кумулянта можно определить множество точек в пространстве C^r, на котором значение полиномиального кумулянта принимает заданное значение $t \in C$:

$$\begin{gathered}\Xi^x_{k_1,...,k_r,m_1,...,m_r} = \\ = \left\{z \in C^r : \mathrm{K}^{\mathrm{x}}_{\mathrm{k}_1,...,\mathrm{k}_r,\mathrm{m}_1,...,\mathrm{m}_r}(z_1, z_2 \ ... \ z_r) = t\right\}.\end{gathered} \tag{5}$$

Заданное таким образом аффинное многообразие в пространстве C^r называется многообразием заданной корреляции.

Пусть $x_1(z)$ и $x_2(z)$ – случайные полиномы с независимыми векторами коэффициентов, $\Xi^{x_1}_{k_1,...,k_r,m_1,...,m_r}(t_1)$ и $\Xi^{x_2}_{k_1,...,k_r,m_1,...,m_r}(t_2)$ – соответствующие им многообразия заданной корреляции. Тогда многообразия нулевой корреляции, возникающие в результате произведения и суммы соответствующих полиномов, описываются следующими выражениями:

$$\begin{gathered}\Xi^{x_1 x_2}_{k_1,...,k_r,m_1,...,m_r}(0) = \\ = \Xi^{x_1}_{k_1,...,k_r,m_1,...,m_r}(0) \bigcup \Xi^{x_1}_{k_1,...,k_r,m_1,...,m_r}(0),\end{gathered} \tag{6}$$

$$\begin{gathered}\Xi^{x_1+x_2}_{k_1,...,k_r,m_1,...,m_r}(0) = \\ = \Xi^{x_1}_{k_1,...,k_r,m_1,...,m_r}(t) \bigcap \Xi^{x_2}_{k_1,...,k_r,m_1,...,m_r}(-t).\end{gathered} \tag{7}$$

Пусть $x_1(z), x_2(z), \ldots, x_n(z)$ – набор независимых случайных полиномов, а $\Xi^{x_1}_{k_1,...,k_r,m_1,...,m_r}(t_1) \ ... \ \Xi^{x_n}_{k_1,...,k_r,m_1,...,m_r}(t_n)$ – соответствующие им многообразия заданной корреляции, тогда

$$\Xi^{x_1 ... x_n}_{k_1,...,k_r,m_1,...,m_r}(0) = \bigcup_{i=1}^{n} \Xi^{x_i}_{k_1,...,k_r,m_1,...,m_r}(0), \tag{8}$$

$$\Xi^{x_1 ... x_n}_{k_1,...,k_r,m_1,...,m_r}(t_1 t_2 ... t_n) = \bigcap_{i=1}^{n} \Xi^{x_i}_{k_1,...,k_r,m_1,...,m_r}(t_i), \tag{9}$$

$$\begin{gathered}\Xi^{x_1+x_2+...+x_n}_{k_1,...,k_r,m_1,...,m_r}(t_1 + t_2 + ... + t_n) = \\ = \bigcap_{i=1}^{n} \Xi^{x_i}_{k_1,...,k_r,m_1,...,m_r}(t_i).\end{gathered} \tag{10}$$

В (9) и (10) $t_i \neq 0$.

Многообразие $\Xi \subset C^r$ называется неприводимым, если оно может быть представлено в виде $\Xi = \Xi_1 \bigcup \Xi_2$, где Ξ_1 и Ξ_2 – аффинные многообразия, в том и только том случае, когда или $\Xi_1 = \Xi$, или $\Xi_2 = \Xi$. Если $\Xi \subset C^r$ – аффинное многообразие, тогда существует единственное разложение вида:

$$\Xi = \bigcup_{i=1}^{n} \Xi_i, \tag{11}$$

где каждое Ξ_i – неприводимое многообразие и $\Xi_i \not\subset \Xi_j \ \ i \neq j$.

Таким образом, многообразием заданной корреляции случайного полинома, как и любое аффинное многообразие, может быть получено конечным объединением неприводимых многообразий или разложено в такое объединение.

Используя предложенный математический аппарат, можно восстановить ковариационную матрицу информационной последовательности, которая подверглась линейным искажениям. Пусть модель системы описывается линейной комбинацией полиномов положительной степени:

$$y(z) = h(z)x(z) + n(z). \quad (12)$$

В этом выражении $h(z)$ – неслучайный полином конечной дискретной ИХ системы (это означает, что вносимые искажения не изменяются во времени), а $y(z), x(z), n(z) \in C[z]$ – случайные полиномы, соответствующие наблюдаемому дискретному отклику системы, информационной последовательности на входе и отсчетам шума.

Уравнение, связывающее полиномиальные кумулянты на входе и выходе системы (12), можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{K}^{\mathrm{y}}_{\mathrm{k,m}}(z_1 \ldots z_r) = h(z_1)^{k_1} \ldots h(z_r)^{k_r} \times \\
&\times h^*(z_1)^{m_1} \ldots h^*(z_r)^{m_r}\, \mathrm{K}^{\mathrm{x}}_{\mathrm{k,m}}(z_1 \ldots z_r) + \\
&+ \mathrm{K}^{\mathrm{n}}_{\mathrm{k,m}}(z_1 \ldots z_r),
\end{aligned} \quad (13)$$

где

$$\begin{aligned}
&\mathrm{K}^{\mathrm{h}}_{\mathrm{k,m}}(z_1 \ldots z_r) = \\
&= h(z_1)^{k_1} \ldots h(z_r)^{k_r}\, h^*(z_1)^{m_1} \ldots h^*(z_r)^{m_r}.
\end{aligned}$$

Когда о статистике информационной последовательности имеются лишь общие предположения, для корреляционного анализа можно использовать структуру декоррелирующих многообразий (многообразий нулевой корреляции). Поскольку статистика шума предполагается известной, то согласно (5) выражение (13) можно записать в виде:

$$\Xi^{y-n}_{k,m}(0) = \Xi^{h}_{k,m}(0) \bigcup \Xi^{x}_{k,m}(0), \quad (14)$$

где

$$\Xi^{x}_{k,m}(t) = \left\{ \mathrm{K}^{\mathrm{x}}_{\mathrm{k,m}}(z_1 \ldots z_r) = t,\ t \in C \right\}, \quad (15)$$

$$\Xi^{h}_{k,m}(t) = \left\{ \mathrm{K}^{\mathrm{h}}_{\mathrm{k,m}}(z_1 \ldots z_r) = t,\ t \in C \right\}, \quad (16)$$

$$\begin{aligned}
&\Xi^{y-n}_{k,m}(t) = \left\{ \mathrm{K}^{\mathrm{y}}_{\mathrm{k,m}}(z_1 \ldots z_r) - \right. \\
&\left. - \mathrm{K}^{\mathrm{n}}_{\mathrm{k,m}}(z_1 \ldots z_r) = t,\ t \in C \right\}.
\end{aligned} \quad (17)$$

Выше уже отмечалось, что любое многообразие может быть представлено в виде объединения конечного числа неприводимых многообразий, и более того, что такое представление единственно. Если $\Xi^{h}_{k,m}(0) \not\subset \Xi^{x}_{k,m}(0)$, то представление (14) единственно. А значит, многообразие $\Xi^{x}_{k,m}(0)$ полностью характеризует импульсную характеристику системы и может быть найдено разложением многообразия $\Xi^{y-n}_{k,m}(0)$ на объединение неприводимых многообразий. При этом нам не требуется априорного знания моментов информационной последовательности. Однако подобное разложение крайне сложная задача в поле комплексных чисел. Поэтому мы воспользуемся отличием размерностей многообразий, порожденных ИХ системы и информационной последовательностью.

Многообразие нулевой корреляции $\Xi^{h}_{k,m}(0)$ порождено нульмерным многообразием (конечным множеством точек) в C и представляет собой объединение комплексных гиперплоскостей в C^r. Многообразие $\Xi^{x}_{k,m}(0)$ порождается, как правило, одномерным многообразием в C.

Итак, с учетом размерности можно разделить неизвестные многообразия, выбирая различные сечения. И слепой алгоритм восстановления входной ковариационной матрицы при $r = 2$ сводится к следующей последовательности действий:

1. Оцениваем полиномиальную ковариацию $\hat{\mathrm{P}}^{\mathrm{y}}_{2,0}(z_1, z_2)$ по M реализациям наблюдаемого отклика системы.

2. Вычисляем корни полиномов от одной переменной $\hat{\mathrm{P}}^{\mathrm{y}}_{2,0}(z_1, z_2^1)$ и $\hat{\mathrm{P}}^{\mathrm{y}}_{2,0}(z_1, z_2^2)$ при $z_2^1 \neq z_2^2$ и формируем из них векторы $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ соответственно.

3. По критерию $\|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\| \le \varepsilon(\sigma^2)$ формируем вектор $\mathbf{r}_h$, состоящий из L ближайших корней выбранных сечений $\hat{\mathrm{P}}^{\mathrm{y}}_{2,0}(z_1, z_2)$ в комплексной плоскости C.

4. Восстанавливаем ИХ системы $\hat{\mathbf{h}} = \mathrm{roots}^{-1}(\mathbf{r}_h)$.

5. Используя знание о корнях ИХ системы $\mathbf{r}_h$, составляем матрицу коэффициентов N нормированных сечений $\hat{\mathrm{P}}^{\mathrm{x}}_{2,0}(z_1, z_2)$:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \hat{\mathrm{P}}^{\mathrm{x}}_{2,0}(z_1, z_2^1) \\ \hat{\mathrm{P}}^{\mathrm{x}}_{2,0}(z_1, z_2^2) \\ \vdots \\ \hat{\mathrm{P}}^{\mathrm{x}}_{2,0}(z_1, z_2^N) \end{pmatrix}.$$

6. Находим старшие коэффициенты a^i полиномиального момента $\hat{\mathrm{P}}^{\mathrm{x}}_{2,0}(z_1, z_2^i)$, $i = 1, \ldots, N$ из условия:

$$a^i \cdot \hat{\mathrm{P}}^{\mathrm{x}}_{2,0}(z_1, z_2^i) = \frac{\hat{\mathrm{P}}^{\mathrm{y}}_{2,0}(z_1, z_2^i)}{\hat{\mathrm{h}}(z_1)\,\hat{\mathrm{h}}(z_2^i)}.$$

7. Оцениваем ковариационную матрицу входной информационной последовательности по полиномиальной ковариации $\hat{\mathrm{P}}^{\mathrm{x}}_{2,0}(z_1, z_2)$:

$$\Xi^{y-n}_{k,m}(0)$$

$$\mathbf{P}_x = \mathbf{P}^{\mathrm{T}} \cdot \left(\mathbf{V}_N^{\mathrm{T}} \left(z_2^1, z_2^2, \ldots, z_2^N \right) \right)^{-1},$$

где $\mathbf{V}_N \left(z_2^1, z_2^2, \ldots, z_2^N \right)$ – $N \times N$ матрица Вандермонда.

В общем случае, при $r > 2$ принцип разделения остается тем же. То есть проекция $C^r \to C$ многообразия $\Xi_{k,m}^h(0)$, порожденного ИХ системы, на любую координату нульмерна, а многообразия $\Xi_{k,m}^x(0)$, порожденного информационной последовательностью, как правило, имеет размерность 1.

Результаты математического моделирования

Для оценки эффективности предложенного алгоритма использовалась относительная погрешность восстановления Q, которая рассчитывалась по формуле:

$$\mathrm{Q} = \mathbf{M}\left\{ \left\| \mathbf{R}_x - \mathbf{P}_x \right\| / \left\| \mathbf{R}_x \right\| \right\}.$$

На рис. 1 представлены графики, отражающие зависимость относительной погрешность восстановления Q от использованного числа реализаций *M* наблюдаемого случайного процесса. В качестве входной информационной последовательности рассматривался случайный вектор с заданной ковариационной матрицей. Моделирование проводилось для трех следующих типов матриц.

$$1.\ R_x = \begin{pmatrix} 1 & 0,5 & & 0 \\ 0,5 & 1 & & \\ & & \ddots & 0,5 \\ 0 & & 0,5 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$2.\ R_x = \begin{pmatrix} d_1 & r_1 & & 0 \\ r_1 & d_2 & r_2 & \\ & r_2 & \ddots & r_{n-1} \\ 0 & & r_{n-1} & d_n \end{pmatrix}.$$

3. R_x – произвольная симметрическая положительно определенная матрица.

Импульсная характеристика системы была выбрана произвольным образом, но не изменялась в течение всего эксперимента.

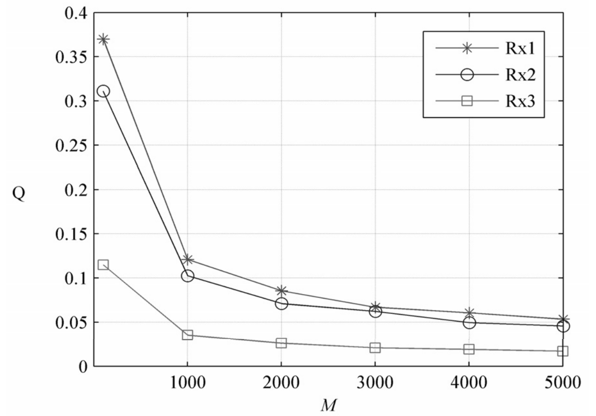

Рис. 1. Относительная погрешность восстановления Q в зависимости от числа реализаций *M*

Заключение

Представлен метод корреляционного анализа конечных случайных последовательностей. Алгоритм позволяет получить оценку ковариационной матрицы конечной информационной последовательности, прошедшей неизвестную линейную искажающую систему с конечной импульсной характеристикой. При этом на ковариационную матрицу случайной последовательности не накладываются никакие ограничения.

Литература

1. Горячкин О. В. Методы слепой обработки сигналов и их приложения в системах радиотехники и связи. М.: Радио и связь, 2003. – 230 с.
2. Горячкин О.В., Эрина Е.И. Слепая идентификация информационного канала по многообразиям заданной корреляции, порожденным случайными полиномами // Успехи современной радиоэлектроники. №8, 2008 – С. 70-77.

УДК 621.396.4

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЛИНИИ ЗАДЕРЖКИ

Алышев Ю.В.

В статье приводится математическая модель линии задержки, в основе которой используются указатели и переменные. Эта модель позволяет адекватно описать процессы, происходящие в вычислительном устройстве, на базе которого реализована линия задержки.

Введение

В [1] рассматривались некоторые элементы математического описания переменных x и указателей ς в виде пар чисел $(\varsigma; x)$. В этой работе были рассмотрены такие элементы (объекты), как одномерный массив и очередь, а также операции, которые могут выполняться над рассматриваемыми объектами. В радиотехнических задачах часто применяется такой элемент как линия задержки (ЛЗ). Реализация данного объекта на базе вычислительной техники достаточно проста. Однако существует несколько вариантов реализаций это-