УДК: 519.217.2

ОБ ОДНОЙ МОДЕЛИ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ МИГРАЦИОННОГО ПРИРОСТА НАСЕЛЕНИЯ

Бабченко О.В.

В данной работе предложена модель, позволяющая определить вероятности перехода миграционного потока, путем преобразования уравнения Чепмена-Колмогорова к системе обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Введение

В настоящее время миграционные процессы являются важным фактором социально-экономического развития многих государств, в том числе и нашей страны. В условиях обострения межэтнических отношений особую актуальность эта проблема приобретает для ряда регионов России.

Исследование перспективных миграций является необходимым условием прогнозирования общей численности населения, поскольку механическое движение является важным фактором изменения численности и состава населения в том или ином регионе. Анализ миграционной подвижности в региональном аспекте на современном этапе и в перспективе представляет собой необходимость прогнозирования территориальных перемещений [1]. Поэтому моделирование миграционных процессов с использованием информационных технологий и получение прогнозной модели, даже на ближайшую перспективу, является актуальной проблемой.

Постановка задачи исследования и теоретический анализ

Постановка задачи прогнозирования количества и структуры миграционного потока, по нашему мнению, должна содержать следующие компоненты:

- цель задачи, в которой предполагается использовать данные о миграции;
- определение миграции и структуры миграционного потока;
- указание, для какой территории необходимо получить результаты;
- на какой период необходимо получить прогноз.

Обозначим через E_i $(i = 1, 2, \dots n)$, где n – число населенных пунктов, между которыми предположительно происходят миграционные процессы, различные состояния, в которых может находиться миграционный поток в процессе своего перемещения, через $N_i(t)$ – численность населения, находящегося в состоянии E_i в момент времени t. Предположим, что время t меняется непрерывно. Под воздействием множества факторов (экономических, социальных, географических, политических и т.д.) миграционный поток может случайным образом переходить из одного состояния в другое.

Допустим, что, находясь в момент t_o в состоянии E_i, миграционный поток изменяется в дальнейшем независимо от того, в каких состояниях находился он при $t < t_o$.

Таким образом, процесс миграционного прироста можно рассматривать как случайный марковский процесс, принимающий в каждый момент времени одно из возможных состояний E_i $(i = 1, 2, \dots n)$. В связи с этим, для исследования поставленной задачи прогнозирования количества и структуры миграционного потока, на наш взгляд, рационально применять теорию случайных марковских процессов [2].

Пусть миграционный поток может находиться в одном из возможных состояний – $E_1, E_2, \dots E_n$. Предположим, что если в некоторый момент времени s миграционный поток находился в состоянии E_i, то в момент $t > s$ он может перейти в любое состояние E_j $(j = 1, 2, \dots n)$ с некоторой вероятностью $p_{ij}(s,t)$. Вероятности $p_{ij}(s,t)$ назовем вероятностями перехода из состояния E_i в состояние E_j за время $(t-s)$. Вероятности должны удовлетворять условиям

$$p_{ij}(s,t) \geq 0, \qquad \sum_j p_{ij}(s,t) = 1, \; i,j = 1,2,\dots n. \tag{1}$$

Если $p_{ij}(s,t) = 0$, то переход из одного состояния в другое невозможен.

Условие $p_{ij}(s,t) > 0$ означает, что если в момент времени s миграционный поток находился в состоянии E_i, то в момент времени $t > s$ он обязательно перейдет в какое-либо из состояний E_j $(j = 1, 2, \dots n)$.

Обозначим через $X(t)$ – состояние потока в текущий момент.

Тогда вероятность перехода

$$p_{ij}(s,t) = P\{X(t) = E_j \,/\, X(s)\} = E_i. \tag{2}$$

Пусть $t_1 < t_2 < ... t_n$ – это произвольный набор фиксированных моментов времени. Тогда условие распределения вероятностей величины $X(t_n)$ относительно величин $X(t_1)$, $X(t_2)$, … $X(t_{n-1})$ совпадает с условным распределением вероятностей величины $X(t_n)$ относительно одной только величины $X(t_{n-1})$, то есть для каждого λ с вероятностью, равной единице, справедливо соотношение

$$P\{X(t_n) \le \lambda / X(t_1), ... X(t_{n-1})\} = \\ = P\{X(t_n) \le \lambda / X(t_{n-1})\}. \quad (3)$$

Данное условие означает, что характеристики марковского случайного процесса при $t \ge t_n$ зависят от предыдущего момента времени t_{n-1} и не обусловлены тем, в каких состояниях пребывал процесс ранее.

Исследуемый нами процесс удовлетворяет выше изложенным условиям, то есть является марковским процессом.

Обозначим через $P(s,t)$ матрицу $[p_{ij}]$:

$$P(s,t) = \begin{pmatrix} p_{11}(s,t), & p_{12}(s,t), & ... & p_{1n}(s,t) \\ p_{21}(s,t), & p_{22}(s,t), & ... & p_{2n}(s,t), \\ ... & ... & ... & ... \\ p_{n1}(s,t), & p_{n2}(s,t), & ... & p_{nn}(s,t) \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Для вероятностей перехода $p_{ij}(s,t)$ имеет место соотношение

$$p_{ik}(s,u) = \sum_j p_{ij}(s,t)\, p_{jk}(t,u)\,, 0 \le s < t < u\,, \quad (5)$$

являющееся частным случаем уравнения Чепмена-Колмогорова [3]. В соотношении (5) рассматриваются три момента времени s, t, и u, удовлетворяющие условию $s < t < u$. В момент s миграционный поток находится в состоянии E_i и за время $u - s$ переходит в состояние E_k.

Переход осуществим следующим образом: сначала за время $t - s$, которое меньше, чем $u - s$, поток переходит в некоторое промежуточное состояние E_j, а затем из E_j за время $u - t$ – в состояние E_k. Так как промежуточное состояние E_j может быть любым из E_1, E_2, … E_n, то $\sum_j p_{ij}(s,t)\, p_{jk}(t,u)$ представляет собой сумму по всем j. Каждое слагаемое этой суммы есть вероятность перехода $E_i \to E_j \to E_k$ для фиксированного j.

В матричных обозначениях уравнение Чепмена-Колмогорова представим следующим образом

$$P(s,u) = P(s,t)\, P(t,u)\,. \quad (6)$$

Выражение (6) после выполнения операции умножения

$$p_{ik} = \sum_j p_{ij}\, p_{jk}\,. \quad (7)$$

В дальнейшем будем считать, что $P(t,t)$ единичная матрица, то есть $p_{ii}(t,t) \equiv 1$; $p_{ij}(t,t) \equiv 0$ при $i \ne j$. В этом случае уравнение (6) имеет место при $0 \le s \le t \le u$.

Введем понятие однородности процесса механического движения населения. Предположим, что вероятности перехода $p_{ij}(s,t)$ зависят только от разности моментов времени, то есть от $t - s$. Такие вероятности назовем стационарными, а процесс $X(t)$ – однородным. Следовательно, вероятности $p_{ij}(s,t)$ можно представить в виде $p_{ij}(t-s)$ или, если обозначить $(t-s)$ через t, в виде $p_{ij}(t)$. Таким образом, $p_{ij}(t)$ означает, что процесс находится в состоянии E_i в момент времени $t = 0$ и за время t переходит в состояние E_j. В случае однородности процесса $X(t)$ уравнение Чепмена-Колмогорова принимает вид:

$$p_{ik}(s+t) = \sum_j P_{ij}(s)\, P_{jk}(t)\ , \ s,t \ge 0\,. \quad (8)$$

В матричных обозначениях получим

$$P(s+t) = P(s)P(t), s,t \ge 0 \quad (9)$$

При s или $t = 0$ соответствующая матрица $P(0) = I$, то есть равна единичной матрице, а при s и $t \ne 0$ элементы матрицы удовлетворяют условиям

$$p_{ij}(t) \ge 0\,, \ \sum_j p_{ij}(t) = 1\,. \quad (10)$$

Матрица (10) является стационарной марковской переходной матричной функцией. Как известно, любой марковской переходной матричной функции соответствует марковский процесс $X(t)$.

Методика

Для вывода уравнений вероятностей $p_{ij}(t)$ воспользуемся основной теоремой из теории марковских процессов.

Теорема. Для любой стационарной марковской переходной матричной функции $[p_{ij}(t)]$ при всех i и j существует $\lim_{t \to \infty} p_{ij}(t)$, причем приближение к пределу происходит экспоненциально быстро [2].

Данная теорема позволит значительно упростить задачу определения вероятностей перехода $p_{ij}(t)$.

Предположим, что матричная функция $P(t)$ непрерывна при $t = 0$, то есть что элементы матрицы $P(t)$ удовлетворяют следующему условию

$$\lim_{t\to 0} p_{ij}(t)=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}. \qquad (11)$$

Условие (11) для исследуемого процесса можно интерпретировать, как: если время перехода из состояния E_i в состояние E_j рассматривать, как стремящееся к нулю, то вероятность $p_{ij}(t)$ при $i \neq j$ также стремится к нулю, и наоборот, вероятность остаться в том же состоянии $p_{ij}(t)$ стремится к единице. Из (11) следует непрерывность вероятностей $p_{ij}(t)$ при всех $t \geq 0$.

Допустим, что функции $p_{ij}(t)$ имеют производные $p_{ij}'(t)$ при всех $t \geq 0$ (существование этих производных доказывается в общей теории марковских процессов). Пусть

$$\begin{aligned} q_i &= \lim_{t\to 0}\frac{1-p_{ii}(t)}{t} = -p_{ii}'(0),\\ q_{ij} &= \lim_{t\to 0}\frac{p_{ij}(t)}{t} = -p_{ij}'(0). \end{aligned} \qquad (12)$$

Обозначим через Q матрицу $[q_{ij}]$, причем q_{ii} обозначим через $-q_i$. Элементы полученной матрицы Q удовлетворяют следующим условиям

$$Q=\begin{pmatrix} -q_1 & q_{12} & \dots & q_{1n}\\ q_{21} & -q_2 & \dots & q_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ q_{n1} & q_{n2} & \dots & -q_n \end{pmatrix}; \qquad (13)$$

$$q_{ij} \geq 0 \text{ и } \sum_{j\neq i} q_{ij} = q_i. \qquad (14)$$

Продифференцируем уравнение Чепмена-Колмогорова (8) по каждой из переменных при условии, что t и s равны нулю. Дифференцируя по s, имеем

$$p_{ik}(s+t)=\sum_j p_{ij}'(s)\, p_{ik}(t),\ (i,k = 1, 2, \dots n). \qquad (15)$$

Дифференцируем по t, получим

$$p_{ik}'(s+t)=\sum_j p_{ij}(s)\, p_{jk}'(t),\ (i,k = 1, 2, \dots n). \qquad (16)$$

Полагая в уравнении (15) $s = 0$, а в (16) $t = 0$, получим две системы дифференциальных уравнений относительно функций $p_{ij}(t)$

$$p_{ik}'(t)=\sum_j p_{ij}'(0)\, p_{ik}(t); \qquad (17)$$

$$p_{ik}'(t)=\sum_j p_{ij}(t)\, p_{jk}'(0). \qquad (18)$$

В уравнении (18) переменная s обозначена через t.

Выделяя в правых частях полученных дифференциальных уравнений слагаемые с одинаковыми индексами и учитывая выражение (12), получим

$$p_{ik}'(t)=-q_i\, p_{ik}(t)+\sum_{j\neq k} q_{ij}\, p_{jk}(t); \qquad (19)$$

$$p_{ik}'(t)=-p_{ik}\, q_k+\sum_{j\neq k} p_{ij}(t)\, q_{jk}, \qquad (20)$$

$$(i,k=\overline{1,n}).$$

Каждое из соотношений (19) и (20) представляет собой систему n^2 обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Как известно, система уравнений (19) является обратной системой дифференциальных уравнений цепи Маркова, а система (20) – прямой [4].

Начальные условия для (19) и (20) зададим в виде

$$p_{ij}(0)=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}. \qquad (21)$$

Рассмотрим систему (19). Запишем ее в матричной форме

$$P'(t) = Q\,P(t).$$

Начальные условия (21) запишем в матричном виде $P(O) = I$, где I – единичная матрица. Тогда, решение системы (19) можно записать в виде

$$P(t) = e^{Qt}P(0), \qquad (22)$$

где Q – матрица, e^{Qt} – степенной ряд, в который раскладывается экспоненциальная функция, члены данного ряда – матрицы Q и их степени, а именно:

$$P(t)=P(0)+tQP(0)+\frac{t^2Q^2}{2!}P(0)+ \\ +\frac{t^3Q^3}{3!}P(0)+\dots+\frac{t^nQ^n}{n!}P(0)+\dots$$

Соответствующие расчеты, связанные с умножением матриц, можно выполнить в одном из пакетов прикладных программ.

Система дифференциальных уравнений (20) решается аналогично системе (19), и ее решение запишем в виде

$$P(t) = P(0)e^{Qt}. \qquad (23)$$

Таким образом, системы (19) и (20) с начальным условием (21) имеют одно и то же решение, представляющее собой матрицу размера n^2. Элементами ее являются интересующие нас вероятности перехода $p_{ij}(t)$, то есть вероятности перехода из состояния E_i в E_j за времени t.

Для решения задачи прогнозирования количества мигрантов в миграционном потоке, находящихся в состоянии E_i, фиксируем некоторый начальный момент $t = 0$, в который должно быть известно число мигрантов, находящихся в каждом возможном состоянии E_i ($i = 1, 2, \ldots n$). Обозначим это число через $N(0)$.

Составим и решим одну из систем: (19) или (20). Следует отметить, что если число состояний невелико, то для решения системы (19) или (20) можно воспользоваться формулами (22) и (23). Однако при большом числе состояний операции по вычислению соответствующих матричных рядов нужно производить с помощью современных технических средств.

Полученное решение системы дифференциальных уравнений марковской цепи, то есть величины $p_{ij}(t)$ ($i = 1, 2, \ldots n$), умножим исходное число мигрантов, находящихся в состоянии E_j, то есть число $N_i(0)$, на $p_{ij}(t)$. В результате получим число мигрантов, находящихся в состоянии E_j, в которые перейдут за время t мигранты состояния E_i.

При большом числе состояний E_1, E_2, … E_n решения системы дифференциальных уравнений высокого порядка связаны с большим объемом вычислений. Так при $n = 25$ необходимо решать систему из 625 уравнений. Однако, поскольку случайный процесс, анализируемый нами, является марковским, возникшие затруднения легко преодолеть.

На основании вышеуказанной теоремы, для достаточно больших значений t можно считать, что $p_{ij}(t)$ постоянны, то есть $p_{ij}(t) = p_{ij}$, где p_{ij} – стационарные вероятности перехода. Следовательно, $\dot{p}_{ij}(t) = 0$ и, таким образом, система дифференциальных уравнений марковской цепи равносильна системе алгебраических уравнений:

$$\sum_{j \neq k} p_{ij}\, q_{ik} = p_{ik}\, q_k\,, \quad (i = 1, 2, \ldots n). \qquad (24)$$

Решением (24) являются постоянные величины. Применяя алгоритм прогнозирования, описанный выше появляется возможность определить численность миграционного потока, находящегося в состояниях E_i ($i = 1, 2, \ldots n$).

Заключение

Полученный в работе результат положен в основу методики отыскания коэффициентов стационарной марковской переходной матричной функции, что позволит строить краткосрочные и долгосрочные прогнозы при исследовании механического движения населения. На основе алгоритма прогнозирования, описанного выше, предложена имитационная модель, реализованная в среде C++Builder 6.

Предлагаемая методика отыскания вероятностей перехода может найти свое применение и в других предметных областях.

Литература

1. Оникиенко В.В., Поповкин В.А. Компьютерное исследование миграционных процессов. М.: Статистика, 1973. – 258 с.
2. Дуб Дж.Л. Вероятностные процессы. М., 1956. – 356 с.
3. Анго А. Математика для электро- и радиоинженеров. М.: Наука, 1965. – 272 с.
4. Моделирование социальных процессов. Под ред. Э.П. Андреева, Ю.Н. Габрилец. М.: Наука, 1970. – 317 с.

УДК 331.101.6:004.9

СИСТЕМА МОНИТОРИНГА В МАСШТАБЕ ПРЕДПРИЯТИЯ РАБОЧЕГО ВРЕМЕНИ СОТРУДНИКОВ, АКТИВНО ИСПОЛЬЗУЮЩИХ КОМПЬЮТЕР

Бочкин А.В., Федосин С.А.

Рассматривается возможность повышения производительности труда работающих за компьютером сотрудников в масштабе предприятия. Предложена информационная система, позволяющая существенно автоматизировать расчет производительности сотрудников для конкретных задач с целью улучшения организации рабочего времени.

Введение

За последние годы область, называемая поддержкой принятия управленческих решений, в результате быстрого развития компьютерных технологий стала приобретать новые очертания. Все большую актуальность стала приобретать задача