METHODS OF THE RECEPTION KORRELACION FUNCTION OF THE CASUAL PULSED SEQUENCES

Zhuk A.P., Fomin L.A., Skorobogatov S.A., Romaniko D.V.

The methods of the reception of the analytical expressions for determination of normalized autocorrelation functions of the casual impulsive sequences, allowing produce estimation of the time of correlations for the reason revealing the sequences, possessing «good» correlation-characteristics to use them in the systems of transmition of the information and the sequences, possessing the self-similar characteristics to model the traffic in the network structure are offered in this article.

Keywords: *long-range dependence, autocorrelation function, time of correlations, modeling.*

Жук Александр Павлович, к.т.н., профессор, начальник Кафедры «Сети связи и системы коммутации» (СССК) Ставропольского военного института связи ракетных войск (СВИС РВ). Тел. (8-865) 235-74-09. E-mail: alekszhuk@mail.ru

Фомин Лев Андреевич, к.т.н., доцент, профессор Кафедры СССК СВИС РВ. Тел. (8-865) 277-02-86.

Скоробогатов Сергей Александрович, преподаватель Кафедры СССК СВИС РВ. Тел. 8-905-490-11-32. E-mail: skorobogatov-ser@mail.ru

Романько Денис Владимирович, преподаватель Кафедры СССК СВИС РВ. Тел. (8-865) 294-26-12.

УДК 519.21

ИНФОРМАТИВНОСТЬ МОДИФИЦИРОВАННЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ ВАРИАЦИИ

Уразбахтин А.И., Уразбахтин Р.А.

Исследуется информативность коэффициента вариации случайных величин. Предлагаются модифицированные коэффициенты вариации, изучаются их свойства и информативность.

Ключевые слова: вероятностные процессы, коэффициенты вариации, законы Бернулли, информативность оценки.

В прикладных задачах, связанных с исследованием вероятностных процессов, широко используются структурные свойства законов распределения вероятностей случайных величин. К таким характеристикам относятся: моменты (начальные, центральные), мода, асимметрия, эксцесс и т.д. При изучении свойств распределений вероятностей в статистических задачах иногда используют коэффициент вариации, определяемый как отношение среднеквадратического отклонения случайных величин к их среднему значению [1-2; 7]: $V_y = \sqrt{\mu_{2_y}} \big/ m_y \Rightarrow \sigma_y / m_y$, где m_y и μ_{2_y} – первый начальный (среднее значение) и второй центральный (дисперсия) моменты распределения вероятностей случайных величин соответственно; σ_y – среднеквадратичное отклонение случайной величины. Например, в теории телетрафика для описания структуры распределения вероятностей применяется показатель [3-4] вида

$$\gamma = 1 + \left(\sigma_y / m_y\right)^2 = 1 + \left(V_y\right)^2,$$

который определяется как фактор формы распределения (по Пальму).

Из определения коэффициента вариации следует, что V_y безразмерная величина. Этот коэффициент был предложен К. Пирсоном. При этом предполагалось, что коэффициент вариации должен применяться только при положительных значениях m_y [1; 7]. Названное ограничение дается без какого-либо объяснения. Рассмотрим физический смысл коэффициента вариации. Для этого проанализируем распределения вероятностей одинаковой структуры, которые заданы в интервалах одинаковой длины, но расположены на различных участках числовой оси – как это показано на рис. 1.

В соответствии с определением коэффициент вариации существует только для распределений вероятностей с положительным значением среднего значения случайных величин и не зависит от значения левой (нижней) границы области определения распределений вероятностей. Из рис. 1 следует, что коэффициент вариации характеризует относительную изменчивость случайных величин внутри интервала $[0; m_y]$, ограниченного началом координат числовой оси и их математическим ожиданием. При заданном значении стандартного отклонения, чем больше (меньше) интервал $[0; m_y]$, тем меньше (больше) значение

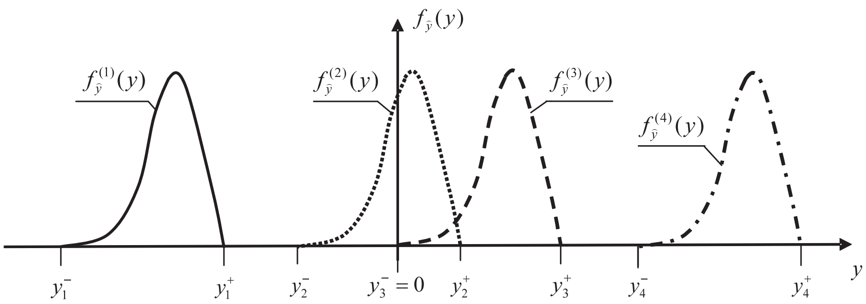

Рис. 1. Примеры расположения одних и тех же распределений на разных участках числовой оси

коэффициента вариации. Подобный коэффициент вариации содержит мало информации как при изучении структурных свойств распределений вероятностей, так и при изучении свойств распределений статистических данных. Действительно, у двух распределений одинаковой структуры, заданных на интервалах равной длины $d_y = (y^+ - y^-)$, но расположенных на различных участках числовой оси, коэффициенты вариации будут различаться.

Пусть на интервалах равной длины $d_{y_i} = (y^+ - y^-), i = 1(1)4$ определена некоторая плотность распределения с заданной структурой со среднеквадратическим отклонением σ_y (см. рис. 1-2), для математических ожиданий которых выполняются соотношения:

$$-m_{y_1} < m_{y_2} < m_{y_3} < m_{y_4} .$$

Закон распределения вероятностей случайных величин, определенный в ограниченном интервале $[y_1^-; y_1^+]$, имеет отрицательное математическое ожидание. Поэтому коэффициент вариации у этого распределения (по определению) не существует, а для коэффициентов вариации остальных распределений выполняются неравенства

$$V_{y_2} = \frac{\sigma_y}{m_{y_2}} > V_{y_3} = \frac{\sigma_y}{m_{y_3}} \geq V_{y_4} = \frac{\sigma_y}{m_{y_4}} .$$

Отметим, что у распределения, заданного в интервале $[y_2^- - y_2^+]$, математическое ожидание $m_{y_2} > 0$, но левая граница интервала является отрицательной: $y_2^- < 0$. В известном определении коэффициента вариации такая возможность не оговаривается.

Для распределений одинаковой структуры, которые заданы в ограниченных интервалах $[y_3^-; y_3^+]$ и $[y_4^-; y_4^+]$, выполняются соотношения $y_3^- = 0 < y_4^-$, а следовательно, будет верно неравенство $m_{y_3} < m_{y_4}$. Кроме того, известный коэффициент вариации нечувствителен к длине интервала определения распределений вероятностей, так как в коэффициенте вариации не учитывается значение правой границы интервала y_i^+.

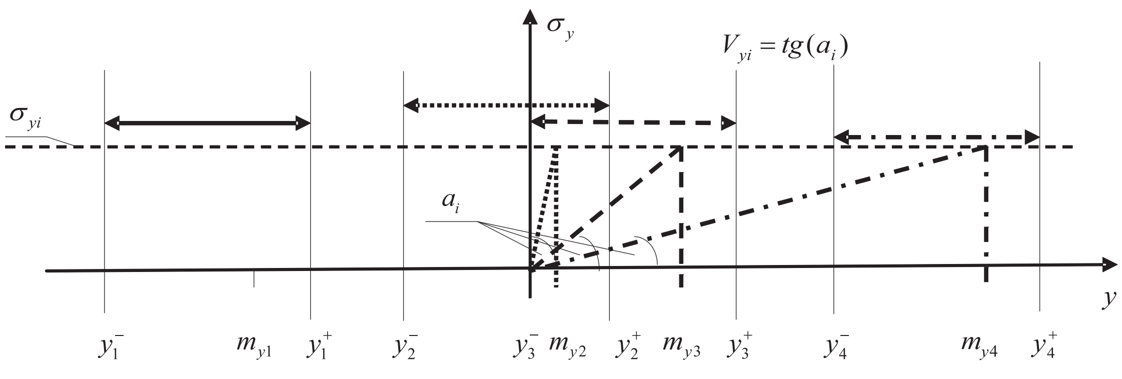

Рис. 2. Графическое пояснение содержания коэффициента вариации

На рис. 2, который иллюстрирует вышеизложенные свойства коэффициента вариации, показаны коэффициенты вариации V_y, которые оценивают относительную вариацию случайных чисел внутри интервала $[0; m_y]$. Геометрический смысл коэффициента вариации – это тангенс угла между числовой осью и линией, проходящей через начало числовой оси и значение стандартного отклонения.

Известный коэффициент вариации существенно сужает класс распределений для изучения их структурных свойств. Поэтому его целесообразно представить в другом виде, который назовем модифицированным коэффициентом вариации (первый тип): $\breve{V}_y = \sigma_y \big/ (m_y - y^-)$.

Рассмотрим модифицированный коэффициент вариации для нескольких параметрических распределений.

Равномерное распределение вида

$$f_{\hat{y}}(y) = 1 \big/ (y^+ - y^-),\ y \in [y^-; y^+].$$

Математическое ожидание и среднеквадратическое отклонение равномерного распределения определяются в виде:

$$m_{py} = (y^+ - y^-) \big/ 2;$$

$$\sigma_{py} = \sqrt{\mu_{2_{py}}} = (\int_{y^-}^{y^+} y^2 \frac{1}{(y^+ - y^-)} dy - m_p^2)^{1/2} =$$

$$= \frac{(y^+ - y^-)}{\sqrt{12}}.$$

С учетом последних соотношений модифицированный коэффициент вариации равномерного распределения вероятностей будет иметь вид $\breve{V}_{py} = \dfrac{(y^+ - y^-)}{\sqrt{12}(m_{py} - y^-)}$, то есть модифицированный коэффициент вариации равномерного распределения зависит не только от математического ожидания, но и от длины интервала $(y^+ - y^-)$, в котором определены случайные величины, а также от их положения на числовой оси (его начала y^-).

Степенное распределение имеет вид

$$f_{\hat{y}}(y) = cy^{c-1},\ y \in [0;1],\ c > 0.$$

Первый начальный момент степенного распределения вероятностей определяется по формуле

$$m_{cy} \int_0^1 y \times cy^{c-1} dy = \frac{c}{c+1}.$$

Путем цепочки преобразований получим выражение для вычисления параметра степенного распределения

$$(m_{cy} = \frac{c}{c+1}) \Rightarrow (cm_{cy} + m_{cy} = c) \Rightarrow (c = \frac{m_{cy}}{1 - m_{cy}}).$$

Тогда среднеквадратическое отклонение случайных величин степенного распределения будет определяться выражением

$$\sigma_{cy} = \sqrt{\mu_{2_{cy}}} = (\int_0^1 y^2 cy^{c-1} dy - m_{cy}^2)^{1/2} =$$

$$(\frac{c}{c+2} - m_{cy}^2)^{1/2} = (\frac{c}{(c+2)(c+1)^2})^{1/2}.$$

То есть коэффициент вариации у степенного распределения будет иметь вид

$$\breve{V}_{cy} \frac{\sigma_{cy}}{m_{cy}} = ((\frac{c}{(c+2)})^{1/2}) \Big/ c,$$

который зависит только от первого начального момента m_{cy} или от параметра *с*. Следовательно, коэффициент вариации $\breve{V}_{cy}$ может быть применен в задачах идентификации степенных распределений.

Обобщенное распределение Бернулли. Рассмотрим общий случай. Пусть заданы величины y^+ и y^- с вероятностями исходов в эксперименте: $P(y^+) = p_{бy}$, $P(y^-) = (1 - p_{бy})$. Первый начальный и второй центральный моменты распределения Бернулли (общий случай) определяются, соответственно:

$$m_{бy} = y^+ p_{бy} + y^-(1 - p_{бy}) = (y^+ - y^-) p_{бy} + y^-,$$

$$\mu_{2_{бy}} = (y^+ - m_{бy})^2 p_{бy} + (y^- - m_{бy})^2 (1 - p_{бy}) =$$

$$= (y^+ - y^-)^2 p_{бy} (1 - p_{бy}).$$

С учетом полученных выражений для коэффициента вариации будет справедлива формула

$$\breve{V}_{бy} = \sqrt{\frac{(y^+ - y^-)^2 p_{бy} (1 - p_{бy})}{((y^+ - y^-) p_{бy} + y^-)^2}}.$$

Приведенная формула зависит от структурных характеристик распределения: параметра $p_{бy}$, интервала $(y^+ - y^-)$ и его положения на числовой оси y^-.

Распределение общего вида. Пусть в ограниченном интервале $[y^-; y^+]$ задана плотность распределения вероятностей случайных величин $f_{\hat{y}}(y),\ y \in [y^-; y^+]$. Линейное преобразование случайных величин $y \in [y^-; y^+]$ $x_{(y)} = ay + b,\ x_{(y)} \in [(ay^- + b); (ay^+ + b)],\ y \in [y^-; y^+]$ не меняет структуру (класс) распределения вероятностей.

Если принять $x^-_{(y^-)} = (ay^- + b) = 0$ и $x^+_{(y^+)} = (ay^+ + b) = 1$, тогда $x_{(y)}$ будет определяться по формуле

$$x_{(y)} = (y - y^-) \big/ (y^+ - y^-),\ y \in [y^-; y^+],\ x_{(y)} \in [0;1],$$

а среднее значение и стандартное отклонение будут равны [5-6]:

$$m_{x_{(y)}} = (m_y - y^-)\big/(y^+ - y^-),\ 0 \le m_{x_{(y)}} \le 1;$$
$$\sigma_{x_{(y)}} = \sigma_{y_{(x)}}\big/(y^+ - y^-),\ 0 \le \sigma_{x_{(y)}} \le \sqrt{m_{x_{(y)}}(1 - m_{x_{(y)}})}.$$

С учетом полученных соотношений модифицированный коэффициент вариации будет определяться следующим образом:

$$\breve{V}_{x_{(y)}} = \frac{\sigma_{x_{(y)}}}{m_{x_{(y)}} - 0} = \frac{\sigma_{y_{(x)}}(y^+ - y^-)}{(m_y - y^-)(y^+ - y^-)} = \breve{V}_y.$$

То есть модифицированный коэффициент вариации инвариантен к линейному преобразованию случайных величин (линейное преобразование случайных величин не меняет значение модифицированного коэффициента вариации). Для первого начального и центральных моментов закона распределения, определенного в интервале [0; 1], справедливы неравенства [5-6]:

$$0 \le m_{x_{(y)}} \le 1,$$
$$0 \le \mu_{kx_{(y)}} \le p_б(1 - p_б)[(1 - p_б)^{k-1} +$$
$$+ (-1)^k p_б^{k-1}] = \mu_{kб},\ k \ge 2,$$

где $\mu_{kб}$ – центральные моменты k-го порядка стандартного распределения Бернулли

$$P(x = 1) = p_{бx_{(y)}} = m_{x_{(y)}},\ P(x = 0) = (1 - p_{бx_{(y)}}) =$$
$$= (1 - m_{x_{(y)}}).$$

Разделим неравенства для центрального момента $\mu_{2x_{(y)}}$ на величину $m^2_{x_{(y)}}$, тогда с учетом, что $m_{x_{(y)}} = p_{бx_{(y)}}$, получим

$$0 \le \frac{\mu_{2x_{(y)}}}{m^2_{x_{(y)}}} \le \frac{p_{бx_{(y)}}(1 - p_{бx_{(y)}})}{p^2_{бx_{(y)}}} = \frac{1 - p_{бx_{(y)}}}{p_{бx_{(y)}}},$$

или

$$0 \le \frac{\sigma_{x_{(y)}}}{m_{x_{(y)}}} = \breve{V}_{x_{(y)}} \le \frac{\sqrt{p_{бx_{(y)}}(1 - p_{бx_{(y)}})}}{p_{бx_{(y)}}} = \breve{V}_{бx_{(y)}}.$$

Откуда следует, что модифицированные коэффициенты вариации $\breve{V}_{x_{(y)}}$ у любых законов распределения вероятностей ограничены снизу «0», а сверху коэффициентом вариации распределения Бернулли с параметром, совпадающим с первым начальным моментом изучаемого распределения, приведенного к интервалу $[0;1]$ – $m_{x_{(y)}}$. Модифицированный коэффициент вариации может определяться также по формуле (второй тип):

$$\hat{V}_y = \sigma_y\big/(y^+ - m_y).$$

Модифицированный коэффициент вариации $\hat{V}_y$ равносилен по своей информативности модифицированному коэффициенту $\breve{V}_y$.

Действительно, после преобразований формулы для коэффициента $\hat{V}_y$ получим

$$\hat{V}_y = \frac{\sigma_y}{y^+ - m_y} = \frac{\sigma_y(m_y - y^-)}{(m_y - y^-)(y^+ - m_y)} =$$
$$= \breve{V}_y \frac{p_{бm_y}}{(1 - p_{бm_y})} \Rightarrow \breve{V}_y \frac{p_{бm_y}}{(1 - p_{бm_y})} \frac{p_{бm_y}}{p_{бm_y}} =$$
$$= \breve{V}_y\big/(\breve{V}_{бm_y})^2,$$

или $\hat{V}_y = \breve{V}_y \dfrac{p_{бm_y}}{(1 - p_{бm_y})} \dfrac{(1 - p_{бm_y})}{(1 - p_{бm_y})} = \breve{V}_y(\hat{V}_{бm_y})^2$.

Из последних соотношений следует равенство $\breve{V}_y p_{бm_y} = \hat{V}_y(1 - p_{бm_y})$. Учитывая инвариантность коэффициентов вариации к линейному преобразованию случайных величин, для распределений вероятностей, приведенных к интервалу $[0;1]$, будут справедливы соотношения и преобразования:

$$\breve{V}_{x_{(y)}} = \frac{\sigma_{x_{(y)}}}{m_{x_{(y)}}} = \frac{\sigma_{x_{(y)}}(1 - m_{x_{(y)}})}{m_{x_{(y)}}(1 - m_{x_{(y)}})} = \hat{V}_{x_{(y)}} \frac{(1 - p_{бx_{(y)}})}{p_{бx_{(y)}}} =$$
$$= \hat{V}_{x_{(y)}} \frac{(1 - p_{бx_{(y)}})}{p_{бx_{(y)}}} \frac{(1 - p_{бx_{(y)}})}{(1 - p_{бx_{(y)}})} \Rightarrow \hat{V}_{x_{(y)}}\big/(\hat{V}_{бx_{(y)}})^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \hat{V}_{x_{(y)}}(\breve{V}_{бx_{(y)}})^2.$$

Кроме того, справедливы формулы:

$$\hat{V}_{x_{(y)}} = \breve{V}_{x_{(y)}}\big/(\breve{V}_{бm_y})^2 = \breve{V}_{x_{(y)}}(\hat{V}_{x_{(y)}})^2,$$
$$\breve{V}_{x_{(y)}} p_{бx_{(y)}} = \hat{V}_{x_{(y)}}(1 - p_{бx_{(y)}}).$$

Для суммы $(\breve{V}_y + \hat{V}_y)$ и произведения $(\breve{V}_y \times \hat{V}_y)$ модифицированных коэффициентов вариации $\breve{V}_{x_{(y)}}$ и $\hat{V}_{x_{(y)}}$ справедливы соотношения:

$$\breve{V}_y + \hat{V}_y = \breve{V}_y + \breve{V}_y \frac{p_{бy}}{(1 - p_{бy})} = \breve{V}_y \frac{1}{(1 - p_{бy})} \Rightarrow \hat{V}_y \frac{1}{p_{бy}},$$
$$\breve{V}_y \times \hat{V}_y = \breve{V}_y \times \breve{V}_y \frac{p_{бy}}{(1 - p_{бy})} = (\breve{V}_y)^2 \frac{p_{бy}}{(1 - p_{бy})} =$$
$$= (\breve{V}_y)^2\big/(\breve{V}_{бy})^2 \Rightarrow (\breve{V}_y \times \hat{V}_y = (\breve{V}_y)^2(\hat{V}_{бy})^2) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (\breve{V}_y \times \hat{V}_y = (\hat{V}_y)^2(\breve{V}_{бy})^2).$$

Введем модифицированный коэффициент вариации (третий тип), который характеризует изменчивость случайных величин относительно всего интервала их определения, и произведем его преобразования:

$$\vec{V}_y = \frac{\sigma_y}{(y^+ - y^-)} = \frac{\sigma_y}{(m_y - y^-)}\frac{(m_y - y^-)}{(y^+ - y^-)} = \breve{V}_y p_{бy}, \text{ или}$$

$$\vec{V}_y = \frac{\sigma_y}{(y^+ - y^-)} = \frac{\sigma_y}{(y^+ - m_y)}\frac{(y^+ - m_y)}{(y^+ - y^-)} = \widehat{V}_y(1 - p_{бy}).$$

Из последних соотношений следует

$$\vec{V}_y = \frac{1}{2}(\breve{V}_y p_{бy} + \widehat{V}_y(1 - p_{бy})).$$

Содержание и взаимосвязь модифицированных коэффициентов вариации пояснены на рис. 3. Анализ этих графиков показывает, что применение в отдельности только одного из коэффициентов вариации $\breve{V}_y$ или $\widehat{V}_y$ не полностью отражает структуру распределения вероятностей.

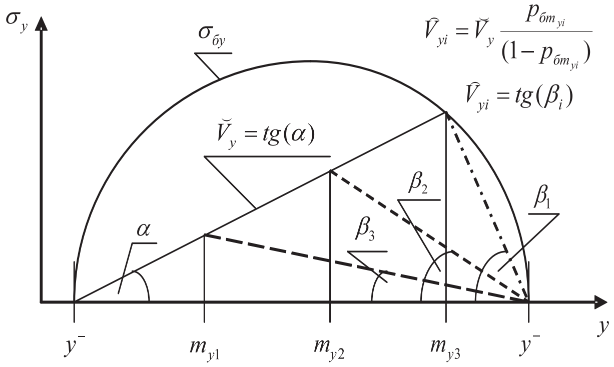

Рис. 3. Содержание модифицированных коэффициентов вариации

В коэффициентах $\breve{V}_y$, $\widehat{V}_y$ не отражается область, в которой могут быть случайные величины. Так, у распределений вероятностей с математическими ожиданиями, отвечающими условию

$$0 \le m_y \le \frac{(y^+ - y^-)}{2} + \sqrt{((\frac{(y^+ - y^-)}{2})^2 - (\vec{V}_y)^2)},$$

например, у распределений с математическими ожиданиями m_{y1}, m_{y2}, m_{y3} (рис. 3), значения коэффициента вариации $\breve{V}_y$ совпадают $\breve{V}_{m_{y1}} = \breve{V}_{m_{y2}} = \breve{V}_{m_{y3}}$, однако у этих распределений значения коэффициентов вариации $\widehat{V}_y$ различаются $\widehat{V}_{m_{y1}} < \widehat{V}_{m_{y2}} < \widehat{V}_{m_{y3}}$. То есть приведенные на рис. 3 характеристики распределений вероятностей в пространстве $m_y \times \sigma_y$ принадлежат распределениям с различной структурой. Представляет как теоретический, так и практический интерес определение области (интервалов) возможных значений модифицированных коэффициентов вариации при фиксированных значениях математического ожидания – m_y (первый случай) и фиксированных значениях среднеквадратического отклонения – σ_y (второй случай).

1. Область возможных значений модифицированных коэффициентов вариации $\breve{V}_y$, $\widehat{V}_y$ определяется интервалом возможных значений среднеквадратического отклонения σ_{m_y}. При фиксированном значении математического ожидания $m_y \in [y^-; y^+]$ эта область равна $[0; \sqrt{(m_y - y^-)(y^+ - m_y)}]$. Тогда для модифицированных коэффициентов вариации будут справедливы соотношения:

$$0 \le \breve{V}_{m_y} \le \breve{V}_{бm_y} = \frac{\sigma_{бy}}{m_y - y^-} = \sqrt{\frac{(m_y - y^-)(y^+ - m_y)}{m_y - y^-}};$$

$$0 \le \widehat{V}_{m_y} \le \widehat{V}_{бm_y} = \frac{\sigma_{бm_y}}{y^+ - m_y} = \sqrt{\frac{(m_y - y^-)(y^+ - m_y)}{y^+ - m_y}};$$

$$\vec{V}_{m_y} = \frac{\sigma_{бm_y}}{(y^+ - y^-)} = const;$$

$$\breve{V}_{(m_y = 2\frac{(y^+ - y^-)}{2})} = \widehat{V}_{(m_y = \frac{(y^+ - y^-)}{2})} = \vec{V}_{б(m_y = \frac{(y^+ - y^-)}{2})} = 1{,}0.$$

На рис. 4 приведена иллюстрация модифицированных коэффициентов вариации для распределений вероятностей с одинаковыми значениями m_y.

2. Для конкретного значения среднеквадратического отклонения σ_y существует множество классов распределений вероятностей с различными значениями математического ожидания m_y из интервала $[y^-; y^+]$.

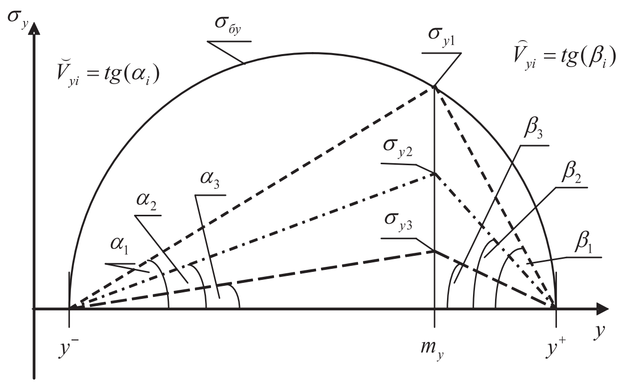

Рис. 4. Иллюстрация модифицированных коэффициентов вариации для распределения вероятностей с одинаковыми значениями m_y

При этом область возможных значений математических ожиданий зависит от величины σ_y. Границы этой области определяются исходя из свойств обобщенного распределения Бернулли

$$(\sigma_{бy} = \sqrt{(m_{y|\sigma_y}(1-m_{б|\sigma_y}))}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (m_{y|б\sigma_y} = \frac{(y^+-y^-)}{2} \pm \sqrt{(\frac{(y^+-y^-)^2}{4} - (\sigma_y)^2)}).$$

При заданной величине σ_y область возможных значений $m_{y|\sigma_y}$ задается формулой

$$\frac{(y^+-y^-)}{2} - \sqrt{(\frac{(y^+-y^-)^2}{4} - (\sigma_x)^2)} \le m_{y|\sigma_y}$$

$$m_{y|\sigma_y} \le \frac{(y^+-y^-)}{2} + \sqrt{(\frac{(y^+-y^-)^2}{4} - (\sigma_y)^2)}.$$

Значения математического ожидания при заданной величине σ_y позволяют определить область возможных значений модифицированных коэффициентов вариации:

$$\frac{\sigma_y}{\frac{(y^+-y^-)}{2} + \sqrt{(\frac{(y^+-y^-)^2}{4} - (\sigma_y)^2)}} \le \frac{\sigma_y}{m_y - y^-} =$$

$$= \breve{V}_{m_y|\sigma_y} \le \frac{\sigma_y}{\frac{(y^+-y^-)}{2} - \sqrt{(\frac{(y^+-y^-)^2}{4} - (\sigma_y)^2)}};$$

$$\breve{V}_{б|\sigma_y} \le \breve{V}_{m_y|\sigma_y} \le \breve{V}_{б|\sigma_y};$$

$$\frac{\sigma_y}{\frac{(y^+-y^-)}{2} + \sqrt{(\frac{(y^+-y^-)^2}{4} - (\sigma_y)^2)}} \ge \frac{\sigma_y}{m_y - y^-} =$$

$$= \widehat{V}_{m_y|\sigma_y} \ge \frac{\sigma_x}{\frac{(y^+-y^-)}{2} - \sqrt{(\frac{(y^+-y^-)^2}{4} - (\sigma_y)^2)}};$$

$$\widehat{V}_{б|\sigma_y} \ge \widehat{V}_{m_y|\sigma_y} \ge \widehat{V}_{б|\sigma_y};$$

$$\overleftrightarrow{V}_{m_y|\sigma_y} = \frac{\sigma_y}{(y^+-y^-)} = \sigma_y(const), \overleftrightarrow{V}_{бm_y|\sigma_y} \ge \overleftrightarrow{V}_{m_y|\sigma_y} \ge 0 \cdot$$

На рис. 5. приведена иллюстрация модифицированных коэффициентов вариации для распределений вероятностей с одинаковыми значениями σ_v.

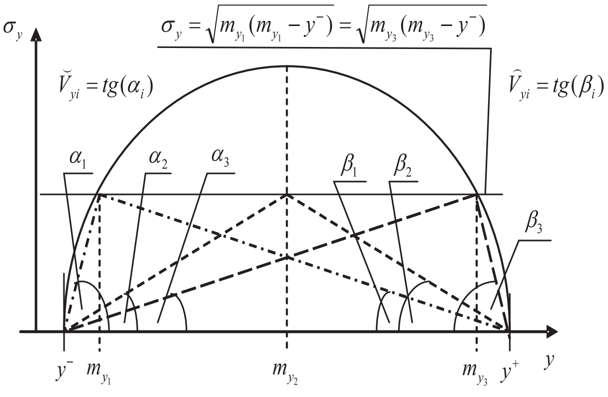

Рис. 5. Иллюстрация модифицированных коэффициентов вариации для распределения вероятностей с одинаковыми значениями σ_y

Полученные соотношения имеют высокую информативность и позволяют достаточно глубоко исследовать структурные свойства распределений вероятностей. В практике статистического анализа часто встречаются задачи, связанные с цензурированием статистических данных. Одним из методов цензурирования сводится к исключению данных из выборки, имеющих три (чаще всего), четыре и более стандартных отклонений от средних значений m_y: $3\sigma_y$, $4\sigma_y$ и т.д.

Рассмотрим распределение вероятностей, которое определено в интервале $[y^-; y^+]$. Пусть это распределение имеет математическое ожидание и среднеквадратическое отклонение соответственно m_y; σ_y. Тогда величины, обратные значениям коэффициентов вариации

$$\frac{1}{\breve{V}_y} = \frac{m_y - y^-}{\sigma_y} = \breve{k}_y, \quad \frac{1}{\widehat{V}_y} = \frac{y^+ - m_y}{\sigma_y} = \widehat{k}_y,$$

$$\frac{1}{\overleftrightarrow{V}_y} = \frac{y^+ - y^-}{\sigma_y} = \overleftrightarrow{k}_y,$$

будут характеризовать число стандартных отклонений, которые укладываются в области соответственно $[y^-; m_y]$, $[m_y; y^+]$, $[y^-; y^+]$. При этом будет справедливо равенство $\overleftrightarrow{k}_y = \breve{k}_y + \widehat{k}_y$. У симметричных распределений $\breve{k}_y = \widehat{k}_y = \overleftrightarrow{k}_y / 2$. Выполнение неравенств $\breve{k}_y < \widehat{k}_y$ или $\breve{k}_y > \widehat{k}_y$ свидетельствует о левой или правой асимметрии распределения.

Например, у равномерного распределения, которое является симметричным

$$\breve{k}_y = \widehat{k}_y = \frac{(y^+ - y^-)2}{(y^- + y^+)\sqrt{12}},$$

при

$$y^+ = 1,\ y^- = 0,\ \breve{k}_y = \widehat{k}_y = \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0{,}58;\ \overleftrightarrow{k}_y \approx 1{,}16.$$

Выполнение условий $\breve{k}_y << \widehat{k}_y, \breve{k}_y >> \widehat{k}_y$ говорит о том, что распределения имеют правые или левые длинные (тяжелые) «хвосты». Полученные формулы могут быть использованы для оценки длин (тяжестей) «хвостов» распределений и позволяют формулировать требования к величине стандартного отклонения, обеспечивающего использование критерия типа $k\sigma$.

На рис. 6 приведены зависимости модифицированных коэффициентов вариации от математического ожидания для распределения Бернулли. На рис. 7 представлены структурные характеристики одного и того же класса распределения вероятностей, заданных в различных интервалах определения случайных величин.

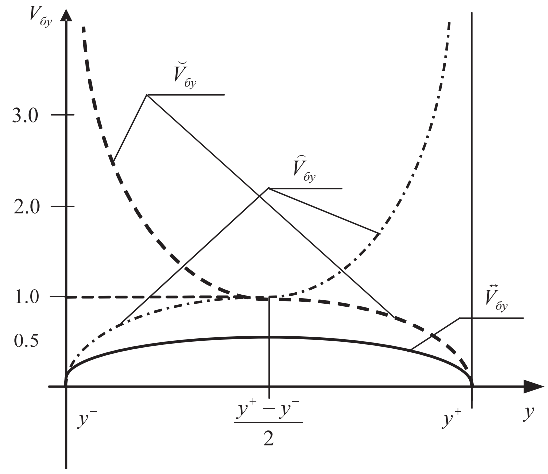

Рис. 6. Зависимости модифицированных коэффициентов вариации от математического ожидания для распределения Бернулли

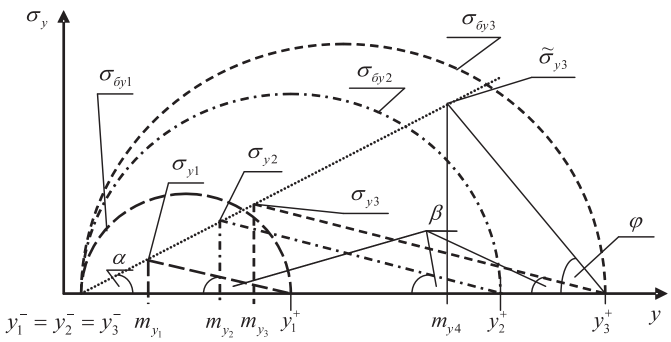

Рис. 7. Структурные характеристики одного и того же класса распределения вероятностей, заданных в разных интервалах определения случайных величин

Из анализа структурных характеристик распределений, которые представлены на рис. 7, следуют соотношения:

$$(\breve{V}_{m_{y1}} = \frac{\sigma_{y1}}{m_{y1} - y_1^-}) = (\breve{V}_{m_{y2}} = \frac{\sigma_{y2}}{m_{y2} - y_2^-}) =$$

$$= (\breve{V}_{m_{y3}} = \frac{\sigma_{y3}}{m_{y3} - y_3^-}),$$

$$(\widehat{V}_{m_{y1}} = \frac{\sigma_{y1}}{y_1^+ - m_{y1}}) = (\widehat{V}_{m_{y2}} = \frac{\sigma_{y2}}{y_2^+ - m_{y2}}) =$$

$$= (\widehat{V}_{m_{y3}} = \frac{\sigma_{y3}}{y_3^+ - m_{y3}}).$$

Одновременное выполнение этих условий говорит о совпадении структур распределений вероятностей в пространстве $\sigma_y \times m_y$ независимо от длины и положения на числовой оси интервала их определения. В противном случае (например, для коэффициента $\widehat{V}_{m_{y4}}$ – см. рис. 7) распределения вероятностей будут относиться к различным классам.

Выводы

1. Модифицированные коэффициенты $\breve{V}_y, \widehat{V}_y, \vec{V}_y$ ограничены снизу «0», а сверху значениями коэффициента вариации обобщенного распределения Бернулли. Они характеризуют рассеяния случайных величин относительно интервалов соответственно $[y^-; m_y]$, $[m_y; y^+]$, $[y^-; y^+]$.

2. Модифицированные коэффициенты вариации могут быть использованы для определения симметричности распределений вероятностей. Распределения являются: при $\breve{V}_y = \widehat{V}_y$ – симметричными; при $\breve{V}_y > \widehat{V}_y$ – левоасимметричными; при $\breve{V}_y < \widehat{V}_y$ – правоасимметричными.

3. Анализ модифицированных коэффициентов вариации различных распределений должен проводиться в одинаковом интервале (выполнение принципа сопоставимости). Наиболее целесообразным является рассмотрение распределений вероятностей, приведенных к интервалу $[0; 1]$.

4. Важным свойством модифицированных коэффициентов вариации является их информативность для оценки длины (тяжести) «хвостов» распределений вероятностей. Так, для симметричных распределений длина левых и правых «хвостов» тем выше, чем меньше значения коэффициента вариации $\vec{V}_y$. Неравенства $\breve{V}_y >> \widehat{V}_y$ и $\breve{V}_y << \widehat{V}_y$ говорят о том, что распределения вероятностей имеют, соответственно, правые и левые длинные «хвосты».

5. Полученные результаты показывают на фундаментальную значимость распределения Бернулли в теории вероятностей и математической статистике. Структурные свойства распределений Бернулли выступают в качестве граничащих для аналогичных характеристик всевозможных распределений вероятностей, определенных в ограниченных интервалах.

Литература

1. Математическая энциклопедия. Т.1. М.: Советская энциклопедия, 1977. – 1152 с.
2. Айвазян С.А., Мхитарян В.С. Прикладная статистика и основы эконометрики. М.: Статистика, 1974. – 240 с.
3. Лившиц Б.С., Пшеничников А.П., Харкевич А.Д. Теория телетрафика. М.: Связь, 1979. – 224 с.
4. Шнепс М.А. Системы распределения информации. Методы расчета. М.: Связь, 1979. – 344 с.

5. Уразбахтин А.И., Уразбахтин Р.А. Свойства моментов приведенных распределений // Телекоммуникации. №10, 2003. – С. 7-11.
6. Уразбахтин А.И., Уразбахтин Р.А. Свойства распределений случайных величин, заданных в ограниченном интервале // Телекоммуникации. №4, 2006. – С. 31-37.
7. Закс Л. Статистическое оценивание. М.: Статистика, 1976. – 320 с.

MODIFIED COEFFICIENTS OF VARIATION AND THEIR INFORMATIVE NESS

Urazbakhtin A.I., Urazbakhtin R.A.

We investigate informative ness of coefficient of variation random variables. We are proposing the modified coefficients of variation, studying their properties and informative ness.

Keywords: *stochastic processes, the coefficients of variation, Bernoulli's principle, informative evaluation.*

Уразбахтин Альберт Ильдусович, к.т.н., военнослужащий. Тел. (8-471) 258-33-63. E-mail: ildus41@mail.ru

Уразбахтин Ринат Альбертович, аспирант Гуманитарно-технического института (г. Курск). Тел. (8-471) 256-67-93.

ТЕХНОЛОГИИ ТЕЛЕКОММУНИКАЦИЙ

УДК 621.396.2

ЛОКАЛИЗАЦИЯ ДЕФЕКТОВ ОБОЛОЧКИ ВОЛОКОННОГО СВЕТОВОДА НА КОРОТКИХ ДЛИНАХ ОПТИЧЕСКОГО ВОЛОКНА

Бурдин В.А., Дмитриев Е.В.

В работе описано физическое моделирование ОВ с дефектом оболочки и экспериментальные исследования, в результате которых было подтверждено предположение о возможности локализации дефекта по результатам сравнения поляризационных характеристик обратного рассеяния короткого участка оптического волокна (ОВ), измеренных до и после появления дефекта, при использовании в качестве меры сравнения параметра корреляции. Представлены примеры локализации дефекта на длине ОВ до 2 км с погрешностью менее 100 м.

Ключевые слова: волоконный световод, оптическое волокно, оболочка, сердцевина, микротрещина, характеристика обратного рассеяния, поляризационный импульсный оптический рефлектометр.

Постановка задачи

Для ряда практических приложений представляет интерес локализация дефектов оболочки волоконного световода (ВС) на коротких длинах ОВ, в частности, на строительных длинах оптического кабеля (ОК). Здесь ОВ – это ВС в первичном защитно-упрочняющем покрытии (ПЗУП). Хорошо известно, что когда к волокну прикладывается нагрузка, дефекты выступают в роли концентраторов напряжения [1-3]. Для измерений распределений механических напряжений вдоль ОВ применяются различные методы [4], в том числе базирующиеся на применении поляризационного оптического рефлектометра – POTDR (Polarization Optical Time Domain Reflectometer) [5; 7]. Принципы работы POTDR известны более 25 лет [6]. В простейшем случае это обычный работающий во временной области оптический рефлектометр обратного релеевского рассеяния – OTDR (Optical Time Domain Reflectometer), на выходе которого включен поляризатор [6-7]. В результате измеряется временная зависимость мощности оптического излучения обратного релеевского рассеяния одной поляризации – поляризационная характеристика обратного рассеяния ОВ. Традиционные методы обработки поляризационных характеристик обратного рассеяния, базирующиеся на определении скользящего среднего значения длины биений ОВ, неприменимы для выявления локальных дефектов – одиночных микротрещин, изгибов. Известен способ локализации дефектов в сердцевине ОВ, основанный на сравнении характеристик обратного рассеяния ОВ, измеренных до и после появления дефекта, и вычислении коэффициента корреляции между ними [8]. Было предположено, что, сравнивая поляризационные характеристики обратного рассеяния участков ОВ, измеренные до и после