

ОПРЕДЕЛЕНИЕ РАЗРЯДНОСТИ КОЭФФИЦИЕНТОВ ЦИФРОВЫХ ФИЛЬТРОВ

Тихобаев В.Г., Рясный Ю.В., Лубский В.В.

В статье рассмотрена методика определения числа разрядов двоичного кода при квантовании коэффициентов передаточной функции цифрового фильтра, обеспечивающего заданные требования к точности амплитудно-частотной характеристики. Приведена методика вычисления абсолютной погрешности импульсной характеристики, появляющейся вследствие ограничения числа разрядов.

Ключевые слова: цифровой фильтр, передаточная функция, квантование коэффициентов, импульсные характеристики.

Введение

Известно, что ошибки квантования коэффициентов передаточной функции цифровых фильтров или коэффициентов импульсной характеристики КИХ-фильтров, обусловленные операцией округления или усечения длительности кодового слова, не относятся к шумам квантования и учитываются в искажении частотных характеристик фильтра [1]. При анализе искажений частотных характеристик предполагается, что ошибка округления при квантовании коэффициентов фильтра является случайной величиной с равномерным законом распределения вероятностей, что позволяет оценить не только среднеквадратическое отклонение амплитудно-частотной характеристики (АЧХ) реализованного фильтра от АЧХ идеализированного фильтра, но и определить число разрядов кодовых слов коэффициентов исходя из заданной погрешности на АЧХ фильтра [2].

При этом влияние квантования коэффициентов учитывается введением паразитного фильтра, включенного параллельно идеализированному фильтру, а определение разрядности производится методом перебора, последовательно увеличивая число разрядов [3]. Имеются и другие методы определения разрядности коэффициентов, например, метод, основанный на использовании функции чувствительности амплитудно-частотной характеристики фильтра (или положения полюсов или нулей на z -плоскости) к изменению коэффициентов [4]. В настоящей статье исследуются не рассмотренные в вышеупомянутых работах методы определения разрядности коэффициентов рекурсивных фильтров при заданной погрешности на искажения АЧХ фильтра.

Определение разрядности коэффициентов на основе передаточных функций

Представим передаточную функцию цифрового фильтра с точными коэффициентами в виде

$$H(z) = \frac{A_\infty(z)}{B_\infty(z)} = \frac{\sum_{m=0}^M a_m z^{-m}}{1 - \sum_{l=1}^N b_l z^{-l}} = \frac{Y(z)}{X(z)}. \quad (1)$$

При квантовании вместо точных значений коэффициентов a_m и b_l получаем приближенные их значения $\bar{a}_m$ и $\bar{b}_l$, при этом ошибки квантования коэффициентов могут быть представлены следующим образом

$$e_{am} = a_m - \bar{a}_m; \quad (2)$$

$$e_{bl} = b_l - \bar{b}_l. \quad (3)$$

Пусть $x(nT)$ и $y(nT)$ – входная и выходная последовательности идеального фильтра, а $\bar{y}(nT)$ – отклик реального фильтра на входную последовательность $x(nT)$. Используя разностное уравнение, найдем ошибку выходной последовательности из-за квантования коэффициентов [1]:

$$\begin{aligned} e(nT) = y(nT) - \bar{y}(nT) &= \left[\sum_{m=0}^M a_m x(nT - mT) + \sum_{l=1}^N b_l y(nT - lT) \right] - \\ &- \left[\sum_{m=0}^M \bar{a}_m x(nT - mT) + \sum_{l=1}^N \bar{b}_l y(nT - lT) \right] = \\ &= \sum_{m=0}^M e_a(m) x(nT - mT) + \sum_{l=1}^N e_b(l) b_l y(nT - lT) + \\ &+ \sum_{l=1}^N b_l e(nT - lT) - \sum_{l=1}^N e_b(l) e(nT - lT). \end{aligned} \quad (4)$$

Пренебрегая последним слагаемым как величиной второго порядка малости, заменим дискретные свертки в выражении (4) произведением z -изображений соответствующих функций:

$$E_a(z) = \sum_{m=0}^M e_a(m) z^{-m}; \quad (5)$$

$$E_b(z) = \sum_{l=1}^N e_b(l) z^{-l}; \quad (6)$$

$$E(z) = \sum_{n=0}^N e(nT) z^{-n}; \quad (7)$$

$$B_\infty(z) = 1 - \sum_{l=1}^N b_l z^{-l}; \quad (8)$$

имеем

$$E(z)B_\infty(z) = E_a(z)X(z) + E_b(z)Y(z). \quad (9)$$

Поделим правую и левую части уравнения (9) на $H_\infty(z)B_\infty(z) = A_\infty(z)$, тогда, учитывая (1), получим

$$\frac{E(z)}{H_\infty(z)} = \left(\frac{E_a(z)}{A_\infty(z)} + \frac{E_b(z)}{B_\infty(z)} \right) X(z). \quad (10)$$

Если входным сигналом (входной последовательностью) является дискретная импульсная функция

$$\delta(nT) = 1, \quad (11)$$

тогда уравнение (10) можно записать в виде

$$\frac{E(z)}{H_\infty(z)} = \Delta H(z) \quad (12)$$

и рассматривать его как относительную погрешность передаточной функции, обусловленную квантованием коэффициентов передаточной функции.

Из выражения (12) следует, что максимальные значения погрешностей достигаются в нулях и полюсах передаточной функции $H(z)$ фильтра. Заменяя переменную z на $e^{j\omega T}$, получим выражение для относительной погрешности частотной характеристики фильтра в виде

$$\frac{E(e^{j\omega T})}{H_\infty(e^{j\omega T})} = \left(\frac{E_a(e^{j\omega T})}{A_\infty(e^{j\omega T})} + \frac{E_b(e^{j\omega T})}{B_\infty(e^{j\omega T})} \right). \quad (13)$$

Полагая, что ошибки $e_a(m)$ и $e_b(l)$ коэффициентов a_m и b_l передаточной функции фильтра из-за операции округления независимы друг от друга являются случайными величинами с нулевыми средними и одинаковыми максимальными значениями, равными половине шага квантования Δ :

$$|e_a(m)| = \frac{\Delta}{2} = 2^{-(b+1)}, \quad |e_b(l)| = \frac{\Delta}{2} = 2^{-(b+1)}, \quad (14)$$

где b – разрядность двоичного кода, представим относительную погрешность АЧХ как среднеквадратичную сумму ошибок квантования следующим образом

$$\Delta_{ACH} = \frac{E(e^{j\omega T})}{H_\infty(e^{j\omega T})} = \sqrt{\frac{\sum_{m=0}^M |\Delta e^{j\omega m T}|^2}{|A_\infty(e^{j\omega T})|^2} + \frac{\sum_{m=0}^M |\Delta e^{j\omega m T}|^2}{|B_\infty(e^{j\omega T})|^2}} = \frac{2^{-b}}{2} \sqrt{\frac{\sum_{m=0}^M |\Delta e^{j\omega m T}|^2}{|A_\infty(e^{j\omega T})|^2} + \frac{\sum_{m=0}^M |\Delta e^{j\omega m T}|^2}{|B_\infty(e^{j\omega T})|^2}}. \quad (15)$$

Решив уравнение (15) относительно величины b , определим разрядность коэффициентов фильтра при заданной относительной погрешности Δ_{ACH} амплитудно-частотной характеристики фильтра по вероятностной модели ошибок квантования коэффициентов

$$b = \text{int} \left(\log_2 \left(\sqrt{\frac{M+1}{|A_\infty(e^{j\omega_k T})|^2} + \frac{L}{|B_\infty(e^{j\omega_k T})|^2}} \right) - \log_2(\Delta_{ACH}) \right) - 1, \quad (16)$$

где ω_k – соответствующие частоты нулей и полюсов частотной характеристики $H(e^{j\omega T})$. При этом разрядность выбирается наибольшей из полученных значений разрядностей на частотах ω_k .

Для детерминированной модели ошибок квантования разрядность коэффициентов определяется по формуле

$$b = \text{int} \left(\log_2 \left(\left| \frac{M+1}{A_\infty(e^{j\omega_k T})} \right| + \left| \frac{N}{B_\infty(e^{j\omega_k T})} \right| \right) - \log_2(\Delta_{ACH}) \right) - 1. \quad (17)$$

При этом заметим, что коэффициенты, точные значения которых кратны 2^{-b} , сохраняют свои значения, и их не надо учитывать при определении

погрешности частотной характеристики фильтра и соответственно при расчете разрядности.

Если требование на АЧХ фильтра задано на дисперсию частотной характеристики фильтра, тогда представив дисперсию в виде

$$\begin{aligned} \overline{D_H} = \overline{\sigma_H^2} &= \frac{T}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} \left| H'(e^{j\omega T}) - H_\infty(e^{j\omega T}) \right|^2 d\omega = \\ &= \frac{T}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} \left| \frac{E_a(e^{j\omega T}) - E_b(e^{j\omega T}) H_\infty(e^{j\omega T})}{B_\infty(e^{j\omega T})} \right|^2 d\omega = \\ &= \frac{T}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} \left| H_{nap}(e^{j\omega T}) \right|^2 d\omega, \quad (18) \end{aligned}$$

где черта сверху означает усреднение по времени. Полагая, что входная последовательность $x(nT)$, ошибки $e_a(m)$ и $e_b(l)$ статистически независимые величины и что

$$\begin{aligned} \overline{\sigma_N^2} &= \frac{T}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} \left| H_{nap}(e^{j\omega T}) \right|^2 d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi j} \int_C H_{nap}(z) H_{nap}(z^{-1}) z^{-1} dz, \quad (19) \end{aligned}$$

из формулы (18) с учетом (10) и (19) имеем [1]:

$$\begin{aligned} \overline{\sigma_N^2} &= E \left\{ \frac{1}{2\pi j} \int_C \left[\frac{E_a(z) - E_b(z) \cdot H_\infty(z)}{B_\infty(z)} \right] \times \right. \\ &\quad \left. \times \left[\frac{E_a(z^{-1}) - E_b(z^{-1}) \cdot H_\infty(z^{-1})}{B_\infty(z^{-1})} \right] \frac{dz}{z} \right\} \\ &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \overline{e_a^2(nT)} \right) \frac{1}{2\pi j} \int_C \frac{1}{B_\infty(z) B_\infty(z^{-1})} \frac{dz}{z} + \\ &+ \left(\sum_{n=1}^{\infty} \overline{e_b^2(nT)} \right) \frac{1}{2\pi j} \int_C \frac{A_\infty(z) A_\infty(z^{-1})}{|B_\infty(z^{-1})|^2 |B_\infty(z)|^2} \frac{dz}{z}, \quad (20) \end{aligned}$$

где символ E означает усреднение по времени. При квантовании коэффициентов ошибки округления $e_a(m)$ и $e_b(l)$ удовлетворяют соотношениям

$$|e_a(m)| \leq \frac{\Delta}{2}; \quad |e_b(l)| \leq \frac{\Delta}{2}; \quad (21)$$

$$\sum_{m=0}^M \overline{e_a^2(m)} = (M+1) \frac{\Delta^2}{12}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \overline{e_b^2(nT)} = N \frac{\Delta^2}{12}. \quad (22)$$

С учетом (21)-(22) определяем разрядность коэффициентов по формуле

$$b = \text{int} \left[\log_2 \sqrt{\frac{M+1}{2\pi j} \int_C \frac{1}{B(z)} \frac{dz}{z} + \frac{N}{2\pi j} \int_C \frac{A_\infty(z) A_\infty(z^{-1})}{B_1(z)} \frac{dz}{z}} - \log_2 \sqrt{D_H} - 1,79 \right], \quad (23)$$

здесь

$$\begin{aligned} B(z) &= B_\infty(z) B_\infty(z^{-1}); \\ B_1(z) &= |B_\infty(z^{-1})|^2 |B_\infty(z)|^2. \end{aligned}$$

Определение разрядности коэффициентов на основе функций чувствительности

Чувствительностью некоторой функции $F(x_i)$ к изменению параметра x_i называется предел отношения относительного изменения функции $F(x_i)$ к относительному изменению параметра x_i

$$\begin{aligned} S_{x_i}^{F(x_i)} &= \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \frac{\Delta F(x_i)}{\Delta x_i} \bigg/ \frac{F(x_i)}{x_i} = \\ &= \frac{\partial F(x_i)}{\partial x_i} \frac{x_i}{F(x_i)}. \quad (24) \end{aligned}$$

В качестве функции $F(x_i)$ может быть выбрана комплексная частотная характеристика цифрового фильтра или такая величина, как полюс передаточной функции. В качестве параметра x_i могут быть взяты коэффициенты фильтра или координаты полюсов и нулей на комплексной плоскости z . Функции чувствительности $S_{a_m}^{H(z)}$ передаточной функции $H(z)$ фильтра к изменению коэффициентов a_m и b_l имеют вид

$$S_{a_m}^{H(z)} = \frac{\partial H_\infty(z)}{\partial a_m} \frac{a_m}{H_\infty(z)} = \frac{a_m z^{-m}}{A_\infty(z)}; \quad (25)$$

$$S_{b_l}^{H(z)} = \frac{\partial H_\infty(z)}{\partial b_l} \frac{b_l}{H_\infty(z)} = \frac{b_l z^{-m}}{A_\infty(z)}. \quad (26)$$

Полагая, как и раньше, что ошибки округления при квантовании коэффициентов

$$|e_a(m)| = \frac{\Delta}{2} = 2^{-(b+1)}, \quad |e_b(l)| = \frac{\Delta}{2} = 2^{-(b+1)}$$

одинаковы для всех коэффициентов, запишем относительные погрешности квантованных коэффициентов в виде

$$\delta_{am} = \frac{\Delta}{2a_l}, \quad \delta_{bl} = \frac{\Delta}{2b_l}. \quad (27)$$

Поскольку требования заданы на АЧХ фильтра, то при определении разрядности перейдем в частотную область, разделим функции чувствительности в частотной области на значения соответствующих коэффициентов, просуммируем полученные выражения и получим нормированную суммарную чувствительность

$$\underline{S}_{\Sigma}^{H(e^{j\omega T})}(\omega_k) = \sum_{m=0}^M \frac{S_{am}^{H(e^{j\omega T})}(\omega_k)}{a_m} + \sum_{l=0}^N \frac{S_{bl}^{H(e^{j\omega T})}(\omega_k)}{b_l}. \quad (28)$$

Определив максимальное значение суммарной чувствительности, запишем относительную погрешность АЧХ фильтра

$$\Delta_{ACH} = \frac{\Delta H(j\omega_k)}{H(j\omega_k)} = \underline{S}_{\Sigma \max}^{H(e^{j\omega T})}(\omega_k) 2^{-(b+1)}. \quad (29)$$

Из уравнения (29) находим разрядность коэффициентов по детерминированной модели ошибок

$$b = \text{int} \left[\log_2 \left| \underline{S}_{\Sigma \max}^{H(e^{j\omega T})}(\omega_k) \right| - \log_2 (\Delta_{ACH}) \right] - 1. \quad (30)$$

Разрядность коэффициентов по вероятностной модели ошибок можно найти, если в формулу (29) подставить среднеквадратичное значение суммарной нормированной чувствительности

$$\underline{S}_{\Sigma}^{H(e^{j\omega T})}(\omega_k) = \sqrt{\frac{\left| \underline{S}_{am}^{H(e^{j\omega T})}(\omega_k) \right|^2}{a_m^2} + \frac{\left| \underline{S}_{bl}^{H(e^{j\omega T})}(\omega_k) \right|^2}{b_m^2}}, \quad (31)$$

тогда

$$b = \text{int} \left[\log_2 \left(\frac{\left| \underline{S}_{am}^{H(e^{j\omega T})}(\omega_k) \right|^2}{a_m^2} + \frac{\left| \underline{S}_{bl}^{H(e^{j\omega T})}(\omega_k) \right|^2}{b_m^2} \right) - \log_2 \Delta_{ACH} \right] - 1. \quad (32)$$

Можно показать существование глубокой связи между определением разрядности коэффициентов по формулам (16)-(17) и по формулам

(31)-(32). Если функции чувствительности – см. формулы (25)-(26), умножить на относительные величины ошибки квантования соответствующих коэффициентов – см. формулу (27), и сложить полученные результаты, то получим выражение относительной погрешности передаточной функции (10) вида

$$\begin{aligned} \underline{S}_{\Sigma}^{H(e^{j\omega T})}(\omega_k) &= \sum_{m=0}^M \frac{\underline{S}_{am}^{H_{\infty}(z)}(z) \cdot e_a(m)}{a_m} + \\ &+ \sum_{l=1}^N \frac{\underline{S}_{bl}^{H_{\infty}(z)}(z) \cdot e_b(l)}{b_l} = \\ &= \frac{\sum_{m=0}^M e_a(m) \cdot z^{-m}}{A_{\infty}(z)} + \frac{\sum_{l=1}^N e_b(l) \cdot z^{-l}}{B_{\infty}(z)} = \\ &= \frac{E_a(z)}{A_{\infty}(z)} + \frac{E_b(z)}{B_{\infty}(z)} = \frac{E(z)}{H_{\infty}(z)}. \end{aligned} \quad (33)$$

Выводы

В работе рассмотрены методы определения разрядности коэффициентов функции цифрового фильтра по заданному допустимому значению ошибки амплитудно-частотной характеристики цифрового фильтра на основе ошибки передаточной функции и на основе функции чувствительности передаточной функции к коэффициентам. Показано, что значения разрядностей коэффициентов, определяемые рассмотренными методами, совпадают, но при этом метод на основе функции чувствительности более прост. Практика применения методов показала, что для передаточной функции звена второго порядка разрядность коэффициентов, определяемая по вероятностным моделям ошибок квантования, по крайней мере, на единицу меньше разрядности коэффициентов, определяемой по детерминированным моделям ошибок квантования.

Литература

1. Рабинер Л., Гоулд Б. Теория и применение цифровой обработки сигналов. Пер. с англ. М.: Мир, 1978. – 848 с.
2. Сергиенко А.Б. Цифровая обработка сигналов. СПб.: Питер, 2002. – 608с.
3. Гольденберг Л.М., Матюшкин Б.Д., Поляк М.Н. Цифровая обработка сигналов. Справочник. М.: Радио и связь, 1985. – 312 с.
4. Ланнэ А.А., Матюшкин Б.Д., Улахович Д.А. Основы цифровой обработки сигналов. Часть 3. СПб.: Изд. ГУТ, 1998. – 268 с.

DETERMINATION OF DIGIT CAPACITY OF COEFFICIENTS DIGITAL FILTERS

Tihobaev V.G. Riasniy U.V. Lubskiy V.V.

In paper the procedure of determination of number of bits of a binary code is considered at quantization of coefficients of a transfer function of the digital filter ensuring a required capabilities to an exactitude of an amplitude-frequency characteristic. The procedure of an evaluation of the absolute error of the pulse response appearing owing to limitation of number of bits is reduced.

Keywords: digital filter, transfer function, quantization of coefficients, pulse responses.

Тихобаев Валерий Георгиевич, к.т.н., доцент Кафедры «Теория электрических цепей» (ТЭЦ) Сибирского государственного университета телекоммуникаций и информатики (СибГУТИ). Тел. (8-383) 286-80-27.

Рясный Юрий Васильевич, д.т.н., профессор Кафедры ТЭЦ СибГУТИ. Тел. (8-383) 286-80-27.

Лубский Виталий Владимирович, аспирант Кафедры физики СибГУТИ. Тел. (8-383) 286-80-18.

НОВЫЕ ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

УДК 681.518:339.13

ТЕОРЕМА ОБ УПРАВЛЯЕМОСТИ В СОЦИАЛЬНЫХ И ЭКОНОМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

Димов Э.М.

Статья посвящена управлению в социальных и экономических системах. Такие системы отличаются от технических, являясь иерархическими. И принципы управления здесь другие. Автор говорит о сложных, нерелекторных системах, где трудно найти золотую середину между централизованным и децентрализованным управлением. В этом случае хорошо применима теория управления сложными иерархическими системами.

Ключевые слова: управление, социальные и экономические системы, нерелекторные иерархические системы, централизованное и децентрализованное управление, принцип максимума Понтрягина.

Теорема была предложена Димовым Э.М. и Авдеевым О.Н. в 1975 г. и опубликована в различных частях в [1-3]. В окончательном варианте публикуется впервые. Сущность данной теоремы заключается в следующем.

Одной из особенностей социальных и экономических систем является то, что они относятся к иерархическим системам [4], чем в корне отличаются от систем технических. Иерархичность будем рассматривать в соответствии с [5].

На первый взгляд может показаться, что создание иерархической структуры – это просто добавление новых ограничений, то есть сужение множества допустимых управлений, которое неизбежно ведет к снижению показателей эффективности системы в целом. Однако известно, что в определенных условиях, без разделения функ-

ции принятия решений, такого рода система вообще не способна функционировать.

Может оказаться, например, что полностью централизованный сбор и обработка информации либо технически невозможны, либо приводят к значительному запаздыванию принятия решений, то есть к принятию решений по устаревшей информации. Одним из путей выхода из данного состояния является распараллеливание процедур сбора и обработки информации, – но тогда это приводит к децентрализации процедур принятия решений, то есть к созданию самостоятельно функционирующих подсистем, что и означает появление в системе иерархической структуры.

Заметим, что в последнем случае для принятия решений в отдельных подсистемах необходим уже значительно меньший объем информации, поэтому решение принимается в условиях значительно меньшей неопределенности. Таким образом, получается, что децентрализация управления приводит к уменьшению неопределенности, связанной со сбором и переработкой информации (информационной неопределенности).

Представим себе какой-то современный технологический процесс: например, крупное химическое производство, где существуют непрерывно контролируемые потоки реагентов $x(t)$; $y(t)$; $z(t)$ и т.д. Имеются четкая программа всего этого технологического процесса и аппаратура контроля – система датчиков, которые непрерывно регистрируют возможные отклонения от