

## ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ МНОГОСВЯЗНОЙ БИНАРНОЙ ЦЕПИ МАРКОВА

*Прозоров Д.Е., Плетнев К.В.*

Представлен расширенный вариант алгоритма численного моделирования однородной многосвязной цепи Маркова. Получены и проанализированы результаты использования предложенного алгоритма для оценки адекватности параметризации речевых сигналов цепями Маркова высших порядков.

**Ключевые слова:** многосвязная цепь Маркова, моделирование, параметризация речевых сигналов.

### Введение

Марковские модели нашли широкое применение при описании случайных процессов в радиотехнических [1-6], связанных и телекоммуникационных системах [7-9]. Простые и сложные (многосвязные) цепи Маркова используются при решении задач: фильтрации и сегментации изображений и видеопоследовательностей [10-12], поиска и кодовой синхронизации сигналов широкополосных систем связи [13-15], оценки трафика [16], параметризации и распознавания речевых сигналов [17-19] и т.д.

Однако полноценное аналитическое исследование поведения сложных нелинейных систем с протекающими в них случайными процессами зачастую затруднительно. В качестве альтернативы в таких случаях используются методы имитационного и статистического компьютерного моделирования, для которых важно наличие простых в реализации алгоритмов формирования случайных процессов с заданными характеристиками.

В данной работе предлагается расширенный вариант алгоритма формирования цепи Маркова [20-21] для случая многосвязной однородной бинарной цепи.

### Постановка задачи

Многосвязная (связности  $m$ ) однородная бинарная цепь Маркова задается вектором начальных вероятностей  $\mathbf{P} = [p_1, p_2]$  состояний  $s_1, s_2$  ( $s_i = 0, 1$ ) и условными вероятностями

$$\begin{aligned} P(s_n^{(k)} | s_i^{(k-1)} s_j^{(k-2)} \dots s_r^{(k-m)} s_q^{(k-m-1)} \dots) = \\ = P(s_n^{(k)} | s_i^{(k-1)} s_j^{(k-2)} \dots s_r^{(k-m)}), \end{aligned} \quad (1)$$

которые можно отобразить матрицей переходных вероятностей в следующем виде

$$\Pi = \begin{matrix} & \begin{matrix} \underline{s_1} & \underline{s_2} \end{matrix} \\ \begin{matrix} s_1 s_1 \dots s_1 \\ s_1 s_1 \dots s_2 \\ \dots \\ s_2 s_2 \dots s_2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} \pi_{11\dots 11} & \pi_{11\dots 12} \\ \pi_{11\dots 21} & \pi_{11\dots 22} \\ \dots & \dots \\ \pi_{22\dots 21} & \pi_{22\dots 22} \end{bmatrix} \end{matrix}, \quad (2)$$

где  $\pi_{ij\dots rn} = P(s_n^{(k)} | s_i^{(k-1)} s_j^{(k-2)} \dots s_r^{(k-m)})$ ,  
 $i, j, \dots, r, n = \overline{1, 2}$ .

Матрица (2) должна удовлетворять условию нормировки

$$\sum_{n=1}^2 \pi_{ij\dots rn} = 1; \quad i, j, \dots, r, n = \overline{1, 2}. \quad (3)$$

Требуется разработать алгоритм численного моделирования однородной цепи Маркова с заданными вектором начальных вероятностей  $\mathbf{P}$  и матрицей переходных вероятностей (2).

### Преобразование многосвязной цепи Маркова в простую цепь

Пусть многосвязная (связности  $m$ ) цепь Маркова задана двумя состояниями:  $s_1, s_2$  ( $s_i = 0, 1$ ) и условными вероятностями вида (1). Перейдем от нее к простой цепи Маркова, формируя вектор  $\vec{s}^{(k)} = (s_1^{(k)} s_2^{(k-1)} \dots s_n^{(k-m)})$  длины  $m$  [22]:

$$\begin{aligned} P(\vec{s}^{(k)} | \vec{s}^{(k-1)} \dots \vec{s}^{(k-m)}) = \\ = P(s_n^{(k)} \dots s_j^{(k-m+1)} | s_j^{(k-1)} \dots s_i^{(k-m)}), \end{aligned} \quad (4)$$

где  $i, j, k, n = \overline{1, 2}$ . При  $m = 2$  условные вероятности (1) принимают вид

$$P(\vec{s}^{(k)} | \vec{s}^{(k-1)}) = P(s_n^{(k)} s_j^{(k-1)} | s_j^{(k-1)} s_i^{(k-2)}), \quad (5)$$

где  $i, j, k, n = \overline{1, 2}$ . Число состояний полученной таким образом простой цепи Маркова равно  $M = 2^m$ . При заданных условных вероятностях (1) можно определить вероятности перехода (4)

$$P(\vec{s}^{(k)} | \vec{s}^{(k-1)}) =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{P\left(s_n^{(k)} s_i^{(k-1)} \dots s_j^{(k-m+1)}, s_i^{(k-1)} \dots s_j^{(k-m+1)} s_r^{(k-m)}\right)}{P\left(s_i^{(k-1)} \dots s_j^{(k-m+1)} s_r^{(k-m)}\right)} = \\
 &= \frac{P\left(s_n^{(k)} s_i^{(k-1)} \dots s_j^{(k-m+1)} s_r^{(k-m)}\right)}{P\left(s_i^{(k-1)} \dots s_j^{(k-m+1)} s_r^{(k-m)}\right)} = \\
 &= P\left(s_n^{(k)} \mid s_i^{(k-1)} \dots s_j^{(k-m+1)} s_r^{(k-m)}\right),
 \end{aligned} \tag{6}$$

где  $i, j, \dots, r, n = \overline{1, 2}$ . В дальнейшем будем рассматривать только однородные цепи Маркова, где условные вероятности (4) не зависят от номера шага  $k$ .

При  $m = 2$ , например, получим четыре комбинации состояний:  $s_1 s_1, s_1 s_2, s_2 s_1, s_2 s_2$  и матрицу переходных вероятностей размером  $4 \times 4$ :

$$\Pi' = \begin{matrix} & \begin{matrix} s_1 s_1 & s_1 s_2 & s_2 s_1 & s_2 s_2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} s_1 s_1 \\ s_1 s_2 \\ s_2 s_1 \\ s_2 s_2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} \pi_{111} & \pi_{112} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pi_{121} & \pi_{122} \\ \pi_{211} & \pi_{212} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pi_{221} & \pi_{222} \end{bmatrix} \end{matrix}, \tag{7}$$

где  $\pi'_{ijn} = P\left(s_n^{(k)} s_j^{(k-1)} \mid s_j^{(k-1)} s_i^{(k-2)}\right), i, j, n = \overline{1, 2}$ .

Нулевые элементы матрицы переходных вероятностей  $\Pi'$  (7) соответствуют вероятностям невозможных событий. Аналогичным образом можно получить матрицы переходных вероятностей для общего случая  $m > 2$ . Для элементов квадратных матриц вида (7) должны соблюдаться модифицированные условия нормировки

$$\sum_{n=1}^2 \pi'_{ijn} = 1, \quad i, j = \overline{1, 2} \tag{8}$$

и согласованности

$$p_{jn} = \sum_{i=1}^2 p_{ij} \pi'_{ijn}, \quad j, n = \overline{1, 2}, \tag{9}$$

где  $p_{jn} = P\left(s_n^{(k)} s_j^{(k-1)}\right)$ . В [22] показано, что для введенной таким образом простой цепи с квадратной матрицей вида (7) соблюдаются разностные уравнения

$$\mathbf{p}^{(k)} = \mathbf{p}^{(k-1)} \Pi' = \mathbf{p}^{(0)} [\Pi']^k, \tag{10}$$

где  $\mathbf{p}^{(k)}$  – вектор безусловных вероятностей всех возможных комбинаций состояний на  $k$ -ом шаге. Например, для  $m = 2$

$$\mathbf{p}^{(k)} = \left[ P\left(s_i^{(k)} s_j^{(k-1)}\right) \right], \quad i, j = \overline{1, 2}. \tag{11}$$

### Алгоритм численного моделирования многосвязной бинарной цепи Маркова

Полученные соотношения позволяют сформировать алгоритм численного моделирования многосвязной однородной бинарной цепи Маркова, заданной вектором начальных вероятностей  $\mathbf{P} = [p_1, p_2]$  состояний  $s_1, s_2$  ( $s_i = \overline{0, 1}$ ) и матрицей переходных вероятностей  $\Pi$  (2).

Алгоритм моделирования состоит из следующих шагов.

1. На основании заданной матрицы переходных вероятностей  $\Pi$  (2) и соотношения (6) формируется квадратная матрица  $\Pi$  вида (7).

2. Генерируются  $m$  значений  $\xi_1, \dots, \xi_m$  случайной величины  $\Xi$ , равномерно распределенной на интервале  $[0, 1)$ .

3. Формируются  $m$  первых состояний  $s_1, \dots, s_m$  сложной бинарной цепи Маркова в соответствии с правилом

$$s_i = \begin{cases} s_1, \xi_i \leq p_i; \\ s_2, \xi_i > p_i. \end{cases}$$

4. Генерируется  $k$ -ое значение  $\xi_k$  случайной величины  $\Xi$ , равномерно распределенной на интервале  $[0, 1)$ . Если  $\vec{s}_{k-1} = (s_i^{(k-1)} s_j^{(k-2)} \dots s_n^{(k-m)})$ ,  $i = \overline{1, 2}$ , то

$$s_k = \begin{cases} s_1, \xi_k \leq \pi'_{ij\dots n1}; \\ s_2, \xi_k > \pi'_{ij\dots n1}. \end{cases}$$

Здесь  $\pi'_{ij\dots nr}$  – элемент сформированной ранее матрицы переходных вероятностей  $\Pi'$ .

### Результаты эксперимента

Предложенный алгоритм численного моделирования многосвязных бинарных цепей Маркова использован для оценки адекватности параметризации речевых сигналов цепями Маркова высших порядков. Для эксперимента выбраны фрагменты речевых сигналов с частотой дискретизации 8 кГц.

В работах [17-18] показано, что компромисс между эффективностью распознавания речевых команд и вычислительной сложностью алгоритма параметризации достигается при использовании (для оценки параметров аппроксимирующей цепи Маркова) от одного до четырех старших бит равномерно квантованного речевого сигнала. Наименьшей вычислительной сложностью обладают методы параметризации по одному старшему значащему биту фрагмента речевого сигнала.

Эксперимент заключался в выполнении следующих действий:

- расчет параметров простой (или многосвязной) цепи Маркова, аппроксимирующей бинарную последовательность, образованную старшим битом фрагмента речевого сигнала;
- синтез искусственной цепи Маркова с параметрами, полученными в результате выполнения п.1, по предложенному в данной статье методу численного моделирования, и
- оценка близости корреляционной функции сформированной цепи Маркова к корреляционной функции бинарной последовательности, образованной старшим битом параметризуемого фрагмента речевого сигнала.

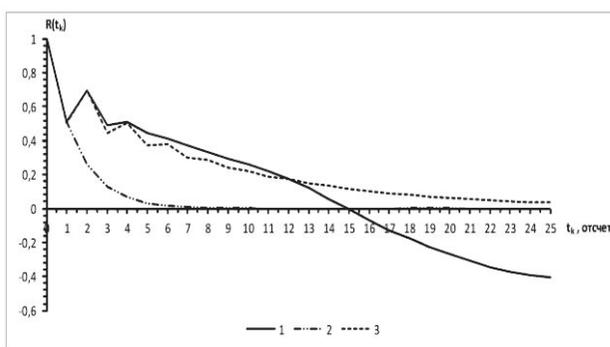


Рис 1. Звук «а»

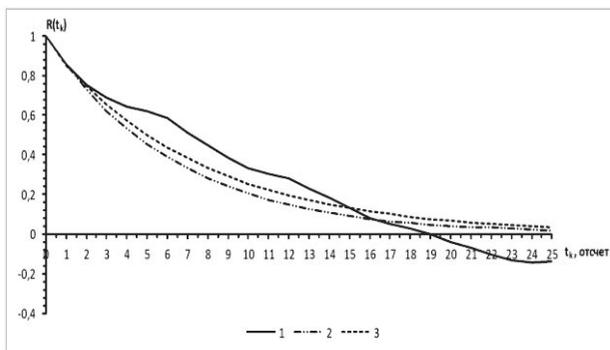


Рис 2. Звук «р»

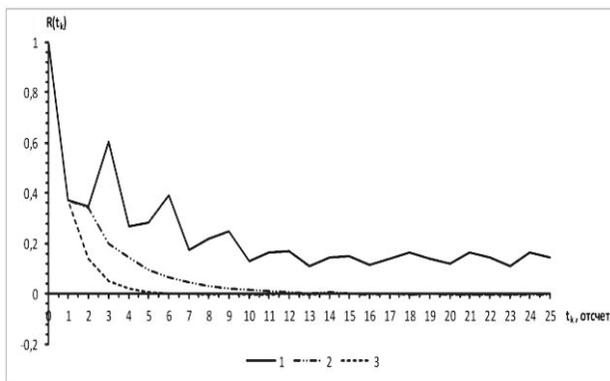


Рис 3. Звук «щ»

Результаты расчетов представлены на графиках рис. 1-3, где 1 – АКФ старшего бита параметризуемого фрагмента речевого сигнала; 2 – АКФ бинарной последовательности, синтезированной по модели простой цепи Маркова; 3 – АКФ бинарной последовательности, синтезированной по модели многосвязной цепи Маркова второго порядка. Очевидно, что для исследованных случаев (см. рис. 1-3) модель многосвязной цепи Маркова второго порядка является более адекватной по сравнению с моделью простой цепи.

## Выводы

Разработанный алгоритм позволяет моделировать многосвязные бинарные цепи Маркова и обладает низкой вычислительной сложностью.

Полученные в эксперименте результаты свидетельствуют о необходимости применения моделей многосвязных цепей Маркова в задачах марковской параметризации речевых сигналов.

Указанный вывод согласуется с работой [18], где показано, что применение модели многосвязной цепи Маркова позволило повысить вероятность автоматического «дикторозависимого» распознавания речевых команд.

## Литература

1. Стратонович Р.Л. Применение теории процессов Маркова для оптимальной фильтрации сигналов // Радиотехника и электроника. Т. 11, №1, 1960. – С. 1751-1763.
2. Амиантов И.Н. Избранные вопросы статистической теории связи. М.: Сов. радио, 1971. – 416 с.
3. Тихонов В.И., Миронов М.А. Марковские процессы. М.: Сов.радио, 1977. – 488 с.
4. Ярлыков М.С., Миронов М.А. Марковская теория оценивания случайных процессов. М.: Радио и связь, 1993. – 464 с.
5. Петров Е.П., Харина Н.Л., Кононова В.Ю., Ключникова М.И. Сложные цепи Маркова в радиотехнике и связи // Нелинейный мир. №4, 2012. – С. 234-243.
6. Прозоров Д.Е. Нелинейная фильтрация многозначных импульсных сигналов // Вестник МЭИ. №3, 2007. – С. 106-112.
7. Doyle L.E. Ad hoc networking, markov random fields, and decision making // IEEE Signal Processing Magazine. V. 23, № 5, 2006. – P. 63-73.

8. Hong Shen Wang, Moayeri N. Finite-state Markov channels useful model for radio communication channels // IEEE Transactions on Vehicular Technology. V. 44, № 1, 1995. – P. 163-171.
9. Hwang S.K., Kim D.S. Markov model of link connectivity in mobile ad hoc networks // Telecommunication Systems. V.34, №1-2, 2006. – P. 51-58.
10. Петров Е.П., Харина Н.Л., Кононова В.Ю. Моделирование бинарных случайных процессов в системах мониторинга изображений земли с дельта-модуляцией // Успехи современной радиоэлектроники. Зарубежная радиоэлектроника. № 11, 2013. – С. 014-022.
11. Трубин И.С., Медведева Е.В., Булыгина О.П. Нелинейная фильтрация видеопоследовательностей цифровых полутоновых изображений // ИКТ. Т. 5, № 4, 2007. – С. 29-36.
12. Медведева Е.В., Курбатова Е.Е. Метод текстурной сегментации изображений на основе марковских случайных полей // Цифровая обработка сигналов. №3, 2012. – С. 76-80.
13. Частиков А.В., Петров Е.П., Прозоров Д.Е. Метод фильтрации шумоподобных сигналов, сформированных на рекуррентных псевдослучайных последовательностях максимального периода // Радиотехника и электроника. Т. 46, № 5, 2001. – С. 553.
14. Прозоров Д.Е. Быстрый поиск шумоподобных сигналов. Киров: О-краткое, 2006. – 215 с.
15. Прозоров Д.Е. Быстрый поиск дальномерных кодов, сформированных на M-последовательностях // Электросвязь. №8, 2008. – С. 48-51.
16. Calafate C.T. Markovian-based traffic modeling for mobile ad hoc networks // Computer Networks. V.53, №14, 2009. – P. 2586-2600.
17. Плетнев К.В., Прозоров Д.Е. Анализ метода марковской параметризации речевых сигналов // Информационные системы и технологии. №1(81), 2014. – С. 24-29.
18. Плетнев К.В. Метод параметризации речевых сигналов цепями Маркова второго порядка // Труды МНПК «Теория и практика современной науки». Т.1. Москва, 2013. – С. 193-198.
19. Плетнев К.В., Прозоров Д.Е. Параметризация речевых сигналов цепями Маркова // Advanced Science. №1, 2012. – С. 19-28.
20. Петров Е.П., Харина Н.Л., Ржаникова Е.Д. Модель цепи Маркова с несколькими состояниями // Материалы XX МНТК «Физика и радиоэлектроника в медицине и экологии». Т. 1. Владимир, 2012. – С. 211-215.
21. Петров Е.П., Харина Н.Л., Ржаникова Е.Д. Синтез и исследование алгоритмов фильтрации дискретных процессов с несколькими состояниями // Радиотехнические и телекоммуникационные системы. №1(9), 2013. – С. 60-66.
22. Яншин В.В. Многосвязные цепи Маркова и их свойства // Радиотехника и электроника. Т.38, №6, 1993. – С. 1081-1091.

## NUMERICAL SIMULATION OF BINARY MULTILINK MARKOV CHAIN

Prozorov D.E., Pletnev K.V.

**The paper presents an extended version of the algorithm of numerical simulation of multi-link Markov chain with stationary transition probabilities. The results of the algorithm using for assessing the adequacy of speech signals parameterization with Markov chains of higher orders are obtained and analyzed.**

*Keywords:* multilink Markov chain, simulation, parameterization of speech.

Прозоров Дмитрий Евгеньевич, д.т.н., профессор Кафедры радиоэлектронных средств Вятского государственного университета (ВятГУ). Тел. 8-912-711-21-11. E-mail: prozo-rov.de@gmail.com

Плетнев Константин Владимирович, ассистент Кафедры прикладной математики и информатики ВятГУ. Тел. 8-909-140-24-71.