

## NOISE STABILITY OF SATELLITE COMMUNICATION AT ACTIVE HINDRANCES AND THE LIMITED STRIP OF COHERENCE OF THE CHANNEL

Korotkov S.Yu., Pashintsev V.P., Solchatov M.E., Yaremchenko S.V.

**The technique of an assessment of probability of wrong reception of broadband signals of systems of satellite communication in the conditions of emergence of a frequency selective fading because of a limited strip of coherence of a transionospheric communication channel and simultaneous impact of a narrow-band fading active hindrance on a receiver entrance is developed.**

*Keywords:* probability of a mistake, satellite communication, broadband signal, transionospheric channel, frequency selective fading, active hindrance, coefficient of mutual distinction.

Коротков Сергей Юрьевич, старший научный сотрудник МОУ «Институт инженерной физики» (Московская область, г. Серпухов). Тел. (8-4967) 72-55-47. E-mail: tsimbalva@mail.ru

Пашинцев Владимир Петрович, д.т.н., профессор Кафедры информационной безопасности автоматизированных систем (ИБАС) Северо-Кавказского федерального университета (СКФУ). Тел. 8-918-741-33-16. E-mail: pashintsevp@mail.ru

Солчатов Максим Эрикович, к.т.н., доцент Кафедры ИБАС СКФУ. Тел. 8-906-479-43-11.

Яремченко Сергей Владимирович, старший научный сотрудник МОУ «Институт инженерной физики» (Московская область, г. Серпухов). Тел. (8-4967) 72-55-47. E-mail: tsimbal-va@mail.ru

УДК 621.39

### АППРОКСИМАЦИЯ ФУНКЦИЙ ПЛОТНОСТИ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ С ТЯЖЕЛЫМИ ХВОСТАМИ МЕТОДОМ ПРОНИ

Киреева Н.В., Чупахина Л.Р.

В настоящее время актуальной проблемой при исследовании трафика мультисервисной сети является наличие самоподобия, которое оказывает влияние на характеристики в узле обработки пакетов. В статье рассматриваются вопросы разложения произвольных функций в ряды экспонент и аппроксимация произвольной плотности распределения вероятностей (ПРВ) методом Прони.

**Ключевые слова:** самоподобный процесс, плотность функции распределения, аппроксимация плотности вероятности, метод Прони.

#### Введение. Метод Прони

Метод Прони – это метод моделирования выборок данных в виде линейной комбинации экспоненциальных функций (экспонент). При помощи данного метода осуществляется аппроксимация функций с использованием некоторой детерминированной экспоненциальной модели [1].

Пусть статистические характеристики интервалов времени между пакетами и случайные длительности обслуживания подчиняются распределениям с «тяжелыми» хвостами: Вейбулла, Парето, логнормальное. Необходимо найти аппроксимацию этих законов рядами экспоненциальных функций.

Функция распределения Вейбулла имеет вид:

$$F(x) = 1 - e^{-\left(\frac{x}{\beta}\right)^\alpha}; \quad x > 0, \alpha > 0, \beta > 0,$$

где  $\alpha$  – параметр формы;  $\beta$  – масштабный параметр [2], которому соответствует плотность распределения:

$$f(x) = \alpha \beta^{-\alpha} x^{\alpha-1} e^{-\left(\frac{x}{\beta}\right)^\alpha}. \quad (1)$$

Используя метод Прони (общего вида), аппроксимируем функцию ПРВ Вейбулла суммой экспонент [3].

Выберем известные значения (отчеты) функции  $f(x)$  при  $x_i = 1; 2 \dots N$ .

Будем искать аппроксимирующую функцию  $\psi(x)$ :

$$\psi(x) = \sum_{l=1}^k h_l z_l^{x-1}, \quad k \leq N/2, \quad (2)$$

где  $z_l = e^{\lambda_l \pm j\sigma_l}$ .

Пусть функция  $f(x)$  такова, что существуют коэффициенты [3]

$$a_1, a_2 \dots a_k; \lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_k \text{ и } \sigma_1, \sigma_2 \dots \sigma_k,$$

при которых сумма  $\psi(x)$  в (2) интерполирует  $f(x)$  в узлах  $i = 1; 2 \dots N$ . Пусть многочлен

$$1 + d_1 z + d_2 z^2 + \dots + d_k z^k \quad (3)$$

имеет нулями числа  $z_l = e^{l \pm j\sigma_l}$ ,  $l = 1; 2 \dots k$ . Тогда для каждого  $j = 1; 2 \dots k$  имеет место равенство [3]:

$$f(j) + d_1 f(j+1) + \dots + d_k f(j+k) = 0. \quad (4)$$

Решим систему (5) при известных значениях  $f(j)$ , найдем коэффициенты  $d_k$  и затем вычислим нули  $z_l$ , используя многочлен (3).

Отсюда найдем искомые значения величин:

$$\lambda_l = \ln |z_l|; \quad \sigma_l = \arg z_l, l = 1; 2 \dots k. \quad (5)$$

Если значение  $\lambda_l > 0$ , берем его со знаком минус. Преобразуем (2) в следующем виде. Если  $z_l$  – экспонента с вещественным показателем, то соответствующее слагаемое оставим без изменения. Если  $z_l$  и  $z_{l+1}$  образуют комплексносопряженную пару  $\lambda_l \pm j\sigma_l$ , то заменим  $z_l$  на  $e^{\lambda_l} \sin \sigma_l$ ,  $z_{l+1}$  на  $e^{\lambda_l} \cos \sigma_l$ .

Для упрощения примем  $x_i = i$ , тогда по известным значениям  $z_l$  и  $f(i)$  найдем коэффициенты  $h_l$ , решив систему уравнений

$$f(i) = \sum_{l=1}^k h_l z_l^k, \quad i = 1 \dots N. \quad (6)$$

**Алгоритм аппроксимации функции ПРВ с помощью метода Прони**

Для аппроксимации произвольной ПРВ методом Прони необходимо выполнить следующие действия.

1. Решить систему уравнений (4), чтобы найти коэффициенты  $d_k$ .
2. Найти нули функции  $z_l$  по формуле (3).
3. Вычислить через (5) коэффициенты  $\lambda_l$  и  $\sigma_l$ .
4. Решить систему уравнений (6), найти коэффициенты  $h_l$  и записать выражение (2).

Реализуем данный алгоритм для функции ПРВ Вейбулла  $f(x)$  (1) при  $\alpha = 10$  и  $\beta = 2$  (см. рис. 1). В нашем случае рассматриваем отчеты для случая  $N = 20$ .

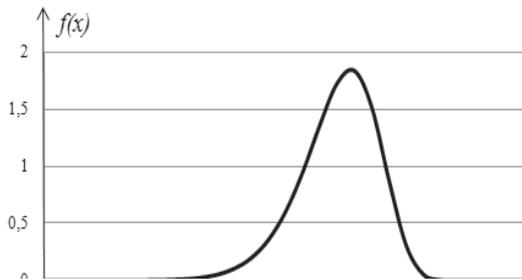


Рис. 1. Функция ПРВ Вейбулла при  $\alpha = 10$  и  $\beta = 2$

Численные значения искомых коэффициентов представлены в таблице 1.

Таблица 1. Значения коэффициентов ПРВ Вейбулла

l	Искомые значения		
	$\lambda_l$	$\sigma_l$	$h_l$
1	-0,4318	-1,0001	1,232
2	-0,4318	-1,0001	-556,152
3	-0,4203	-2,8656	-13330
4	-0,4203	-0,2760	-166000
5	-0,3097	0,3813	405,396
6	-0,3097	2,7603	9444
7	-0,2216	2,2225	7111
8	-0,2216	0,9191	-48,22
9	-0,1690	1,3609	1,038
10	-0,1690	1,7807	167000

При построении модели (см. рис. 2) учтено, что аппроксимирующее выражение для ПРВ должно удовлетворять условию нормировки  $\int_0^\infty \psi(x) dx = 1$ .

Выражение нормирующей константы

$$const = \frac{1}{\sum_{l=1}^k \frac{h_l}{z_l \ln(z_l)} z_l^x \Big|_{x=0}^{x=\infty}}, \quad k \leq N/2.$$

Результат аппроксимации ПРВ Вейбулла ( $const = 63371$ , при нижнем пределе  $x = 0$  и верхнем  $x = 4$ ) представлен на рис. 2. Аналитическое выражение аппроксимирующей функции имеет вид:

$$\psi(x) = \sum_{l=1}^{10} \left[ \left( h_l e^{\lambda_l (x-1)} \cos(\sigma_l (x-1)) \right) + h_l e^{\lambda_l (x-1)} \sin(\sigma_l (x-1)) \right] \quad (7)$$

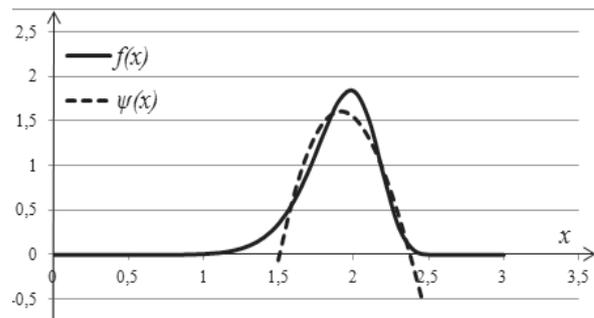


Рис. 2. Сравнение двух ПРВ Вейбулла

После построения аппроксимирующей функции  $\psi(x)$  заметим, что некоторые ее значения находятся в отрицательной области. Для удовлетворения свойству ПРВ будем искать исправленное значение  $\tilde{\psi}(x)$  из условий

$$J(\psi(x), \tilde{\psi}(x)) = w_1 \int_0^{\infty} (\psi(x) - \tilde{\psi}(x))^2 dx + w_2 \int_{x_1}^{x_2} (\tilde{\psi}(x))^2 dx \rightarrow \min, \tag{8}$$

где  $(x_1, x_2)$  – это отрезок, при котором  $\psi(x) < 0$ , а  $w_1, w_2$  – положительные веса, определяемые экспериментально из необходимых условий минимума функционала полученной системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Находим СЛАУ, решая  $\frac{dJ(\psi(x), \tilde{\psi}(x))}{dh_l} = 0, l = 1 \dots 10$  относительно  $\tilde{h}_l$ .

Для нашего случая

$$J(\psi(x), \tilde{\psi}(x)) = w_1 \int_{0,5}^3 (\psi(x) - \sum_{l=1}^{10} \tilde{h}_l z_l^{x-1})^2 dx + w_2 \int_{2,4}^3 (\sum_{l=1}^{10} \tilde{h}_l z_l^{x-1})^2 dx$$

где  $l = 1 \dots k; k \leq N/2$ ;

$$\frac{dJ(\psi(x), \tilde{\psi}(x))}{dh_l} = 2w_1 \int_{0,5}^3 (\psi(x) - \sum_{l=1}^{10} \tilde{h}_l z_l^{x-1}) z_l^{x-1} dx + 2w_2 \int_{2,4}^3 (\sum_{l=1}^{10} \tilde{h}_l z_l^{x-1}) z_l^{x-1} dx,$$

$$\sum_{l=1}^{10} \tilde{h}_l (w_1 \int_{0,5}^3 z_l^{x-1} z_l^{x-1} dx - w_2 \int_{2,4}^3 z_l^{x-1} z_l^{x-1} dx) = w_1 \int_{2,4}^3 \psi(x) z_l^{x-1} dx.$$

Затем подставляем в (7) найденные значения  $\tilde{h}_l$ , приравнявая весовые функции  $w_1 = w_2 = 1$ , получаем следующую аппроксимацию.

Погрешность отклонения аппроксимирующей функции  $\tilde{\psi}(x)$  от  $f(x)$  зависит от некоторых величин  $\xi$  и  $\mu$ . В нашем случае, если учесть при построении функции  $\tilde{\psi}(x)$  величины отклонений  $\xi = 2,5; \mu = 2,5$ ; аппроксимация ПРВ Вейбулла  $\tilde{\psi}(x)$  наиболее близка к реальной.

$$\tilde{\psi}(x) = \sum_{l=1}^{10} (\tilde{h}_l e^{\lambda_l (x\xi - 1 - \mu)} \cos(\sigma_l (x\xi - 1 - \mu)) + \tilde{h}_l e^{\lambda_l (x\xi - 1 - \mu)} \sin(\sigma_l (x\xi - 1 - \mu))).$$

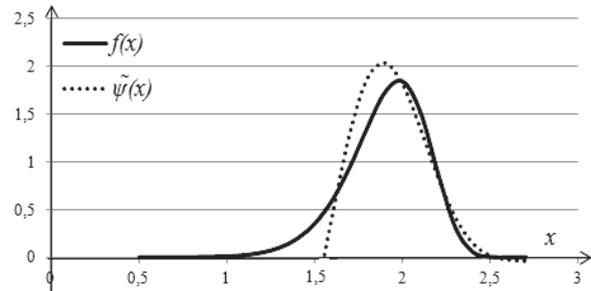


Рис. 3. Сравнение двух ПРВ Вейбулла с учетом условия (8)

Для распределения Парето реализуем аналогичный алгоритм аппроксимации ПРВ методом Прони. Плотность распределения Парето имеет следующий вид (см. рис. 4):

$$f(x) = \frac{\alpha}{\beta} \left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha+1}, x > \beta, \alpha > 0, \beta > 0,$$

где  $\alpha$  – параметр формы,  $\beta$  – масштабный параметр [2].

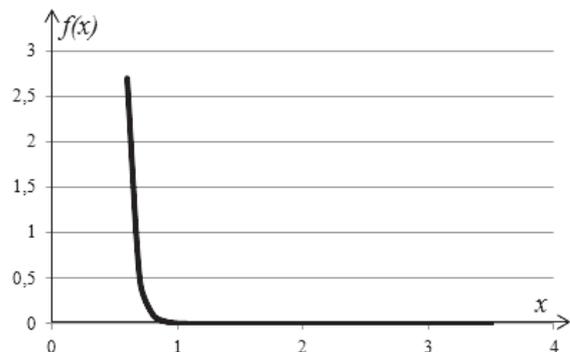


Рис. 4. Функция ПРВ Парето при  $\alpha = 10$  и  $\beta = 0,5$

Таблица 2. Значения коэффициентов ПРВ Парето

№ пп	Искомые значения		
	$\lambda_l$	$\sigma_l$	$h_l$
1	-1,705	-1,946	7,86E+09
2	-1,705	-1,194	-1,46E+09
3	-1,683	-2,7447	8,37E+08
4	-1,683	-0,396	-5,85E+09
5	-1,706	0,449	-2,74E+07
6	-1,706	2,691	6,67E+08
7	-1,876	1,303	8,40E+05
8	-1,876	1,837	-3,63E+09
9	-3,563	1,570	1,03E+09
10	-8,0721	1,570	2,92E+12

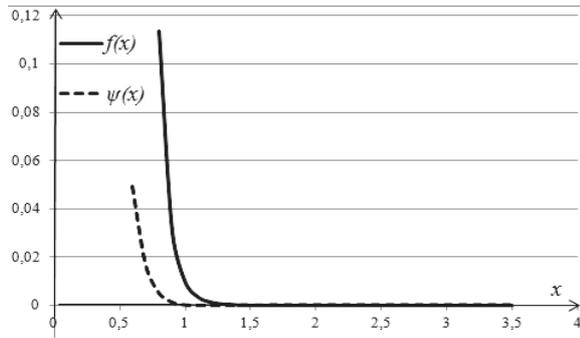


Рис. 5. Сравнение двух ПРВ Парето

Результат аппроксимации ПРВ Парето ( $const = 8,82912E+14$ , при нижнем пределе  $x = 0$  и верхнем  $x = 4$ ) представлен на рис. 5. С учетом отклонений  $\xi = 1$  и  $\mu = 0,3$  получим аппроксимирующую функцию  $\tilde{\psi}(x)$ , которая наиболее близко приближается к реальной ПРВ Парето  $f(x)$  – см. рис. 6.

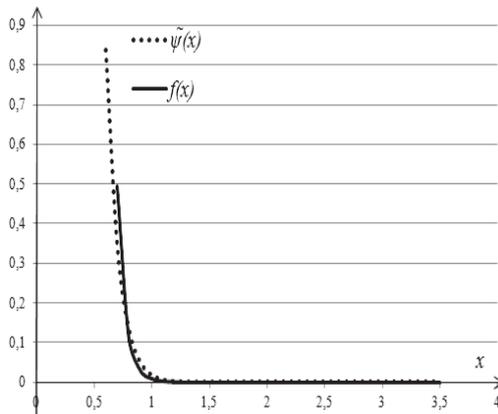


Рис. 6. Сравнение двух ПРВ Парето с учетом погрешности

Для логнормального распределения реализуем аналогичный алгоритм аппроксимации ПРВ методом Прони. Плотность логнормального распределения имеет вид:

$$f(x) = \frac{e^{-0,5 \left( \frac{\ln(x) - \mu}{\sigma} \right)^2}}{\sqrt{2\pi\sigma^2 x^2}}, \quad x > 0, -\infty \leq \mu \leq \infty, \sigma \geq 0,$$

где  $\sigma$  – параметр формы,  $\mu$  – масштабный параметр [2].

Результат аппроксимации ПРВ логнормального распределения ( $const = 2,52725E+11$ , при нижнем пределе  $x = 0$  и верхнем  $x = 3$ ) представлен на рис. 8. В нашем случае, если учесть при построении функции  $\tilde{\psi}(x)$  условие (8) и величины отклонений  $\xi = 1,4$  и  $\mu = 1,7$ ; получим результат, показанный на рис. 9.

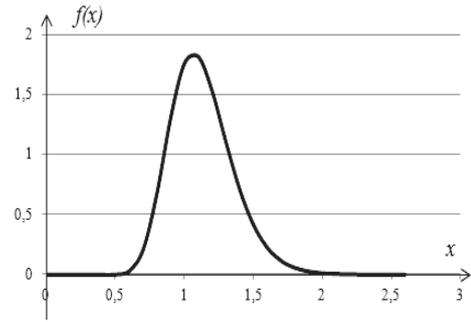


Рис. 7. Функция ПРВ логнормального распределения при  $\mu = 0,1$  и  $\sigma = 0,2$

Таблица 3. Значения коэффициентов логнормальной ПРВ

l	Искомые значения		
	$\lambda_l$	$\sigma_l$	$h_l$
1	-1,182	-1,931	-2,45E+09
2	-1,182	-1,210	2,38E+08
3	-1,259	-0,544	1,64E+09
4	-1,259	-2,597	1,93E+09
5	-1,3062	0,032	7,78E+08
6	-1,306	3,108	-8,71E+08
7	-1,284	2,485	-1,74E+09
8	-1,284	0,656	-1,52E+06
9	-1,317	1,864	1,50E+09
10	-1,317	1,276	1,66E+05

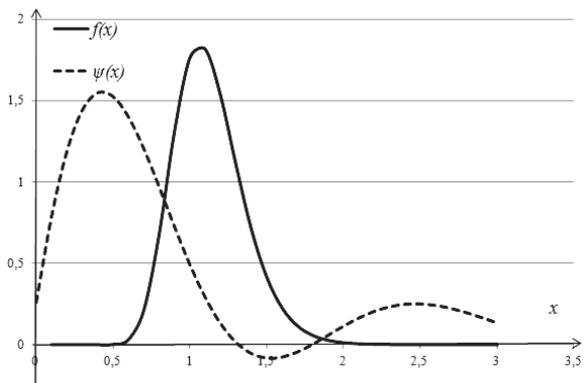


Рис. 8. Сравнение двух ПРВ логнормального распределения

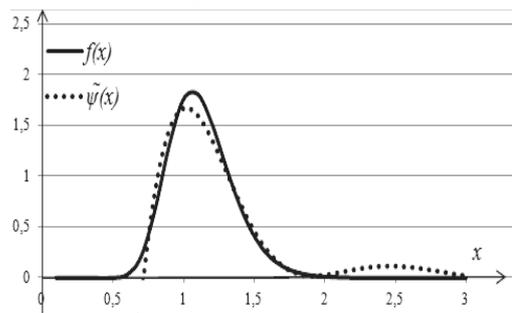


Рис. 9. Сравнение двух ПРВ логнормального распределения с учетом (8)

## Заключение

При реализации данного алгоритма точность аппроксимации зависит от количества выбранных на начальном этапе отчетов  $N$  функции  $f(x)$  которую необходимо интерполировать. В статье рассмотрены частные случаи для наиболее известных распределений с «тяжелым» хвостом, так как на практике и в многочисленных публикациях доказано, что реальный трафик сети по своим свойствам приближен к ним.

Таким образом, аппроксимация суммой затухающих экспонент может описать функцию ПРВ. Анализ и расчет характеристик мультисервисного трафика, поступающего на вход и обслуживаемого в звене системы, является актуальной задачей. Данный алгоритм может также подходить для исследования частных случаев аппроксимации ПРВ, по законам которых циркулируют пакеты трафика в системе СМО типа G/G/1, при условии вещественного значения  $z_1$ . При исследовании функции ПРВ [4] необходимо учитывать

свойства самоподобия трафика [5] и произвольный процесс обслуживания.

## Литература

1. Марпл мл. С.Л. Цифровой спектральный анализ и его приложения. М.: Мир, 1990. – 584 с.
2. Лоу А.М., Кельтон В.Д. Имитационное моделирование. Классика CS. СПб.: Питер, 2004. – 848 с.
3. Бердышев В.И., Петрак Л.В. Аппроксимация функции, сжатие численной информации, приложения. Екатеринбург: Изд. УрО РАН, 1999. – 295 с.
4. Чупахина Л.Р., Киреева Н.В. Построение функций распределения реального трафика с помощью кумулянтного анализа // ИКТ. Т.10, №1. 2013. – С. 33-36.
5. Шелухин О.И., Тенякшев А.М., Осин А.В. Фрактальные процессы в телекоммуникациях. М.: Радиотехника, 2003. – 480 с.

## APPROXIMATION OF FUNCTIONS OF DENSITY OF DISTRIBUTIONS WITH HEAVY TAILS THE PRONY METHOD

Kireeva N.V., Chupakhina L.R.,

**At present the actual problem in the study of traffic multiservice network is the presence of self-similarity, which influences the characteristics of the node processing packages. In the article the questions of the decomposition of arbitrary functions in series of exponents and approximation of an arbitrary density of distribution of the Prony method.**

*Keywords: self-similar process, the density distribution function, approximation of probability density, the Prony method.*

Киреева Наталья Валерьевна, к.т.н., доцент Кафедры мультисервисных сетей и информационной безопасности (МСИБ) Поволжского государственного университета телекоммуникаций и информатики (ПГУТИ). Тел. (8-846) 339-11-67. E-mail: zepelinSN@yandex.ru

Чупахина Лилия Равилевна, аспирант Кафедры МСИБ ПГУТИ. Тел. 8-927-710-67-17. E-mail: garip4ik555@mail.ru

## ТЕХНОЛОГИИ ТЕЛЕКОММУНИКАЦИЙ

УДК 621.372.8

## ИССЛЕДОВАНИЕ ПОГРЕШНОСТЕЙ ИЗМЕРЕНИЙ ЗАТУХАНИЯ ОПТИЧЕСКИХ ВОЛОКОН ВОЛОКОННО-ОПТИЧЕСКИХ ЛИНИЙ ПЕРЕДАЧИ

Баскаков В.С., Косова А.Л., Прокопьев В.И.

Показаны перспективы развития волоконно-оптических систем передачи (ВОСП), которые обуславливают возрастание роли метрологического обеспечения измерений параметров волоконно-оптических линий передачи (ВОЛП) в процессе эксплуатации, повышение точности и надежности полученных результатов. Рассмотрены области применения метода

обратного рассеяния и доказана необходимость учета влияния уровня шумов рефлектограммы на погрешность измерения затухания оптической линии и ее отдельных фрагментов. Исследованы погрешности измерения коэффициента затухания и затухания соединений оптических волокон (ОВ) в зависимости от отношения сигнал/помеха (SNR) и протяженности