

**РЕАЛИЗАЦИЯ ДИСКРЕТНОГО ВЕЙВЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЯ  
В СИСТЕМЕ ОСТАТОЧНЫХ КЛАССОВ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА**

*Червяков Н.И., Аникуева О.В., Ляхов П.А.*

В статье предложен метод проектирования вейвлетных фильтров в СОК. Показано, что СОК обладает большим потенциалом для увеличения производительности фильтров, так как в рассматриваемой задаче требуется выполнение только операций сложения и умножения, которые можно очень быстро вычислять в модулярной форме.

На примере фильтра Добеши Db4 показано, как можно преобразовать коэффициенты из позиционной системы счисления в СОК. Результаты моделирования показали, что ошибка округления, неизбежно возникающая при таком переходе, не вызывает значимых отклонений в работе фильтра.

**Ключевые слова:** система остаточных классов, вейвлет-преобразование, фильтр Добеши, цифровая обработка сигналов.

### Введение

Обработка сигналов при помощи вейвлетов (от англ. wavelet – волна) в настоящее время является весьма перспективным направлением, которое является серьезной альтернативой традиционному преобразованию Фурье. Основная причина этого явления заключается в способности вейвлетов к быстрому получению как частотных, так и локальных особенностей обрабатываемого сигнала. Возможность быстро и качественно получать частотно-временную информацию об объекте привела к тому, что в настоящее время вейвлеты используются в обработке изображений, речи, видео, очистке от шума и сжатии информации [1-4]. Основным методом вейвлетной обработки сигнала является применение дискретного вейвлет-преобразования (ДВП) по схеме Малла [5]. Основой ДВП является применение фильтров с конечной импульсной характеристикой (КИХ-фильтров), которые могут быть весьма эффективно реализованы в системе остаточных классов (СОК).

СОК обладает большим потенциалом для увеличения производительности цифровых устройств благодаря замене операций сложения, вычитания и умножения чисел большой длины

на параллельную обработку остатков гораздо меньшей разрядности [6]. Кроме того, СОК позволяет весьма эффективно проектировать и реализовывать различные цифровые устройства на программируемых логических интегральных схемах (FPGA) и интегральных схемах специального назначения (ASIC) [7]. Принципиальным недостатком СОК является сложность выполнения операции восстановления числа по его остаткам. В настоящей статье предлагается метод проектирования вейвлетных фильтров в СОК специального вида  $\{2^n - 1, 2^n, 2^n + 1\}$ , так как в таких СОК можно в значительной степени уменьшить данный недостаток [8].

### Система остаточных классов

В СОК числа представляются в базисе взаимнопростых чисел, называемых модулями  $\beta = \{m_1, \dots, m_k\}$ ,  $\text{НОД}(m_i, m_j) = 1$ , для  $i \neq j$ . Произведение всех модулей СОК  $M = \prod_{i=1}^k m_i$  называется динамическим диапазоном системы. Любое целое число  $0 \leq X < M$  может быть единственным образом представлено в СОК в виде вектора  $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ , где  $x_i = |X|_{m_i} = X \bmod m_i$  [9].

Динамический диапазон СОК обычно делится на две примерно равные части таким образом, чтобы примерно половина диапазона представляла положительные числа, а остальная часть диапазона – отрицательные.

Таким образом, любое целое число, удовлетворяющее одному из двух соотношений:  $-(M-1)/2 \leq X \leq (M-1)/2$  для нечетных  $M$  и  $-M/2 \leq X \leq M/2$  для четных  $M$ , может быть представлено в СОК. Операции сложения, вычитания и умножения в СОК определяются формулами

$$A \pm B = \left( |a_1 \pm b_1|_{m_1}, \dots, |a_k \pm b_k|_{m_k} \right); \quad (1)$$

$$A \times B = \left( |a_1 \times b_1|_{m_1}, \dots, |a_k \times b_k|_{m_k} \right). \quad (2)$$

Равенства (1)-(2) показывают параллельную природу СОК, свободную от поразрядных переносов. Восстановление числа  $X$  по остаткам  $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$  основано на Китайской теореме об остатках

$$X = \left| \sum_{i=0}^k \gamma_i x_i \right|_{M_i} M_i \Big|_M, \quad (3)$$

где  $M_i = M / m_i$ ; элемент  $\gamma_i = \left| M_i^{-1} \right|_{m_i}$  – мультипликативный обратный для  $M_i$  по модулю  $m_i$ .

Другим методом преобразования числа из СОК в позиционную форму является переход к обобщенной позиционной системе счисления [10]. Число  $X < M$  имеет вид  $\{x'_1, x'_2, \dots, x'_k\}$ ,  $0 < x'_i \leq m_i$  в обобщенной позиционной системе счисления, если:

$$X = x'_1 + x'_2 m_1 + x'_3 m_1 m_2 + \dots + x'_k \prod_{i=1}^{k-1} m_i, \quad (4)$$

где  $x'_i \in [0, m_i)$  цифры числа  $X$  в обобщенной позиционной системе счисления, и

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_1 \bmod m_1; \quad x'_2 = (x_2 - x'_1) c_{12} \bmod m_2; \\ x'_3 &= ((x_3 - x'_1) c_{13} - x'_2) c_{23} \bmod m_3; \\ x'_k &= (\dots((x_k - x'_1) c_{1k} - x'_2) c_{2k} - \dots - x'_{k-1}) c_{k-1,k} \bmod m_k. \end{aligned} \quad (5)$$

Константы  $c_{ij}$  являются мультипликативными обратными элементами для  $m_i$  по модулю  $m_j$  для всех  $1 \leq i < j \leq k$ , то есть  $c_{ij} \cdot m_i = 1 \bmod m_j$  для  $1 \leq i < j \leq k$ , и могут быть вычислены, например, с помощью алгоритма Евклида.

Таким образом, можно выделить два основных преимущества модулярной арифметики.

1. Арифметические операции сложения, вычитания и умножения выполняются без переносов, в отличие от позиционного представления чисел.

2. Для каждого значения модуля  $m_i$  арифметические операции выполняются с парой соответствующих вычетов параллельно, при этом вычеты имеют гораздо меньшую разрядность, чем исходные операнды  $X$  и  $Y$ .

Основной проблемой СОК является сложность выполнения операции деления и сравнения двух чисел. Однако несмотря на указанные недостатки, модулярная арифметика может быть эффективно реализована в приложениях, где основная доля вычислений приходится на операции умножения в сочетании со сложением и вычитанием [11]. Как будет видно далее, фильтрация сигналов является именно таким приложением.

### Дискретное вейвлет-преобразование в системе остаточных классов

ДВП определяется последовательностью вложенных, закрытых подпространств,  $V_j \subset V_{j-1} \subset \dots \subset V_1 \subset V_0$ , где  $V_0 = l_2(Z)$  – пространство последовательностей, суммируемых с квадратом. Подпространства удовлетворяют следующему свойству полноты,  $\bigcup V_j = l_2(Z)$ ,  $j \in [0, J]$ .

Допустим, что любой элемент из  $V_j$  может быть единственным образом представлен в виде суммы двух элементов из  $V_{j+1}$  и  $W_{j+1}$ , где  $V_j = V_{j+1} \oplus W_{j+1}$ . Для ортогональных вейвлетов  $W_{j+1}$  определяется как ортогональное дополнение  $V_{j+1}$  в  $V_j$ . Существует последовательность  $\{\bar{g}_n \in V_0\}$ , такая, что  $\{\bar{g}_{n-2k}\}_{k \in Z}$  является базисом в  $V_1$ . Это означает, что последовательность  $\{\bar{h}_n \in V_0\}$  может быть построена так, что  $\{\bar{h}_{n-2k}\}_{k \in Z}$  будет базисом в  $W_1$ . Применяв такой метод разложения  $J$  раз, можем получить следующее разложение для  $V_0$ :

$$V_0 = W_1 \oplus W_2 \oplus \dots \oplus W_J \oplus V_J. \quad (6)$$

Одномерное ДВП  $N$ -го порядка последовательности  $x_n$  определяется рекуррентными равенствами

$$\begin{aligned} a_n^{(i)} &= \sum_{k=0}^{N-1} g_k a_{2n-k}^{(i-1)}, \quad i = 1, 2 \dots J; \\ d_n^{(i)} &= \sum_{k=0}^{N-1} h_k a_{2n-k}^{(i-1)}, \quad a_n^{(0)} \equiv x_n, \end{aligned} \quad (7)$$

где  $a_n^{(i)}$  и  $d_n^{(i)}$  – аппроксимирующие и детализирующие последовательности  $i$ -го уровня;  $g_k$  и  $h_k$  ( $k = 0; 1 \dots N-1$ ) описывают коэффициенты соответственно низкочастотного и высокочастотного фильтров. Исходный сигнал  $x_n$  может быть точно восстановлен из коэффициентов кратномасштабного разложения  $\{a_n^{(J)}, d_n^{(J)}, d_n^{(J-1)}, \dots, d_n^{(1)}\}$  по формуле

$$\tilde{a}_m^{(i-1)} = \begin{cases} \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} \bar{g}_{2k} \tilde{a}_{\frac{m-k}{2}}^{(i)} + \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} \bar{h}_{2k} \tilde{d}_{\frac{m-k}{2}}^{(i)}, & m - \text{четное число;} \\ \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} \bar{g}_{2k+1} \tilde{a}_{\frac{m-1-k}{2}}^{(i)} + \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} \bar{h}_{2k+1} \tilde{d}_{\frac{m-1-k}{2}}^{(i)}, & m - \text{нечетное число,} \end{cases} \quad (8)$$

где  $\bar{g}_k$  и  $\bar{h}_k$  являются коэффициентами низкочастотного и высокочастотного синтезирующих фильтров соответственно.

Как можно видеть, в (8) используются операции сложения и умножения. Использование только этих операций для вычисления ДВП позволяет наиболее полно использовать возможности модулярной арифметики для повышения быстродействия систем цифровой обработки сигналов по сравнению с системами, функционирующими в традиционных позиционных системах счисления.

Построение вейвлетных наборов фильтров при помощи СОК обладает рядом преимуществ. Если коэффициенты вейвлетного фильтра зафиксированы априори, то использование умножителей на основе LUT-таблиц будет весьма эффек-

тивным решением, обеспечивающим высокую скорость вычислений и эффективность с аппаратной точки зрения [12].

Приведем формулы, по которым осуществляется прямое и обратное дискретное вейвлет-преобразование в СОК. Каждая из формул задает преобразование для отдельно взятого модуля, число модулей берется таким, чтобы покрыть требуемый диапазон вычислений; формулы для каждого из модулей аналогичны приведенным:

$$\begin{aligned} |a_n^{(i)}|_{p_j} &= \sum_{k=0}^{N-1} |g_k|_{p_j} |a_{2n-k}^{(i-1)}|_{p_j}, \quad i=1,2,\dots,J; \\ |a_n^{(i)}|_{p_j} &= \sum_{k=0}^{N-1} |h_k|_{p_j} |a_{2n-k}^{(i-1)}|_{p_j}, \quad |a_n^{(0)}|_{p_j} \equiv |x_n|_{p_j}; \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} |\tilde{a}_m^{(i-1)}|_{p_j} &= \begin{cases} \sum_{k=0}^{\frac{N-1}{2}} |\bar{g}_{2k}|_{p_j} |\tilde{a}_{\frac{m-k}{2}}^{(i)}|_{p_j} + \sum_{k=0}^{\frac{N-1}{2}} |\bar{h}_{2k}|_{p_j} |\tilde{d}_{\frac{m-k}{2}}^{(i)}|_{p_j}, & m - \text{четное число}; \\ \sum_{k=0}^{\frac{N-1}{2}} |\bar{g}_{2k+1}|_{p_j} |\tilde{a}_{\frac{m-1-k}{2}}^{(i)}|_{p_j} + \sum_{k=0}^{\frac{N-1}{2}} |\bar{h}_{2k+1}|_{p_j} |\tilde{d}_{\frac{m-1-k}{2}}^{(i)}|_{p_j}, & m - \text{нечетное число}. \end{cases} \end{aligned} \quad (10)$$

### Проектирование вейвлетного фильтра в системе остаточных классов

Для моделирования вейвлетного фильтра в СОК был выбран вейвлет Добеши Db4, так как семейство вейвлетов Добеши обладает весьма важным во многих приложениях свойством ортогональности образуемого базиса [13-14]. ДВП можно реализовать при помощи комбинации КИХ-фильтров так, как это показано на рис. 1.

Коэффициенты высокочастотного анализирующего КИХ-фильтра  $H_D$ , соответствующего рассмотренному вейвлету Db4, приведены в таблице 1. Коэффициенты остальных фильтров  $L_D$ ,  $H_R$  и  $L_R$  для данного вейвлета могут быть легко получены из коэффициентов  $H_D$  путем перестановки коэффициентов и смен знака, так как схема, изображенная на рис. 1, является набором фильтров со свойством точного восстановления сигнала [15].

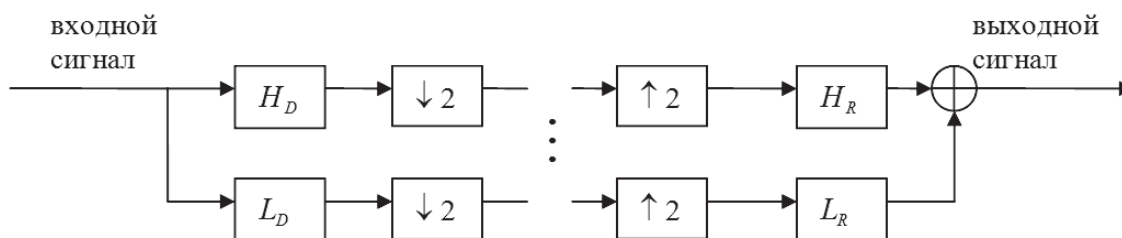


Рис. 1. Дискретное вейвлет-преобразование сигнала.

Целочисленное значение коэффициентов фильтра Db4 в таблице 1 было получено преобразованием чисел двойной точности в числа шириной 10 бит, из которых 1 бит отведен для знака, а остальные 9 являются информационными. Описанный переход осуществлялся путем умножения исходных коэффициентов на  $2^9 = 512$  с последующим округлением результата. Полученное целочисленное значение было переведено в СОК вида  $\{2^n - 1, 2^n, 2^n + 1\}$ , при  $n = 7$ , то есть  $\{127, 128, 129\}$ . Выбор такой СОК обусловлен тем, что для таких наборов модулей разработаны эффективные алгоритмы выполнения проблемной операции обратного преобразования числа из СОК в ПСС [8].

Выбранная СОК задает диапазон равный  $\log_2(127 \cdot 128 \cdot 129) \approx 20,999912$  бит, в то время как максимальный отклик фильтра равен  $\sum |b_i| = 675$ , что соответствует  $\approx 9,398744$  битам. Таким образом, данный фильтр можно использовать для обработки  $[20,999912 - 9,398744] = 11$ -битных последовательностей входных данных, не опасаясь переполнения динамического диапазона системы.

Таблица 1. Коэффициенты фильтра Db4 в ПСС и СОК

Db4, позиционная форма	Целочисленное значение	Db4 в СОК {127,128,129}
0,162901714025649	83	{83, 83, 83}
0,505472857545915	259	{5, 3, 1}
0,446100069123380	228	{101, 100, 99}
-0,019787513117822	-10	{117, 118, 119}
-0,132253583684520	-68	{59, 60, 61}
0,021808150237089	11	{11, 11, 11}
0,023251800535491	12	{12, 12, 12}
-0,007493494665181	-4	{123, 124, 125}

Разумеется, перевод коэффициентов фильтра в целочисленную форму 10-битного представления приводит к ошибкам округления. На рис. 2 показана амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) этой ошибки для фильтра Db4. Видно, что максимальное значение ошибки не превосходит  $-50$  Дб, что на практике является достаточно хорошим результатом, не приводящим к сколь угодно значимым искажениям обрабатываемого сигнала [16].

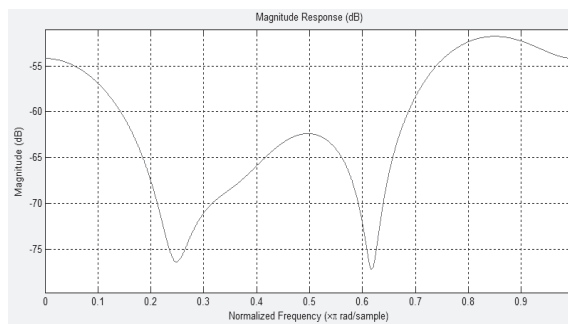


Рис. 2. АЧХ ошибки округления фильтра Db4

Основной характеристикой любого КИХ-фильтра, в частности вейвлетного фильтра Db4, является его импульсная характеристика. Импульсной характеристикой цифровой системы называется отклик, выдаваемый при подаче на вход системы единичного сигнала  $\delta(n)$ . В рассматриваемом нами случае при преобразовании числа в целочисленную форму единичный сигнал должен быть умножен на  $2^9 = 512$ , так как указанное преобразование выполнялось путем сдвига двоичного числа на 9 разрядов влево:

$$\delta(n) = \begin{cases} 512, & n = 0, \\ 0, & n \neq 0. \end{cases} \quad (11)$$

При переходе к СОК {127, 128, 129} имеем

$$\delta(n) = \begin{cases} \{4, 0, 125\}, & n = 0, \\ \{0, 0, 0\}, & n \neq 0. \end{cases} \quad (12)$$

На рис. 3 изображены импульсные характеристики каждого из модулярных фильтров.

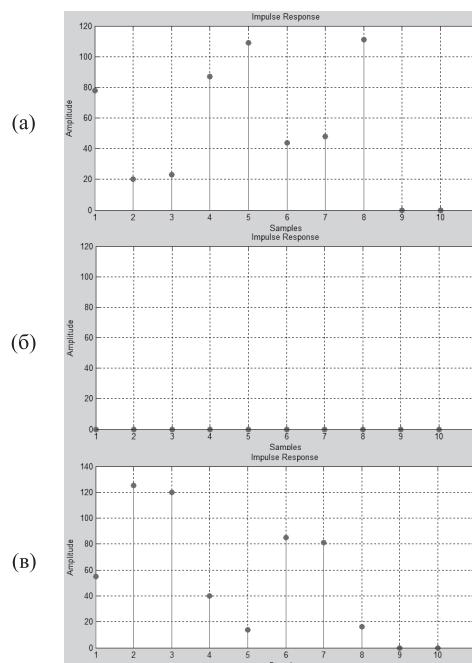


Рис. 3. Импульсные характеристики фильтра Db4 в модулярной форме: а)  $m_1 = 127$ , б)  $m_2 = 128$ , в)  $m_3 = 129$

На рис. 4 представлена ошибка импульсной характеристики, полученная в результате перевода коэффициентов фильтра в СОК, с округлением. Максимальное значение ошибки по модулю не превосходит амплитуды подаваемого на вход фильтра импульса, что составляет менее 0,1% обрабатываемого сигнала. Таким образом, предложенная архитектура вейвлетного фильтра в СОК может быть использована в большинстве практических случаев за исключением тех, при которых требуется особая точность обработки.

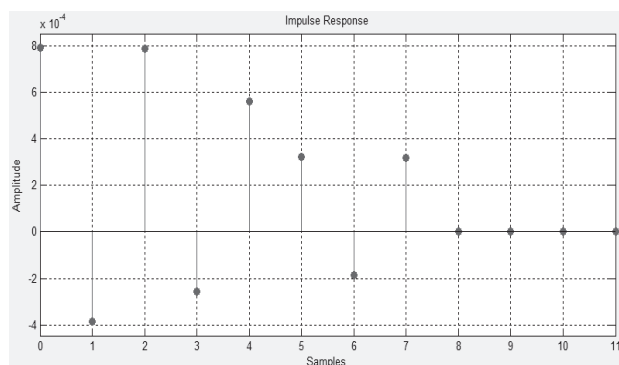


Рис. 4. Ошибка импульсной характеристики фильтра Db4 в модулярной форме

### Заключение

В статье предложен метод проектирования вейвлетных фильтров в СОК. Показано, что СОК обладает большим потенциалом для увеличения производительности фильтров, так как в рассматриваемой задаче требуется выполнение только операций сложения и умножения, которые можно очень быстро вычислять в модулярной форме.

На примере фильтра Добеши Db4 показано, как можно преобразовать коэффициенты из позиционной системы счисления в СОК. Результаты моделирования показали, что ошибка округления, неизбежно возникающая при таком переходе, не вызывает значимых отклонений в работе фильтра.

Построенный метод может быть успешно применен для реализации устройств цифровой обработки сигналов на программируемых логических интегральных схемах, а также в проблемно-ориентированных аппаратно-программных решениях для обработки видеоизображений,

### Литература

- Chervyakov N.I., Lyakhov P.A., Babenko M.G. Digital filtering of images in a residue number system using finite-field wavelets // *Automatic Control and Computer Sciences*. №48 (3), 2014. – P. 180-189.
- Столиц Э., Де Роуз Т., Салезин Д. Вейвлеты в компьютерной графике. Теория и приложения. Москва-Ижевск: Изд-во РХД, 2002. – 272 с.
- Уэлстид С. Фракталы и вейвлеты для сжатия изображений в действии. М.: Триумф, 2003. – 320 с.
- Червяков Н.И., Ляхов П.А. Реализация модулярного вейвлет-преобразования в нейросетевом базисе // *Нейрокомпьютеры: разработка, применение*. №11, 2011. – С. 18-25.
- Малла С. Вейвлеты в обработке сигналов. М.: Мир, 2005. – 671 с.
- Omondi A., Premkumar B. Residue Number Systems: Theory and Implementation. Imperial College Press, 2007. – 296 p.
- Cardarilli G.C., Nannarelli A., Re M. Residue Number System for Low-Power DSP Applications // *Proc. 41st Asilomar Conf. Signals, Syst., Comput.*, 2007. – P. 1412-1416.
- Afsheh A., Mojoodi A. An Improved Re-verse Converter for Moduli Set // *ISCIT 2010 International Symposium on Communications and Information Technologies Proceedings*, 2010. – P. 928-933.
- Червяков Н.И., Сахнюк П.А., Шапошников А.В., Ряднов С.А. Модулярные параллельные вычислительные структуры нейропроцессорных систем. М.: Физ-матлит, 2003. – 288 С.
- Gbolagade K.A., Cotofana S.D. An O(n) Residue Number System to Mixed Radix Technique // *ISCAS 2009 IEEE International Symposium on Circuits and Systems*, 2009. – P. 521-524.
- Червяков Н.И., Сахнюк П.А., Шапошников А.В., Макоха А.Н. Нейрокомпьютеры в остаточных классах. М.: Радиотехника, 2003. – 272 с.
- Ramírez J., Fernández P.G., Meyer-Baese U., Taylor F., García A., Lloris A. Index-based RNS-DWT Architectures for Custom IC Designs // *Proc. of 2001 IEEE Workshop on Signal Processing Systems*, 2001. – P. 70-79.
- Добеши И. Десять лекций по вейвлетам. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. – 464 с.
- Фрейзер М. Введение в вейвлеты в свете линейной алгебры. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2008. – 487 с.
- Чобану М. Многомерные многоскоростные системы обработки сигналов. Москва: Техносфера, 2009. – 480 с.
- Stamenković N. Digital FIR Filter Architecture Based on the Residue Number System // *Facta Universitatis, Ser.: Elec. Energ.* Vol. 22, No. 1, 2009. – P. 125-140.

## IMPLEMENTATION OF DISCRETE WAVELET-TRANSFORMATION IN RNS OF THE SPECIAL VIEW

Chervyakov N.I., Anikueva O.V., Ljahov P.A.

In article the design method the wavelet filter in RNS is offered. It is shown that RNS pos-sesses high potential for increase in productivity of filters as in the considered task performance only of operations of addition and multiplication which can be calculated very quickly in a modular form is required. On the example of Dobesha's filter Db4 it is shown how it is possible to transform coefficients from a position numeral system to RNS. Results of modeling showed that the rounding error which is inevitably arising upon such transition doesn't cause significant deviations in operation of the filter.

*Keywords:* RNS, wavelet -transformation, Dobesha's filter, digital processing of signals.

Червяков Николай Иванович, д.т.н., профессор, Заслуженный деятель науки и техники РФ, заведующий Кафедрой прикладной математики и математического моделирования (ПММ) Северо-Кавказского федерального университета (СКФУ). Тел. (8-865) 275-35-64. E-mail: k-fmf-primath@stavsu.ru

Аникуева Ольга Викторовна, соискатель Кафедры ПММ СКФУ. Тел. 8-918-750-83-25. E-mail: anikueva2013@yandex.ru

Ляхов Павел Алексеевич, к.ф.-м.н., доцент Кафедры ПММ СКФУ. Тел. 8-962-028-72-14. E-mail: ljahov@mail.ru

УДК 621.37:621.391

## ВЕРОЯТНОСТНОЕ ОПИСАНИЕ ЯВЛЕНИЯ ЦЕНТРОБЕЖНОЙ ОШИБКИ ПРИ ПЕРЕДАЧЕ БЕЗЫЗЫТОЧНЫХ ЧИСЛОВЫХ КОДОВ ПО ГАУССОВЫМ КАНАЛАМ

*Рассомахин С.Г., Малофей О.П., Малофей А.О.*

Рассмотрено явление, возникающее при передаче числовых кодов по гауссовым каналам и приводящее к возрастанию среднего квадрата ошибки восстановления чисел по мере их удаления от центра допустимого диапазона. Обосновано название этого явления, как «центробежной ошибки» передачи, определены основные функции и числовые характеристики его вероятностного описания. Предложены возможные пути устранения негативного влияния данного вида искажений для повышения помехоустойчивости систем передачи числовой информации.

**Ключевые слова:** гауссов канал, центробежная ошибка, помехоустойчивость, помеха, величина среднего квадрата ошибки восстановления, частотно-энергетические условия передачи, энергия, сигнал, код Грея.

### Введение. Постановка проблемы

Большая часть систем передачи дискретной информации (СПДИ) оперирует с данными, представляющими собой измерения некоторых физических величин при использовании методов импульсно-кодовой модуляции (ИКМ). Кроме того, при построении числовых помехоустойчивых кодов отдельные кодовые слова пред-

ставляют собой позиционнозначимые числа с произвольным (как правило, двоичным) основанием системы счисления. В этих случаях отход от традиционных комбинаторных методов алгебраического кодирования, вызывающий отказ от использования арифметики по модулю, наталкивается на определенные трудности вероятностного описания процесса передачи чисел в условиях искажающего действия помех. Зачастую проблема заключается в том, что реально достигаемые показатели точности передачи чисел (по некоторым неизвестным причинам) существенно отличаются от ожидаемых. Это является следствием недостаточного учета полного набора факторов, влияющих на точность восстановления позиционных чисел. Данная статья посвящена разработке одного из математических подходов, позволяющих усовершенствовать представления о вероятностном характере воздействия помех на процесс передачи числовых значений при отказе от использования комбинаторных методов избыточного кодирования.

### Анализ последних исследований

Обобщенной характеристикой качества систем передачи числовых кодов является, как