

## МЕТОД ВЫЧИСЛЕНИЯ ИНДЕКСА СЦИНТИЛЛЯЦИИ ПРИ НАЛИЧИИ АНИЗОТРОПНЫХ НЕОДНОРОДНОСТЕЙ В ВОЗМУЩЕННОЙ ИОНОСФЕРЕ

Шевченко В.А.

Главное управление развития информационных и телекоммуникационных технологий

Министерства обороны РФ, Москва, РФ

E-mail: shevv67@mail.ru

Разработан метод вычисления индекса сцинтилляции  $S_4$  принимаемого сигнала на трассах распространения радиоволн в системах спутниковой связи при наличии анизотропных неоднородностей в возмущенной ионосфере. Метод основан на приведении квадратичной формы в аргументах автокорреляционных функций флуктуаций электронной концентрации и фазы к скалярному значению и учете этого при выполнении преобразований Радона и Фурье. Получены выражения, которые позволяют оценить величину  $S_4$  при высоких значениях спектрального индекса спектральной плотности флуктуаций электронной концентрации, а также во всем диапазоне возможных значений отношения радиуса первой зоны Френеля к внешнему масштабу неоднородностей.

**Ключевые слова:** сцинтилляция, анизотропия, неоднородности, ионосфера, автокорреляционная функция, спектральная плотность.

### Введение

Наличие флуктуаций электронной концентрации в неоднородностях ионосферы может вызывать на трассах распространения радиоволн в системах спутниковой связи (ССС) эффект сцинтилляции, то есть случайных изменений амплитуды и фазы принимаемого сигнала [1]. Рост индекса сцинтилляции  $S_4$  при возмущениях ионосферы приводит к существенному снижению помехоустойчивости приема сигналов в СССР [1].

Плазменные неоднородности имеют разные масштабы и удлинены вдоль направления силовых линий магнитного поля Земли [2-4]. При распространении радиоволны длиной  $\lambda$  через слой неоднородностей толщиной  $\Delta z$ , как правило, выполняется условие, когда величина  $\sqrt{\lambda \Delta z}$  много меньше внешнего масштаба этих неоднородностей  $L_0$ . В этом случае слой неоднородностей заменяют соответствующим тонким фазовым экраном, размещенным на высоте с максимальной ионизацией [5; 11].

В [5] задача определения  $S_4$  решена путем применения алгоритма, предложенного в работе [6], для одномерного фазового экрана, и его адаптации к двумерной автокорреляционной функции флуктуаций фазы [5]. Подобный метод, основанный на алгоритме [6], представлен также в [7]. Более корректным является метод нахождения  $S_4$  путем усреднения спектральной плотности интенсивности по возможным значениям ее аргументов [4; 8]. Данная спектральная плотность находится из двумерного преобразования Фурье функции, аргумент которой определяется автокорреляционной функцией флуктуаций фазы и

пропорционален интегралу автокорреляционной функции флуктуаций электронной концентрации вдоль линии визирования [2-3].

Задачу вычисления  $S_4$  можно существенно упростить, если решить ее для условий слабого рассеяния волн, а затем использовать эмпирическое исправление полученного результата для множественного рассеяния в отсутствие жесткой фокусировки [9-10]. Для условий слабого рассеяния выражения для расчета  $S_4$ , учитывающие анизотропность неоднородностей и геометрию трассы распространения, известны в явном виде [4]. Данные выражения получены с использованием аппроксимации степенного закона, справедливой для спектрального индекса  $p$  не выше 5 при условии, что радиус первой зоны Френеля существенно меньше внешнего масштаба неоднородностей. Это условие может не выполняться, когда высота с максимальной ионизацией (высота фазового экрана) существенно больше толщины слоя неоднородностей, но теория фазового экрана еще применима ( $\sqrt{\lambda \Delta z} < L_0$ ). Кроме того, степенным законом со спектральным индексом в пределах до 5 спектральная плотность описывается тогда, когда сцинтилляция является слабой [11]. Когда сцинтилляция становится умеренной интенсивности, для описания спектральной плотности используют гауссовский закон, который ведет себя как степенной с высоким спектральным индексом [6; 11].

Учитывая вышеизложенное, обобщим выражения для расчета  $S_4$  в условиях слабого рассеяния на случай произвольной спектральной плотности флуктуаций электронной концентрации для всего диапазона возможных значений отно-

шения радиуса первой зоны Френеля к внешнему масштабу неоднородностей.

Полученные выражения для расчета индекса сцинтилляции конкретизируем для спектральной плотности флуктуаций электронной плотности как гауссовской, так и подчиненной степенному закону, в том числе с большим значением спектрального индекса.

### Автокорреляционная функция флуктуаций фазы

Примем, что волна распространяется от космического аппарата (КА) до земной станции через ионизированную область толщиной  $\Delta z$  с неоднородностями электронной концентрации  $\Delta N_e(x, y, z)$ . Геометрия распространения волны показана на рис. 1.

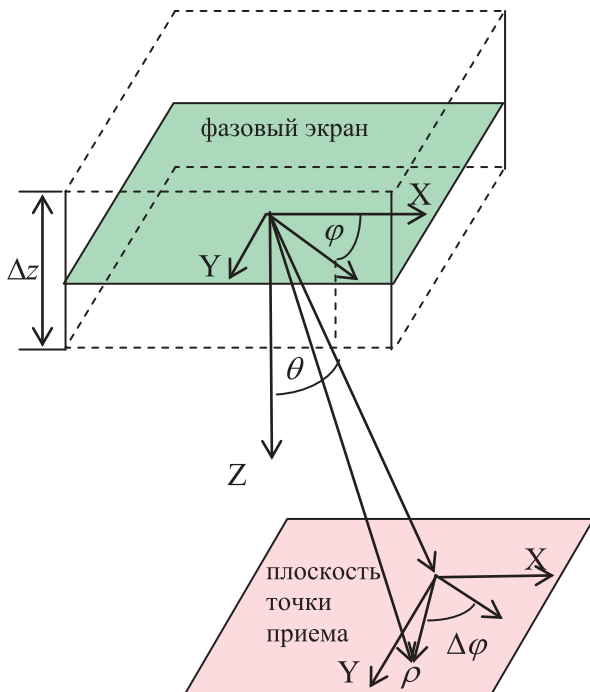


Рис. 1. Геометрия распространения волны

Неоднородности в данной области заменим соответствующим двумерным тонким фазовым экраном, который описывает появление флуктуаций в фазовом фронте волны после прохождения экрана  $\Delta\phi(x, y) \sim \Delta z \Delta N_e(x, y, z)$  [1]. Точка пересечения трассой распространения волны фазового экрана определяет начало системы координат  $(X; Y; Z)$ , ось  $X$  которой направлена по географическому меридиану (на север), ось  $Y$  – по параллели (на восток), ось  $Z$  – строго вниз.

Направление распространения волны длиной  $\lambda = 2\pi/k$ , где  $k$  – волновое число, зададим вектором, проекция которого на горизонтальную пло-

скость  $XU$  имеет единичный вектор  $(\cos \varphi, \sin \varphi)$ , где  $\varphi$  – азимут. Угол между вектором распространения волны и горизонтальной плоскостью определяется величиной  $\pi/2 - \theta$ , где  $\theta$  – угол падения. Фазовый экран лежит в горизонтальной плоскости  $XU$  и в точке с координатами  $(x, y)$  вызывает случайное изменение фазы во фронте волны  $\Delta\phi(x, y)$ , которое описывается стационарным процессом с автокорреляционной функцией  $B_{\Delta\phi}(x, y)$  и дисперсией  $\sigma^2$ .

Автокорреляционная функция флуктуаций фазы пропорциональна интегралу автокорреляционной функции флуктуаций электронной плотности  $B_{\Delta N_e}(x, y, z)$  вдоль линии визирования [3]

$$B_{\Delta\phi}(x, y) \cong (\lambda r_e \sec \theta)^2 \Delta z \int_{-\infty}^{\infty} B_{\Delta N_e}(x, y, z) dz, \quad (1)$$

где  $r_e$  – радиус электрона. Линия визирования с учетом наклонного распространения волны на расстоянии  $z$  от фазового экрана проходит через точку с координатами

$$(x, y, z) = (\rho \cos \Delta\varphi - z \tan \theta, \rho \sin \Delta\varphi, z) R_z(\varphi), \quad (2)$$

где  $\rho$  – радиальная координата,  $\Delta\varphi$  – угол отклонения от азимута  $\varphi$  в полярной системе координат;  $R_z(\varphi)$  – матрица вращения вокруг оси  $Z$  на угол  $\varphi$ . Для анизотропной среды аргумент автокорреляционной функции  $B_{\Delta N_e}(\sigma)$  в системе координат  $(S, T, R)$  имеет величину  $\sigma$ , определяемую из следующего выражения [2-3]:

$$\sigma^2 = \left(\frac{s}{a}\right)^2 + \left(\frac{t}{b}\right)^2 + r^2 = \left((s, t, r) D_{ab}^{-1}\right) \left((s, t, r) D_{ab}^{-1}\right)^T, \quad (3)$$

где  $a$  – параметр, характеризующий степень удлинения неоднородности вдоль магнитного поля;  $b$  – параметр, характеризующий степень удлинения неоднородности поперек магнитного поля;  $D_{ab}^{-1}$  – матрица, имеющая следующий вид:

$$D_{ab}^{-1} = \begin{vmatrix} 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 1/b & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}. \quad (4)$$

Неоднородности удлиненны вдоль осей  $S$  и  $T$ . В системе координат  $(X_p, Y_p, Z_p)$ , в которой ось  $X_p$  направлена на геомагнитный север, ось  $Y_p$  – на геомагнитный восток, ось  $Z_p$  – вниз, плоскость  $X_p Z_p$  содержит ось  $S$  [3]. Угол между этой осью и осью  $X_p$  определя-

ется углом магнитного наклоения  $\psi_I$ , угол между осями  $X$  и  $X_p$  в плоскости  $XY$  – углом магнитного наклоения  $\psi_D$ . Наклонение поперечной оси неоднородностей  $T$  примем равным нулю.

Переход от системы  $(X, Y, Z)$  к системе  $(X_p, Y_p, Z_p)$  выполним путем поворота системы координат на угол  $\psi_D$  вокруг оси  $Z$ , а затем к системе координат  $(S, T, R)$  – путем поворота на угол  $\psi_I$  вокруг оси  $Y_p$  так, что с учетом выражения (2)

$$\begin{aligned} (s, t, r) &= (x, y, z)R_Z(-\psi_D)R_Y(\psi_I) = \\ &= (\rho \cos \Delta\varphi - z \operatorname{tg} \theta, \rho \sin \Delta\varphi, z)T, \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$T = R_Z(\varphi - \psi_D)R_Y(\psi_I). \quad (6)$$

Подставив (5) в (3), получим

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= (\rho \cos \Delta\varphi - z \operatorname{tg} \theta, \rho \sin \Delta\varphi, z)R_\Sigma \times \\ &\times (\rho \cos \Delta\varphi - z \operatorname{tg} \theta, \rho \sin \Delta\varphi, z)^T, \end{aligned} \quad (7)$$

где

$$R_\Sigma = T(D_{ab}^{-1})^2 T^{-1}. \quad (8)$$

Матрица  $R_\Sigma$ , как следует из (8), является симметрической, а ее собственными значениями являются диагональные элементы матрицы  $(D_{ab}^{-1})^2$ . Выражение (8) после раскрытия его правой части примет следующий вид:

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \rho^2 (r_{11} \cos^2 \Delta\varphi + 2r_{12} \sin \Delta\varphi \cos \Delta\varphi + r_{22} \sin^2 \Delta\varphi) + \\ &+ 2\rho z (r_{13} \cos \Delta\varphi + r_{23} \sin \Delta\varphi - \\ &- (r_{11} \cos \Delta\varphi + r_{12} \sin \Delta\varphi) \operatorname{tg} \theta) + \\ &+ z^2 (r_{33} - 2r_{13} \operatorname{tg} \theta + r_{11} \operatorname{tg}^2 \theta) = (\rho, z)F(\rho, z)^T. \end{aligned} \quad (9)$$

где  $F$  – матрица, элементы которой, как следует из (9), определяются через элементы матрицы  $R_\Sigma R$  следующим образом:

$$\begin{aligned} f_{11} &= r_{11} \cos^2 \Delta\varphi + 2r_{12} \sin \Delta\varphi \cos \Delta\varphi + r_{22} \sin^2 \Delta\varphi; \\ f_{12} = f_{21} &= r_{13} \cos \Delta\varphi + r_{23} \sin \Delta\varphi - \\ &- (r_{11} \cos \Delta\varphi + r_{12} \sin \Delta\varphi) \operatorname{tg} \theta; \\ f_{22} &= r_{33} - 2r_{13} \operatorname{tg} \theta + r_{11} \operatorname{tg}^2 \theta. \end{aligned} \quad (10)$$

Матрица  $F$  имеет собственные значения  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ , которые являются корнями уравнения  $\det(F - \lambda I) = 0$  [12], где  $I$  – единичная матрица, и определяются выражениями

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{f_{11} + f_{22} + \sqrt{(f_{11} + f_{22})^2 - 4 \det F}}{2}; \\ \lambda_2 &= \frac{f_{11} + f_{22} - \sqrt{(f_{11} + f_{22})^2 - 4 \det F}}{2}. \end{aligned} \quad (11)$$

Матрицу  $F$  можно выразить в виде [9]

$$F = H\Lambda\Lambda^T H^{-1}, \quad (12)$$

где

$$\Lambda = \begin{vmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} \end{vmatrix}, \quad (13)$$

$$H = \begin{vmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{vmatrix}, \quad (14)$$

$$\alpha = \operatorname{arctg} \left( \frac{\lambda_2 - f_{22} - f_{12}}{\lambda_2 - f_{11} - f_{12}} \right). \quad (15)$$

Это позволяет представить выражение (7) следующим образом:

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= (\rho, z)H\Lambda\Lambda^T H^{-1}(\rho, z)^T = \\ &= (\rho, z)H\Lambda((\rho, z)H\Lambda)^T. \end{aligned} \quad (16)$$

В (16) учтено, что для ортогональной матрицы выполняется равенство  $H^{-1} = H^T$ . С учетом (16) автокорреляционная функция (1) примет следующий вид:

$$\begin{aligned} B_{\Delta\phi}(\rho, \Delta\varphi) &= (\lambda_r \sec \theta)^2 \Delta z \times \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} B_{\Delta N_e} \left( \sqrt{(\rho, z)H\Lambda((\rho, z)H\Lambda)^T} \right) dz. \end{aligned} \quad (17)$$

Введем обозначение

$$(p, t) = (\rho, z)H. \quad (18)$$

Интеграл в правой части (17) представляет собой преобразование Радона подынтегральной функции  $R(B_{\Delta N_e}(\rho, \xi))$ , где  $\xi = (\cos \alpha, \sin \alpha)$ . Преобразование Радона данной функции также может быть выражено следующим образом [13]:

$$\begin{aligned} R(B_{\Delta N_e}(\rho, \xi)) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} B_{\Delta N_e} \left( \sqrt{(p, t)\Lambda((p, t)\Lambda)^T} \right) \times \\ &\times \delta(\rho - (p, t)(\cos \alpha, \sin \alpha)^T) dp dt, \end{aligned} \quad (19)$$

где  $\delta(\cdot)$  – дельта-функция Дирака. Сделаем в выражении (19) замену переменных

$$(u, v) = (\eta p, \eta t)\Lambda E, \quad (20)$$

где

$$\eta = \sqrt{\frac{\cos^2 \alpha}{\lambda_1} + \frac{\sin^2 \alpha}{\lambda_2}}; \quad (21)$$

$$E = \begin{pmatrix} \frac{\cos \alpha}{\eta\sqrt{\lambda_1}} & -\frac{\sin \alpha}{\eta\sqrt{\lambda_2}} \\ \frac{\sin \alpha}{\eta\sqrt{\lambda_2}} & \frac{\cos \alpha}{\eta\sqrt{\lambda_1}} \end{pmatrix}, \quad (22)$$

с учетом того, что

$$(p, t) = \begin{pmatrix} u \\ \eta \\ v \\ \eta \end{pmatrix} E^{-1} \Lambda^{-1}, \quad (23)$$

а якобиан преобразования

$$J = \begin{vmatrix} \frac{dp}{du} & \frac{dt}{dv} \\ \frac{dp}{dv} & \frac{dt}{du} \end{vmatrix} = \frac{1}{\eta^2 \sqrt{\lambda_1 \lambda_2}}. \quad (24)$$

Тогда после математических преобразований получим

$$\begin{aligned} R(B_{\Delta N_e}(\rho, \xi)) &= \frac{1}{\eta^2 \sqrt{\lambda_1 \lambda_2}} \times \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} B_{\Delta N_e} \left( \frac{1}{\eta} \sqrt{(u, v)(u, v)^T} \right) \delta(\rho - u) dudv = \\ &= \frac{1}{\eta^2 \sqrt{\lambda_1 \lambda_2}} \int_{-\infty}^{\infty} B_{\Delta N_e} \left( \frac{1}{\eta} \sqrt{\rho^2 + v^2} \right) dv. \end{aligned} \quad (25)$$

Сделав в выражении (25) замену переменной  $\sigma = \sqrt{\rho^2 + v^2} / \eta$ , для которой при  $\sigma \geq \rho / \eta$  справедливо

$$v = \sqrt{(\sigma\eta)^2 - \rho^2}, \quad \frac{dv}{d\sigma} = \frac{\sigma\eta^2}{\sqrt{(\sigma\eta)^2 - \rho^2}}, \quad (26)$$

получим

$$R(B_{\Delta N_e}(\rho, \xi)) = \frac{2}{\eta\sqrt{\lambda_1 \lambda_2}} \int_{\rho/\eta}^{\infty} \frac{\sigma B_{\Delta N_e}(\sigma)}{\sqrt{\sigma^2 - (\rho/\eta)^2}} d\sigma. \quad (27)$$

В выражении (27) автокорреляционная функция зависит от скалярного аргумента, как при изотропных неоднородностях.

Известно, что в этом случае трехмерные автокорреляционная функция  $B_{\Delta N_e}(\sigma)$  и спектральная плотность  $\Phi_{\Delta N_e}(k)$  связаны следующим образом [14]:

$$B_{\Delta N_e}(\sigma) = 4\pi \int_0^{\infty} k^2 \left( \frac{\sin \sigma k}{\sigma k} \right) \Phi_{\Delta N_e}(k) dk. \quad (28)$$

Как следует из (28), спектральная плотность  $\Phi_{\Delta N_e}(k)$  должна удовлетворять условию

$$B_{\Delta N_e}(0) = 4\pi \int_0^{\infty} k^2 \Phi_{\Delta N_e}(k) dk = \sigma_{\Delta N_e}^2, \quad (29)$$

где  $\sigma_{\Delta N_e}^2$  – дисперсия флуктуаций электронной концентрации. С учетом (28) выражение (27) после преобразований примет следующий вид:

$$\begin{aligned} R(B_{\Delta N_e}(\rho, \xi)) &= \frac{8\pi}{\eta\sqrt{\lambda_1 \lambda_2}} \int_{\frac{\rho}{\eta}}^{\infty} \frac{\sigma}{\sqrt{\sigma^2 - \left(\frac{\rho}{\eta}\right)^2}} \times \\ &\times \int_0^{\infty} k^2 \left( \frac{\sin \sigma k}{\sigma k} \right) \Phi_{\Delta N_e}(k) dk d\sigma = \\ &= \frac{8\pi}{\eta\sqrt{\lambda_1 \lambda_2}} \int_0^{\infty} k \Phi_{\Delta N_e}(k) \int_{\frac{\rho}{\eta}}^{\infty} \frac{\sin \sigma k}{\sqrt{\sigma^2 - \left(\frac{\rho}{\eta}\right)^2}} d\sigma dk. \end{aligned} \quad (30)$$

Второй интеграл является синус-преобразованием функции  $f(\sigma) = (\sigma^2 - a^2)^{-1/2}$ . Используя табличный интеграл [15]

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(\sigma k)}{(\sigma^2 - a^2)^{v+1/2}} dk = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2} - v\right) \left(\frac{k}{2a}\right)^v J_v(ak), \quad (31)$$

где  $v = 0$ ,  $a = \rho/\eta$ , получим

$$R(B_{\Delta N_e}(\rho, \xi)) = \frac{4\pi^2}{\eta\sqrt{\lambda_1 \lambda_2}} \int_0^{\infty} k J_0\left(\frac{k\rho}{\eta}\right) \Phi_{\Delta N_e}(k) dk. \quad (32)$$

Выражение (17) с учетом (32) примет вид:

$$\begin{aligned} B_{\Delta\phi}(\rho, \Delta\phi) &= \frac{(2\pi\lambda r_e \sec\theta)^2}{\eta\sqrt{\lambda_1 \lambda_2}} \Delta z \times \\ &\times \int_0^{\infty} k J_0(k\rho/\eta) \Phi_{\Delta N_e}(k) dk. \end{aligned} \quad (33)$$

Интеграл в правой части (33) с точностью до коэффициента представляет двумерное преобразование Фурье спектральной плотности электронной концентрации, справедливое для изотропного случая [1]. Аргументом автокорреляционной функции флуктуаций фазы является отношение  $\rho/\eta$ .

Умножим числитель и знаменатель этого отношения на величину  $\cos\theta\sqrt{\lambda_1 \lambda_2}$  и учтем, что

$$\cos \theta \sqrt{\lambda_1 \lambda_2} = \cos \theta \sqrt{\det F}. \quad (34)$$

Подставив в правую часть выражения (34) значения элементов матрицы  $F$ , заданных выражением (10), после математических преобразований получим

$$\cos \theta \sqrt{\lambda_1 \lambda_2} = ((\cos \Delta \varphi, \sin \Delta \varphi) Q \times (\cos \Delta \varphi, \sin \Delta \varphi)^T)^{\frac{1}{2}}, \quad (35)$$

где  $Q$  – матрица, элементы которой определяются следующим выражением:

$$\begin{aligned} q_{11} &= (r_{11} r_{33} - r_{13}^2) \cos \theta; \\ q_{12} &= q_{21} = (r_{12} r_{33} - r_{13} r_{23}) \cos \theta + (r_{11} r_{23} - r_{12} r_{13}) \sin \theta; \\ q_{22} &= (r_{22} r_{33} - r_{23}^2) \cos \theta + 2(r_{12} r_{23} - r_{13} r_{22}) \sin \theta + \\ &+ (r_{11} r_{22} - r_{12}^2) \sin \theta \cos \theta. \end{aligned} \quad (36)$$

Определим геометрический фактор усиления  $G$  по аналогии с введенным в работе [3] следующим образом:

$$G^{-1} = \eta \cos \theta \sqrt{\lambda_1 \lambda_2}. \quad (37)$$

В случае изотропных неоднородностей значение  $G = 1$  [3-4]. Используя обозначение

$$\boldsymbol{\rho} = (\rho_x, \rho_y) = (\rho \cos \Delta \varphi, \rho \sin \Delta \varphi), \quad (38)$$

а также (37), получим вместо выражения (33) следующее:

$$\begin{aligned} B_{\Delta \varphi}(\boldsymbol{\rho}) &= (2\pi \lambda r_e)^2 \Delta z G \sec \theta \times \\ &\times \int_0^{\infty} k J_0(kx) \Phi_{\Delta N_e}(k) dk, \end{aligned} \quad (39)$$

где  $x = G \cos \theta \sqrt{\boldsymbol{\rho} Q \boldsymbol{\rho}^T}$ . Выражение (39) аналогично полученному в [3] с учетом того, что интеграл в его правой части с точностью до коэффициента представляет двумерную автокорреляционную функцию флуктуаций электронной концентрации.

Для нормированной автокорреляционной функции (39), основываясь на результатах [3], запишем

$$G^{-1} = ab \sqrt{\det Q}. \quad (40)$$

Из сопоставления выражений (37) и (40) следует, что величина  $\eta \cos \theta \sqrt{\lambda_1 \lambda_2}$  не зависит от величины  $\Delta \varphi$ .

## Индекс сцинтилляции

Используя обозначения, принятые в данной работе, выразим спектральную плотность интенсивности  $I$  поля волны в точке приема за пределами двумерного экрана следующим образом [2]:

$$\Phi_I(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int g(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{k}) \exp(i\boldsymbol{\rho} \mathbf{k}^T) d\boldsymbol{\rho}, \quad (41)$$

где

$$\mathbf{k} = (k_x, k_y), \quad (42)$$

$$g(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{k}) = \exp(-f(\boldsymbol{\rho} = (0,0), \mathbf{k})) \times (\exp(-f(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{k})) - 1), \quad (43)$$

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{k}) &= 2B_{\Delta \varphi}(\boldsymbol{\rho}) - B_{\Delta \varphi}(\boldsymbol{\rho} - d_F^2 \mathbf{k}) - \\ &- B_{\Delta \varphi}(\boldsymbol{\rho} + d_F^2 \mathbf{k}), \end{aligned} \quad (44)$$

где  $d_F$  – радиус первой зоны Френеля. Обозначим через  $R_1$  расстояние между КА и верхней частью области ионизации, через  $R_2$  – расстояние между нижней частью области ионизации и земной станцией. Рассматривая только КА на высокой орбите, будем предполагать, что  $R_1 > R_2$ . В радиолиниях «вниз» и «вверх» с учетом введенных обозначений  $d_F$  определяется следующим образом [7]:

$$d_F \approx \sqrt{\frac{\lambda(R_2 + \Delta z \sec(\theta)/2)}{2\pi}} \approx \sqrt{\frac{\lambda H_{ps} \sec \theta}{2\pi}}, \quad (45)$$

где  $H_{ps}$  – высота фазового экрана. Автокорреляционная функция интенсивности определяется как [2]

$$B_I(\boldsymbol{\rho}) = \int \Phi_I(\mathbf{k}) \exp(-i\boldsymbol{\rho} \mathbf{k}^T) d\mathbf{k}, \quad (46)$$

а индекс сцинтилляции находится из выражения [2]

$$S_4^2 = B_I(0,0) = \int \Phi_I(\mathbf{k}) d\mathbf{k}. \quad (47)$$

В радиолинии «вверх» (47) сводится к известному [2] выражению

$$S_4^2 = 1 - \exp(-2\sigma_{\Delta \varphi}^2). \quad (48)$$

Определим выражение для  $S_4^2$  для линии «вниз». Известно эмпирическое уточнение результата слабого рассеяния, чтобы приблизительно объяснить множественное рассеяние в отсутствие жесткой фокусировки [9]:

$$S_4^2 = 1 - \exp(-S_{4w}^2). \quad (49)$$

где  $S_{4w}$  – индекс сцинтилляции в условиях слабого рассеяния, когда  $\sigma_{\Delta\phi}^2 < 1$ . Для этих условий справедливо приближение  $\exp(f) \approx 1 + f$ , так что выражение (44) можно аппроксимировать следующим образом:

$$g(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{k}) \approx f(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{k}). \quad (50)$$

Тогда выражение (41) с учетом приближения (50) примет вид

$$\begin{aligned} \Phi_I(\mathbf{k}) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int \exp(i\boldsymbol{\rho}\mathbf{k}^T) \times \\ &\times (2B_{\Delta\phi}(\boldsymbol{\rho}) - B_{\Delta\phi}(\boldsymbol{\rho} - d_F^2\mathbf{k}) - B_{\Delta\phi}(\boldsymbol{\rho} + d_F^2\mathbf{k})) d\boldsymbol{\rho} = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} (2 - \exp(id_F^2\mathbf{k}\mathbf{k}^T) - \exp(-id_F^2\mathbf{k}\mathbf{k}^T)) \times \\ &\times \int \exp(i\boldsymbol{\rho}\mathbf{k}^T) B_{\Delta\phi}(\boldsymbol{\rho}) d\boldsymbol{\rho} = \\ &= \frac{1}{2\pi^2} (1 - \cos(d_F^2\mathbf{k}\mathbf{k}^T)) \times \\ &\times \int \exp(i\boldsymbol{\rho}\mathbf{k}^T) B_{\Delta\phi}(G \cos \theta \sqrt{\boldsymbol{\rho}\mathbf{Q}\boldsymbol{\rho}^T}) d\boldsymbol{\rho}. \quad (51) \end{aligned}$$

Матрица  $\mathbf{Q}$  имеет собственные значения  $\chi_1$  и  $\chi_2$ , которые являются корнями уравнения  $\det(\mathbf{Q} - \chi\mathbf{I}) = 0$ , где  $\mathbf{I}$  – единичная матрица, и определяются выражениями, аналогичными (11):

$$\begin{aligned} \chi_1 &= \frac{q_{11} + q_{22} + \sqrt{(q_{11} + q_{22})^2 - 4 \det \mathbf{Q}}}{2}, \\ \chi_2 &= \frac{q_{11} + q_{22} - \sqrt{(q_{11} + q_{22})^2 - 4 \det \mathbf{Q}}}{2}. \quad (52) \end{aligned}$$

Выразим матрицу  $\mathbf{Q}$  аналогично матрице  $F$  (12) как

$$\mathbf{Q} = L\mathbf{X}\mathbf{X}^T L^{-1}, \quad (53)$$

где

$$\mathbf{X} = \begin{vmatrix} \sqrt{\chi_1} & 0 \\ 0 & \sqrt{\chi_2} \end{vmatrix}, \quad (54)$$

$$L = \begin{vmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ -\sin \beta & \cos \beta \end{vmatrix}, \quad (55)$$

$$\beta = \arctg \left( -\frac{\chi_2 - q_{22} - q_{12}}{\chi_2 - q_{11} - q_{12}} \right). \quad (56)$$

Сделаем в (51) замены переменных

$$\boldsymbol{\rho}L\mathbf{X} = (\delta \cos \gamma, \delta \sin \gamma), \quad (57)$$

$$(k \cos \tau, k \sin \tau)^T = \mathbf{X}^{-1} L^{-1} \mathbf{k}^T \quad (58)$$

и получим с учетом того, что

$$\boldsymbol{\rho} = (\delta \cos \gamma, \delta \sin \gamma) \mathbf{X}^{-1} L^{-1}, \quad (59)$$

$$\mathbf{k} = (k \cos \tau, k \sin \tau) \mathbf{X}^T L^T, \quad (60)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{k}\mathbf{k}^T &= (k \cos \tau, k \sin \tau) \mathbf{X}^T L^T L \mathbf{X} (k \cos \tau, k \sin \tau)^T = \\ &= k^2 (\chi_1 \cos^2 \tau + \chi_2 \sin^2 \tau) = k^2 (A + B \cos 2\tau), \quad (61) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} A &= (\chi_1 + \chi_2)/2 = (q_{11} + q_{22})/2, \\ B &= \frac{(\chi_1 - \chi_2)}{2} = \frac{\sqrt{(q_{11} - q_{22})^2 + 4q_{12}^2}}{2}, \quad (62) \end{aligned}$$

а якобиан преобразования

$$J = \begin{vmatrix} \frac{d\rho_x}{d\delta} & \frac{d\rho_y}{d\delta} \\ \frac{d\rho_x}{d\gamma} & \frac{d\rho_y}{d\gamma} \end{vmatrix} = \delta \det \mathbf{X}^{-1} = \frac{\delta}{\sqrt{\det \mathbf{Q}}}. \quad (63)$$

Правая часть (61) получена с использованием известных тригонометрических равенств

$$\cos^2 \tau = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\tau), \quad \sin^2 \tau = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\tau). \quad (64)$$

С учетом (57)-(63) после преобразований выражение (51) примет следующий вид:

$$\begin{aligned} \Phi_I(k, \tau) &= \frac{1}{\pi} (1 - \cos(k^2 d_F^2 A) \cos(k^2 d_F^2 B \cos 2\tau) - \\ &- \sin(k^2 d_F^2 A) \sin(k^2 d_F^2 B \cos 2\tau)) \times \\ &\times \frac{1}{\sqrt{\det \mathbf{Q}}} \int_0^\infty \delta J_0(\delta k) B_{\Delta\phi}(\delta G \cos \theta) d\delta. \quad (65) \end{aligned}$$

Двумерные автокорреляционная функция и спектральная плотность флуктуаций связаны известным соотношением [1-4]:

$$\Phi_{\Delta\phi}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty x B_{\Delta\phi}(x) J_0(kx) dx. \quad (66)$$

Сделаем в выражении (65) замену переменной  $x = \delta G \cos \theta$ , а затем учтем выражение (66). Тогда

$$\begin{aligned} \Phi_I(k, \tau) &= \frac{2}{\sqrt{\det \mathbf{Q}}} \left( \frac{1}{G \cos \theta} \right)^2 \Phi_{\Delta\phi} \left( \frac{k}{G \cos \theta} \right) \times \\ &\times (1 - \cos(k^2 d_F^2 A) \cos(k^2 d_F^2 B \cos 2\tau) - \\ &- \sin(k^2 d_F^2 A) \sin(k^2 d_F^2 B \cos 2\tau)). \quad (67) \end{aligned}$$

Выражение (47) для условий слабого рассеяния ( $S_4 \approx S_{4w}$ ) после замены переменной (60) с учетом того, что якобиан преобразования

$$J = \begin{vmatrix} \frac{dk_x}{d\tau} & \frac{dk_y}{d\tau} \\ \frac{dk_x}{dk_y} & \frac{dk_y}{dk_x} \end{vmatrix} = k \det X = k \sqrt{\chi_1 \chi_2} = k \sqrt{\det Q}, \quad (68)$$

примет следующий вид:

$$S_{4w}^2 = \sqrt{\det Q} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} k \Phi_I(k, \tau) d\tau dk. \quad (69)$$

Подставим (66) в (69), сделаем замену переменной  $q = (k/G \cos \theta)^2$  и воспользуемся табличными интегралами [16]:

$$\int_0^\pi \sin(z \cos x) \cos nx dx = \pi \sin \frac{n\pi}{2} J_n(z), \quad (70)$$

$$\int_0^\pi \cos(z \cos x) \cos nx dx = \pi \cos \frac{n\pi}{2} J_n(z),$$

где

$$z = (d_F G \cos \theta)^2 B, \quad (71)$$

$n = 0$ , а также тем, что по определению

$$2\pi \int_0^\infty y \Phi_{\Delta\phi}(y) dy = B_{\Delta\phi}(0) = \sigma_{\Delta\phi}^2, \quad (72)$$

где  $y = k/(G \cos \theta)$ . Тогда выражение (69) с учетом обозначений (62) примет следующий вид:

$$S_{4w}^2 = 2(\sigma_{\Delta\phi}^2 - \pi \int_0^\infty \Phi_{\Delta\phi}(\sqrt{q}) \times$$

$$\times J_0 \left( q (d_F G \cos \theta)^2 \frac{\sqrt{(q_{11} - q_{22})^2 + 4q_{12}^2}}{2} \right) \times$$

$$\times \cos \left( q (d_F G \cos \theta)^2 \frac{(q_{11} + q_{22})}{2} \right) dq \Bigg). \quad (73)$$

Таким образом, как следует из выражения (73), индекс сцинтилляции  $S_{4w}$  определяется интегралом от произведения спектральной плотности флуктуаций фазы и фильтрующих функций. Фильтрующие функции в выражении (73) имеют аргументы, учитывающие наклонное распространение волны  $\theta$ , а также анизотропию этих неоднородностей через геометрический коэффициент усиления  $G$  и элементы матрицы  $Q$ . Геометрический коэффициент усиления  $G$  и наклонный ха-

рактер распространения волны  $\theta$  также определяют величину дисперсии флуктуаций фазы  $\sigma_{\Delta\phi}^2$ .

В «дальней» зоне значение интеграла в правой части (73) становится пренебрежимо малым. В этом можно убедиться, подставив (73) в (49) и сопоставив полученное выражение с выражением (48). В результате будем иметь  $S_{4w}^2 \approx 2\sigma_{\Delta\phi}^2$ , что подтверждает достоверность полученного выражения (73).

### Гауссовская спектральная плотность флуктуаций

Конкретизируем (73) для случая, когда спектральная плотность флуктуаций электронной плотности  $\Phi_{\Delta N_e}(k)$  является гауссовской и подчинена следующему закону [1]:

$$\Phi_{\Delta N_e}(k) = \sigma_{\Delta N_e}^2 C_N \exp(-k^2/(2k_0)^2), \quad (74)$$

где  $C_N$  – величина, которая определяется из условия (33),  $k_0 = 2\pi/L_0$ . Используя табличный интеграл [16]

$$\int_0^\infty x^{2n} \exp(-px^2) dx = \frac{(2n-1)!!}{2(2p)^n} \sqrt{\frac{\pi}{p}}, \quad (75)$$

где  $p = 1/4k_0^2$ ,  $n = 1$ , из (29) для гауссовской спектральной плотности (74) получим

$$C_N = \frac{1}{8\pi^{3/2} k_0^3}. \quad (76)$$

Подставив (76) в выражение (74), а последнее – в выражение (39) и воспользовавшись табличным интегралом [15]

$$\int_0^\infty k^{v+1/2} \exp(-ak^2) \sqrt{xk} J_0(xk) dk =$$

$$= \frac{x^{v+1/2}}{(2a)^{v+1}} \exp\left(-\frac{x^2}{4a}\right), \quad (77)$$

где  $a = (2k_0)^{-2}$ ,  $v = 0$ , найдем, что

$$B_{\Delta\phi}(x) = \frac{\sqrt{\pi} (\lambda r_e)^2 \Delta z \sec \theta G \sigma_{\Delta N_e}^2}{k_0} \exp(-x^2 k_0^2). \quad (78)$$

Полагая в выражении (78)  $x = 0$ , получим

$$\sigma_{\Delta\phi}^2 = \sqrt{\pi} (\lambda r_e)^2 \Delta z \sec \theta k_0^{-1} \sigma_{\Delta N_e}^2 G. \quad (79)$$

Данный результат для случая изотропных неоднородностей, когда  $G = 1$ , совпадает с известным [17]. Тогда спектральная плотность флуктуаций фазы при

подстановке (78) в выражение (66) и учете табличного интеграла (77), где  $a = k_0$ ,  $v = 0$ , а также выражения (79), определится следующим выражением:

$$\Phi_{\Delta\phi}(k) = \frac{\sigma_{\Delta\phi}^2}{4\pi k_0^2} \exp\left(-\frac{k^2}{4k_0^2}\right). \quad (80)$$

Подставив (80) в выражение (73) и воспользовавшись табличным интегралом [16]

$$\int_0^\infty \exp(-bx)\cos(ax)J_0(cx)dx = \frac{\sqrt{(b^2 + c^2 - a^2)^2 + 4a^2b^2 + b^2 + c^2 - a^2}}{2((b^2 + c^2 - a^2)^2 + 4a^2b^2)}, \quad (81)$$

где

$$a = (d_F G \cos \theta)^2 \frac{\sqrt{(q_{11} - q_{22})^2 + 4q_{12}^2}}{2};$$

$$b = 1/4k_0^2, \quad c = (d_F G \cos \theta)^2 \frac{(q_{11} + q_{22})}{2}, \quad (82)$$

получим после преобразований

$$S_{4w}^2 = 2\sigma_{\Delta\phi}^2 \left(1 - \sqrt{\frac{\sqrt{(1-F)^2 + 4D + 1 - F}}{2((1-F)^2 + 4D)}}\right), \quad (83)$$

где

$$F = (2d_F k_0 G \cos \theta)^4 (q_{11}q_{22} - q_{12}^2),$$

$$D = 4(d_F k_0 G \cos \theta)^4 (q_{11} + q_{22})^2. \quad (84)$$

Таким образом, выражение (73) для  $S_{4w}^2$  при гауссовской спектральной плотности флуктуаций возможно представить в замкнутом виде (83)-(84).

### Степенная спектральная плотность флуктуаций

Рассмотрим случай, когда спектральная плотность подчинена степенному закону [3-4]:

$$\Phi_{\Delta N_e}(k) = \sigma_{\Delta N_e}^2 \frac{C_N}{(k_0^2 + k^2)^{p/2}}, \quad (85)$$

где  $C_N$  – коэффициент, который должен быть определен из условия (29),  $p$  – спектральный индекс. Поскольку согласно [16]

$$\int_0^\infty x^{\mu-1} (1+x^2)^{\nu-1} dx = \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{\mu}{2}\right)\Gamma\left(1-\nu-\frac{\mu}{2}\right)}{\Gamma(1-\nu)}, \quad (86)$$

при условии, что  $\nu + \mu/2 < 1$ , то при  $x = k/k_0$ ,  $\mu = 3$ ,  $1 - \nu = p/2$  из уравнения (29) для  $p > 3$  получим

$$C_N = \frac{1}{\pi^{3/2}} \frac{\Gamma(p/2)k_0^{p-3}}{\Gamma((p-3)/2)}. \quad (87)$$

Подставим (87) в выражение (85), а последнее – в выражение (39) и воспользуемся табличным интегралом [15]

$$\int_0^\infty k^{\nu+1/2} (k^2 + k_0^2)^{-\mu-1} \sqrt{xk} J_0(xk) dk = \frac{k_0^{\nu-\mu} (\rho/\eta)^{\mu+1/2}}{2^\mu \Gamma(\mu+1)} K_{\nu-\mu}(xk_0), \quad (88)$$

где  $\nu = 0$ ,  $\mu + 1 = p/2$ . После математических преобразований найдем

$$B_{\Delta\phi}(x) = (\lambda r_e)^2 \Delta z \sec \theta G \frac{\sigma_{\Delta N_e}^2}{k_0} \frac{2\sqrt{\pi}}{2^{(p-4)/2} \Gamma((p-3)/2)} \times (xk_0)^{(p-2)/2} K_{(p-2)/2}(xk_0). \quad (89)$$

Поскольку двумерная нормированная автокорреляционная функция должна удовлетворять соотношению [18]

$$B_{\Delta N_e}(x) = \sigma_{\Delta\phi}^2 \frac{(xk_0)^{(p-2)/2} K_{(p-2)/2}(xk_0)}{2^{(p-4)/2} \Gamma((p-2)/2)}, \quad (90)$$

из сопоставления (89) и (90) следует, что

$$\sigma_{\Delta\phi}^2 = \frac{2\sqrt{\pi} \sigma_{\Delta N_e}^2 (\lambda r_e)^2 \Delta z \sec \theta G \Gamma((p-2)/2)}{k_0 \Gamma((p-3)/2)}. \quad (91)$$

Данное выражение совпадает с результатом, полученным в работе [4]. При подстановке (90) в выражение (66) спектральная плотность флуктуации фазы с учетом значения интеграла [15]

$$\int_0^\infty t^{\mu+\nu+1/2} K_\mu(at) \sqrt{ut} J_\nu(ut) dt = \frac{2^{\nu+\mu} \Gamma(\nu + \mu + 1) \mu^{\nu+1/2}}{a^{-\mu} (u^2 + a^2)^{\nu+\mu+1}}, \quad (92)$$

где  $\mu = (p-2)/2$ ,  $\nu = 0$ , определится следующим выражением:

$$\Phi_{\Delta\phi}(k) = \frac{\sigma_{\Delta\phi}^2}{\pi} \frac{\Gamma(p/2)}{\Gamma((p-2)/2)} \frac{k_0^{p-2}}{(k^2 + k_0^2)^{p/2}}. \quad (93)$$



Подставив выражение (93) в (73), получим

$$S_{4w}^2 = 2\sigma_{\Delta\phi}^2 \left( 1 - \frac{\Gamma(p/2)}{\Gamma((p-2)/2)} b^{(p-2)/2} \times \int_0^\infty \frac{\cos(ax) J_0(cx)}{(b+x)^{p/2}} dx \right), \quad (94)$$

где  $a$  и  $c$  определяются (82), а также

$$b = k_0^2. \quad (95)$$

При использовании интегрального представления функции Бесселя (70) и изменении порядка интегрирования выражение (94) примет после преобразований следующий вид:

$$S_{4w}^2 = 2\sigma_{\Delta\phi}^2 \left( 1 - \frac{1}{2\pi} \frac{\Gamma(p/2)}{\Gamma((p-2)/2)} b^{(p-2)/2} \times \int_0^\pi \left( \sum_{i=0}^1 \int_0^\infty \frac{\cos(x(a + (-1)^i c \cos \varphi))}{(b+x)^{p/2}} dx \right) d\varphi \right). \quad (96)$$

Рассмотрим интегралы вида

$$C_{p/2}(u, b) = \int_0^\infty \frac{\cos(ux)}{(b+x)^{p/2}} dx, \quad (97)$$

$$S_{p/2}(u, b) = \int_0^\infty \frac{\sin(ux)}{(b+x)^{p/2}} dx. \quad (98)$$

Интегрируя по частям правую часть выражений (97)-(98), получим

$$S_{p/2}(u, b) = \int_0^\infty \frac{\sin(ax)}{(b+x)^{p/2}} dx = \frac{2u C_{(p-2)/2}(u, b)}{(p-2)}, \quad (99)$$

$$C_{p/2}(u, b) = \int_0^\infty \frac{\cos(ax)}{(b+x)^{p/2}} dx = \frac{2}{(p-2)} \left( \frac{1}{b^{(p-2)/2}} - u S_{(p-2)/2}(u, b) \right). \quad (100)$$

Формулы (99) и (100) являются рекуррентными. Выражение (96) с учетом соотношений (99)-(100), (82) и (95) для  $p = 4$  примет вид:

$$S_{4w}^2 = \frac{\sigma_{\Delta\phi}^2}{2\pi} \int_0^\pi \left( \sum_{i=0}^1 E(i, \varphi) S_1(E(i, \varphi), 1) \right) d\varphi, \quad (101)$$

где

$$E(i, \varphi) = \frac{(d_F k_0 G \cos \theta)^2}{2} \times \left( q_{11} + q_{22} + (-1)^i \sqrt{(q_{11} - q_{22})^2 + 4q_{12}^2} \cos \varphi \right), \quad (102)$$

а для  $p = 6$  – следующий вид:

$$S_{4w}^2 = \frac{\sigma_{\Delta\phi}^2}{2\pi} \int_0^\pi \left( \sum_{i=0}^1 E^2(i, \varphi) S_1(E(i, \varphi), 1) \right) d\varphi. \quad (103)$$

Величины  $C_1(u, 1)$  и  $S_1(u, 1)$  в выражениях (101) и (103) определяются табличными интегралами [15]

$$C_1(x, 1) = -Ci(x) \cos(x) + \left( \frac{\pi}{2} - Si(x) \right) \sin(x), \quad (104)$$

$$S_1(x, 1) = Ci(x) \sin(x) + \left( \frac{\pi}{2} - Si(x) \right) \cos(x), \quad (105)$$

где  $Ci(x)$  и  $Si(x)$  – интегральные косинус и синус соответственно, под которыми подразумевают функции [19]

$$Ci(x) = \gamma + \ln x + \int_0^x \frac{(\cos t - 1)}{t} dt, \quad (106)$$

$$Si(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt, \quad (107)$$

$\gamma$  – постоянная Эйлера-Маскерони. Для  $p = 5$  выражение (96) с учетом рекуррентных формул (99) и (100) примет следующий вид:

$$S_{4w}^2 = \sigma_{\Delta\phi}^2 \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \int_0^\pi \left( \sum_{i=0}^1 (E^{3/2}(i, \varphi)) \times \sqrt{\frac{2E(i, \varphi)}{\pi k_0^2}} C_{1/2} \left( \frac{E(i, \varphi)}{k_0^2}, k_0^2 \right) \right) d\varphi. \quad (108)$$

При этом  $C_{1/2}(u, b)$ ,  $S_{1/2}(u, b)$  определяются табличными интегралами [20]

$$C_{1/2}(u, b) = \sqrt{\frac{\pi}{2u}} (\cos(ub) + \sin(ub) - 2C(ub) \cos(ub) - 2S(ub) \sin(ub)), \quad (109)$$

$$S_{1/2}(u, b) = \sqrt{\frac{\pi}{2u}} (\cos(ub) - \sin(ub) + 2C(ub) \sin(ub) - 2S(ub) \cos(ub)), \quad (110)$$

где  $C(x)$  и  $S(x)$  – интегралы Френеля, под которыми подразумевают функции [19]:

$$C(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \frac{\cos t}{\sqrt{t}} dt, \quad (111)$$

$$S(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt. \quad (112)$$

Таким образом, когда спектральная плотность флуктуаций подчинена степенному закону, индекс  $S_{4w}$  определяется из выражений (101), (108), (103), для значений спектрального индекса  $p = 4$ ,  $p = 5$ ,  $p = 6$  соответственно. Получить эти выражения в замкнутом виде затруднительно, но для их расчета можно воспользоваться численными методами интегрирования.

### Результаты расчета индекса сцинтилляции

Анализ (101), (103), (108) для  $S_{4w}^2$  с учетом (91), а также (83) с учетом (79) показывает на их прямо пропорциональную зависимость от величины  $\sigma_{N_e}^2 (\lambda r_e)^2 \Delta z k_0^{-1}$ . Это позволяет упростить вычисления и перейти к расчету нормированного индекса сцинтилляции

$$S_{4w}^{(norm)} = \frac{S_{4w}}{\lambda r_e \sigma_{\Delta N_e}} \sqrt{\frac{k_0}{\Delta z}}. \quad (113)$$

Кроме того, в указанных выражениях имеется зависимость  $S_{4w}$  от аргумента  $d_F k_0$ , параметра  $G$  и угла  $\theta$ . При этом величина  $d_F$ , как следует из выражения (45), также зависит от величины  $\sec \theta$ .

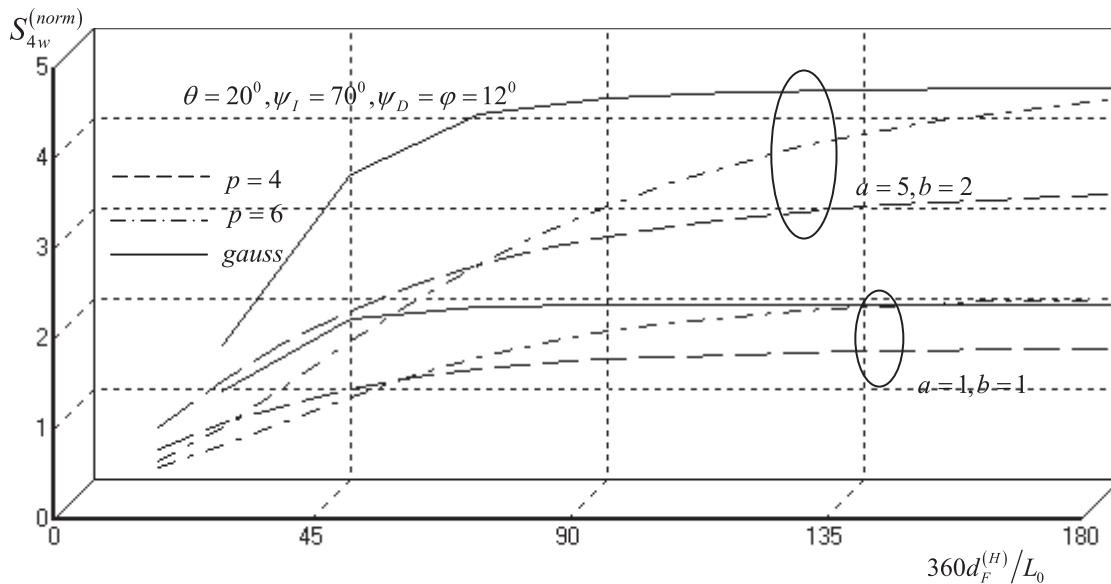


Рис. 2. Зависимость нормированного индекса  $S_{4w}^{(norm)}$  от отношения радиуса первой зоны Френеля к внешнему масштабу неоднородностей для изотропных ( $a=1$ ,  $b=1$ ) и анизотропных неоднородностей ( $a=5$ ,  $b=2$ ) для гауссовской и степенной (при различных значениях индекса  $p$ ) спектральной плотности флуктуаций

Учитывая данное обстоятельство, сравнение значений  $S_{4w}$  для различных спектральных плотностей флуктуации электронной концентрации при различных значениях параметра  $G$  и угла  $\theta$  целесообразно проводить в зависимости от произведения радиуса первой зоны Френеля для случая вертикального падения волны

$$d_F^{(H)} = \sqrt{\lambda H_{ps} / (2\pi)} = d_F \sqrt{\cos \theta} \quad (114)$$

и величины  $k_0$ , выраженной в градусах

$$\frac{180}{\pi} d_F^{(H)} k_0 = 360 \frac{d_F^{(H)}}{L_0}, \quad (115)$$

то есть от отношения радиуса первой зоны Френеля  $d_F^{(H)}$  к внешнему масштабу неоднородностей  $L_0$ . На рис. 2 в соответствии с указанными выше выражениями построены для изотропных и анизотропных неоднородностей зависимости индекса  $S_{4w}^{(norm)}$  от отношения  $d_F^{(H)}/L_0$ .

Анализ графиков на рис. 2 для случая, когда азимут  $\varphi$  совпадает с углом магнитного склонения  $\psi_D$ , указывает на следующее.

1. Когда спектральная плотность флуктуаций электронной концентрации подчинена степенному закону, величина  $S_{4w}^{(norm)}$  увеличивается с ростом спектрального индекса  $p$ . Это объяснимо, поскольку спектральный индекс показывает степень возмущения ионосферы.

2. Величина  $S_{4w}^{(norm)}$  для гауссовского и степенного законов распределения спектральной плотности флуктуаций ожидаемо возрастает при увеличении радиуса первой зоны Френеля  $d_F^{(H)}$  относительно внешнего масштаба неоднородностей  $L_0$ .

3. Индекс  $S_{4w}^{(norm)}$  увеличивается по мере усиления вытянутости неоднородностей (роста  $a$  и  $b$ ) по сравнению с изотропным случаем ( $a=1, b=1$ ).

4. При гауссовской спектральной плотности флуктуаций электронной концентрации график зависимости  $S_{4w}^{(norm)}$  от отношения  $d_F^{(H)}/L_0$  ведет себя примерно как при степенном законе с высоким спектральным индексом ( $p \geq 6$ ).

### Заключение

Разработан метод вычисления индекса сцинтилляции на трассах распространения радиоволн в ССС при наличии анизотропных неоднородностей в возмущенной ионосфере. Метод основан на приведении квадратичной формы в аргументах автокорреляционных функции флуктуаций электронной концентрации и фазы к скалярному значению и учете этого при выполнении преобразования Радона и Фурье.

С использованием данного метода получено выражение (73) для расчета индекса сцинтилляции при наличии анизотропных неоднородностей в ионосфере в виде интеграла от произведения спектральной плотности флуктуаций фазы и фильтрующих функций. Последние имеют аргументы, учитывающие анизотропию этих неоднородностей, а также наклонное распространение волны.

Полученное выражение конкретизировано для гауссовской спектральной плотности флуктуаций в виде (83) и для спектральной плотности, подчиненной степенному закону со спектральным индексом в пределах от 4 до 6 в виде (101), (108), (103). Выражение (83) для гауссовской спектральной плотности имеет замкнутый вид. Для степенного закона выражения (101), (108), (103) представлены в виде, удобном для использования одного из численных методов интегрирования.

В отличие от известных, полученные выражения позволяют оценить влияние сцинтилляций с высоким значением спектрального индекса ( $p \geq 5$ ), а также во всем диапазоне возможных значений отношения радиуса первой зоны Френеля к внешнему масштабу неоднородностей.

### Литература

1. Маслов О.Н., Пашинцев В.П. Модели транс-ионосферных радиоканалов и помехоустойчивость систем космической связи // Приложение к журналу «Инфокоммуникационные технологии». Самара, 2006. – 357 с.
2. Singleton D.G. Saturation and focusing effects in radio-star and satellite scintillations // Journal of Atmospheric and Terrestrial Physics. Vol. 32, February 1970. – P. 187-208.
3. Rino C.L., Fremouw E.J. The angle dependence of singly scattered wavefields // Journal of Atmospheric and Terrestrial Physics. Vol. 39, February 1977. – P. 859-868.
4. Rino C.L. A power law screen model for ionospheric scintillation. 1. Week scatter // Radio Science. Vol. 14, № 6, November-December 1979. – P. 1135-1145.
5. Carrano C.S., Valladares C.E., Groves K.M. Latitudinal and Local Time Variation of Ionospheric Turbulence Parameters during the Conjugate Point Equatorial Experiment in Brazil // International Journal of Geophysics. Vol. 2012, Article ID 103963. – 16 p.
6. Booker H.G., Majidihi G. Theory of refractive scattering in scintillation phenomena // Journal of Atmospheric and Terrestrial Physics. Vol. 43, Issue 11, November 1981. – P. 1199-1214.
7. Шевченко В.А. Метод оценки влияния анизотропных неоднородностей в ионосфере на характеристики канала спутниковой связи // Вестник СКФУ. № 5 (38), 2013. – С 13-20.
8. Buckley R. Diffraction by a random phase screen with very large r.m.s. phase deviation. II. Two-dimensional screen // Australian Journal of Physics. Vol. 24, 1971. – P. 373-396.
9. Fremouw E.J., Secan J.A. Modeling and scientific application of scintillation result // Radio Science. Vol. 19, № 3, May-June 1984. – P. 687-694.
10. Carrano, C.S., Rino C.L. Split-step solution of the 4th moment equation for propagation through intense ionospheric disturbances // Proceedings of the International Conference on Electromagnetics in Advanced Applications (ICEAA 2011), Turin, Italy. – P. 469-472.
11. Wernik A.W., Alfonsi L., Materrassi M., Ionospheric irregularities, scintillation and effect

- on systems // Acta geophysica polonica. Vol. 52, № 2, 2004. – P. 237-249.
12. Беллман Р. Введение в теорию матриц: М.: Наука, 1976. – 351 с.
13. Левин Г.Г., Вишняков Г.Н. Оптическая томография. М.: Радио и связь, 1989. – 224 с.
14. Гундзе Е., Лю Чжаохань. Мерцания радиоволн в ионосфере // ТИИЭР. Т.70, № 4, 1982. – С. 5-45.
15. Диткин В.А., Прудников А.П. Интегральные преобразования и операционное исчисление. М.: ГИФМЛ, 1961. – 524 с.
16. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. СПб.: БХВ-Петербург, 2011. – 1232 с.
17. Непп Д.Л. Расчет временных характеристик стохастических волн методом фазовых экранов // ТИИЭР. Т.71, №6, 1983. – С. 40-58.
18. Beniguel Y., Hamel P. A global ionosphere scintillation propagation model for equatorial regions // Journal of Space Weather and Space Climate. Vol. 1, Issue 1, 2011. – 8 p.
19. Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции. Формулы, графики, таблицы: М.: Наука, 1964. – 344 с.
20. Бейтмен Г., Эрдейи. Таблицы интегральных преобразований. Преобразования Фурье, Лапласа, Меллина. М.: Наука, 1969. – 344 с.

Получено 05.05.2015

Шевченко Вячеслав Анатольевич, к.т.н., начальник группы Главного управления развития ИТТ Министерства обороны РФ. Тел. 8-916-138-87-96. E-mail: shevv67@mail.ru

## SCINTILLATION INDEX COMPUTING METHOD UNDER ANISOTROPIC IRREGULARITIES IN PERTURBED IONOSPHERE

*Shevchenko V.A.*

*Ministry of Defence of the Russian Federation, Moscow, Russian Federation*

*E-mail: shevv67@mail.ru*

Electron density fluctuations in ionosphere lead to scintillation effect, which means random variations of amplitude and phase of received signal. According to known method for scintillation index evaluation, at first this index is computed for conditions of wave weak scattering, and then an empirical correction of obtained results is used for multiple scattering without strong focusing. This method supposes usage of expressions which have been derived by utilizing approximation of power law with spectral index at most 5 under condition that radius of the first Fresnel zone is substantially smaller than outer scale of irregularities. This condition is fail, when the maximal ionization altitude is much more than thickness of irregularity layer or scintillation index becomes moderate intensive and Gaussian law or power law with spectral index above 5 should be applied for spectral density description. This work presents scintillation index computing method in conditions of weak scattering, which takes into account all mentioned above. Proposed method provides evaluation of high spectral index scintillation influence over full value range of first Fresnel zone radius to irregularity outer scale ratio. Method is based on reduction of quadric form of electronic concentration and phase fluctuations in the arguments of autocorrelation function to scalar value, which is further taken into account during Radon and Fourier transformations. Expressions for calculation of scintillation index written in the form of integral of the product of phase fluctuation spectral density and filtering functions were derived by proposed method. Arguments of these expressions take into account anisotropy of irregularities and oblique wave propagation. Obtained expressions are specified for spectral density of electronic density fluctuations described by both Gaussian law and power law with spectral index ranging from 4 to 6 of that provides more comfortable computing.

**Keywords:** *scintillation, anisotropy, irregularities, ionosphere, autocorrelation function, spectral density.*

**DOI:** 10.18469/ikt.2015.13.2.02.

**Shevchenko Vyatcheslav Anatolievich**, PhD in Technical Science, Head of Group of the General Directorate of Information and Telecommunication Technologies of the Ministry of Defence of the Russian Federation, Moscow, Russian Federation. Tel. +79161388796. E-mail: shevv67@mail.ru.

**References**

1. Maslov O.N., Pashintsev V.P. Modeli transionosfernykh radiokanalov i pomehoustoychivost sistem kosmicheskoy svyazi [Transionospheric radio channels models and immunity of space communication systems]. *Prilozhenie k zhurnalu «Infokommunikacionnye tehnologii»*. Samara, 2006. 357 p.
2. Singleton D.G. Saturation and focusing effects in radio-star and satellite scintillations. *Journal of Atmospheric and Terrestrial Physics*, 1970, vol. 32, no. 2, pp. 187-208. doi: 10.1016/0021-9169(70)90191-1.
3. Rino C.L., Fremouw E.J. The angle dependence of singly scattered wave fields. *Journal of Atmospheric and Terrestrial Physics*, 1977, vol. 39, no. 8, pp. 859-868. doi: 10.1016/0021-9169(77)90166-0
4. Rino C.L. A power law screen model for ionospheric scintillation. 1. Weak scatter. *Radio Science*, 1979, vol. 14, no. 6, pp. 1135-1145. doi: 10.1029/RS014i006p01135
5. Carrano C.S., Valladares C.E., Groves K.M. Latitudinal and Local Time Variation of Ionospheric Turbulence Parameters during the Conjugate Point Equatorial Experiment in Brazil. *International Journal of Geophysics*, 2012, vol. 2012, Article ID 103963. 16 p. doi: 0.1155/2012/103963
6. Booker H.G., Majidihi G. Theory of refractive scattering in scintillation phenomena. *Journal of Atmospheric and Terrestrial Physics*, 1981, vol. 43, no. 11, pp. 1199-1214. doi: 10.1016/0021-9169(81)90035-0
7. Shevchenko V.A. Metod otsenki vliyaniya anizotropnykh neodnorodnostey v ionosfere na karakteristiki kanala sputnikovoy svyazi [Method of an estimation of influence anisotropic irregularities in an ionosphere on characteristics of the channel of a satellite communication]. *Vestnik Severo-Kavkazskogo federalnogo universiteta*, 2013, no. 5, pp. 13-20.
8. Buckley R. Diffraction by a random phase screen with very large r.m.s. phase deviation. II. Two-dimensional screen. *Australian Journal of Physics*, 1971, vol. 24, pp. 373-396.
9. Fremouw E.J., Secan J.A. Modeling and scientific application of scintillation result. *Radio Science*, 1984, vol. 19, no. 3, pp. 687-694.
10. Carrano, C.S., Rino C.L. Split-step solution of the 4th moment equation for propagation through intense ionospheric disturbances. *Proceedings of the International Conference on Electromagnetics in Advanced Applications (ICEAA 2011)*, Turin, Italy, pp. 469-472. doi: 10.1109/ICEAA.2011.6046387
11. Wernik A.W., Alfonsi L., Materrassi M. Ionospheric irregularities, scintillation and effect on systems. *Acta geophysica polonica*, 2004, vol. 52, no. 2, pp. 237-249.
12. Bellman R. *Vvedenie v teoriyu matrits* [Introduction in the theory of matrices]. Moscow, Nauka Publ., 1976. 351 p.
13. Levin G.G., Vishnyakov G.N. *Opticheskaya tomografiya* [Optical tomography]. Moscow, Radio i svyaz Publ., 1989. 224 p.
14. Gundze E., Lyu Chzhaohan. *Mertsaniya radiovoln v ionosfere* [Radio waves glimmer in the ionosphere]. TIIEP, 1982, vol. 70, no. 4, pp. 5-45.
15. Ditkin V.A., Prudnikov A.P. *Integralnyie preobrazovaniya i operatsionnoe ischislenie* [Integral Transforms and Operational Calculus]. Moscow, GIFML Publ., 1961. 524 p.
16. Gradshteyn I.S., Ryzhik I.M. *Tablitsyi integralov, summ, ryadov i proizvedeniy* [Tables of integrals, sums, series and products]. St. Petersburg, BHV-Peterburg Publ., 2011. 1232 p.
17. Nepp D.L. *Raschet vremennykh karakteristik stohasticheskikh voln metodom fazovykh ekranov* [Time characteristic calculations of stochastic waves by phase screens method]. TIIEP, 1983, vol. 71, no. 6, pp. 40-58.
18. Beniguel Y., Hamel P. A global ionosphere scintillation propagation model for equatorial regions. *Journal of Space Weather and Space Climate*, 2011, vol. 1, no. 1, 8 p. doi: 10.1051/swsc/2011004
19. Yanke E., Emde F., Lesh F. *Spetsialnyie funktsii. Formulyi, grafiki, tablitsyi* [Special functions. Formulas, graphs, tables]. Moscow, Nauka Publ., 1964. 344 p.
20. Beytmen G., Erdeyi. *Tablitsyi integralnykh preobrazovaniy. Preobrazovaniya Fure, Laplasya, Mellina* [Tables of integral transformations. Fourier, Laplace, Mellin]. Moscow, Nauka Publ., 1969. 344 p.

Received 05.05.2015