

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФОРМАЛИЗАЦИЯ АЛГОРИТМА ДЕМОДУЛЯЦИИ ПО ПРАВИЛУ МАКСИМУМА АПОСТЕРИОРНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ, МИНИМИЗИРУЮЩЕГО ВЕРОЯТНОСТЬ ОШИБКИ НА СИМВОЛ

Алышев Ю.В.

Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики, Самара, РФ

E-mail: alise-17@mail.ru

В статье рассмотрен алгоритм демодуляции по правилу максимума апостериорной вероятности. Этот алгоритм минимизирует вероятность ошибки на символ. При описании алгоритма, в отличие от традиционного взгляда, используется понятие «комбинация». Введенное понятие «комбинация» означает некоторую последовательность передаваемых известных и неизвестных символов. Выведена однозначная взаимосвязь между вероятностями состояния и совместными плотностями вероятностями распределения сигнала и состояния (комбинации) для произвольной позиционности передаваемых символов и произвольной величины относительной памяти канала. Представление перемещения символов в сдвиговом регистре справа налево позволило сопоставить содержимое сдвигового регистра с номером состояния (комбинации) в m -ичной системе счисления. Представленный способ описания алгоритма позволяет восполнить недостающую взаимосвязь между математическим описанием алгоритма и реализацией его на вычислительном устройстве.

Ключевые слова: демодуляции, апостериорная вероятность, относительная память канала.

Введение

Алгоритм Витерби (АВ), рассмотренный в [1-2], минимизирует вероятность ошибки на блок информационных символов, в котором производится поиск кратчайшей траектории на решетке дискретных альтернатив. Алгоритм Кловского-Николаева (АКН) минимизирует вероятность ошибки на бит при минимально возможной задержке принятия решения.

Оба алгоритма работают с текущим потоком данных и в рамках своих возможностей непосредственно выдают решения или группу решений. АКН выдает решения на каждом тактовом интервале. При этом задержка принятия решения постоянна и равна максимально возможной величине памяти канала. АВ в условиях оптимальной работы решение выдает по мере того, как происходит схождение траекторий по решетке Витерби. Это означает, что задержка в принятии решения может быть произвольной величиной, но так же, как и у АКН, не меньше величины, соответствующей памяти канала. В [1] приведена формула, по которой можно определять задержку принятия решения для АВ. Фиксация задержки принятия решения в АВ позволяет получить субоптимальный алгоритм, который удобен в практической реализации.

Алгоритм максимума апостериорной вероятности (МАВ), в отличие от рассмотренных выше, работает с блоком информационных символов, который должен быть окружен (в начале и конце) известными информационными символами. При описании алгоритма МАВ [3] такими символами обычно являются «нулевые» из двоичного алфавита. В данной статье МАВ рассмотрен для любой возможной позицион-

ности символов, а также для ситуаций, когда анализируемый блок окружают как известные символы, так и неизвестные символы соседних блоков. Такая задача рассматривается в рамках блочного моделирования радиотехнических устройств [3], позволяя универсально использовать алгоритм МАВ, например в задачах демодуляции сигналов.

Постановка задачи

Для анализа алгоритма применим теорию дискретного марковского процесса.

Пусть процесс протекает в дискретном времени с постоянным шагом. Для моделирования канала с памятью воспользуемся сдвигающим регистром с длиной $Q + 1$ (первая ячейка регистра содержит текущий информационный символ), на вход которого поступают информационные символы b_k блока некоторой детерминированной функции

$$\dot{y}_k = f(b_k, b_{k-1}, \dots, b_{k-Q}), \quad (1)$$

и на выходе функции добавим идеальный канал без памяти с белым гауссовским шумом (рис. 1).

В условиях МСИ параметр Q обозначает относительную память канала [1; 4]. Значения элементов входной последовательности

$$\mathbf{b} = (b_0, b_1, \dots, b_k, \dots, b_{K-1})$$

выбираются независимо согласно некоторому распределению вероятностей, и каждый элемент b_k может принимать одно из m значений на входе модулятора.

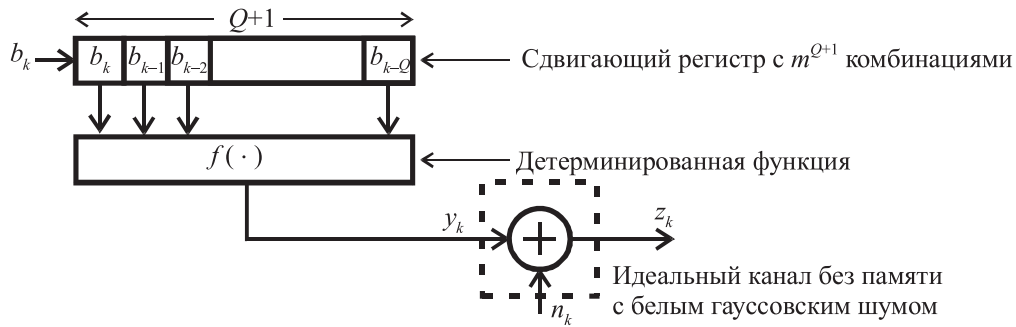


Рис. 1. Упрощенная модель канала с памятью в дискретном времени на основе регистра сдвига

При этом обязательно выполняется равенство $\sum_{i=0}^{m-1} P(b_k = i) = 1$. На выходе блока детерминированной функции (1) каждый элемент последовательности \dot{y}_k определяется новым входным значением b_k , поступившим во входную ячейку сдвигающего регистра, и значениями в других ячейках сдвигового регистра $b_{k-1}, b_{k-2}, \dots, b_{k-Q}$, которые были перезаписаны туда после операции сдвига. Каждый элемент наблюдаемой последовательности на выходе канала $\dot{z}_k = \dot{y}_k + \dot{n}_k$, где \dot{n}_k – отсчеты белого гауссовского шума. Таким образом, рассматривается m -ичный марковский процесс ν -го порядка.

Для предложенной модели со сдвиговым регистром введены [2] определения состояния $x_k \triangleq (b_{k-1}, b_{k-2}, \dots, b_{k-Q})$ и перехода $\xi_k \triangleq (b_k, b_{k-1}, \dots, b_{k-Q})$. Состояния образуют пространство X . Число состояний в этом пространстве $|X| = m^Q$. Переходы образуют множество Ξ с числом элементов $|\Xi| = m^{Q+1}$.

Для модели, показанной на рис. 1, введено [1] определение комбинации

$$\kappa_k \triangleq (b_{k-Q}, b_{k-Q+1}, \dots, b_{k-1}, b_k).$$

Комбинация полностью определяет переход. Будем считать, что дискретное время k может принимать как положительные, так и отрицательные значения. В интервале $1 \leq k \leq B$ производится передача блока информационных символов $\{b_k\}$. Вне этого интервала могут передаваться как известные, так и неизвестные символы.

Известные символы могут быть произвольными из используемого алфавита размером m и принимать значения от 0 до $m-1$. Кроме того, алфавит дополнен еще одним символом с номером m . Это дополнение означает, что каждая ячейка

регистра сдвига характеризуется $m+1$ состоянием. Символ с номером m означает начальное «пустое» состояние, соответствующее «физическому нулю» для сигнала.

Неизвестные символы могут быть информационными и принадлежать другому информационному блоку. Неизвестные символы, находящиеся вне диапазона $1 \leq k < B$, не входят в задачу определения их информационного содержания. Число элементов последовательности \dot{z} составит $B+Q$, то есть

$$\dot{z} = (\dot{z}_1, \dot{z}_2, \dots, \dot{z}_k, \dots, \dot{z}_{B+Q-1}, \dot{z}_{B+Q}).$$

Таким образом, постановка задачи заключается в следующем: имеется последовательность \dot{z} наблюдений дискретного по времени марковского процесса с конечным числом состояний $|X| = m^Q$ (или комбинаций $|K| = m^{Q+1}$, Q – память канала; m – позиционность символов b_k), наблюдаемого на выходе идеального канала с белым гауссовским шумом. В каждый k -ый момент времени требуется найти наиболее вероятный элемент b_k входной последовательности

$$\mathbf{b} = (b_0, b_1, \dots, b_k, \dots, b_{K-1}),$$

для которого апостериорная вероятность $P(b_k | \dot{z})$ максимальна, что соответствует критерию МАВ.

Описание алгоритма

Символ b_k представлен как переменная, принимающая значения $b_k = i = 0, m-1$. Тогда и условную плотность вероятности (ПВ) $W(\dot{z} | b_k)$ для каждого символа b_k можно представить как $W(\dot{z} | b_k = i)$. В сдвигающем регистре (см. рис. 1) входные символы b_k заходят слева направо. Мысленно развернем регистр так, чтобы данные в

него заходили справа налево. Тогда состояния в момент времени k обозначим как

$$\tilde{x}_{k,j} = (b_{k-Q}, b_{k-Q+1}, \dots, b_{k-2}, b_{k-1}) = j,$$

где $j = \overline{0, m^Q - 1}$ – порядковый номер состояния, совпадающий с числом в m -ичной системе счисления, образованным содержимым в таком сдвигающем регистре при условии, что рассматриваются только Q последних ячеек.

При решении поставленной задачи для заданной последовательности наблюдений $\dot{\mathbf{z}}$ любому символу b_k ставят в соответствие величину (метрику), пропорциональную $-\ln P(b_k, \dot{\mathbf{z}})$, где $P(b_k, \dot{\mathbf{z}})$ – совместная вероятность того, что символ b_k примет заданное значение, а сигнал $\dot{\mathbf{z}}$, как точка в многомерном пространстве сигналов, попадет внутрь некоторого элементарного объема $\prod_{i=0}^{B-1} d\dot{z}_i$, часто обозначаемого [4-5] как $d\dot{\mathbf{z}}$.

Учитывая, что

$$P(b_k, \dot{\mathbf{z}} \in d\dot{\mathbf{z}}) = W(\dot{\mathbf{z}})P(b_k | \dot{\mathbf{z}})d\dot{\mathbf{z}},$$

то поиск максимума $P(b_k, \dot{\mathbf{z}})$ соответствует поиску максимума $P(b_k | \dot{\mathbf{z}})$, что дает в итоге решение поставленной задачи максимизации $P(b_k | \dot{\mathbf{z}})$ для поиска наиболее вероятного символа b_k . Здесь $W(\dot{\mathbf{z}})$ – многомерная ПВ распределения последовательности сигналов, объединенных в вектор $\dot{\mathbf{z}}$.

Используя байесовский подход, можно перейти к другим вероятностям

$$P(b_k, \dot{\mathbf{z}} \in d\dot{\mathbf{z}}) = P(b_k | \dot{\mathbf{z}})W(\dot{\mathbf{z}})d\dot{\mathbf{z}} = W(\dot{\mathbf{z}} | b_k)P(b_k)d\dot{\mathbf{z}}.$$

Здесь $W(\dot{\mathbf{z}} | b_k)$ – ПВ распределения $\dot{\mathbf{z}}$ при условии передачи символа b_k , $P(b_k | \dot{\mathbf{z}})$ – апостериорная вероятность передачи символа b_k . Отсюда

$$P(b_k | \dot{\mathbf{z}}) = \frac{W(\dot{\mathbf{z}} | b_k)P(b_k)}{W(\dot{\mathbf{z}})},$$

и максимум апостериорной вероятности $P(b_k | \dot{\mathbf{z}})$ соответствует максимуму произведения $W(\dot{\mathbf{z}} | b_k)P(b_k)$.

Наиболее вероятный символ b_k следует искать исходя из введенных понятий состояния и перехода. Переход ξ_k из состояния x_k в x_{k+1} связывает два момента времени k и $k+1$

$$\xi_k \triangleq (x_{k+1}, x_k) \triangleq (x_k \rightarrow x_{k+1})$$

и предполагает появление во входной ячейке сдвигового регистра символа b_{k+1} .

Совокупность состояния (или последовательности символов) \tilde{x}_{k+1} и символа b_{k+1} образует комбинацию κ_{k+1} в сдвиговом регистре, из которой формируется сигнал \dot{z}_{k+1} и в конечном итоге сигнал на выходе канала \dot{z}_{k+1} . Аналогично, совокупность состояния \tilde{x}_k и символа b_k образует комбинацию κ_k , что в итоге формирует сигнал \dot{z}_k . Однако в комбинацию κ_k входит последовательность \tilde{x}_{k+1} . Обозначим ее как $\tilde{x}'_k = \tilde{x}_{k+1}$.

Таким образом, последовательность \tilde{x}'_k имеет место при формировании сигналов \dot{z}_k и \dot{z}_{k+1} и содержит передаваемый искомым символ b_k . В этом случае можно ввести пятимерную (при рассмотрении квадратурных компонент сигнала) совместную ПВ $W(\dot{z}_k, \dot{z}_{k+1}, b_k)$, которую можно связать с пятимерной ПВ $W(\dot{z}_k, \dot{z}_{k+1}, \tilde{x}'_k)$ как

$$W(\dot{z}_k, \dot{z}_{k+1}, b_k) = \sum_{\tilde{x}'_k \supset b_k} W(\dot{z}_k, \dot{z}_{k+1}, \tilde{x}'_k). \quad (2)$$

При этом ПВ $W(\dot{z}_k, \dot{z}_{k+1}, \tilde{x}'_k) = W(\dot{z}_k, \dot{z}_{k+1}, \tilde{x}_{k+1})$ можно представить состоящей из ПВ $W(\dot{z}_k, \tilde{x}'_k) = W(\dot{z}_k, \tilde{x}_{k+1})$ и $W(\dot{z}_{k+1}, \tilde{x}'_k) = W(\dot{z}_{k+1}, \tilde{x}_{k+1})$.

Рассмотрим вопрос о факторизации ПВ $W(\dot{z}_k, \dot{z}_{k+1}, \tilde{x}_{k+1})$, то есть представлении ее через произведение этих двух ПВ. В формировании сигнала \dot{z}_k участвует комбинация $\kappa_k = (\tilde{x}_k, b_k) = (b_{k-Q}, \dots, b_k)$. СПВ распределения сигнала \dot{z}_k и наличия в сдвиговом регистре последовательности $\tilde{x}'_k = (b_{k-Q+1}, \dots, b_k)$

$$W(\dot{z}_k, \tilde{x}_{k+1}) = W(\dot{z}_k, \tilde{x}'_k) = \sum_{\kappa_k \supset \tilde{x}'_k} W(\dot{z}_k, \kappa_k). \quad (3)$$

В формировании сигнала \dot{z}_{k+1} участвует комбинация $\kappa_{k+1} = (\tilde{x}_{k+1}, b_{k+1}) = (b_{k-Q+1}, \dots, b_{k+1})$. Совместная ПВ распределения сигнала \dot{z}_{k+1} и наличия в сдвиговом регистре той же самой последовательности $\tilde{x}_{k+1} = (b_{k-Q+1}, \dots, b_k)$

$$W(\dot{z}_{k+1}, \tilde{x}_{k+1}) = \sum_{\kappa_{k+1} \supset \tilde{x}_{k+1}} W(\dot{z}_{k+1}, \kappa_{k+1}). \quad (4)$$

В выражении (3) ПВ $W(\dot{z}_k | \kappa_k)$ соответствует произведению ПВ распределения сигнала \dot{z}_k при условии передачи символа b_k и нахождении системы со сдвиговым регистром в состоянии \tilde{x}_k , на вероятность передачи этого символа и на ве-

роятность нахождения этой системы в состоянии \tilde{x}_k .

$$W(\dot{z}_k, \kappa_k) = W(\dot{z}_k | \tilde{x}_k, b_k) P(\tilde{x}_k) P(b_k). \quad (5)$$

Аналогично в выражении (4) для ПВ $W(\dot{z}_{k+1}, \kappa_{k+1})$ имеет место

$$\begin{aligned} W(\dot{z}_{k+1}, \kappa_{k+1}) &= \\ &= W(\dot{z}_{k+1} | \tilde{x}_{k+1}, b_{k+1}) P(\tilde{x}_{k+2}) P(b_{k+1}) = \\ &= W(\dot{z}_{k+1} | \tilde{x}_{k+1}, b_{k+1}) P(\tilde{x}'_{k+1}) P(b_{k+1}). \end{aligned} \quad (6)$$

Вероятность нахождения системы в соответствующем состоянии будет определяться соответствующей нормировкой ПВ, чтобы выполнялось условие $\sum_{\tilde{x}_k} P(\tilde{x}_k) = 1$:

$$\begin{aligned} P(\tilde{x}'_{k-1}) &= P(\tilde{x}_k) = \\ &= \frac{W(\dot{z}_{k-1}, \tilde{x}'_{k-1})}{\sum_{\tilde{x}'_{k-1}} W(\dot{z}_{k-1}, \tilde{x}'_{k-1})} = \frac{W(\dot{z}_{k-1}, \tilde{x}_k)}{\sum_{\tilde{x}_k} W(\dot{z}_{k-1}, \tilde{x}_k)}; \end{aligned} \quad (7)$$

$$P(\tilde{x}'_{k+1}) = P(\tilde{x}_{k+2}) = \frac{W(\dot{z}_{k+2}, \tilde{x}_{k+2})}{\sum_{\tilde{x}_{k+2}} W(\dot{z}_{k+2}, \tilde{x}_{k+2})}. \quad (8)$$

Выражение (7) показывает, что $W(\dot{z}_k, \tilde{x}_{k+1})$ в (3) определяется в итоге через $W(\dot{z}_{k-1}, \tilde{x}_k)$, а выражение (8) показывает, что $W(\dot{z}_{k+1}, \tilde{x}_{k+1})$ в (4) определяется через $W(\dot{z}_{k+2}, \tilde{x}_{k+2})$. Это означает, что $W(\dot{z}_k, \tilde{x}_{k+1})$ будет определяться по цепочке очередными предыдущими во времени выражениями, а $W(\dot{z}_{k+1}, \tilde{x}_{k+1})$ – выражениями, которые следуют по времени позже. Обозначим все зависимости, уходящие в прошлое, значком α , а уходящие в будущее – β . В силу независимости отсчетов шума и с учетом новых обозначений можно записать

$$W(\dot{z}_k, \dot{z}_{k+1}, \tilde{x}_{k+1}) = W_\alpha(\dot{z}_k, \tilde{x}_{k+1}) W_\beta(\dot{z}_{k+1}, \tilde{x}_{k+1}), \quad (9)$$

что соответствует предположению о факторизации ПВ $W(\dot{z}_k, \dot{z}_{k+1}, \tilde{x}_{k+1})$.

Параметры α и β в (9) соответствуют функциям вероятности, обозначенным также в [3]. Подставляя (3)-(6) в (9), получим

$$\begin{aligned} W(\dot{z}_k, \dot{z}_{k+1}, \tilde{x}_{k+1}) &= \\ &= \sum_{\kappa_k \supset \tilde{x}'_k} W_\alpha(\dot{z}_k, \kappa_k) \cdot \sum_{\kappa_{k+1} \supset \tilde{x}_{k+1}} W_\beta(\dot{z}_{k+1}, \kappa_{k+1}) = \\ &= \sum_{\kappa_k \supset \tilde{x}'_k} W(\dot{z}_k | \tilde{x}_k, b_k) P_\alpha(\tilde{x}_k) P(b_k) \times \\ &\times \sum_{\kappa_{k+1} \supset \tilde{x}_{k+1}} W(\dot{z}_{k+1} | \tilde{x}_{k+1}, b_{k+1}) P_\beta(\tilde{x}_{k+2}) P(b_{k+1}). \end{aligned} \quad (10)$$

В выражении (10) каждое слагаемое суммы содержит состояние $\tilde{x}'_k = \tilde{x}_{k+1}$. Это состояние в своей последовательности содержит всегда один и тот же искомый символ b_k . То есть каждое слагаемое умножается на одну и ту же вероятность $P(b_k)$. Вынесем эту вероятность за знак суммы.

$$\begin{aligned} W(\dot{z}_k, \dot{z}_{k+1}, \tilde{x}_{k+1}) &= \\ &= P(b_k) \sum_{\kappa_k \supset \tilde{x}'_k} W(\dot{z}_k | \tilde{x}_k, b_k) P_\alpha(\tilde{x}_k) \times \\ &\times \sum_{\kappa_{k+1} \supset \tilde{x}_{k+1}} W(\dot{z}_{k+1} | \tilde{x}_{k+1}, b_{k+1}) P_\beta(\tilde{x}_{k+2}) P(b_{k+1}). \end{aligned} \quad (11)$$

Тогда с учетом (2)

$$\begin{aligned} W(\dot{z}_k, \dot{z}_{k+1}, b_k) &= \\ &= P(b_k) \sum_{\tilde{x}'_k \supset b_k} \left(\sum_{\kappa_k \supset \tilde{x}'_k} W(\dot{z}_k | \tilde{x}_k, b_k) P_\alpha(\tilde{x}_k) \times \right. \\ &\left. \times \sum_{\kappa_{k+1} \supset \tilde{x}_{k+1}} W(\dot{z}_{k+1} | \tilde{x}_{k+1}, b_{k+1}) P_\beta(\tilde{x}_{k+2}) P(b_{k+1}) \right). \end{aligned} \quad (12)$$

В выражении (12) вероятность $P_\alpha(\tilde{x}_k)$ вычисляется по цепочке, уходя в прошлое до момента времени $k=1$. В момент времени $k=0$ определяются вероятности начальных состояний до начала блока элементов последовательности \dot{z} . Вероятность $P_\beta(\tilde{x}_{k+2})$ также вычисляется по цепочке, уходя в будущее до момента времени $k=B+Q$. В момент времени $k=B+Q+1$ также будут определены вероятности начальных состояний после этого блока.

Формула ПВ (12) будет определять достаточную статистику для использования ее в решении задачи максимизации произведения $W(\dot{z}|b_k) P(b_k)$. Из (12) можно заметить, что множитель справа от $P(b_k)$ как раз и представляет собой ПВ $W(\dot{z}|b_k)$, где в сумме имеются составляющие, рекуррентно связанные между собой на всем протяжении блока элементов последовательности \dot{z} .

Найдем все эти рекуррентные зависимости с учетом того, что комбинации и состояния образуют числа в m -ичной системе счисления:

$$\begin{aligned} W_\alpha(\dot{z}_k, \kappa_k = i) &= \\ &= W\left(\dot{z}_k \left| \tilde{x}_k = \left\lfloor \frac{i}{m} \right\rfloor, b_k = i \bmod m \right.\right) \times \\ &\times P_\alpha\left(\tilde{x}_k = \left\lfloor \frac{i}{m} \right\rfloor\right) P(b_k = i \bmod m), \\ &i = \overline{0, m^{Q+1} - 1}, \end{aligned} \quad (13)$$

$$i = \overline{0, m^{Q+1} - 1},$$

$$W_\alpha(\dot{z}_k, \tilde{x}_{k+1} = i) = W_\alpha(\dot{z}_k, \tilde{x}'_k = i) = \sum_{i=0}^{m-1} W_\alpha(\dot{z}_k, \kappa_k = i \cdot m^Q + j), i = \overline{0, m^Q - 1}, \quad (14)$$

$$P_\alpha(\tilde{x}_{k+1}) = P_\alpha(\tilde{x}'_k = i) = \frac{W_\alpha(\dot{z}_k, \tilde{x}'_k = i)}{\sum_{i=0}^{m^Q-1} W_\alpha(\dot{z}_k, \tilde{x}'_k = j)}, i = \overline{0, m^Q - 1}, \quad (15)$$

$$W_\beta(\dot{z}_k, \kappa_k = i) = W\left(\dot{z}_k \left| \tilde{x}_k = \left\lfloor \frac{i}{m} \right\rfloor, b_k = i \bmod m \right. \right) \times P_\beta(\tilde{x}'_k = i \bmod m^Q) P(b_k = i \bmod m),$$

$$i = \overline{0, m^{Q+1} - 1}, \quad (16)$$

$$W_\beta(\dot{z}_k, \tilde{x}_k = i) = \sum_{i=0}^{m-1} W_\beta(\dot{z}_k, \kappa_k = i \cdot m + j),$$

$$i = \overline{0, m^Q - 1}, \quad (17)$$

$$P_\beta(\tilde{x}'_{k-1}) = P_\beta(\tilde{x}_k = i) = \frac{W_\beta(\dot{z}_k, \tilde{x}_k = i)}{\sum_{i=0}^{m^Q-1} W_\beta(\dot{z}_k, \tilde{x}_k = j)}, i = \overline{0, m^Q - 1}. \quad (18)$$

Произведение согласно (9) примет вид

$$W(\dot{z}_k, \dot{z}_{k+1}, \tilde{x}'_k) = W(\dot{z}_k, \dot{z}_{k+1}, \tilde{x}_{k+1} = i) = W_\alpha(\dot{z}_k, \tilde{x}_{k+1} = i) W_\beta(\dot{z}_{k+1}, \tilde{x}_{k+1} = i),$$

$$i = \overline{0, m^Q - 1}. \quad (19)$$

Определим слагаемые в сумме (2). Количество состояний \tilde{x}'_k , содержащих конкретное значение символа b_k , в m раз меньше общего количества состояний m^Q в этот момент времени и равно m^{Q-1} , тогда

$$W(\dot{z}_k, \dot{z}_{k+1}, b_k = i) = \sum_{j=0}^{m^{Q-1}} W(\dot{z}_k, \dot{z}_{k+1}, \tilde{x}'_k = j \cdot m + i), i = \overline{0, m^Q - 1}. \quad (20)$$

ПВ $W(\dot{z}_k, \dot{z}_{k+1}, b_k = i)$ может быть использована в определении как «жесткого» решения

$$\hat{b}_k = \arg \max_i W(\dot{z}_k, \dot{z}_{k+1}, b_k = i),$$

$$i = \overline{0, m-1}, k = \overline{1, B}, \quad (21)$$

так и «мягкого» решения, которое используется при декодировании помехоустойчивых кодов. Такое «мягкое» решение может быть определено как вероятность

$$P(b_k = i) = \frac{W(\dot{z}_k, \dot{z}_{k+1}, b_k = i)}{\sum_{j=0}^{m-1} W(\dot{z}_k, \dot{z}_{k+1}, b_k = j)}, i = \overline{0, m-1}. \quad (22)$$

На рис. 2 схематически показаны две соседние комбинации κ_k и κ_{k+1} а также состояние, которое содержит последовательность символов, входящую в обе комбинации $\tilde{x}'_k = \tilde{x}_{k+1}$. В этой последовательности имеется символ b_k , в пользу которого будет принято решение.

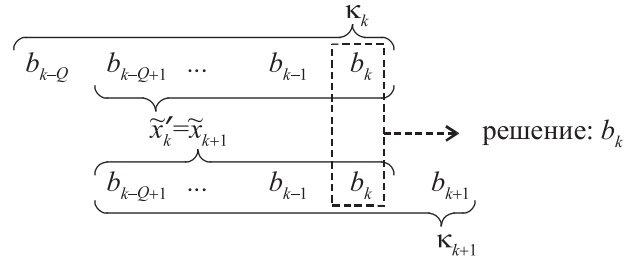


Рис. 2. Принятие решения в пользу символа b_k на фоне комбинаций и состояния

Рассмотрим функции ПВ $W(\dot{z}_k | \tilde{x}_k, b_k)$ и $W(\dot{z}_{k+1} | \tilde{x}_{k+1}, b_{k+1})$, приведенные в выражениях (5) и (6). Обе функции эквивалентны. К ожидаемому сигналу \dot{y} , полученному некоторой комбинацией символов в сдвиговом регистре размером $Q + 1$ элементов (рис. 1), добавляется вектор шума и на входе приемника фиксируется отсчет сигнала \dot{z}_k . При условии, что шум является белым гауссовским, ПВ распределения сигнала \dot{z}_k равна [6]:

$$W(\dot{z}_k | \tilde{x}_k, b_k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{\text{ш}}^2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_{\text{ш}}^2} \left| \dot{z}_k - \sum_{i=0}^Q \dot{u}_{b_{k-i}} \dot{g}_{k-i,i} \right|^2\right). \quad (23)$$

Здесь $\sigma_{\text{ш}}^2$ – дисперсия белого гауссовского шума, $\sum_{i=0}^Q \dot{u}_{b_{k-i}} \dot{g}_{k-i,i}$ – ожидаемый сигнал, который получается как сумма отдельных i -ых составляющих среза (см. рис. 3) импульсных характеристик канала, умноженных комплексно на

значение сигнала $\dot{u}_{b_{k-i}}$. Каждое такое умножение соответствует символу b_{k-i} , находящемуся в сдвиговом регистре, а вся последовательность символов, ограниченная данной суммой, будет представлять комбинацию K_k .

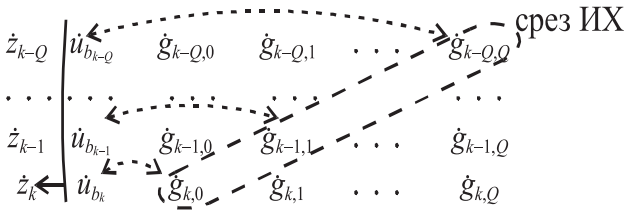


Рис. 3. Срез импульсных характеристик

При компьютерном моделировании важно правильно учитывать отношение «сигнал-шум»

$\frac{E_c}{N_0}$, которое обозначается как h^2 [7]. Можно расписать его через мощность сигнала P_c и шума $P_{ш} = \sigma_{ш}^2$

$$h^2 = \frac{E_c}{N_0} = \frac{P_c T}{\frac{P_{ш}}{F}} = \frac{P_c}{P_{ш}} FT = \frac{P_c}{P_{ш}} \cdot \frac{F_d T}{2} = \frac{P_c}{2\sigma_{ш}^2},$$

здесь E_c – энергия ненулевого сигнала, соответствующего информационному элементу; N_0 – спектральная плотность мощности шума; T – величина тактового интервала, в течение которого передается сигнал, соответствующий информационному элементу; F_d – частота дискретизации; а F – шумовая полоса частот, обычно совпадающая с верхней частотой сигнала.

В [7] исследовано, как рассчитывать дисперсию шума для различных вариантов отношения «сигнал-шум» и разных вариантах многолучевости в канале связи при компьютерном моделировании.

Переходя к отсчетам сигнала и шума, можно записать

$$P_c = \overline{U^2} = \sum_{r=0}^{R-1} s_r^2; \quad P_{ш} = \overline{n^2} = \frac{1}{K} \sum_{r=0}^{R-1} n_r^2,$$

где R – число рабочих отсчетов сигнала на интервале T . При моделировании удобно нормировать мощность сигнала на передаче $P_c = \sum_{r=0}^{R-1} u_r^2 = 1$ для расчета параметра h_0^2 или на приеме $P_c = \sum_{r=0}^{R-1} s_r^2 = 1$ для расчета параметра h^2 . Кроме того, можно не учитывать множитель $1/\sqrt{2\pi\sigma_{ш}^2}$,

а при вычислениях использовать логарифмы от ПВ и вероятностей.

При решении задачи уменьшения вычислительной сложности нормирование согласно (15) и (18) может быть проигнорировано, и вместо вероятностей могут использоваться соответствующие ПВ. При рекуррентных вычислениях оба направления, согласно обозначениям α и β , рассматриваются независимо друг от друга. Но в обоих случаях выражение $W(\dot{z}_k | \tilde{x}_k, b_k)P(b_k)$ вычисляется одинаково. Поэтому, прежде чем приступить к рекуррентным вычислениям, можно сформировать двумерный массив данных, соответствующий значениям выражения $W(\dot{z}_k | \tilde{x}_k, b_k)P(b_k)$ для всех m^{Q+1} вариантов \tilde{x}_k и b_k , и для всех $k = 1, \tau$.

Выражения (3)-(8) показывают зависимость совместных ПВ и вероятности нахождения системы в соответствующем состоянии, с одной стороны, от предшествующих элементов, и с другой стороны – от последующих. При передаче двоичных символов ($m = 2$) для памяти $Q = 2$ взаимосвязи между рассмотренными функциями ПВ и вероятностями показаны на рис. 4.

Если в передаваемом сообщении информационный блок окружен известными символами, то можно определить так называемые стартовые моменты времени. Это означает, что в сдвиговом регистре могут находиться известные информационные символы. Стартовый момент времени необходим для установки начальных значений в приведенных зависимостях.

Самый ранний стартовый момент времени $k = 0$. Поздний стартовый момент времени для обратного направления β зависит от памяти канала и равен $k = B + Q + 1$. В [3] момент времени $k = B + Q$ обозначен как τ .

Начальные значения $P(\tilde{x}_0 = i)$ и $P(\tilde{x}_{\tau+1} = i)$, $i = 0, m^Q - 1$ определяются исходя из содержимого сдвигового регистра в указанные моменты времени. Если в сдвиговом регистре все символы известны, то вероятность состояния с номером, который образуют символы в сдвиговом регистре, равна единице. Вероятность других состояний равна нулю. Если некоторые символы все-таки неизвестны, то стартовые вероятности состояний

$$P(\tilde{x}_k = i) = \begin{cases} \text{если все символы} \\ 0, & b_{k-j} \forall j = 0, Q-1 \\ \text{неизвестны,} & \\ \prod_{j=0}^{Q-1} P(b_{k-j}), & \text{иначе,} \end{cases} \quad (24)$$

$i = 0, m^Q - 1.$

Здесь

$$P(b_{k-j}) = \begin{cases} P(b_{k-j}), & \text{если символ } b_{k-j} \text{ известен,} \\ 1, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Выводы

Математическое описание алгоритмов, как в [1], так и в данной статье, создает единую основу и возможность описания их уникальных реализаций для дальнейшего синтеза и анализа, а также дополняет материал к общему взгляду

на рассмотренные алгоритмы АВ и АКН. Любая граничная группа символов до начала информационного блока и после него позволяет однозначно реализовывать данный способ демодуляции.

Единая запись для демодуляции m -позиционного сигнала позволяет анализировать произвольные линейные виды модуляций, в том числе и с основанием $m > 2$. Приведенное математическое описание алгоритмов позволяет быстро и эффективно переходить к их программированию на любой платформе.

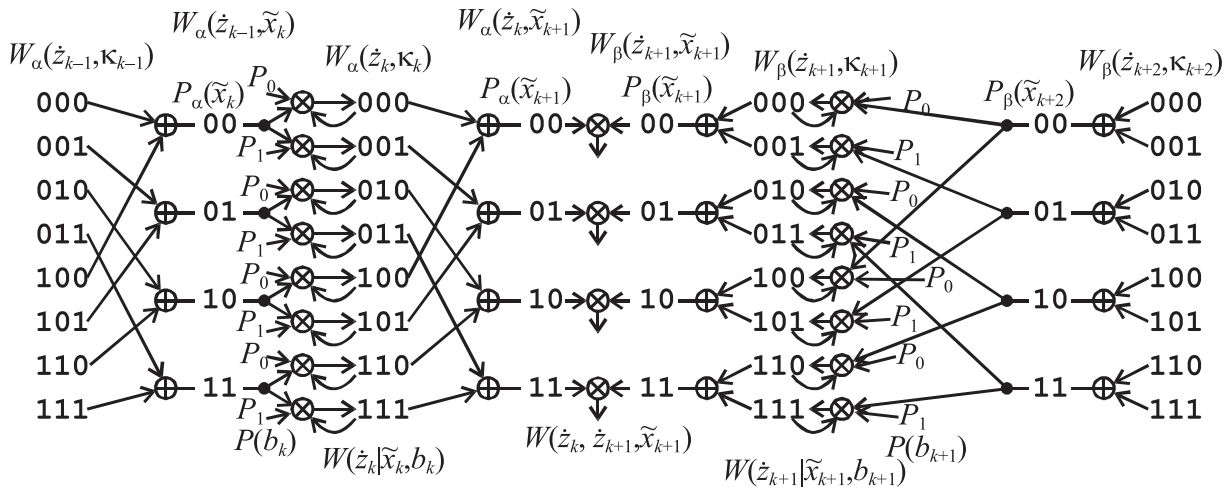


Рис. 4. Взаимосвязи между функциями ПВ и вероятностями при $m = 2 ; Q = 2$

Литература

1. Алышев Ю.В. Математическая формализация алгоритмов демодуляции, производящих поиск кратчайшей траектории на решетке дискретных альтернатив // ИКТ. Т.4, №1, 2006. – С. 22-28.
2. Форни Г.Д. Алгоритм Витерби // ТИИЭР. Т.61, №3, 1973. – С. 12-25.
3. Bahl L.R., Cocke J., Jelineck F., Raviv J. Optimal decoding of linear codes for minimizing symbol error rate / IEEE Trans. Inform. Theory. Vol. IT-20, Mar. 1974. – P. 284-287.
4. Николаев Б.И. Последовательная передача дискретных сообщений по непрерывным ка-

- налам с памятью. М.: Радио и связь, 1988. – 264 с.
5. Кловский Д.Д. Передача дискретных сообщений по радиоканалам. М.: Радио и связь, 1982. – 304 с.
6. Прокис Дж. Цифровая связь. М.: Радио и связь. 2000. – 800 с.
7. Николаев Б.И., Чингаева А.М. Энергетические соотношения при компьютерном моделировании процессов в цифровых системах передачи информации // ИКТ. Т.4, №1, 2006. – С. 53-57.

Получено 02.03.2015

Алышев Юрий Витальевич, к.т.н., доцент Кафедры теоретических основ радиотехники и связи Поволжского государственного университета телекоммуникаций и информатики. Тел. 8-917-117-83-86. E-mail: alise-17@mail.ru

MATHEMATICAL FORMALIZATION OF DEMODULATION ALGORITHM BY RULE OF A POSTERIOR PROBABILITY MAXIMUM THAT MINIMIZES PROBABILITY OF ERROR PER DIGIT

Alyshev Y.V.

Povolzhskiy State University of Telecommunication and Informatics, Samara, Russian Federation

E-mail: alise-17@mail.ru

The article describes the algorithm for demodulation by rule of maximum of a posteriori probability. This algorithm minimizes the probability of error per digit. Unlike to conventional approaches, during the algorithm description here term “combination” is used. Applied term “combination” means some sequence of transmitted known and unknown symbols. Relationship was derived for probabilities of state and joint probability densities of signal distribution and state (combination) for arbitrary position of transmitted symbols and arbitrary relative memory of channel. Representation of symbols in shift register from right to left provided to compare the contents of shift register with number of state (combination) in the m-ary numerical system. Proposed method makes up for missing link between mathematical description of the algorithm and its realization by computer.

Keywords: *demodulation algorithm, a posterior probability, relative memory of channel.*

DOI: 10.18469/ikt.2015.13.2.03.

Alyshev Yuri Vitalevich, Assistant professor of the Department of Theoretical Bases of Radioengineering and Communication, Povolzhskiy State University of Telecommunications and Informatics, Samara, Russian Federation. Tel.: +7 917 1178386. E-mail: alise-17@mail.ru.

References

1. Alyshev Y.V. Matematicheskaja formalizacija algoritmov demoduljatsii, proizvodjashchih poisk kratchajshej traektorii na reshetke diskretnykh al'ternativ [The mathematical formalization demodulation algorithms, producing searching the shortest path on a lattice of discrete alternatives]. *Infokommunikacionnye tehnologii*, 2006, vol. 4, no. 1, pp. 22-28.
2. Forney G. D. Algoritm Viterbi [Viterbi Algoritm]. *Trudy instituta intzenerov po elektrotekhnike i radioelektronike – Proceedings of the Institute of Electrical and Electronics Engineers*, 1973, vol. 61, no. 3, pp. 12–25.
3. Bahl L. R., Cocke J., Jelineck F., Raviv J., Optimal decoding of linear codes for minimizing symbol error rate. *IEEE Trans. Inform. Theory*, Mar. 1974, vol. 20, pp. 284-287.
4. Nikolaev B. I. *Posledovatel'naja peredacha diskretnykh soobshchebij po nepreryvnyh kanalom s pamjat'u* [Serial transmission of discrete messages on a continuous channel with memory]. Moscow, Radio i svjaz' Publ., 1988. 264 p.
5. Klovsky D. D. *Peredacha diskretnykh soobshchebij po radiokanalom* [Sending digital messages by radio]. Moscow, Radio i svjaz' Publ., 1982. 304 p.
6. Proakis J. G. *Tsifrovaja svjaz'* [Digital communication]. Moscow, Radio i svjaz' Publ., 2000, 800 p.
7. Nikolaev B. I., Chingaeva A. M. Energeticheskie sootnoshenija pri komp'uternom modelirovabnii protsessov v tsifrovyykh sistemakh peredachi ibfornatsii [Energy relations with the simulation of digital communication systems]. *Infokommunikacionnye tehnologii*, 2006, vol. 4, no. 1, pp. 53-57.

Received 02.03.2015