

References

1. Bogush R.L., Dzhul'jano F.U., Nepp D.L. Chastotno-selektivnye zamiraniya i ih korrekciya metodom reshajushhej obratnoj svyazi v vysokoskorostnyh cifrovyyh sputnikovyyh kanalakh svyazi [Frequency-selective fading and their correction by the method decision feedback in high-speed digital satellite links]. *TIIJeR*, 1983, vol. 71, no. 6, pp. 78-94.
2. Aarons Dzh. Global'naja morfologiya ionosfernykh mercanij [Global morphology of ionospheric scintillation]. *TIIJeR*, 1980, vol. 70, no. 4, pp. 45-66.
3. Klovsij D. D. *Peredacha diskretnykh soobshhenij po radiokanalam* [Sending digital messages over radio channels]. Moscow, Svjaz Publ., 1969. 375 p.
4. *OEM6® Family Firmware Reference Manual (OM-20000129)*, Rev. 7. 2014, 754 p.
5. Afrajmovich Je.L., Perevalova N.P. *GPS-monitoring verhnej atmosfery Zemli* [GPS-monitoring of Earth's upper atmosphere]. Irkutsk, GU NC VSNC SO RAMN Publ., 2006. 480 p.
6. Pashincev V.P., Sultanov A.S., Peskov M.V., Toporkov K.I. Metodika selekcii melkomasshtabnykh ionosfernykh vozmushhenij v rjadakh variacij polnogo jelektronnogo sodержaniya [Method of selection of small-scale ionospheric disturbances in the variations of the total electron content]. *Vestnik SKFU*, 2015, no. 3 pp. 28-35.
7. Maslov O.N., Pashincev V.P. Modeli transionosfernykh radiokanalov i pomehoustojchivost' sistem kosmicheskoy svyazi [Models of transionospheric radio channels and noise immunity of space communication systems]. *Prilozhenie k IKT*, 2006, vol. 4. 357 p.
8. Pashincev V.P., Solchatov M.Je., Gahov R.P. *Vlijanie ionosfery na harakteristiki kosmicheskikh sistem peredachi informacii: monografija* [Impact of the ionosphere on the characteristics of cosmic information transmission systems]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2006. 184 p.
9. Rytov S.M. Kravcov Ju.N., Tatarskij V.I. *Vvedenie v statisticheskiju radiofiziku. Ch. 2* [Introduction to Statistical Radiophysics. Volume 2]. Moscow, Nauka Publ., 1978. 464 p.

Received 12.10.2015

УДК 519.612

МНОГОКРАТНОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ ЕМКОСТНОЙ МАТРИЦЫ СИСТЕМЫ ПРОВОДНИКОВ И ДИЭЛЕКТРИКОВ С ИЗМЕНЯЮЩИМИСЯ ПАРАМЕТРАМИ С ПОМОЩЬЮ БЛОЧНОГО LU-РАЗЛОЖЕНИЯ ПРИ РЕШЕНИИ СЛАУ

Суровцев Р.С., Куксенко С.П., Газизов Т.Р.

Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники, Томск, РФ

E-mail: talgat.tu@tusur.ru

Рассмотрен комплекс вопросов, связанных с многократным решением систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) за счет использования блочного LU-разложения. Выявлена специфика матриц, возможная для использования. Проанализирована роль перенумерации как нового этапа, позволяющего, при малых вычислительных затратах, значительное повышение эффективности решения и расширение круга анализируемых структур. Усовершенствован алгоритм вычисления ряда емкостных матриц системы проводников и диэлектриков. Выведены выражения для аналитических оценок арифметических затрат, позволяющие априорную оценку эффективности использования блочного LU-разложения. Выполнены аналитические и вычислительные оценки ускорения усовершенствованным алгоритмом в зависимости от различных параметров. Получено максимальное ускорение 23 раза.

Ключевые слова: моделирование в диапазоне параметров, оптимизация, емкостная матрица, система линейных алгебраических уравнений, блочное LU-разложение.

Введение

В настоящее время имитационное моделирование различных процессов (механических, тепловых, электрических и пр.) получило широкое распространение в различных областях практической деятельности. Это моделирование

часто основано на численных методах, сводящих задачу к решению системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Поэтому от умения быстро решать СЛАУ зависит эффективность моделирования в целом. Особая необходимость в этом возникает при моделировании в диапазоне

параметров, например, в задачах оптимизации по большому числу параметров. Тогда получим [1]

$$A_k x_k = b_k, \quad (1)$$

где A_k – плотная квадратная матрица СЛАУ порядка N , b_k – вектор свободных членов, а x_k – вектор неизвестных, $k = 1, 2, \dots$

Необходимо отметить, что в ряде случаев изменение некоторого параметра моделируемой структуры приводит к изменению лишь части элементов матрицы СЛАУ системы (1), а остальные элементы при этом остаются неизменными. Например, в ряде задач электромагнитной совместимости необходимо многократное вычисление матрицы электростатической индукции (далее емкостной матрицы C) системы проводников и диэлектриков методом моментов [2]. Необходимость многократного решения СЛАУ возникает при учете частотной зависимости относительной диэлектрической проницаемости диэлектрика ϵ_r [3]. Тогда, для каждой частотной точки диапазона вычисляется емкостная матрица, для чего необходимо решить СЛАУ с различными векторами свободных членов, что можно представить в матричном виде как

$$S_k \Sigma_k = V_k, \quad (2)$$

где S_k – квадратная и плотная матрица порядка N , являющаяся результатом применения метода моментов к анализируемой структуре, V_k – неизменная в входе вычислений матрица размера $N \times N_{COND}$, состоящая из задаваемых потенциалов на подобластях, на которые разбиты границы структуры, а Σ_k – искомая матрица размера $N \times N_{COND}$, дающая распределение плотности заряда на этих границах, N_{COND} – количество проводников, не считая опорного, $k = 1, 2, \dots, m$.

Порядок матрицы СЛАУ складывается из количества подобластей на границах проводник-диэлектрик N_C и диэлектрик-диэлектрик N_D , а элементы матрицы вычисляются из параметров этих подобластей. При изменении ϵ_r изменяются лишь элементы с индексом больше N_C на глав-

ной диагонали матрицы СЛАУ, соответствующие подынтервалам диэлектрик-диэлектрик.

Традиционно для решения СЛАУ с плотной матрицей используются прямые методы, вычислительные затраты которых пропорциональны N^3 , что неприемлемо при многократных вычислениях с изменяющейся матрицей, поскольку затраты становятся пропорциональными mN^3 . Между тем специфика частичного изменения матрицы СЛАУ – это ресурс для уменьшения времени многократных вычислений. Поэтому актуальна разработка алгоритмов решения СЛАУ, использующих частичное изменение матрицы СЛАУ при многократных вычислениях.

Значительно ускорить вычисления позволяет блочная версия LU-разложения с последующим решением СЛАУ, поскольку при многократных вычислениях нет необходимости каждый раз выполнять полное LU-разложение матрицы СЛАУ, а нужно пересчитывать только блоки, соответствующие изменившимся элементам исходной матрицы.

С помощью блочного LU-разложения усовершенствован алгоритм вычисления ряда емкостных матриц, учитывающий изменение элементов матрицы СЛАУ только на главной диагонали [4]. Для данного алгоритма выполнены аналитические оценки затрат, показавшие значительный ресурс ускорения вычислений до 134 раз [5]. Алгоритм апробирован на практических задачах [6–7]. Однако при моделировании в диапазоне параметров структуры возможно изменение не только ϵ_r , но и ее размеров. Например, при оптимизации связанной линии передачи варьируется толщина диэлектрика h_C между проводниками (см. рис. 1), где диапазон изменения h_C снизу ограничен величиной h , а сверху – суммой h и t .

При изменении параметра h_C изменяются элементы в нижнем и правом блоках матрицы СЛАУ с индексами, соответствующими подынтервалам диэлектрик-диэлектрик (индексы строк и столбцов больше N_C). Показана возможность применения блочного LU-разложения при таком изменении матрицы СЛАУ и предложена «вариативная перенумерация» подобластей моделируе-

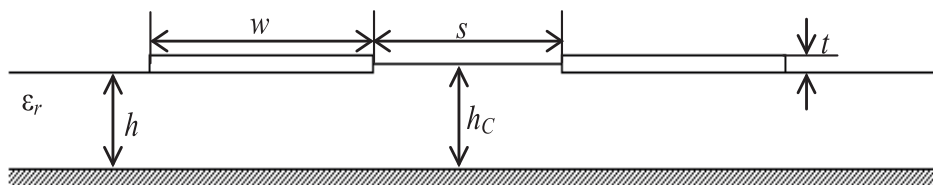


Рис. 1 Вид поперечного сечения связанной линии

мой структуры для более эффективного решения [8]. Однако более детальные оценки применимости и эффективности блочного LU-разложения при таком изменении матрицы СЛАУ еще не сделаны. Между тем они бы позволили расширить сферу применения алгоритмов на основе блочного LU-разложения к другим задачам с частичным изменением матрицы СЛАУ при многократных вычислениях, например при адаптивном итерационном выборе оптимальной сегментации структуры проводников и диэлектриков [9].

Цель работы – выполнить оценку эффективности применения блочного LU-разложения для решения СЛАУ при многократном вычислении емкостной матрицы структуры проводников и диэлектриков в диапазоне параметров. Для достижения поставленной цели представляется необходимым: выявить возможную для использования специфику матриц, проанализировать роль перенумерации, рассмотреть алгоритм и реализацию блочного LU-разложения и выполнить возможные аналитические оценки эффективности его применения; усовершенствовать исходный алгоритм; оценить ускорение усовершенствованным алгоритмом на основе вычислительного эксперимента.

Использование специфики изменения матриц и перенумерации

Рассмотрим специфику матриц, а точнее, специфику их изменения от матрицы к матрице. Отметим, что для применения блочного LU-разложения важна не степень изменений матрицы (весьма существенная, например, для решения итерационным методом), а расположение изменяющихся элементов. Кроме того, для повышения эффективности этого применения важна сама возможность изменения их расположения ближе к правой и нижней границам матрицы. Рассмотрим эти вопросы по отдельности. Для определенности и ясности целесообразно сделать это на рассматриваемой задаче вычисления емкостной матрицы методом моментов, а после обобщить на произвольную задачу.

Как уже отмечалось, в исходном алгоритме вычисления первая часть индексов элементов матрицы СЛАУ соответствует границам проводников структуры, а вторая – диэлектриков. Таким образом, могут быть заданы такие изменения ее параметров, которые затронут только диэлектрики или часть их, не затрагивая проводников. Кроме того, протяженность границ диэлектриков может быть много меньше, чем проводников. Таким образом, может существовать широкий ряд

структур, естественным образом (то есть без участия пользователя) дающих изменения значений небольшого числа элементов матрицы СЛАУ, расположенных только в правом и нижнем блоках матрицы. В используемых авторами алгоритмах вычисления емкостной матрицы есть еще одна специфика: в частных случаях ориентации границ проводников и диэлектриков ортогональны одной из декартовых осей, значения соответствующих этим ориентациям элементов матрицы СЛАУ вычисляются по своим аналитическим выражениям, и поэтому эти элементы сгруппированы в своих строках и столбцах. (Детальная иллюстрация этого приведена в работе [8].) Это приводит к еще большей структурированности матрицы СЛАУ и возможности изменений ее элементов, расположенных (опять же без участия пользователя) только в правых строках и нижних столбцах. В результате существует большое число реальных задач, когда матрицы последовательно решаемых СЛАУ полностью готовы для решения с помощью блочного LU-разложения, причем это решение может быть эффективным в силу малого (относительно порядка матрицы) числа изменяющихся строк и столбцов.

Между тем в самом общем случае изменяющиеся элементы матрицы СЛАУ могут быть расположены произвольно. Поэтому для повышения эффективности применения блочного LU-разложения важна возможность изменения их расположения: как можно ближе к правой и нижней границам матрицы. Примечательно, что такая возможность вполне может существовать, и даже быть легко реализуемой. Так, в алгоритме рассматриваемой задачи значения элементов матрицы СЛАУ выражают собой связь между подынтервалами, расположенными на границах проводников и диэлектриков структуры, и во многом определяются значениями декартовых координат этих подынтервалов. При этом сама нумерация подынтервалов не влияет на значения элементов матрицы.

Таким образом, если подынтервалы пронумерованы и элементы матрицы вычислены, то при изменении нумерации подынтервалов не требуется повторное вычисление элементов матрицы. Более того, не требуется даже перестановка элементов, а достаточно лишь изменить ссылки (указатели) на них, что требует минимальных вычислительных затрат. Отметим, что номера подынтервалов, изменивших свои координаты, можно легко найти по номерам границ (число которых гораздо меньше, например на рис. 1 их 11: на проводниках – 8, на диэлектрике – 3), из-

менивших свои координаты, – поэтому и здесь вычислительные затраты очень малы.

В итоге оказывается, что если выполнена первая нумерация подынтервалов, и вычислены элементы матрицы СЛАУ для любой заданной структуры, и заданы изменения ее параметра, то можно и целесообразно выполнить перенумерацию ее подынтервалов, перемещающую все изменяющиеся элементы матрицы в правый и нижний блоки матрицы. Важно отметить, что введение этой процедуры автоматически оптимизирует любую структуру для многократного решения СЛАУ с помощью блочного LU-разложения. Поэтому она представляется авторам важным звеном, позволяющим получить ускорение решения на практике: нет матриц с малыми размерами правого и нижнего блоков – нет значительного ускорения.

Алгоритм многократного решения СЛАУ с помощью блочного LU-разложения и его реализация

Рассмотрим алгоритм блочного LU-разложения на примере разложения матрицы S , представленной в виде

$$S = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix},$$

где блоки размера: $A - N_A \times N_A$, $B - N_A \times N_D$, $C - N_D \times N_A$, $D - N_D \times N_D$. Тогда LU-разложение матрицы S будет иметь следующий блочный вид (в случае если блок A – неособенная матрица) [10]:

$$L = \begin{bmatrix} I & 0 \\ CA^{-1} & I \end{bmatrix}, U = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{bmatrix}, \quad (3)$$

где I – единичная матрица.

Из (3) видно, что необходимо несколько раз выполнять обращение блока A , что увеличивает затраты времени при программной реализации LU-разложения. Также увеличиваются затраты памяти на хранение отдельно матриц L и U . Поэтому для минимизации затрат перепишем (3) в виде (матрица S'), удобном для хранения и дальнейшего использования:

$$S' = \begin{bmatrix} S'_{11} & S'_{12} \\ S'_{21} & S'_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^{-1} & A^{-1}B \\ C & D - CA^{-1}B \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Тогда алгоритм блочного LU-разложения в удобном для программной реализации виде можно представить последовательностью действий:

$S'_{11} = A^{-1}$, $S'_{21} = C$, $S'_{12} = S'_{11}B$, $S'_{22} = D - S'_{21}S'_{12}$. Видно, что при необходимости многократного решения СЛАУ изменение элементов блока A приводит к необходимости полного пересчета верхнетреугольной части матрицы, поэтому применение блочного LU-разложения будет неэффективно. Однако при изменении элементов любого из других блоков (B , C или D) необходимо пересчитать лишь блоки матрицы S' , зависящие от изменившихся блоков исходной матрицы. Таким образом, в самом общем случае (изменение блоков B , C , D), при m -кратных вычислениях будет однократно выполняться вычислительно затратное первое разложение матрицы S' (включающее обращение блока A) и последующие $m-1$ вычислений только блоков S'_{12} и S'_{22} .

Совершенствование алгоритма вычисления ряда емкостных матриц с помощью блочного LU-разложения

При вычислении емкостной матрицы используется последовательное LU-разложение, поскольку требуется решать СЛАУ с несколькими векторами свободных членов, а данный подход широко используется для решения подобных задач и хорошо освещен в литературе. (Помимо этого подхода, подобные задачи могут быть решены с помощью блочных версий итерационных методов, однако в данной работе они не рассматриваются, в частности, поскольку для итерационных методов трудно выполнить точные аналитические оценки арифметических затрат до начала решения из-за неопределенности требуемого числа итераций.) Для ясности сначала рассмотрим исходный алгоритм 1.

Как видно из алгоритма 1, на каждом шаге k выполняются заполнение матрицы СЛАУ, решение СЛАУ с помощью LU-разложения и вычисление емкостной матрицы C_k .

Как было отмечено выше, порядок матрицы N складывается из количества подобластей на границах проводник-диэлектрик – NC и диэлектрик-диэлектрик – ND . Но, как в задаче оптимизации связанной линии, может изменяться высота не всей границы раздела воздушной среды и диэлектрической подложки, а только ее часть, находящаяся между проводниками (см. рис. 1). Поэтому в такой задаче N_D складывается из количества подобластей с постоянными (N_D^{const}) и изменяющимися (N_D^{var}) параметрами.

Таким образом, общий порядок неизменяющихся элементов составляет $N_{const} = N_C + N_D^{const}$, так что $N = N_{const} + N_D^{var}$. Далее для уменьшения количества вводимых индексов N_{const} и N_D^{var} при-

Алгоритм 1 Исходный алгоритм вычисления ряда емкостных матриц

- 1 Вычислить элементы матрицы воздействия V_k (размера $N \times N_{COND}$)
- 2 Для k от 1 до m
- 3 Вычислить элементы матрицы S_k (размера $N \times N$)
- 4 Выполнить LU-разложение матрицы S_k
- 5 Найти матрицу решения Σ_k из уравнения $S_k \Sigma_k = V_k$
- 6 Вычислить элементы матрицы \underline{C}_k , основываясь на элементах Σ_k
- 7 Увеличить k

Алгоритм 2 Усовершенствованный алгоритм вычисления ряда емкостных матриц

- 1 Вычислить элементы матрицы S_1 (размера $N \times N$)
- 2 Перенумерация подблоков структуры
- 3 Вычислить $A_1 = A_1^{-1}$ (размеры блока $N_A \times N_A$)
- 4 Вычислить элементы матрицы воздействия V_k
- 5 $X_0 = A_1 V_0$ (размер блоков X_0 и $V_0 - N_A \times N_{COND}$)
- 6 Для k от 1 до m
- 7 $B_k = A_1 B_k$
- 8 $D_k = D_k - C_k B_k$
- 9 $X_{1k} = V_1 - C_k X_0$ (размер блоков X_{1k} и $V_1 - N_D \times N_{COND}$)
- 10 $\Sigma_{1k} = D_k^{-1} X_{1k}$
- 11 $\Sigma_{0k} = X_0 - B_k \Sigma_{1k}$
- 12 Вычислить элементы емкостной матрицы \underline{C}_k
- 13 Вычислить элементы изменяющихся блоков $B_{k+1}, C_{k+1}, D_{k+1}$

няты равными N_A и N_D соответственно. Для общего случая перед повторными вычислениями необходимо изменить нумерацию границ структуры, чтобы подблоки, соответствующие изменяющимся строкам и столбцам матрицы СЛАУ, нумеровались последними.

Способ вычисления ряда емкостных матриц с учетом (4) можно представить в виде алгоритма 2, из которого видно, что для реализации блочного LU-разложения необходима дополнительная матрица X порядка $N \times N_{COND}$, в которой хранятся результаты промежуточных вычислений.

Оценки арифметических затрат

Перед оценкой ускорения усовершенствованным алгоритмом необходимо отметить, что в алгоритмах 1 и 2 содержатся вспомогательные операции, которые необходимы для формирования элементов матрицы СЛАУ из исходной структуры проводников и диэлектриков, ее модификации при изменении параметров структуры, а также

для вычисления элементов емкостной матрицы из полученных векторов решения. Эти затраты много меньше затрат на решение СЛАУ, поэтому далее они не учитывались.

Из алгоритма 1 видно, что его основная часть состоит из LU-разложения матрицы S_k и решения уравнения $S_k \Sigma_k = V_k$. Оценка арифметической сложности (Q_{LU}) алгоритма 1 нахождения ряда емкостных матриц выполнена в [5]:

$$Q_{LU} = m \frac{N}{6} [4N^2 - 3N + 6N_{COND} (2N - 1) - 1].$$

Как видно из алгоритма 2, затраты на его реализацию состоят из однократного обращения блока A и $m - 1$ обращений блока D , а также нескольких матричных вычитаний и умножений. Оценки арифметической сложности на реализацию этих операций также выполнены в [5]. Полученные на их основе оценки арифметической сложности операций алгоритма 2 приведены в таблице 1.

Таблица 1. Оценки арифметической сложности решения СЛАУ в алгоритме 2

№ шага алгоритма	Арифметическое действие	Арифметическая сложность (Q)
Однократно выполняемые операции		
3	$\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_1^{-1}$	$Q_3 = \frac{8}{3}N_A^3 - \frac{3}{2}N_A^2 - \frac{1}{6}N_A$
5	$\mathbf{X}_0 = \mathbf{A}_1\mathbf{V}_0$	$Q_5 = N_A N_{COND} (2N_A - 1)$
m -кратно выполняемые операции		
7	$\mathbf{B}_k = \mathbf{A}_1\mathbf{B}_k$	$Q_7 = N_D N_A (2N_A - 1)$
8	$\mathbf{D}_k = \mathbf{D}_k - \mathbf{C}_k\mathbf{B}_k$	$Q_8 = 2N_A N_D^2$
9	$\mathbf{X}_{1k} = \mathbf{V}_1 - \mathbf{C}_k\mathbf{X}_0$	$Q_9 = 2N_A N_D N_{COND}$
10	$\mathbf{\Sigma}_{1k} = \mathbf{D}_k^{-1}\mathbf{X}_{1k}$	$Q_{10} = \frac{8}{3}N_D^3 + N_D^2 \left(2N_{COND} - \frac{3}{2}\right) + N_D \left(N_{COND} - \frac{1}{6}\right)$
11	$\mathbf{\Sigma}_{0k} = \mathbf{X}_0 - \mathbf{B}_k\mathbf{\Sigma}_{1k}$	$Q_{11} = 2N_A N_D N_{COND}$

Далее, используя данные таблицы 2, получим арифметическую сложность первого решения СЛАУ

$$Q_f = Q_3 + Q_5 + Q_7 + Q_8 + Q_9 + Q_{10} + Q_{11}$$

и $m - 1$ последующих вычислений:

$$Q_{m-1} = (Q_7 + Q_8 + Q_9 + Q_{10} + Q_{11}).$$

Тогда для решения СЛАУ при реализации алгоритма 2 ($Q_f + mQ_{m-1}$) требуется

$$Q_{BLU} = (Q_3 + Q_5) + m(Q_7 + Q_8 + Q_9 + Q_{10} + Q_{11})$$

операций. Итоговым аналитическим выражением для ускорения решения СЛАУ является отношение (β_Q) количества операций алгоритма 1 к количеству операций алгоритма 2:

$$\beta_Q = \frac{Q_{LU}}{(Q_3 + Q_5) + m(Q_7 + Q_8 + Q_9 + Q_{10} + Q_{11})}. \quad (5)$$

Аналитические оценки ускорения вычислений усовершенствованным алгоритмом (β_Q) m -емкостных матриц для $N = 1000, 2000$ и 3000 при $N_A/N = 0,9; 0,99; 0,999$, выполненные по (5), сведены в таблицу 2.

Число СЛАУ m выбрано исходя из того, что в задаче оптимизации связанной линии число изменений матрицы СЛАУ ограничено только значением t , которое однозначно определяется типовыми значениями толщины проводящего слоя печатных плат и может варьироваться от 5 до 105 мкм.

Поэтому для простоты число изменений h_c принято равным $m = 10; 20 \dots 100$. Так как в свя-

Таблица 2. Аналитические оценки ускорения решения СЛАУ

N	N_A	m									
		10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
1000	900	1,77	2,39	2,70	2,89	3,02	3,11	3,17	3,23	3,27	3,30
	990	2,40	4,49	6,31	7,92	9,35	10,63	11,78	12,83	13,78	14,64
	999	2,50	4,96	7,39	9,78	12,13	14,46	16,75	19,00	21,23	23,42
2000	1800	1,77	2,39	2,70	2,89	3,01	3,10	3,17	3,22	3,27	3,30
	1980	2,40	4,48	6,30	7,91	9,33	10,61	11,76	12,81	13,75	14,62
	1998	2,49	4,95	7,37	9,76	12,11	14,43	16,71	18,96	21,18	23,37
3000	2700	1,77	2,38	2,70	2,88	3,01	3,10	3,17	3,22	3,27	3,30
	2970	2,40	4,47	6,29	7,90	9,33	10,61	11,76	12,80	13,75	14,61
	2997	2,49	4,95	7,37	9,75	12,10	14,42	16,70	18,95	21,17	23,35

занной линии (см. рис. 1) имеются два проводника, не считая опорного, то $N_{COND} = 2$.

На основе данных таблицы 2 можно сделать несколько выводов. Ускорение практически не зависит от N . Наименьшая эффективность усовершенствованного алгоритма наблюдается при малых N_A , например, при $N_A = 900$ ускорение изменяется от 1,77 до 3,3 раза. Однако эффективность значительно возрастает при стремлении N_A к N , например, при увеличении N_A от 900 до 999 для $m = 100$ ускорение достигает 23 раз. Пример с $N_A = 999$ примечателен, так как в данном случае изменяются только одна строка и один столбец исходной матрицы. Также видно, что ускорение сильно зависит от m . Так, по мере роста m от 10 до 100 ускорение для $N_A = 900$ возрастает в 1,86 раза, а для $N_A = 999$ в 9,37 раза. Таким образом, ключевыми параметрами, влияющими на время вычислений, являются порядок блока A и число решений СЛАУ.

Отметим, что выполнение аналитических оценок ускорения позволяет быструю и априорную оценку эффективности и целесообразности использования того или иного метода (здесь блочного LU-разложения) для многократного решения СЛАУ. В этой связи принципиально важно оценить, при достижении каких значений параметров СЛАУ появляется ускорение решения. Как видно из таблицы 2, для параметра m это значение меньше 10. Поэтому выполнены аналогичные оценки для $m < 10$. Результаты оказались также почти не зависящими от N , но примечательны зависимостью от других параметров. Для наглядности они приведены графически (рис. 2). Видно, что ускорение начинается с $m = 4$ для $N_A = 999$;

990; 900 и сохраняется даже при уменьшении N_A до 700, хотя уже не увеличивается с ростом m .

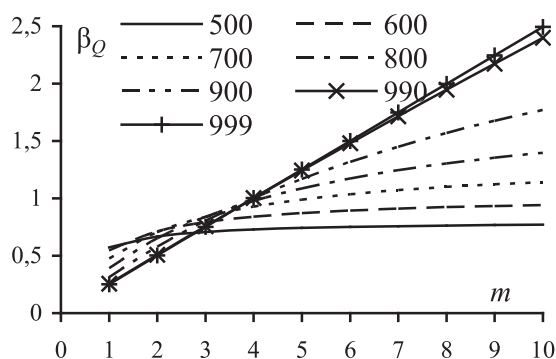


Рис. 2. Зависимости ускорения (аналитическая оценка) решения СЛАУ от числа решаемых СЛАУ для разных N_A при $N = 1000$

Вычислительный эксперимент

Выполнена программная реализация алгоритмов 1 и 2. Для вычислений использована рабочая станция (без параллельных вычислений, то есть работало одно ядро процессора) со следующими параметрами: платформа AMD FX(tm)-8350 Eight-Core Processor; частота процессора 4,01 ГГц; объем ОЗУ 32 Гб; число ядер – 8; операционная система Windows 7×64. При вычислительной оценке параметры матрицы и число решений СЛАУ приняты такими же, как при аналитической. Результаты сведены в таблицу 3.

Данные таблицы 3 подтверждают ряд оценок, сделанных выше. Ускорение вычислений возрастает по мере роста m и N_A , однако пределы этого роста ниже, чем полученные аналитически, в

Таблица 3. Вычислительные оценки ускорения решения СЛАУ

N	N_A	m									
		10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
1000	900	1,17	1,68	1,96	2,14	2,26	2,36	2,43	2,50	2,54	2,57
	990	1,37	2,58	3,65	4,70	5,60	6,50	7,28	8,03	8,75	9,35
	999	1,39	2,74	3,98	5,36	6,65	7,99	9,26	10,56	11,81	13,00
2000	1800	1,31	1,89	2,22	2,44	2,59	2,69	2,77	2,83	2,90	2,94
	1980	1,51	2,89	4,16	5,32	6,37	7,34	8,25	9,06	9,87	10,57
	1998	1,54	3,07	4,59	6,10	7,58	9,06	10,35	11,92	13,38	14,75
3000	2700	1,35	1,95	2,29	2,52	2,67	2,78	2,88	2,95	2,99	3,04
	2970	1,55	2,97	4,25	5,44	6,53	7,54	8,48	9,34	10,12	10,87
	2997	1,59	3,14	4,70	6,30	7,76	9,26	10,78	12,26	13,69	15,17

среднем в 1,5 раза. При этом характер зависимости ускорения от N_A и m схож при аналитической и вычислительной оценках. Минимальное ускорение составляет 1,17 раза, максимальное – 15,17. Интерес представляет зависимость ускорения от N : из табл. 3 видно, что ускорение возрастает при увеличении N , причем этот рост значителен (до 16%). Подводя итог, можно сказать, что данные, полученные аналитически и в результате вычислительного эксперимента, схожи по характеру зависимости от N_A и m , но отличаются и по характеру зависимости от N , и по значениям.

Заключение

В работе рассмотрен комплекс вопросов по ускорению многократного решения СЛАУ с помощью блочного LU-разложения. В частности, выявлена возможная для использования специфика матриц и проанализирована роль перенумерации как нового этапа, позволяющего, при малых вычислительных затратах, значительное повышение эффективности решения и расширение круга анализируемых структур.

Выполнено усовершенствование алгоритма вычисления ряда емкостных матриц с помощью блочного LU-разложения для случая, когда в структуре проводников и диэлектриков изменяются любые параметры. Получены формулы для аналитической оценки ускорения, позволяющие априорную оценку эффективности использования блочного LU-разложения при заданных параметрах решения. Выполнены аналитические и вычислительные оценки эффективности усовершенствованного алгоритма для многократных вычислений, показавшие максимальное ускорение 23 раза. Выявлено, что применение блочного LU-разложения начинает давать ускорение начиная с довольно малых значений m и не с самых высоких значений N_A/N , что перекрывает весьма широкий круг задач на практике. Дополнительно необходимо отметить, что в дальнейшем целесообразны более детальные сравнительные оценки усовершенствованного и исходного алгоритмов. Они позволят расширить сферу применения алгоритмов на основе блочного LU-разложения к другим задачам с частичным изменением матрицы СЛАУ при многократных вычислениях.

Вычисление емкости связанной линии методом моментов выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 14-19-01232) в ТУСУРе. Алгоритм для решения СЛАУ разработан при поддержке грантов РФФИ 14-07-31267 и 14-29-09254. Оценки ускорения выполнены в рам-

ках государственного задания № 8.1802.2014/К Минобрнауки России.

Литература

1. Calrago C., Chehab J.P., Saad Y. Incremental incomplete LU factorization with application to time-dependent PDEs // Numer. Lin. Algebra with Appl. Vol. 17. No. 5, 2010. – P. 811-837. doi: 10.1002/nla.756
2. Gazizov T.R. Analytic expressions for Mom calculation of capacitance matrix of two dimensional system of conductors and dielectrics having arbitrary oriented boundaries // Proc. Of the 2001 IEEE EMC Symposium. Montreal, Canada, 2001, Vol. 1. – P. 151-155.
3. Djordjevich A.R., Biljic R.M., Likar-Smiljanic V.D., Sarkar T.K. Wideband frequency-domain characterization of FR-4 and time-domain causality // IEEE Trans. Electromag. Compat. Vol. 43, 2001. – P. 662-666. doi: 10.1109/15.974647
4. Куксенко С.П., Газизов Т.Р. Совершенствование алгоритма вычисления методом моментов емкостных матриц системы проводников и диэлектриков в диапазоне значений диэлектрической проницаемости диэлектриков // Электромагнитные волны и электронные системы. №10, 2012. – С. 13-21.
5. Суровцев Р.С., Куксенко С.П., Газизов Т.Р. Аналитическая оценка вычислительных затрат на решение СЛАУ при многократном вычислении емкостной матрицы в диапазоне изменения диэлектрической проницаемости диэлектриков // Записки научного семинара ПОМИ. Т.428, 2014. – С. 196-207.
6. Суровцев Р.С., Куксенко С.П. Вычисление матрицы емкостей произвольной системы проводников и диэлектриков методом моментов: зависимость ускорения за счет блочного LU-разложения от порядка матрицы СЛАУ // Известия вузов. Физика. Т. 55, № 9/3, 2012. – С. 126-130.
7. Суровцев Р.С., Салов В.К., Куксенко С.П. Использование блочного LU-разложения для ускорения вычисления временного отклика связанных линий передачи с учетом частотной зависимости диэлектрической проницаемости подложки // ИКТ Т. 11, №3, 2013. – С. 64-69.
8. Gazizov T.R., Kuxsenko S.P., Surovtsev R.S. Acceleration of Multiple Solution of a Boundary Value Problem Involving a Linear Algebraic System // Proc. of the 13th Int. Conf. of Numerical Analysis and Applied Mathematics. Rhodes, Greece, 2015. – P. 1-4.

9. Аширбакиев Р.И., Салов В.К. Адаптивный итерационный выбор оптимальной сегментации границ проводников и диэлектриков в задачах электростатики // Доклады ТГУСУР. №3 (29), Ч.1, 2013. – С. 159-161.
10. Highman N.J. Accuracy and Stability of Numerical Algorithms. Philadelphia: SIAM, 1961. – 680 p.

Получено 20.10.2015

Суровцев Роман Сергеевич, аспирант Кафедры телевидения и управления (ТУ) Томского государственного университета систем управления и радиоэлектроники (ТГУСУР). Тел. (8-382) 241-34-39. E-mail: surovsevrs@gmail.com

Куksenко Сергей Петрович, к.т.н., доцент Кафедры ТУ ТГУСУР. Тел. (8-382) 241-34-39; E-mail: ksergp@mail.ru

Газизов Тальгат Рашитович, д.т.н., заведующий Кафедрой ТУ ТГУСУР. Тел. (8-382) 241-34-39. E-mail: talgat.tu@tusur.ru

MULTIPLE COMPUTATIONS OF CAPACITANCE MATRIX OF CONDUCTOR AND DIELECTRIC SYSTEM WITH VARYING PARAMETERS BY BLOCK LU-DECOMPOSITION

*Surovtsev R.S., Kuksenko S.P., Gazizov T.R.
Tomsk State University of Control Systems and Radioelectronics
E-mail: talgat.tu@tusur.ru*

This work considers a set of problems concerned on multiple computations of systems of linear algebraic equations by using block LU-decomposition. We found out matrix specificity, which can be used for mentioned purpose, and analyzed a role or new iteration renumbering that provides much to improve solution efficiency and to increase range of analyzed structures under low computing cost. We improved algorithm for computing set of capacitance matrixes of conductor and dielectric system and derived analytical expressions for evaluation of arithmetic cost. These expressions provide to perform a-priory estimation of block LU-decomposition using. We produced analytical and computational estimations of speedup of the algorithm depending on different parameters. The maximal estimated value of speedup is 23 times.

Keywords: *simulation across a range of parameters, optimization, capacitance matrix, system of linear algebraic equations, block LU-decomposition*

DOI: 10.18469/ikt.2015.13.4.03

Surovtsev Roman Sergeevich, PhD-student, Department of the Television and Control, Tomsk State University of Control Systems and Radioelectronics. Tomsk, Russian Federation. Tel.: +73822413439. E-mail: surovsevrs@gmail.com.

Kuksenko Sergei Petrovich, PhD in Technical Science, Assistant professor of the Department of Television and Control, Tomsk State University of Control Systems and Radioelectronics. Tomsk, Russian Federation. Tel.: +73822413439. E-mail: ksergp@mail.ru .

Gazizov Talgat Rashitovich, Doctor of Technical Science, Head of the Department of Television and Control, Tomsk State University of Control Systems and Radioelectronics. Tomsk, Russian Federation. Tel.: +73822413439. E-mail: talgat.tu@tusur.ru.

References

1. Calrago C., Chehab J.P., Saad Y. Incremental incomplete LU factorization with application to time-dependent PDEs. *Numer. Lin. Algebra with Appl.*, 2010, vol. 17, no. 5, pp. 811-837. doi: 10.1002/nla.756.
2. Gazizov T.R. Analytic expressions for Mom calculation of capacitance matrix of two dimensional system of conductors and dielectrics having arbitrary oriented boundaries. *Proc. Of the 2001 IEEE EMC Symposium*, Montreal, Canada, 2001, vol. 1, pp. 151-155.

3. Djordjevich A.R., Biljic R.M., Likar-Smiljanic V.D., Sarkar T.K. Wideband frequency-domain characterization of FR-4 and time-domain causality. *IEEE Trans. Electromag. Compat.*, 2001, vol. 43, pp. 662-666. doi: 10.1109/15.974647.
4. Kuksenko S.P., Gazizov T.R. Sovershenstvovanie algoritma vichesleniya metodom momentov emkostnih matric sistemi provodnikov i dielektrikov v diapazone znacheniy dielektricheskoi pronicaemosti dielektrikov [Improvement of the algorithm for calculating the capacitance matrices of structure of conductors and dielectrics by method of moments in the range of dielectric permeability values]. *Electromagnitnie vokni i elektronnie sistemi*, no. 10, 2012, pp. 13-21.
5. Surovtsev R.S., Kuksenko S.P., Gazizov T.R. Analiticheskaja ocenka vichislitelnih zatrat na reshenie SLAU pri mnogkratnom vichislenii emkostnoi matrici v diapazone izmenenija dielektricheskoi pronicaemosti dielektrikov [Analytic evaluation of the computational costs for solving systems of linear algebraic equations in multiple computing of the capacitance matrix in a range of the dielectric permittivity of dielectrics]. *Zapiski nauchnykh seminarov POMI*, vol. 428, 2014, pp. 196-207.
6. Surovtsev R.S., Kuksenko S.P. Vichislenie matrici emkosti proizvolnoi sistemi provodnikov i dielektrikov metodom mometov: zavisimost uskorenija za schet blochnogo LU-razlozhenija ot porjadka matrici SLAU [Computation of the Capacitance Matrix of a System of Conductors and Dielectrics Using the Method of Moments: Dependency of the Speedup by Means of Block LU Factorization on the Matrix Order of a Linear System]. *Izvestija vuzov. Fizika*, 2012, vol. 55, no. 9, pp. 126-130.
7. Surovtsev R.S., Salov V.K., Kuksenko S.P. Ispolzovanie blochnogo LU-razlozhenija dlja uskorenija vichislenija vremennogo otklika svjaannih linij peredachi s uchetom chastotnoj zavisimosti dielektricheskoy pronicaemosti podlozhenki [Usage of block LU-factorization for acceleration of coupled transmission lines time-domain response calculation tacing into account the substrate permittivity frequency dependency]. *Infokommunikacionnie tehnologii*, 2013, vol. 11, no. 3, pp. 64-69.
8. Gazizov T.R., Kuksenko S.P., Surovtsev R.S. Acceleration of Multiple Solution of a Boundary Value Problem Involving a Linear Algebraic System. *Proc. of the 13th Int. Conf. of Numerical Analysis and Applied Mathematics*, Rhodes, Greece, 2015, pp. 1-4.
9. Ashirbakiev R.I., Salov V.K. Adaptivniy iteracionnyy vikor optimalnoi segmentacii granic provodnikov i dielektrikov v zadachah elektrostatiки [Adaptive iterative selection of the optimal segmentation of a conductor and dielectric boundaries in electrostatic problems]. *Dokladi Tomskogo gosudarstvennogo universiteta system upravlenija i radioelektroniki*, 2013, no. 3, pp. 159-161.
10. N.J. Highman. *Accuracy and Stability of Numerical Algorithms*. Philadelphia: SIAM, 1961. 680 p.

Received 20.10.2015

ТЕХНОЛОГИИ ТЕЛЕКОММУНИКАЦИЙ

УДК 621.396.67

ПРОГРАММНЫЙ КОМПЛЕКС КОРРЕКЦИИ СИГНАЛА В ЧАСТОТНОЙ ОБЛАСТИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ БЫСТРОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ

Итальянцева М.Б., Николаев Б.И.

Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики, Самара, РФ

E-mail: italyantseva@mail.ru

В статье рассматриваются и сравниваются друг с другом с помощью компьютерных технологий и методов статистического моделирования несколько различных алгоритмов выравнивания сигнала на основе быстрого преобразования Фурье и выравнивания в частотной области. В рамках двух различных подходов к формированию пакетов данных анализируются два различных метода выравнивания – метод сведения к нулю и метод минимизации среднеквадратической ошибки. Один подход использует пассивный защитный интервал, а другой основан на использовании циклического префикса. Эти методы реализованы в программном комплексе для имитационного моделирования беспроводного канала с требуемыми параметрами.

В статье приведены результаты исследования помехоустойчивости сигнала в условиях передачи информации по однолучевому каналу, по двухлучевым каналам без корректора, с корректором по минимуму среднеквадратической ошибки и корректором по алгоритму сведения к нулю при различных соотношениях лучей в канале с