

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ РАЗМЕРОВ ОЧЕРЕДЕЙ НА ОСНОВЕ КОВАРИАЦИОННОЙ ФУНКЦИИ ЧИСЛА ЗАЯВОК

*Лихтциндер Б.Я.*

*Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики, Самара, РФ*

*E-mail: lixt@psati.ru*

Статья посвящена анализу стационарных, ординарных рекуррентных потоков заявок систем массового обслуживания. Установлено влияние корреляционных связей между поступающими заявками потока на размеры очередей. Показано, что процесс образования очередей в системах с пачечными потоками носит циклический характер и разделяется на активный и пассивный подциклы. На основании анализа циклов получено обобщение известной формулы Хинчина-Поллячека, которая раньше была пригодна только для анализа очередей пуассоновских потоков. Показано определяющее влияние корреляционных связей на размеры очередей. Доказано, что максимальное значение интеграла от ковариационной функции чисел заявок на интервалах обслуживания заявки при заданном коэффициенте загрузки полностью определяет средний размер очереди в одноприборной системе массового обслуживания.

**Ключевые слова:** системы массового обслуживания, пачечные потоки, размеры очередей, мультисервисные сети, коэффициент загрузки, ковариация.

### Введение

Анализу потоков трафика современных мультисервисных сетей связи посвящено большое число публикаций. Недавно вышла в свет фундаментальная работа [1], посвященная указанной тематике. Однако вопросы анализа причин возникновения перегрузок и очередей в системах массового обслуживания, моделирующих обработку мультисервисного трафика, появляются снова и снова. Одним из таких вопросов является установление влияния корреляционных связей между заявками потока на размеры очередей в системах обслуживания [4; 6; 10].

Разработанные автором интервальные методы анализа очередей [2-3; 8] позволили произвести обобщение известной формулы Хинчина-Поллячека [7; 9], пригодной только для анализа очередей пуассоновских потоков, и на основе аппроксимации определить коэффициенты, характеризующие потоки заявок общего вида. В статье анализируется стационарный, ординарный рекуррентный поток заявок, удовлетворяющий условиям эргодичности.

### Уравнение баланса

Рассмотрим интервал времени  $T$  (начиная с момента  $t_0 = 0$ ), на котором сохраняется стационарность потока и происходит достаточно большое число  $A$  событий. Параметр средней интенсивности  $\lambda$  на указанном интервале времени  $T$  определяется как  $\lambda = A/T$ . Разделим интервал

$T$  на  $N$  последовательно расположенных промежутков времени  $\tau$ . В течение каждого промежутка времени в системе полностью обрабатывается одна заявка. Число заявок, поступившее в течение  $j$ -го промежутка времени  $\tau$ , обозначим через  $n_j(\tau)$ , а число обработанных заявок за это время – равно 1, если заявки имелись в системе, и равно 0, если заявки отсутствовали. Обозначим эту переменную через  $\delta_j(\tau)$ . Процесс образования очередей носит циклический характер. В течение пассивной части циклов очередь отсутствует и процессор, обрабатывающий заявки, простаивает.

Допустим, что в нулевой момент времени очередь отсутствовала. Тогда общее число заявок, находящееся в очереди к концу  $j$ -го промежутка времени  $\tau$ ,

$$q_j(\tau) = q_{j-1}(\tau) + n_j(\tau) - \delta_j(\tau), \quad (1)$$

где  $q_{j-1}(\tau) = \sum_{k=1}^{j-1} [n_k(\tau) - \delta_k(\tau)]$ ,

$$\delta_j(\tau) = \begin{cases} 1, & \text{если } q_{j-1}(\tau) + n_j(\tau) - 1 \geq 0; \\ 0, & \text{если } q_{j-1}(\tau) + n_j(\tau) - 1 < 0. \end{cases}$$

Величина

$$\Delta q(\tau) = q_i(\tau) - q_{i-1}(\tau) = n_j(\tau) - \delta_j(\tau) \quad (2)$$

представляет собой приращение очереди на  $j$ -ом промежутке времени.

### Формирование очередей

На любом промежутке времени  $\tau_j$  имеется очередь размером  $q_{j-1}(\tau)$ , поступившая с предыдущего промежутка времени, и одновременно поступает  $n_j(\tau)$  заявок, которые становятся в очередь. Суммарная очередь на промежутке времени  $\tau_j$  определяется соотношением (1), а приращение очереди на указанном промежутке определяется (2). Однако появление дополнительных заявок  $n_j(\tau)$  на  $\tau_j$  создаст дополнительные приращения очереди и на последующих промежутках времени.

Эти заявки поступят на обработку лишь после того, как обработаются все  $q_{j-1}(\tau)$  ранее поступивших заявок, находящихся в очереди. Обработка всех ранее поступивших заявок будет происходить в течение  $q_{j-1}(\tau)$  промежутков времени  $\tau$ , причем на каждом последующем промежутке времени будет обрабатываться по одной заявке, и при отсутствии поступления новых заявок очередь будет уменьшаться каждый раз на единицу.

Суммарное число заявок, которое будут находиться в очередях в результате прихода заявок от очереди  $q_{j-1}(\tau)$  на промежуток  $\tau_j$  определится суммой арифметической прогрессии – это площадь элементов треугольника со сторонами  $q_{j-1}(\tau)$ :

$$s_{j-1}(\tau) = \frac{q_{j-1}^2(\tau) - q_{j-1}(\tau)}{2} + q_{j-1}(\tau) = \frac{q_{j-1}^2(\tau) + q_{j-1}(\tau)}{2}.$$

В результате прихода заявок  $n_j(\tau)$  на промежутке  $\tau_j$  образуется очередь  $q_j(\tau)$ . Суммарное число заявок, которое будут находиться в очередях после образования этой очереди, также определится суммой арифметической прогрессии – это площадь элементов треугольника со сторонами  $q_j(\tau)$ :

$$s_j(\tau) = \frac{q_j^2(\tau) + q_j(\tau)}{2}.$$

Указанные площади треугольников представляют объемы невыполненных работ по обслуживанию заявок. Приращение невыполненной работы, возникающее на промежутках времени  $\tau_j$ , определяется разностью:

$$\begin{aligned} \Delta s_j(\tau) &= s_j(\tau) - s_{j-1}(\tau) = \\ &= \frac{q_j^2(\tau) - q_{j-1}^2(\tau)}{2} + \frac{q_j(\tau) - q_{j-1}(\tau)}{2} = \\ &= \frac{[n_j(\tau) - \delta_j(\tau)][q_j(\tau) + q_{j-1}(\tau)] + [n_j(\tau) - \delta_j(\tau)]}{2}. \end{aligned}$$

На рис. 1 в качестве примера показаны размеры очередей. На промежутке  $\tau_{j-1}$  очередь  $q_{j-1}(\tau)$  составляла 4 заявки, а на промежутке  $\tau_j$  после прихода  $n_j(\tau) = 5$  заявок и ухода на обработку одной заявки очередь  $q_j(\tau) = 8$  заявок. Площадь треугольника  $s_j(\tau) = 36$  заявок, площадь треугольника  $s_{j-1}(\tau) = 10$  заявок. Приращение площади на указанном промежутке времени составляет  $\Delta s_j(\tau) = 26$  заявок.

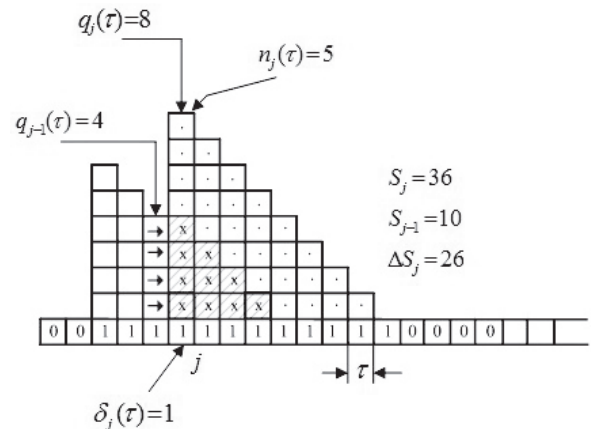


Рис. 1. Пример образования очередей

Если коэффициент загрузки меньше единицы, то в системе наблюдается устойчивый процесс образования очередей, заключающийся в том, что на интервале анализа  $T$  все заявки успевают обработаться и сумма всех приращений  $\Delta s_j(\tau)$  равна нулю, то есть случайная величина  $\Delta s_j(\tau)$  является центрированной и ее математическое ожидание  $\overline{\Delta s_j(\tau)} = 0$ . Нетрудно показать, что  $n_j(\tau) = \delta_j(\tau) = \rho$ ;

$$\begin{aligned} \overline{\delta_j(\tau)[q_j(\tau) + q_{j-1}(\tau)]} &= 2\overline{q(\tau)}; \\ \overline{n_j(\tau)[q_j(\tau) + q_{j-1}(\tau)]} &= \\ &= 2\overline{q(\tau)}\rho + Cov\{[q_j(\tau) + q_{j-1}(\tau)]; n_j(\tau)\} \end{aligned}$$

После подстановки и усреднения

$$\begin{aligned} \overline{\Delta s_j(\tau)} = 0 &= 2\overline{q(\tau)}\rho - 2\overline{q(\tau)} + \\ &+ Cov\{[q_j(\tau) + q_{j-1}(\tau)]; n_j(\tau)\} \end{aligned}$$

окончательно имеем

$$\overline{q(\tau)} = \frac{Cov\{[q_j(\tau) + q_{j-1}(\tau)]; n_j(\tau)\}}{2(1 - \rho)}. \quad (3)$$

Это соотношение, обобщающее известную формулу Хинчина-Поллячека [7], было ранее получено автором непосредственно через урав-

нение баланса, однако приведенный здесь вывод лучше отражает физическую сущность процесса образования очередей в системах массового обслуживания.

Проанализируем  $Cov \{[q_j(\tau) + q_{j-1}(\tau)]; n_j(\tau)\}$  на всех  $N$  промежутках времени интервала анализа  $T$ . Очевидно, что в соответствии с (1) имеет место

$$q_j(\tau) + q_{j-1}(\tau) = [n_j(\tau) - \delta_j(\tau)] + 2q_{j-1}(\tau),$$

где значение

$$q_{j-1}(\tau) = \sum_{k=1}^{j-1} \Delta q_{j-k}(\tau) = \sum_{k=1}^{j-1} [n_{j-k}(\tau) - \delta_{j-k}(\tau)].$$

Следовательно

$$q_j(\tau) + q_{j-1}(\tau) = [n_{j-k}(\tau) - \rho] + 2 \sum_{k=1}^{j-1} [n_{j-k}(\tau) - \delta_{j-k}(\tau)].$$

Значение ковариации

$$\begin{aligned} Cov \{[q_j(\tau) + q_{j-1}(\tau)]; n_j(\tau)\} &= \\ &= \overline{[q_j(\tau) + q_{j-1}(\tau)] \cdot [n_j(\tau) - \rho]} = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \{ [n_j(\tau) - \delta_j(\tau)] [n_j(\tau) - \rho] \} + \\ &+ \frac{2}{N} \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^{N-1} [n_j(\tau) - \rho] [n_{j-k}(\tau) - \delta_{j-k}(\tau)]. \end{aligned}$$

Нетрудно показать, что первая сумма представляет собой  $D_n(\tau) - n(\tau) \cdot [1 - n(\tau)]$ , где  $D_n(\tau)$  – дисперсия чисел заявок на промежутках  $\tau$ . Поменяв порядок суммирования во втором слагаемом, убеждаемся в том, что оно представляет собой удвоенную сумму ковариационных коэффициентов чисел заявок на указанных промежутках времени:

$$\begin{aligned} 2 \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \{ [n_j(\tau) - \rho] [n_{j-k}(\tau) - \delta_{j-k}(\tau)] \} &= \\ &= 2 \sum_{k=1}^{N-1} \mu_n(k, \tau). \end{aligned}$$

Здесь  $\mu_n(k, \tau)$  – ковариационный коэффициент чисел заявок при сдвиге на  $k$  интервалов  $\tau$ . Учитывая, что  $\rho = \lambda t$ , а также, что с увеличением сдвига  $k$  корреляционные связи ослабевают и проявляются только в пределах интервала корреляции  $T_k$  [2], суммирование может производиться не по всему интервалу  $T$ , а лишь в пределах интервала корреляции:

$$\begin{aligned} Cov \{[q_j(\tau) + q_{j-1}(\tau)]; n_j(\tau)\} &= \\ &= 2 \sum_{k=1}^{N_{k-1}} \mu_n(k, \rho) + D_n(\rho) - \rho \cdot (1 - \rho)', \end{aligned}$$

где  $N_k = T_k / \tau$ ,  $\mu_n(k, \rho)$  – ковариационный коэффициент чисел заявок при сдвиге на  $k$  интервалов  $\tau = \rho / \lambda$ . Подставляя в (3), получим окончательно

$$\overline{q(\rho)} = \frac{D_n(\rho) + 2 \sum_{k=1}^{N_{k-1}} \mu_n(k, \rho)}{2(1 - \rho)} - \frac{\rho}{2}. \quad (4)$$

Аналогичное соотношение, полученное автором другим способом, приведено в [5].

### Функция ковариации

Рассмотренные в настоящей работе выводы позволяют лучше понять физический смысл выражения, образующего числитель обобщенной формулы Хинчина-Поллячека. Учитывая, что дисперсия  $D_n(\tau) = \mu_n(0, \rho)$  – ковариационный коэффициент при нулевом сдвиге ( $k = 0$ ), можно утверждать, что числитель представляет сумму ковариационных коэффициентов, взятую в пределах интервала корреляции чисел заявок, и характеризует переменную составляющую мощности потока.

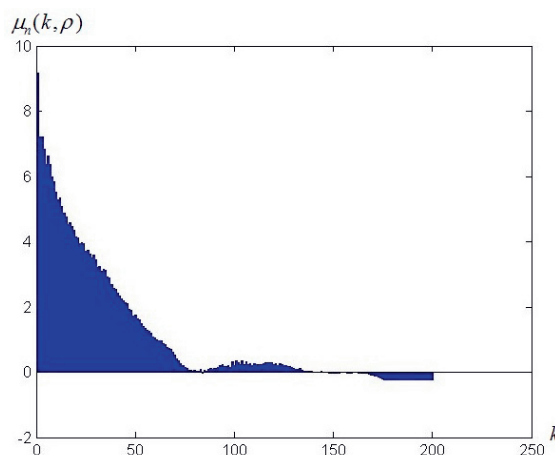


Рис. 2. Функция  $\mu_n(k, \rho)$  ковариации числа заявок для реального потока видеотрафика

В качестве примера на рис. 2 показана функция  $\mu_n(k, \rho)$  ковариации числа заявок для реального потока видеотрафика при коэффициенте загрузки  $\rho = 0,5$ . На приведенном графике видно значение дисперсии  $D_n(\rho = 0,5) = \mu_n(0, \rho = 0,5) = 9$ .

На рис. 3 показан график суммарной (интегральной) удвоенной функции ковариационных коэффициентов, из которого следует, что она

достигает при значениях  $N_k = 140$  своего максимума 240. Указанное максимальное значение и определяет значение числителя в обобщенной формуле Хинчина-Поллячека.

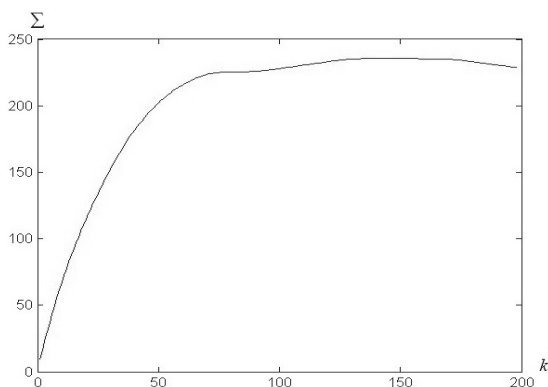


Рис. 3. График удвоенной суммарной функции ковариационных коэффициентов

На рис. 4 показана зависимость среднего размера очереди рассматриваемого видеотрафика от коэффициента загрузки  $\rho$ . Из данного графика следует, что средний размер очереди  $q(0,5)$  при коэффициенте загрузки  $\rho = 0,5$  находится в тех же пределах, что и полученное ранее максимальное значение суммарной функции ковариационных коэффициентов: знаменатель в (4) при  $\rho = 0,5$  равен 1.

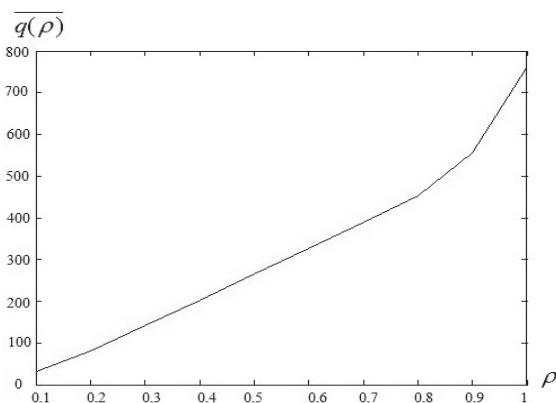


Рис. 4. Зависимость среднего размера очереди видеотрафика, от коэффициента загрузки

### Заключение

Приведенные результаты и примеры подтверждают сделанные ранее [4; 6] выводы о существ-

венном влиянии корреляционных связей между заявками, представляющими пакеты или кадры трафика, на эффективность мультисервисных сетей связи. Максимальное значение интеграла от ковариационной функции числа заявок на интервалах обслуживания одной заявки при заданном коэффициенте загрузки полностью определяет средний размер очереди в одноприборной системе массового обслуживания. Максимальное значение ковариационной функции находится путем интегрирования в пределах интервала корреляции анализируемого потока.

### Литература

1. Степанов С.Н. Теория телетрафика. Концепции, модели, приложения. М.: Горячая линия-Телеком, 2015. – 808 с.
2. Лихтциндер Б.Я. Интервальный метод анализа трафика мультисервисных сетей // Модели инфокоммуникационных систем: разработка и применение. Приложение к журналу ИКТ. Вып. 8, 2011. – С. 101-152.
3. Лихтциндер Б.Я. Интервальный метод анализа трафика мультисервисных сетей доступа. Самара: Изд-во ПГУТИ, 2015. – 121 с.
4. Лихтциндер Б.Я. Корреляционные свойства длин очередей в системах массового обслуживания с потоками общего вида // ИКТ. Т.13, №3, 2015. – С. 276-280.
5. Лихтциндер Б. Я. О некоторых обобщениях формулы Хинчина-Поллячека // ИКТ. Т.5, №4, 2007. – С. 253-258.
6. Лихтциндер Б.Я. Корреляционные связи в пачечных потоках систем массового обслуживания // Телекоммуникации. № 9, 2015. – С. 8-12.
7. Клейнрок Л. Вычислительные системы с очередями. Т. 2. Пер. с англ. М.: Мир, 1979. – 600 с.
8. Лихтциндер Б.Я. Интервальный метод анализа мультисервисного трафика сетей доступа // Электросвязь. №12, 2015. – С. 52-54.
9. Мартин Дж. Системный анализ передачи данных. Т.2. Пер. с англ. М.: Мир, 1975. – 431 с.
10. Лихтциндер Б.Я., Макаров И.С. Определение средней длины очереди СМО через корреляционные моменты // ИКТ. Т.9, №1, 2011. – С. 58-62.

Получено 14.03.2016

**Лихтциндер Борис Яковлевич**, д.т.н., профессор Кафедры мультисервисных сетей и информационной безопасности Поволжского государственного университета телекоммуникаций и информатики, вице-президент Академии телекоммуникаций и информатики. Тел.: 8 927 260-96-00; E-mail: lixt@psati.ru

## QUEUE SIZE DETECTION BASED ON COVARIANCE FUNCTION OF DEMAND NUMBER

*Likhttsinder B.Y.*

*Povolzhskiy State University of Telecommunications and Informatics, Samara, Russian Federation*

*E-mail: lixt@psati.ru*

This work is focused on analysis of queuing systems for stationary ordinary recurrent demand flows. It was detected that correlation between incoming demands flows influence on queue size. In the present paper it is shown that queue formation process in train flow systems is cycle, and it is divided on active and passive sub-cycles. By using cycle analysis, we derived generalization of known Pollaczek-Khintchine formula that was initially applicable only for analysis of Poisson flows. Correlation influence on queue size is demonstrated. It is proved that maximal value of integral of covariance function for demand number over demand service interval under given duty ratio completely determines mean size of queue in single-device queuing system.

**Keywords:** queuing systems, train flow, queue size, multi-service network, duty ratio, covariance

**DOI:** 10.18469/ikt.2016.14.2.07

**Likhttsinder Boris Yakovlevich**, Povolzhskiy State University of Telecommunications and Informatics, Samara, 443010, Russian Federation, 23 L.Tolstoy str.; Professor of the Department of Multi-service Networks and Information Security, Doctor of Technical Science, Professor, Vice-president of scientific public Academy of Telecommunications and Informatics. Tel.: +79272609600. E-mail: lixt@psati.ru.

### References

1. Stepanov S.N. *Teoriya teletrafika. Konceptii, modeli, prilozheniya* [Teletraffic theory. Concepts, models, applications]. Moscow, Goryachaya liniya-Telecom Publ., 2015. 808 p.
2. Likhttsinder B.Y. Interval'nyj metod analiza trafika mul'tiservisnyh setej [Interval method of traffic analysis in multiservice communication systems]. *Prilozhenie k zhurnalu «Infokommunikacionnye tehnologii»*, 2011, pp. 101-152.
3. Likhttsinder B.Y. *Interval'nyj metod analiza trafika mul'tiservisnyh setej* [Interval method of traffic analysis in multiservice communication systems]. Samara, PSUTI Publ., 2012, 121 p.
4. Likhttsinder B.Y. Korreljacionnye svoystva dlin ocheredej v sistemah massovogo obsluzhivaniya s potokami obshhego vida [Correlation features of queue sizes in queueing systems with common type flows]. *Infokommunikacionnye tehnologii*, 2015, vol. 13, no. 3, pp. 276-280. doi:10.18469/ikt.2015.13.3.07.
5. Likhttsinder B.Y. O nekotoryh obonsheniyah formuli Hinchina-Pollyacheka [About some generalizations of Pollaczek-Khinchin formula]. *Infokommunikacionnye tehnologii*, 2007, vol. 5, no. 4, pp. 253-258.
6. Likhttsinder B.Y. Korrelyacionnye svyazi v pachechnih potokah system massovogo obsluzhivaniya [Correlation connections in batch flows of queueing systems]. *Telecommunications*, 2015, no. 9, pp. 8-12.
7. Kleinrock L. *Queueing computer systems*, 1976, vol. 2. 576 p. (Russ. ed. Klejnrok L. Vychislitel'nye sistemy s ocheredjami. Moscow, Mir Publ., 1979. 600 p.).
8. Likhttsinder B.Y. Interval'nyj metod analiza trafika mul'tiservisnyh setej dostupa [Interval method of traffic analysis in multiservice access networks]. *Elektrosvyaz*, 2015, no.12, pp. 52-54.
9. Martin Jh. *A System analysis of data transfer*, 1975, vol. 2. 431 p. (Russ. ed. Martin Jh. Sistemnyj analiz peredachi dannyh. Moscow, Mir Publ., 1975, 431 p.).
10. Likhttsinder B.Y., Makarov I.S. Opredelenie srednej dliny ocheredi SMO cherez korreljacionnye momenty [Determination of the average queue length SMO through correlation moments]. *Infokommunikacionnye tehnologii*, 2011, vol. 9, no. 1, pp. 58-62.

*Received 14.03.2016*