49. Meher H., Hosain S.I. Variational approximations for single-mode graded-index fibers: some interesting applications. *Journal of Optical Communications*, 2003, vol. 24, pp. 25–30. doi: 10.1515/JOC.2003.24.1.25
50. Sharma A., Hosain S.I., Ghatak A.K. The fundamental mode of graded-index fibres: simple and accurate variational methods. *Optical and Quantum Electronics*, 1982, vol. 14, pp. 7–15. doi: 10.1007/BF00620905.
51. Tewari R., Hosain S.I., Thyagarajan K. Scalar variational analysis of single mode fibers with Gaussian and smoothed-out profiles. *Optics Communications*, 1983, vol. 48, pp. 176–180. doi: 10.1016/0030-4018(83)90080-9.
52. Oksanen M.I., Lindell I.V. Variational analysis of anisotropic graded-index optical fibers. *IEEE Journal of Lightwave Technology*, 1989, vol. 7, pp. 87–91. doi: 10.1109/50.17737.
53. Ankiewicz A., Peng G.-D. Generalized Gaussian approximation for single-mode fibers. *IEEE Journal of Lightwave Technology*, 1992, vol. 10, pp. 22–27. doi: 10.1109/50.108731
54. Holmes M.J., Spirit D.M., Payne F.P. New Gaussian-based approximation for modeling non-linear effects in optical fibers. *IEEE Journal of Lightwave Technology*, 1994, vol. 12, pp. 193–201. doi: 10.1109/50.350604.
55. Wu M.-Sh., Lee M.-H., Tsai W.-H. Variational analysis of single-mode graded-core W-fibers. *IEEE Journal of Lightwave Technology*, 1996, vol. 14, pp. 121–125. doi: 10.1109/50.476145
56. Adams M.J. *An introduction to optical waveguides.* New York: John Wiley and Sons, 1981. 401 p.
57. Bourdine A.V., Praporshchikov D.E., Yablochkin K.A. Investigation of defects of refractive index profile of silica graded-index multimode fibers. *Proc. SPIE 7992,* 2011, 799206. doi: 10.1117/12.887258.
58. Bourdine A.V. Modeling and simulation of piecewise regular multimode fiber links operating in a few-mode regime // Advances in Optical Technologies. Vol. 2013, 2013. – P. 469389-1-469389-18.
59. Bourdine A.V., Zhukov A.E. Fast approximate method for VCSEL-MMF transverse mode coupling analysis. *Telecommunications and Radio Engineering*, 2016, vol. 7, no. 11, pp. 979-999. doi: 10.1615/TelecomRadEng.v75.i11.30.
60. Bourdine A.V., Delmukhametov O.R. Calculation of transmission parameters of the launched higher-order modes based on the combination of a modified Gaussian approximation and a finite element method. *Telecommunications and Radio Engineering*, 2013, vol. 72, pp. 111–123. doi: 10.1615/TelecomRadEng.v72.i2.30.
61. Definition and test methods for the relevant parameters of single-mode fibres, ITU COM 15-273-E, 1996.
62. Bourdine A.V., Delmukhametov O.R., Zhukov A.E., Chekalov A.S. Fast and simple method for calculation of the mode field diameter of arbitrary order guided mode in weakly-guiding optical fibers. *Proceedings of SPIE*, 2015, vol. 9533, 95330F. doi: 10.1117/12.2180790.
63. Gradstein I.S., Ryjik I.M. *Tablicy integralov* [Tables of integrals]. Moscow, GIFML Publ., 1962. 1100 p.
64. Abramovic M., Stigan I. *Spravochnik po special’nym funkcijam* [Special Function Manual]. Moscow, Nauka Publ., 1979. 830 p.

Received 21.11.2016

УДК 519.872

АНАЛИЗ СМО ОБЩЕГО ВИДА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СЕЛЕКТИРУЮЩИХ ФУНКЦИЙ

Буранова М.А., Карташевский В.Г., Киреева Н.В., Чупахина Л.Р.
Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики, Самара, РФ
E-mail: kartashevskiy-vg@psuti.ru

В работе представлен метод спектрального решения уравнения Линдли, основанный на использовании селектирующих функций для аппроксимации распределений. Суть метода заключается в том, что «восходящие» участки распределений аппроксимируются полиномами малого порядка, а «спадающие» участки – суммой затухающих экспонент с малым числом слагаемых в сумме. Оценка времени ожидания заявки в очереди может быть получена численным решением линейного алгебраического уравнения. Эффективность метода продемонстрирована на примере исследования системы *W*/*P*/*1*, где *W* – распределение Вейбулла, *P* – распределение Парето. Метод селектирующих функций позволил заменить распределение Вейбулла распределением, состоящим из двух участков – «восходящего» и «нисходящего», аппроксимации которых осуществляются согласно описанному методу. В работе показано, что такая аппроксимация обладает существенно

меньшей погрешность по сравнению со случаем, когда используется единая аппроксимация распределения суммой затухающих экспонент.

Ключевые слова: системы массового обслуживания, среднее время ожидания заявки в очереди, интегральное уравнение Линдли, аппроксимация суммой затухающих экспонент, селектирующие функции, «сшитые» функции, преобразование Лапласа

Введение

Анализ характеристик сетевых узлов при обработке трафика, обладающего распределениями с тяжелыми хвостами [1- 2; 7; 9] для интервалов времени между поступлениями пакетов и интервалов времени обработки пакетов, связан с решением интегрального уравнения Линдли [3] для систем массового обслуживания типа G/G/1. При этом для упрощения вычислительной процедуры решения уравнения Линдли спектральным методом часто прибегают к аппроксимации плотностей вероятностей гиперэкспоненциальными распределениями, моделируемыми суммами затухающих экспонент [5; 7-8; 10]. Предложенный в [5] метод аппроксимации распределения суммой затухающих экспонент дает неудовлетворительные результаты по точности аппроксимации на «восходящих» ветвях распределений. Кроме того, аппроксимация «восходящих» ветвей распределений приводит к появлению в сумме затухающих экспонент слагаемых с отрицательными коэффициентами, что нивелирует вычислительные преимущества спектрального метода, обусловленные использованием гиперэкспоненциальных распределений.

Аппроксимация распределения Вейбулла

Для иллюстрации данного утверждения рассмотрим задачу аппроксимации распределения Вейбулла, принадлежащего к классу распределений с тяжелыми хвостами, методом, изложенным в [5]. Например, для распределения Вейбулла

$$f(x)=\alpha\beta^{-\alpha}x^{\alpha-1}e^{-\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha}} \quad (1)$$

с параметрами $\alpha=3$ и $\beta=1$, представленного на рис. 1 пунктиром, аппроксимирующая сумма будет иметь вид

$$f_{\exp}(x)=\sum_{k=1}^{10}b_k e^{-\frac{k}{m}x}, \quad m=0{,}3 \quad (2)$$

при некоторых значениях коэффициентов b_k, отличающихся друг от друга на несколько порядков [5]. Результат аппроксимации представлен на рис. 1 сплошной линией.

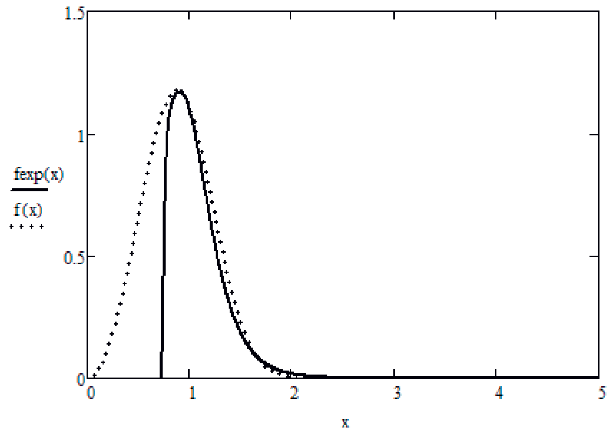

Рис. 1. Аппроксимация распределения Вейбулла: $f(x)$ и $f_{\exp}(x)$

Как следует из рис. 1, аппроксимация «восходящей» ветви распределения осуществляется с недопустимо большой ошибкой.

Заметим, что для распределений, в которых отсутствует «восходящая» ветвь, например распределение Парето [4], данная проблема не возникает и число слагаемых в аппроксимирующей сумме (2), как правило, может быть выбрано существенно меньше 10 при сохранении достаточной точности аппроксимации.

Метод селектирующих функций

Повысить точность аппроксимации в рассмотренном примере можно с использованием селектирующих функций [6], суть применения которых состоит в том, что аппроксимация разных участков распределения осуществляется разными методами, а результаты объединяются для адекватного представления аппроксимации распределения в целом (суть данного метода была представлена в докладе на конференции Problems of Infocommunications Science and Technology (PIC S&T), 2016. Third International Scientific-Practical Conference).

Для рассмотренного распределения Вейбулла выделим два интервала аппроксимации - $(0, x_0)$ и (x_0, ∞), где x_0 может быть выбрано, например, как $x_0=\max f(x)$. Теперь представим *f(x)* в виде «сшитой» функции $f_c(x)$ через кусочно-нелинейные $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$

$$f_c(x)=\begin{cases}\varphi_1(x), & 0\le x\le x_0;\\ \varphi_2(x), & x\ge x_0;\end{cases} \quad (3)$$
$$\varphi_1(x_0)=\varphi_2(x_0),$$

и используем соответственно аппроксимации

$$\varphi_1(x)=\sum_{n=1}^{N}\theta_n x^n\ , \quad (4)$$

$$\varphi_2(x)=\sum_{k=1}^{K}\vartheta_k e^{-\alpha_k x}\ . \quad (5)$$

В (4)-(5) коэффициенты аппроксимации $\theta_n,\vartheta_k,\alpha_k$ определяются соответствующими вычислительными процедурами. Для «сшитой» функции $f_c(x)$ должно выполняться условие нормировки $\int_0^\infty f_c(x)dx=1$. Основным инструментом «сшивания» является селектирующая функция $si(x,x_i,x_{i+1})$, определяемая как

$$si(x,x_i,x_{i+1})=\begin{cases}0, & x<x_i;\\ 1, & x_i<x<x_{i+1};\\ 0, & x>x_{i+1},\end{cases} \quad (6)$$

с учетом сопряжения в точках «сшивания» в виде: $si(x_i,x_i,x_{i+1})=si(x_{i+1},x_i,x_{i+1})=0{,}5$. Очевидно, что выражение (3) теперь может быть представлено в виде

$$f_c(x)=\varphi_1(x)si(x,0,x_0)+\varphi_2(x)si(x,x_0,\infty)\ , \quad (7)$$

а требуемое для решения уравнения Линдли спектральным методом преобразование Лапласа запишется как

$$F_c(s)=\int_0^\infty f_c(x)e^{-sx}dx=$$
$$=\int_0^\infty f_1(s,x)si(x,0,x_0)dx+ \quad (8)$$
$$+\int_0^\infty f_2(s,x)si(x,x_0,\infty),$$

где $f_{1(2)}(s,x)=\varphi_{1(2)}(x)e^{-sx}$.

Если ввести в рассмотрение функции

$$sg(x)=\begin{cases}1, & x>0;\\ 0{,}5; & x=0;\\ 0, & x<0;\end{cases}\quad sgn(x)=\begin{cases}1, & x>0;\\ 0, & x=0;\\ -1, & x<0;\end{cases} \quad (9)$$
$$\overline{sg}(x)=1-sg(x),$$

то можно показать [5-6], что при произвольной интегрируемой функции $G(x)$ для интеграла $I=\int_a^b G(x)si(x,x_1,x_2)dx$ справедливо соотношение

$$I=0{,}5\left\{\begin{array}{l}\left[1-2\overline{sg}(a-x_1)\right]\times\\ \times\int_a^{x_1}G(x)dx+\left[1-2\overline{sg}(b-x_1)\right]\times\\ \times\int_{x_1}^{b}G(x)dx\ -\left[1-2\overline{sg}(a-x_2)\right]\times\\ \times\int_a^{x_2}G(x)dx-\\ -\left[1-2\overline{sg}(b-x_2)\right]\int_{x_2}^{b}G(x)dx\end{array}\right\}. \quad (10)$$

Используя (10) и (8), получаем

$$\int_0^\infty f_1(s,x)si(x,0,x_0)dx+\int_0^\infty f_2(s,x)si(x,x_0,\infty)=$$
$$=0{,}5\left\{\int_0^\infty f_1(s,x)dx+\int_0^{x_0}f_1(s,x)dx-\int_{x_0}^\infty f_1(s,x)dx\right\}+ \quad (11)$$
$$+0{,}5\left\{-\int_0^{x_0}f_2(s,x)dx+\int_{x_0}^\infty f_2(s,x)dx+\int_0^\infty f_2(s,x)dx\right\}.$$

Вычисляя все интегралы в (11) на основе известных соотношений

$$\int_0^\infty x^n e^{-sx}dx=n!s^{-n-1}\ ,$$
$$\int_0^{x_0}x^n e^{-sx}dx=\left[\frac{n!}{s^{n+1}}-e^{-sx_0}\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!}\cdot\frac{x_0^k}{s^{n-k+1}}\right],$$
$$\int_{x_0}^\infty x^n e^{-sx}dx=\left[e^{-sx_0}\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!}\cdot\frac{x_0^k}{s^{n-k+1}}\right],$$
$$\int_0^\infty e^{-\alpha_k x}e^{-sx}dx=\frac{1}{\alpha_k+s}\ ,$$
$$\int_0^{x_0}e^{-\alpha_k x}e^{-sx}dx=\frac{1}{\alpha_k+s}\left[1-e^{-(\alpha_k+s)x_0}\right],$$
$$\int_{x_0}^\infty e^{-\alpha_k x}e^{-sx}dx=\frac{1}{\alpha_k+s}e^{-(\alpha_k+s)x_0}\ ,$$

для преобразования Лапласа $F_c(s)$ получим

$$F_c(s)=\sum_{n=1}^{N}\theta_n\left[\frac{n!}{s^{n+1}}-e^{-sx_0}\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!}\cdot\frac{x_0^k}{s^{n-k+1}}\right]+ \\ +\sum_{k=1}^{K}\vartheta_k\frac{1}{\alpha_k+s}e^{-(\alpha_k+s)x_0}. \quad (12)$$

Используем (12) в задаче анализа системы массового обслуживания G/G/1 путем решения интегрального уравнения Линдли спектральным методом [3].

Суть метода заключается в представлении выражения $A(-s)B(s)-1$ в виде $A(-s)B(s)-1=\frac{\Psi_+(s)}{\Psi_-(s)}$, где $A(s)$ и $B(s)$ – преобразование Лапласа плотностей вероятностей промежутков времени между поступлениями заявок на обслуживание в систему и времени обслуживания заявок в системе, соответственно. При этом функции Ψ_+ и Ψ_- должны удовлетворять условиям:

– $\Psi_+(s)$ – аналитическая функция без нулей в области $\mathrm{Re}(s)>0$;

– $\Psi_-(s)$ – аналитическая функция без нулей в области $\mathrm{Re}(s)<D$ для некоторого $D>0$;

– $\lim\limits_{|s|\to\infty}\frac{\Psi_+(s)}{\Psi_-(s)}=1$ для $\mathrm{Re}(s)>0$;

– $\lim\limits_{|s|\to\infty}\frac{\Psi_+(s)}{s}=1$ для $\mathrm{Re}(s)<D$.

Если функция $\Psi_+(s)$ найдена, то характеристическая функция времени ожидания заявки в очереди $\Phi_+(s)$ может быть определена в виде

$$\Phi_+(s)=\frac{\lim\limits_{s\to 0}\frac{\Psi_+(s)}{s}}{\Psi_+(s)}, \quad (13)$$

время ожидание в очереди $T=\frac{d}{ds}\Phi_+(s)\Big|_{s=0}$.

Аппроксимация распределений для анализа системы G/G/1

Рассмотрим применение рассмотренного метода аппроксимации распределений для анализа системы G/G/1. Пусть плотность вероятностей времени обслуживания заявок в системе определяется распределением Вейбулла $f(x)$ с параметрами $\alpha=1{,}5$ и $\beta=1$. Методом селектирующих функций заменим $f(x)$ на $f_c(x)$, а для плотности вероятностей интервалов времени между поступлениями заявок выберем распределение Парето

$$f_П(x)=\frac{ab^a}{x^{a+1}},\ a>0,\ b>0,\quad x>0,$$

с параметрами $a=0{,}5$ и $b=1{,}9$.

Пусть плотность $f_c(x)$ на интервале $(0,\ x_0=0{,}5)$ аппроксимируется полиномом третьей степени согласно (4) при $N=3$, $\theta_1=0$; $\theta_2=3{,}573$; $\theta_3=-4{,}167$ и суммой затухающих экспонент согласно процедуре [5] на интервале (x_0,∞) с параметрами $K=3$, $\vartheta_1=0{,}64$; $\vartheta_2=3{,}318$; $\vartheta_3=-3{,}885$ и $\alpha_1=0{,}89$; $\alpha_2=1{,}78$; $\alpha_3=2{,}68$. Результат данной аппроксимации представлен на рис. 2. Абсолютная погрешность аппроксимации при этом есть $R(x)=0{,}061$.

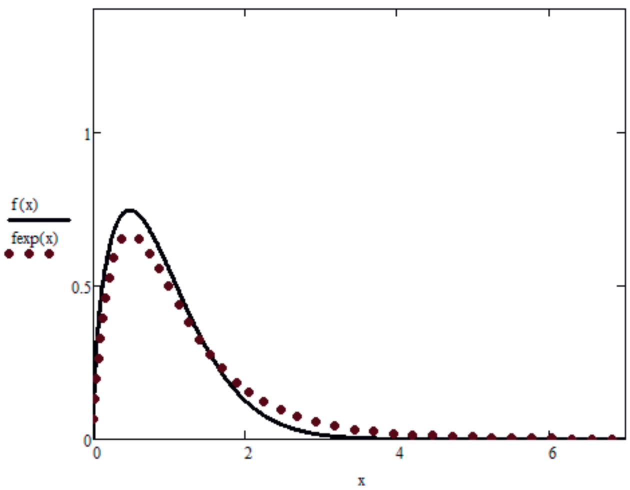

Рис. 2. Аппроксимация распределения Вейбулла: $f(x)$ и $f_{\exp}(x)$

Плотность $f_П(x)$ при $a=0{,}5$ и $b=1{,}9$ аппроксимируем суммой затухающих экспонент в виде $f_П(x)=\sum_{m=1}^{M}p_m e^{-q_m x}$ с параметрами;

$$M=3,\ p_1=0{,}042;\ p_2=-0{,}612; \\ p_3=1{,}752;\ q_1=0{,}32;\ q_2=0{,}65;\ q_3=0{,}97.$$

Результат аппроксимации представлен на рис. 3. Погрешность аппроксимации $R(x)=0{,}048$.

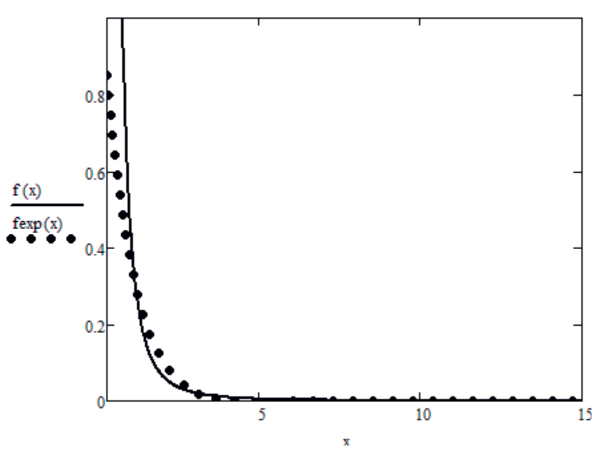

Рис.3. Аппроксимация распределения Парето: $f(x)$ и $f_{\exp}(x)$

Преобразование Лапласа для $f_П(x)$ будет иметь вид $F_П(s)=\sum_{m=1}^{M}\frac{p_m}{q_m+s}$ и, соответственно, $F_П(-s)=\sum_{m=1}^{M}\frac{p_m}{q_m-s}$. Осуществив простые, но достаточно объемные преобразования, для выражения $F_П(-s)F_c(s)-1$ при выбранных значениях параметров аппроксимации распределений можно получить

$$\begin{gathered}F_П(-s)F_c(s)-1=\\=\frac{1}{s^4(\alpha_1+s)(\alpha_2+s)(\alpha_3+s)(q_1-s)(q_2-s)(q_3-s)}\times\\\times\left[s^{10}+s^9k_1(\alpha,\theta,\vartheta,p,q)+s^8r_1(\alpha,\theta,\vartheta,p,q,e^{-sx_0})+\right.\\+s^7r_2(\alpha,\theta,\vartheta,p,q,e^{-sx_0})+\cdots s\cdot r_8(\alpha,\theta,\vartheta,p,q,e^{-sx_0})+\\\left.+k_2(\alpha,\theta,\vartheta,p,q)\right],\end{gathered}\tag{14}$$

где k_i, $i=1;2$, и r_j, $j=1,2,\ldots 8$ – коэффициенты, зависящие от параметров используемых распределений, причем эти коэффициенты зависят также от величины e^{-sx_0}, что делает характеристическое уравнение выражения в квадратных скобках нелинейным и, соответственно, усложняет нахождение его корней. Например, численное значение коэффициента r_1 определяется как $r_1=0{,}5-1{,}5e^{-0{,}5s}$. Аналогично выглядят и остальные коэффициенты r_j, $j=1,2,\ldots 8$. Наличие множителя $e^{-0{,}5s}$ в каждом коэффициенте r_j является следствием использования полиномиальной аппроксимации «восходящего» участка распределения Вейбулла.

Так как структура всех коэффициентов r_j, $j=1,2,\ldots 8$ одинакова, используя разложение экспоненты в ряд в виде $e^{-z}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{z^k}{k!}$ нетрудно свести нелинейное уравнение (13) к линейному виду, решая которое численно, можно получить представление $F_П(-s)F_c(s)-1$ в виде $F_П(-s)F_c(s)-1=\frac{\Psi_+(s)}{\Psi_-(s)}$. Такая возможность сохраняется всегда при использовании полиномиальной аппроксимации «восходящего» участка любого распределения.

В рассматриваемой задаче в силу равенства нулю коэффициента $k_2(\alpha,\theta,\vartheta,p,q)$ нелинейное уравнение 10 порядка при использовании трех членов разложения экспоненты в ряд можно свести к линейному уравнению 9 порядка. При выбранных значениях параметров используемых распределений данное уравнение имеет вид

$$\begin{gathered}s^9+2{,}9s^8-s^7+1{,}9s^6+9{,}14s^5-2s^4-2{,}16s^3+\\+1{,}85s^2-2{,}2s+8{,}9=0.\end{gathered}$$

Обозначая корни характеристического уравнения через $s_i^*, i=1,2,\ldots 9$, для $\frac{\Psi_+(s)}{\Psi_-(s)}$ можно записать

$$\begin{gathered}\frac{\Psi_+(s)}{\Psi_-(s)}=\\=\frac{\prod_{i=1}^{9}(s-s_i^*)}{s^4(\alpha_1+s)(\alpha_2+s)(\alpha_3+s)(q_1-s)(q_2-s)(q_3-s)}.\end{gathered}\tag{15}$$

Выделяя в (15) по вышеизложенным условиям функции $\Psi_+(s)$ и $\Psi_-(s)$ и формируя $\Phi_+(s)$ согласно (13), получаем значение среднего времени ожидания заявки в очереди $T=0{,}053$ с (размерность T определяется размерностью величин α_k и q_m).

Точность полученного решения определяется точностью аппроксимации распределений при решении уравнения Линдли спектральным методом. Метод селектирующих функций позволил заменить распределение Вейбулла $f(x)$ «сшитым» распределением $f_c(x)$, состоящим из двух участков: «восходящий» участок (с положительным значением производной), который допускает простую аппроксимацию в виде полинома невысокой степени, и «нисходящий» участок (с отрицательным значением производной), аппроксимация которого осуществляется суммой затухающих экспонент с малым числом слагаемых в сумме. Такая аппроксимация обладает, как показано в работе, существенно меньшей погрешность по сравнению со случаем, когда используется единая аппроксимация распределения суммой затухающих экспонент. «Сшитое» распределение позволяет легко получить его преобразование Лапласа, что в конечном итоге сводит решение задачи к определению корней линейного алгебраического уравнения численным методом.

Литература

1. Шелухин О.И., Тенякшев А.М., Осин А.В. Фрактальные процессы в телекоммуникациях. М.: Радиотехника, 2003. – 480 с.
2. Шелухин О.И., Осин А.В., Смольский С.М. Самоподобие и фракталы. Телекоммуникационные приложения. М.: Физматлит, 2008. – 368 с.
3. Kleinrock L. Queueing Systems: Vol. I, Theory. New York, Wiley Interscience, 1975. – 417 p.
4. Downey A. Lognormal and Pareto distributions in the Internet // Computer Communications. 2005. Vol. 28, No 7. – P. 790-801.

5. Блатов И.А., Карташевский В.Г., Киреева Н.В. Чупахина Л.Р. Метод аппроксимации произвольной плотности распределения суммами экспонент // Вестник ВГУ. №2, 2013. – С. 53-57.
6. Мищенко В.А. Метод селектирующих функций в нелинейных задачах контроля и управления. М.: Сов. радио, 1973. – 184 с.
7. Kartashevskii V.G., Kireeva N.V, Buranova M.A, Chupakhina L.R. Study of queuing system G/G/1 with an arbitrary distribution of time parameter system // 2nd International Scientific-Practical Conference Problems of Infocommunications Science and Technology, PIC S and T 2015 – Conference Proceedings, 2015. – P. 145-148.
8. Каратaшевский В.Г., Киреева Н.В., Буранова М.А., Чупахина Л.Р. Моделирование и анализ системы массового обслуживания общего вида с произвольными распределениями временных параметров системы // Инфокоммуникационные системы. Т.13, №3, 2015. – С. 252-258. doi: 10.18469/ikt.2015.13.3.03
9. Агеев Д.В., Игнатенко А.А., Копылев А.Н. Методика определения параметров потоков на разных участках мультисервисной телекоммуникационной сети с учетом эффекта самоподобия // Проблемы телекоммуникаций. № 3 (5), 2011. – С. 18-37 // URL: http://pt.journal.kh.ua/2011/3/1/113_ageyev_method.pdf
10. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобелков Г.Н. Численные методы. М.: Лаборатория базовых знаний, 2003. – 632 с.

Получено 16.12. 2016

Буранова Марина Анатольевна, к.т.н., доцент Кафедры мультисервисных сетей и информационной безопасности (МСИБ) Поволжского государственного университета телекоммуникаций и информатики (ПГУТИ). Тел. 8-(846) 339-11-67. E-mail: buranova-ma@psuti.ru

Карташевский Вячеслав Григорьевич, д.т.н., профессор, заведующий Кафедрой МСИБ ПГУТИ. Тел. (8-846) 333-53-50. E-mail: kartash@psati.ru

Киреева Наталья Валерьевна, к.т.н., доцент Кафедры МСИБ ПГУТИ. Тел. (8-846) 332-41-35. E-mail: zeppelinSN@yandex.ru

Чупахина Лилия Равилевна, к.т.н., доцент Кафедры МСИБ ПГУТИ. Тел. (8-846) 339-11-62. E-mail: garip4ik555@mail.ru

ANALYSIS OF GENERAL QUEUING SYSTEM BY SELECTION FUNCTIONS

Buranova M.A., Kartashevskiy V.G., Kireeva N.V., Chupahina L.R.
Povolzhskiy State University of Telecommunications and Informatics, Samara, Russian Federation
E-mail: kartashevskiy-vg@psuti.ru

This work presents method for Lindley's equation spectral solution by using of selection functions for distribution approximation. Proposed method is based on approximation of "upstream" distribution spans by low order polynomials, while "downstream" distribution spans are approximated by sums of damped exponentials with low number of sum terms. Expected waiting time of demand in queue may be evaluated via numerical solution of linear algebraic equation. We demonstrated the effectiveness of proposed method by example of research of system W/P/1, where W and P are Weibull and Pareto distributions respectively. Solution accuracy depends on approximation accuracy for distributions performed during solving Lindley equation by spectral method. Method of selection functions provided to exchange Weibull distribution by two-part distribution containing "upstream" and "downstream" spans approximated by proposed approach. We showed that de-scribed approximation provides substantially smaller error in comparison with utilization unital approximation for whole distribution by the sum of damped exponentials. This cross-linking distribution makes able easy to produce its Laplace transform, that leads solution of considered complex problem to numerical solution of linear algebraic equation.

Keywords: queuing systems, expected waiting time of demand in queue, Lindley's integral equation, approximation by sum of damped exponentials, selection functions, cross-linking functions, Laplace transformation

DOI: 10.18469/ikt.2016.14.4.03

Buranova Marina Anatolievna, Povolzhskiy State University of Telecommunications and Informatics, 23 L. Tolstoy, Samara, 443010, Russian Federation; Associate Professor of the Department of Multiservice Networks and Information Security, PhD in Technical Science. Tel.: +78463391167. E-mail: buranova-ma@psuti.ru

Kartashevskiy Vyacheslav Grigorievich, Povolzhskiy State University of Telecommunications and Informatics, 23 L. Tolstoy, Samara, 443010, Russian Federation; the Head of Department of Multiservice Networks and Information Security, Doctor of Technical Science, Professor. Tel.: +78463335350. E-mail: kartash@psati.ru

Kireeva Natalia Valerievna, Povolzhskiy State University of Telecommunications and Informatics, 23 L. Tolstoy, Samara, 443010, Russian Federation; Associate Professor of the Department of Multiservice Networks and Information Security, PhD in Technical Science, Associate Professor. Tel.: +78463324135. E-mail: zeppelinSN@yandex.ru

Chupakhina Liliia Ravilevna, Povolzhskiy State University of Telecommunications and Informatics, 23 L. Tolstoy, Samara, 443010, Russian Federation; Associate Professor of the Department of Multiservice Networks and Information Security, PhD in Technical Science. Tel.: +78463391162. E-mail: grip4ik555@mail.ru

References

1. Sheluhin O.I., Tenyakshev A.M., Osin A.V. *Fraktalnie processi v telekommunikaciyah* [Fractal Processes in Telecommunications]. Moscow, Radiotehnika Publ., 2003. 480 p.
2. Sheluhin O.I., Osin A.V., Smolskii S.M. *Samopodobie i fraktali. Telekommunikacionnie prilojeniya* [Self-similarity and fractals. Telecommunication applications]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2008. 368 p.
3. Kleinrock L. *Queueing Systems: Volume I, Theory*. New York, Wiley Interscience, 1975, 417 p.
4. Downey A. Lognormal and Pareto distributions in the Internet. *Computer Communications*, 2005, vol. 28, no 7, pp. 790-801.
5. Blatov I.A., Kartashevskii V.G., Kireeva N.V. Metod approksimacii proizvolnoi plotnosti raspredeleniya summami eksponent [The method of approximating an arbitrary density distribution of the sum of exponents]. *Vestnik VGU*, 2013, no. 2, pp. 53–57.
6. Mishchenko V.A. *Method selects functions in nonlinear problems of control and management*. Moscow, Sov. Radio Publ., 1973. 184 p.
7. Kartashevskii V.G., Kireeva, N.V, Buranova, M.A, Chupakhina, L.R. Study of queuing system G/G/1 with an arbitrary distribution of time parameter system. *2nd International Scientific-Practical Conference Problems of Infocommunications Science and Technology, PIC S and T 2015*, 2015, pp. 145. doi: 10.1109/INFOCOMMST.2015.7357297.
8. Kartashevskii V.G., Kireeva, N.V, Buranova, M.A, Chupakhina, L.R. Modelirovanie i analiz sistemi massovogo obslujivaniya obschego vida s proizvolnimi raspredeleniyami vremennih parametrov sistemi [Simulation and analysis of generalized queue system with arbitrary distributions of system parameters]. *Infokommunikacionnye tehnologii*, 2015, vol. 13, no. 3, pp. 252-258. doi: 10.18469/ikt.2015.13.3.03
9. Ageev D.V., Ignatenko A.A., Kopilev A.N. Metodika opredeleniya parametrov potokov na raznih uchastkah multiservisnoi telekommunikacionnoi seti s uchetom effekta samopodobiya [Method of determining the flow parameters in different parts of multiservice telecommunications network, taking into account the effect of self-similarity]. *Problemi telekommunikacii*, 2011, vol. 3, no. 5, pp. 18–37. Available at: http://pt.journal.kh.ua/2011/3/1/113_ageyev_method.pdf. (ac-cessed 22.11.2014)
10. Bahvalov N.S., Jidkov N.P., Kobelkov G.N. *Chislennie metodi* [Numerical methods]. Moscow, Laboratoriya bazovih znanii, 2003. 632 p.

Received 16.12.2016