

## ФРАКТАЛЬНОСТЬ ТРАФИКА И ОЧЕРЕДИ В СИСТЕМАХ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

Блатов И.А., Лихтциндер Б.Я.

*Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики, Самара, РФ*

*E-mail: lixt@psati.ru*

Трафик современных мультисервисных сетей обычно сильно коррелирован и методы классической теории систем массового обслуживания не работают. В настоящей работе приводятся результаты имитационного моделирования и сравнительный анализ влияния корреляционных связей фрактального потолка заявок и потока заявок в случае реальных мультисервисных сетей связи. Рассматриваются обобщения формулы Хинчина-Поллячека на стационарные потоки заявок с произвольной корреляцией, а также возможности применения указанных обобщений. Показано, что реальная случайная величина, представляющая числа заявок, поступающих в течение интервалов обслуживания одной заявки, имеет математическое ожидание меньше единицы. Показано, что процесс, создания очередей имеет пассивные временные интервалы, прерывающие связь между предыдущими и последующими частями процесса. Показано, что даже для самоподобных процессов, имеющих бесконечно большой интервал корреляции, корреляционные зависимости между отдельными значениями очередей распространяются лишь в пределах интервалов занятости системы массового обслуживания.

**Ключевые слова:** системы массового обслуживания, очереди, фрактальные процессы, пакеты, корреляция, самоподобие, параметр Херста

### Введение

Измерения на реальных компьютерных сетях и измерения потоков в пакетных сетях передачи данных показали, что передаваемый в них трафик является самоподобным случайным процессом. Для такого трафика анализ очередей на основе традиционных методов теории массового обслуживания пуассоновских потоков становится непригодным [1-9]. Анализ самоподобных процессов телетрафика посвящены публикации [2-3] и др. На качественном уровне самоподобие проявляется в том, что имеется медленно убывающая зависимость между величинами трафика в разные моменты времени, а трафик носит пачечный характер. Эти пачки выглядят статистически подобными в различных масштабах интервалов времени.

Одной из фундаментальных отечественных работ в указанном направлении является монография [2], определения которой мы рассмотрим применительно к анализируемому нами случайному процессу. Рассматриваемый процесс  $m_i(\tau) = 0, N$  является стационарным и дискретным по времени  $\tau$ , которое необходимо для обработки одной заявки. Напомним, что  $\overline{m(\tau)}$  и  $D_m(\tau) = \overline{[m_i(\tau) - \overline{m(\tau)}]^2}$  – математическое ожидание и дисперсия чисел заявок, поступающих в течение интервала времени  $\tau$ , соответственно. Обозначим через  $m_{i-k}(\tau)$  элемент, сдвинутый на  $k$  интервалов  $\tau$  по отношению к  $m_i(\tau)$ . Значение корреляционной функции (ковариационный ко-

эффициент), при сдвиге на  $k$  интервалов  $\tau$  обозначим через

$$\mu_m(k; \tau) = \overline{[m_i(\tau) - \overline{m(\tau)}][m_{i-k}(\tau) - \overline{m(\tau)}]}.$$

Очевидно, что дисперсия  $D_m(\tau) = \mu_m(0, \tau)$  – это ковариационный коэффициент при нулевом сдвиге ( $k = 0$ ). Нормированная корреляционная функция:

$$r_m(k; \tau) = \frac{\mu_m(k; \tau)}{D_m(\tau)}. \quad (1)$$

Определим объединенный (агрегированный) процесс как

$$m^{(s)}_j(\tau) = \frac{1}{s} \sum_{i=s(j-1)+1}^{i=sj} m_i(\tau), \quad (2)$$

то есть процесс разбивается на непересекающиеся интервалы времени размером  $s\tau$ , значения на каждом интервале усредняются, а  $j$  используется для нумерации полученных агрегированных интервалов. Обозначим математическое ожидание агрегированного процесса  $m^{(s)}_j(\tau)$  через  $\overline{m^{(s)}(\tau)}$ , а дисперсию агрегированного процесса – через  $D^{(s)}_m(\tau)$ . Очевидно, что

$$\begin{aligned} \overline{m^{(s)}(\tau)} &= \frac{1}{N_s} \sum_{j=1}^{N_s} m^{(s)}_j(\tau) = \\ &= \frac{1}{sN_s} \sum_{j=1}^{N_s} \sum_{i=s(j-1)+1}^{i=sj} m_i(\tau) = \overline{m(\tau)}. \end{aligned} \quad (3)$$

Обозначим корреляционную функцию агрегированного процесса  $m^{(s)}_j(\tau)$  через  $\mu^{(s)}_m(k;\tau)$ , а нормированную корреляционную функцию – через

$$r^{(s)}_m(k;\tau) = \frac{\mu^{(s)}_m(k;\tau)}{D^{(s)}_m(\tau)}.$$

В соответствии с принятыми определениями, статистический процесс  $m_i(\tau)$  называется строго самоподобным с параметром самоподобия  $H$ , где  $0,5 < H < 1$ , если для всех  $s > 1$  процесс  $s^{1-H} m^{(s)}_j(\tau)$  имеет те же статистические характеристики второго порядка, что и  $m_i(\tau)$ , то есть выполняются соотношения

$$\begin{cases} D^{(s)}_m(\tau) = s^{-2(1-H)} D_m(\tau); \\ r^{(s)}_m(k;\tau) = r^{(s)}_m(k;\tau). \end{cases} \quad (3)$$

для любых  $s \geq 1$ , то есть его нормированная корреляционная функция должна обладать масштабной инвариантностью. Такой масштабной инвариантностью обладает корреляционная функция:

$$r_m(k;\tau) = r^{(s)}_m(k;\tau) = [(k+1)^{2H} - 2k^{2H} + (k-1)^{2H}]. \quad (4)$$

Процесс с указанной корреляционной функцией демонстрирует долговременную зависимость, если коэффициент  $H$ , называемый параметром Херста [2], удовлетворяет условию  $0,5 < H < 1$ . В этом случае

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{r_m(k;\tau)}{k^{-2(1-H)}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{r_m(k;\tau)}{k^{-\beta}} \rightarrow C \text{ при } k \rightarrow \infty, \quad (5)$$

где  $\beta = 2(1-H)$  – коэффициент, меняющийся в пределах  $0 < \beta < 1$ , а  $C$  – некоторая медленно меняющаяся функция. Нетрудно показать, что при отсутствии корреляции,  $H = 0,5$  и нормированная корреляционная функция убывает пропорционально первой степени увеличения коэффициента сдвига  $k$ .

Для самоподобных процессов убывание корреляционной функции происходит намного медленнее. Поскольку, в соответствии с (1)  $\mu_m(k;\tau)$  является корреляционной функцией централизованного процесса, значения медленно меняющейся функции близки к нулю. Таким образом, самоподобные свойства отражают влияние масштабирования процесса во времени (агрегация) на значения вероятностных характеристик процесса, в то время, как автокорреляционная функция отражает наличие долговременной зависимости. В общем случае из наличия самоподобных

свойств не вытекает свойство долговременной зависимости, и наоборот.

Если выполняется соотношение  $0,5 < H < 1$ , то самоподобный процесс обладает также свойством долговременной зависимости. Из (5) следует, что величина  $r_m(k;\tau)$  убывает по степенному закону. Это означает, что корреляционная функция является не суммируемой, и ряд, образованный ее последовательными значениями, расходится:

$$\sum_{k=1}^{\infty} r_m(k;\tau) = \infty. \quad (6)$$

### Образование очередей

Будем считать, что случайная величина, образующая самоподобный процесс, центрируется, и нет никаких ограничений на значение ее математического ожидания. В действительности реальная случайная величина  $m_i(\tau)$ , представляющая числа заявок, поступающих в течение интервалов обслуживания одной заявки, имеет математическое ожидание  $\overline{m_i(\tau)} = \overline{\delta_i(\tau)} = \rho < 1$ , где  $\rho$  – коэффициент загрузки СМО. Для любой одноприборной СМО справедливо рекуррентное соотношение, устанавливающее связь между поступающими и обработанными заявками [4].

$$q_i(\tau) = q_{i-1}(\tau) + m_i(\tau) - \delta_i(\tau); \quad (7)$$

$$\delta_i(\tau) = \begin{cases} 0, & \text{если } q_{i-1}(\tau) = m_i(\tau) = 0; \\ 1 & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (8)$$

На рисунке 1а показаны пачки заявок, поступающие в течение последовательных интервалов времени  $\tau$ , равных интервалу обслуживания одной заявки. На рисунке 1б показаны соответствующие значения переменной  $\delta_i(\tau)$ . На рисунке 1с показан процесс образования очередей  $q_i(\tau)$ .

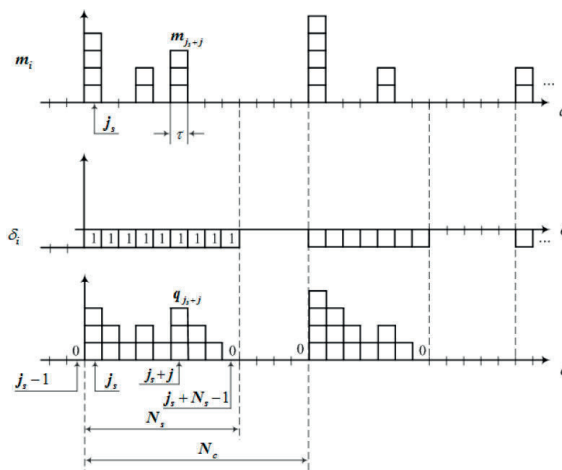


Рисунок 1. Формирование очередей

Процесс образования очередей носит циклический характер. Каждый цикл  $N_c$  состоит из двух периодов: период обработки  $N_a$  (период активной работы процессора, когда  $\delta_i(\tau) = 1$ ) и период простоя  $N_p$  (период, когда заявки в системе отсутствуют и  $\delta_i(\tau) = 0$ ). Кроме того, выделим цикл очередей, включающий  $N_s$  интервалов, расположенных на периоде занятости между двумя интервалами, на которых очередь  $q_i(\tau)$  принимает нулевые значения. Рассмотрим очереди на отдельном цикле очередей  $N_s$ , который начинается на интервале  $i = j_s$  и заканчивается на интервале  $i = j_s + N_s - 1$ , на котором значение очереди равно нулю. На интервале  $i = j_s - 1$  очередь  $q_{j_s-1}(\tau)$  также отсутствует. Поскольку величина  $\delta_i(\tau)$  может принимать только единичные или нулевые значения, на интервалах, где  $\delta_i(\tau) = 0$ , заявки и очереди в системе полностью отсутствуют.

### Средние значения очередей

Для получения средних значений очередей возведем обе части уравнения (7) в квадрат:

$$q_i^2(\tau) = q_{i-1}^2(\tau) + 2q_{i-1}(\tau)[m_i(\tau) - \delta_i(\tau)] + [m_i(\tau) - \delta_i(\tau)]^2.$$

Учитывая, что  $\delta_i^2(\tau) = \delta_i(\tau)$ ;  $\delta_i(\tau)m_i(\tau) = m_i(\tau)$ ;  $\delta_i(\tau) = m(\tau)$ ;  $\delta_i(\tau)q_{i-1}(\tau) = q_{i-1}(\tau)$ , проанализируем выражение  $q_{i-1}(\tau)[m_i(\tau) - \delta_i(\tau)]$ . Если  $q_{i-1}(\tau) \neq 0$ , то  $\delta_i(\tau) = 1$ . Если  $q_{i-1}(\tau) = 0$ , то результат не зависит от  $\delta_i(\tau)$ , и вместо  $\delta_i(\tau)$  может быть подставлена любая величина. Будем считать, что указанная величина равна единице. Тогда, при заданных ограничениях, выполняется равенство

$$q_i^2(\tau) = q_{i-1}^2(\tau) + 2q_{i-1}(\tau)[m_i(\tau) - 1] + m_i^2(\tau) - m_i(\tau).$$

Учитывая, что  $\overline{m_i(\tau)} = \lambda\tau = \rho$ , после усреднения получим  $\overline{m_i^2(\tau) - m_i(\tau)} = D_m(\rho) + \rho(1 - \rho)$ ;  $\overline{q_i^2(\tau)} = \overline{q_{i-1}^2(\tau)}$ .

Проанализируем соотношение

$$\overline{q_{i-1}(\tau)[m_i(\tau) - 1]} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N q_{i-1}(\tau)[m_i(\tau) - 1]. \quad (9)$$

Разобьем интервал  $N$  на подынтервалы, каждый из которых соответствует одному полному циклу. Учитывая, что на всех пассивных участках циклов  $q_i(\tau) = 0$ , получим

$$\overline{q_{i-1}(\tau)[m_i(\tau) - 1]} = \frac{1}{N} \sum_{s=1}^M \sum_{i=j_s}^{j_s+N_s} q_{i-1}(\tau)[m_i(\tau) - 1].$$

Далее проанализируем изменение  $q_{i-1}(\tau)$  в пределах одного цикла  $Z_s$ . Поскольку активный период цикла  $Z_s$  начинается с интер-

вала  $j_s$ , на предыдущем интервале очередь отсутствует и  $q_{j_s-1}(\tau) = 0$ . На последнем интервале  $j_s + N_s - 1$  активного периода  $q_{j_s+N_s-1}(\tau) = 0$ . На всех интервалах активного периода  $\delta_i(\tau) = 1; i \in j_s; (j_s + N_s - 1)$ , В [6] было показано что

$$\overline{q(\tau)} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{Z_s \in [1, N]} \sum_{j=0}^{N_s-1} j(1 - m_{j_s+j}). \quad (10)$$

Из (10) следует, что значения очередей определяются независимо внутри каждого цикла.

### Заключение

Таким образом, с целью анализа очередей, создаваемых в СМО самоподобными процессами, необходимо учитывать, что математическое ожидание случайной величины  $m_i(\tau)$  всегда меньше единицы, а корреляционные свойства процесса, с точки зрения образования очередей, определяются не значениями центрированной переменной  $m_i(\tau) - \overline{m(\tau)}$ , а значениями разностной переменной  $[m_i(\tau) - \delta_i(\tau)]$ , которая может удовлетворять свойствам самоподобия, но долговременная корреляционная зависимость  $m_i(\tau)$  компенсируется корреляционной зависимостью величины  $\delta_i(\tau)$ . Процесс, образуемый указанной переменной, имеет временные интервалы, на которых  $q_i(\tau) = 0$ , прерывающие зависимость очередей на различных циклах. Следовательно, ни о какой долговременной зависимости очередей здесь говорить не приходится, она компенсируется. Это еще раз подтверждает, что самоподобный трафик, имеющий долговременную корреляционную зависимость, при обработке в СМО долговременную зависимость очередей теряет, и соотношение (6) не выполняется. При этом сумма

$$\sum_{k=1}^{\infty} r_{m-\delta}(k; \tau) = C,$$

есть не бесконечная, а некоторая конечная медленно меняющаяся функция. На свойства разностной величины  $[m_i(\tau) - \delta_i(\tau)]$  обращал внимание еще автор [1], полагая, что именно эта случайная величина определяет характер очередей в СМО.

### Литература

1. Клейнрок Л. Вычислительные системы с очередями. Пер. с англ. М.: Мир, 1979. – Т.2. – 600 с.
2. Фрактальные процессы в телекоммуникациях. Под ред. О.И. Шелухина. М.: Радиотехника, 2003. – 480 с.

3. Степанов С.Н. Теория телетрафика. Концепции, модели, приложения. М.: Горячая линия – Телеком, 2015. – 808 с.
4. Лихтциндер Б.Я. Интервальный метод анализа трафика мультисервисных сетей. // Модели инфокоммуникационных систем: разработка и применение. Приложение к журналу Инфокоммуникационные технологии. – 2011. – Вып. 8. – С. 104-152.
5. Лихтциндер Б.Я. Интервальный метод анализа трафика мультисервисных сетей доступа. Самара: ПГУТИ, 2015. – 121 с.
6. Блатов И.А., Лихтциндер Б.Я. Об оценке длин очередей в СМО с произвольной корреляцией. // Информационные технологии и нанотехнологии (ИТНТ-2018). – Самара, 24-27 апреля 2018 г.
7. Zheng F.U. A new method for the Pollaczek-Khinchin formula / F.U. Zheng, J. Wang // ICIC express letters. Part B, Applications: an international journal of research and surveys. 2015. – V.6. – P. 1619-1624.
8. Huang L. Generalized pollaczek-khinchin formula for markov channels Communications / L. Huang, T.T. Lee // IEEE Transactions on. – 2013. – V.61. – no.8. – P. 3530-3540. doi: 10.1109/TCOMM.2013.061913.120712
9. Huang L. Generalized Pollaczek-khinchin Formula for Queueing Systems with Markov Modulated Services Rates: diss. / L. Huang. – The Chinese University of Hong Kong. – 2013.

*Получено 11.05.2018*

**Блатов Игорь Анатольевич**, д.ф.-м.н., профессор, заведующий Кафедрой высшей математики Поволжского государственного университета телекоммуникаций и информатики (ПГУТИ). Тел. 8-927-686-646-34. E-mail: blatow@mail.ru

**Лихтциндер Борис Яковлевич**, д.т.н., профессор Кафедры мультисервисных сетей и информационной безопасности ПГУТИ, Вице-президент Академии Телекоммуникаций и Информатики. Тел. 8-927-260-96-00. E-mail: lixt@psati.ru

## TRAFFIC AND QUEUE FRACTALITY IN QUEUEING SYSTEMS

*Blatov I.A., Likhttsinder B.Y.*

*Povolzhskiy State University of Telecommunications and Informatics, Samara, Russian Federation*

*E-mail: lixt@psati.ru*

Traffic in modern multiservice networks is usually correlated, therefore, the methods of classic theory do not work properly. In this paper the results of simulation and comparative analysis of traffic correlation influence for a fractal requests ceiling and requests flow in a case of real multiservice telecommunication networks are given. We examine Pollaczek-Khinchine formula generalization for an average queue length of stationary requests flow with a random correlation as well as opportunities for its application. It's shown that a real random value of requests number that is proceed at the interval of one request service has an expectation value lesser than 1. It is shown that a process of queueing has passive time intervals that interrupt a correlation link with previous and following process parts. It is shown that correlation dependencies between separate queues values spread only at intervals of employment of queueing network for self-similar processes that have an infinitely big correlation interval.

**Keywords:** queueing networks, queues, fractal processes, correlation, self-similar, the Hurst exponent

**DOI:** 10.18469/ikt.2018.16.3.02

**Blatov Igor Anatoljevich**, Povolzhskiy State University of Telecommunications and Informatics, 77 Moskovskoe shosse str., Samara, 443090, Russian Federation; the Head of Department of Higher Mathematics, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor. Tel. +792768664634. E-mail: blatow@mail.ru

**Likhtsinder Boris Yakovlevich**, Povolzhskiy State University of Telecommunications and Informatics, 23 L. Tolstoy str., Samara, 443010, Russian Federation; Professor of the Department of Multiservice Networks and Information Security, Doctor of Technical Sciences, Professor, Vice-president of scientific public Academy of Telecommunications and Informatics. Tel. +79272609600. E-mail: lixt@psati.ru

## References

1. Kleinrock L. *Queueing computer systems*, 1976, vol. 2. 576 p. (Russ. ed. Klejnrok L. Vychisli-tel'nye sistemy s ocheredjami. Moscow, Mir Publ., 1979. 600 p.).
2. Sheluhin O.I., Tenyakshev A.M., Osin A.V. *Fraktal'nye processy v telekommunikaciyah* [Fractal processes in telecommunications]. Moscow, Radio engineering Publ., 2003. 480 p.
3. Stepanov S.N. *Teorija teletrafika. Konceptii, modeli, prilozheniya* [Teletraffic theory. Concepts, models, applications]. Moscow, Goryachaya liniya-Telecom Publ., 2015. 808 p.
4. Likhtsinder B.Y. Interval'nyj metod analiza trafika mul'tiservisnyh setej [Interval method of traf-fic analysis in multiservice communication systems]. *Prilozhenie k zhurnalu «Infokommunikacionnye tehnologii»*, 2011, pp. 104-152.
5. Likhtsinder B.Y. *Interval'nyj metod analiza trafika mul'tiservisnyh setej dostupa* [Interval method of traffic analysis in multiservice access networks]. Samara, PGUTI Publ., 2015. 121 p.
6. Blatov I.A., Likhtsinder B.Y. Ob ocenke dlin ocheredej v SMO s proizvol'noj korrelyaciej [Esti-mating the queue lengths in QS with arbitrary correlation]. *Information Technologies and Nanotechnologies (ITNT-2018)*, April 24-27, 2018.
7. Zheng F.U., Wang J. A new method for the Pollaczek-Khinchin formula. *ICIC express letters. Part B, Applications: an international journal of research and surveys*, 2015, vol. 6, pp. 1619-1624.
8. Huang L., Lee T.T. Generalized Pollaczek-Khinchin formula for markov channels. *Communications, IEEE Transactions on*, 2013, vol. 61, no. 8, pp. 3530-3540. doi: 10.1109/TCOMM.2013.061913.120712
9. Huang L. *Generalized Pollaczek-Khinchin Formula for Queueing Systems with Markov Modulated Services Rates: diss.* The Chinese University of Hong Kong, 2013.

Received 11.05.2018

## ТЕХНОЛОГИИ ТЕЛЕКОММУНИКАЦИЙ

УДК 621.391.63

### УПРАВЛЕНИЕ ВРЕМЯ-ЧАСТОТНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКОЙ ОПТИЧЕСКОГО ИМПУЛЬСА В СИСТЕМАХ ПЕРЕДАЧИ RADIO-OVER-FIBER С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МОДУЛЯТОРА МАХА-ЦЕНДЕРА

Воронкова А.В., Воронков Г.С., Янтилина Л.З., Султанов А.Х., Виноградова И.Л.  
Уфимский государственный авиационный технический университет, г. Уфа, РФ  
E-mail: annette210590@gmail.com

Статья посвящена исследованию возможности увеличения пропускной способности каналов волоконно-оптических линий связи, работающих по технологии Radio-over-Fiber. Предложено использовать в качестве переносчика информации время-частотную характеристику (чирп) электромагнитных импульсов. Приведены методы управления время-частотной характеристикой оптического импульса в системах Radio-over-Fiber. Предложен принцип управления чирпом за счет изменения управляющего напряжения модулятора Маха-Цендера. Получены формулы, связывающие функцию чирпа оптического импульса с законом изменения напряжения на управляющем входе модулятора. Описан эксперимент, позволяющий проверить возможность управления чирпом сигнала с помощью модулятора Маха-Цендера, в качестве управляющего сигнала для которого использован генератор пилообразного напряжения. Результаты эксперимента близки к результатам имитационного моделирования, что свидетельствует о возможности управления чирпом оптического сигнала предложенным способом. Описана возможность использования чирпированных сигналов для обеспечения связи между контроллерами-менеджерами сетей SDN без снижения пропускной способности основного канала связи.

**Ключевые слова:** Radio-over-Fiber, полностью оптическая сеть, управление разветвленной сетью, чирп оптического импульса, модулятор Маха-Цендера

#### Введение

На сегодняшний день в развитии телекоммуникационных систем главную роль играет увеличение скорости передачи данных, необходимое

для расширения спектра предоставляемых услуг и повышения их качества. Одновременно на передний план выходят вопросы разработки новых, более быстродействующих способов управления