по самооценке гражданами ключевых компетенций цифровой экономики. ПГУТИ планирует создание Центра компетенций ЦЭ, у нас создана первая в России кафедра ЦЭ, издан учебник по ЦЭ. Сотрудники университета неоднократно привлекались к участию в комиссиях по вопросам целесообразности внедрения различных инновационных проектов широкого профиля, а также их коммерциализации. Спектр направлений подготовки, а также дисциплин, преподаваемых в ПГУТИ, полностью соответствует перечню основных направлений развития ЦЭ в России: «Управление инновациями», «Бизнес-информатика», «Инноватика», «Инновационный менеджмент».

Также наш вуз готов принять участие в решении вопросов цифровизации сельского хозяйства, а именно в создании цифровых методов и технических средств для мониторинга полей, составления почвенных карт (с использованием радиолокационного дистанционного зондирования Земли), разработке технологий и технических средств для роботизации сельского хозяйства («умные комбайны» и т.п.) и цифровой платформы управления агропромышленным комплексом.

Уверен, что успешному решению задач в области ЦЭ будет способствовать новая рубрика в нашем журнале: «Технологии цифровой экономики», развитию которой учредители намерены оказывать самое серьезное внимание.

Мишин Дмитрий Викторович, д.т.н., профессор, ректор Поволжского государственного университета телекоммуникаций и информатики. Тел. (8-846) 333-58-56. E-mail: mishin@psati.ru

EMPLOYEES TRAINING FOR THE DIGITAL ECONOMY

Mishin D.V.
Povolzhskiy State University of Telecommunications and Informatics, Samara, Russian Federation
E-mail: mishin@psati.ru

DOI: 10.18469/ikt.2019.17.1.01

Mishin Dmitry Viktorovich, Professor, Rector of Volzhskiy State University of Telecommunications and Informatics, Russia, Samara, L'va Tolstogo str., 23. Tel. (+7-846) 333-58-56. E-mail: mishin@psati.ru

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ТЕХНОЛОГИЙ ПЕРЕДАЧИ И ОБРАБОТКИ ИНФОРМАЦИИ И СИГНАЛОВ

УДК 519.213

СРАВНЕНИЕ ГИПЕРЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ С ДРУГИМИ МОДЕЛЯМИ ПОЛОЖИТЕЛЬНО ОПРЕДЕЛЕННЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Коваленко А.И., Смирнов С.В.
Институт проблем управления сложными системами РАН, Самара, РФ
E-mail: smirnov@iccs.ru

Осуществляется сравнение различных моделей положительно определенной случайной величины с моделью гиперэкспоненциального распределения специального вида Hs на основе эмпирических числовых характеристик: математического ожидания и дисперсии. Все распределения рассматриваются с параметрами, при которых они имеют убывающую интенсивность «отказов» (молодеющие распределения) и коэффициент вариации больше единицы. В качестве количественных оценок близости Hs-распределения к остальным моделям рассматриваются равномерная и средняя метрики в пространстве функций распределения. Показана степень целесообразности замены двухпараметрического распределения гиперэкспоненциальным Hs-распределением в зависимости от закона распределения и величины коэффициента вариации. Приведены оценки эффективности такой аппроксимации для различных наборов параметров и примеры ее применения. Рассчитаны и проанализированы стационарные вероятностные характеристики системы с отказами обслуживающего прибора, где базовое распределение Вейбулла-Гнеденко заменяется на гиперэкспоненциальное распределение специального вида.

Ключевые слова: *вычислимость моделей, гиперэкспоненциальное распределение, равномерная метрика, средняя метрика, характеристики систем обслуживания*

Введение

При описании случайных величин, характеризующих процессы различной природы в сложных системах, всегда существует проблема построения адекватных и одновременно аналитически или численно-аналитически разрешимых моделей. Под адекватностью понимается, прежде всего, точность соответствия эмпирическим данным, а о разрешимости судят по вычислимости практически полезных результатов моделирования систем.

Хорошей вычислимостью характеризуются марковские модели систем, в которых случайные величины имеют экспоненциальные распределения [1-3]. Однако такие модели часто оказываются недостаточно точными, в частности, в случае учета процессов приработки и/или старения при оценке показателей надежности систем. Одним из примеров моделирования с достаточной степенью обобщения и большой точностью является применение аппарата полумарковских процессов с общим фазовым пространством состояний. Так, в работах [4-5] в аналитическом виде при помощи этого аппарата определены характеристики одноканальных систем с отказами обслуживания, в которых все случайные величины, описывающие работу систем, имеют общий вид распределения.

Данный подход позволяет моделировать системы с учетом последействия. Вместе с тем, трудности разрешимости в аналитическом виде системы интегральных уравнений и сложности вычислительного плана позволяют рассматривать только частные режимы функционирования систем. Еще одним немаловажным фактором является то, что обычно статистически надежно может быть оценено лишь ограниченное количество моментов случайной величины, не говоря уже о законе распределения.

В связи с вышеупомянутыми трудностями, а также с необходимостью моделирования сложных систем с большим количеством возможных состояний (например, сетецентрических систем управления) возникает необходимость сравнения различных моделей случайной величины по качественным и количественным критериям, которые позволят подобрать модель, учитывающую существенные с точки зрения практики характеристики случайных явлений, и характеризующуюся умеренными вычислительными трудностями применения.

Постановка задачи

Пусть X – наблюдаемая положительно определенная случайная величина с эмпирическими числовыми характеристиками: математическим ожиданием $E^*(X)$ и дисперсией $D^2{}^*(X)$. Задачей настоящего исследования является сравнение следующих моделей положительно определенной случайной величины X:

– логарифмически нормального распределения с плотностью

$$f_{ЛН}(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma t}e^{-\frac{(\ln t-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \qquad (1)$$

где $t\geq 0$, $\sigma>\sqrt{\ln 2}$, $\mu\in(-\infty;\infty)$;

– распределения Вейбулла-Гнеденко с плотностью

$$f_{ВГ}(t)=\frac{\beta}{\Theta}\left(\frac{t}{\Theta}\right)^{\beta-1}e^{-\left(\frac{t}{\Theta}\right)^{\beta}}, \qquad (2)$$

где $t\geq 0$, $\beta\in(0;1)$, $\Theta>0$;

– гамма-распределения с плотностью

$$f_{Г}(t)=\alpha\frac{(\alpha t)^{\nu-1}}{\Gamma(\nu)}e^{-\alpha t}, \qquad (3)$$

где $t\geq 0$, $\alpha>0$, $\nu\in(0;1)$;

– гиперэкспоненциального распределения специального вида *Hs* с плотностью

$$f_{ГЭ}(t)=(1-p)\lambda e^{-\lambda t}+p^2\lambda e^{-p\lambda t}, \qquad (4)$$

где $t\geq 0$, $p\in(0,1)$, $\lambda>0$.

Гиперэкспоненциальное распределение достаточно хорошо изучено [6-9] и часто применяется при моделировании различного рода систем, в том числе и систем массового обслуживания [10-12].

Модель (4) впервые предложена одним из соавторов данной статьи в [13] как способ аппроксимации двухпараметрических распределений положительно определенных случайных величин. Параметры p и λ распределения (4) однозначно определяются из уравнений для первых двух моментов:

$$E(X)=\frac{(2-p)}{\lambda},\quad D^2(X)=\frac{(-p^3+2p^2-2p+2)}{p\lambda^2},$$

– математического ожидания и дисперсии *Hs*-распределения.

Распределение *Hs* замыкает в области $V^*(X)\in(1;\infty)$ однозначную факторизацию пространства эмпирических характеристик $E^*(X)$, $D^*(X)$, которую в области $V^*(X) \in (0;1)$ описывают хорошо известные и широко используемые двухпараметрические гипоэкспоненциальные распределения Эрланга Es и E_k [14], в области $V^*(X) = 0$ – вырожденное распределение константы [15], в области $V^*(X) = 1$ – экспоненциальное распределение (см. рисунок 1).

Распределения (2)-(4) характеризуются убывающей интенсивностью «отказов» (молодеющие распределения). При указанных параметрах они имеют коэффициент вариации больше единицы, $V(X) \in (1;\infty)$. Распределение (1) обладает этими свойствами при $t \geq t^*$. Значение t^* является решением трансцендентного уравнения, определяющего точку максимума интенсивности «отказов» логарифмически нормального распределения.

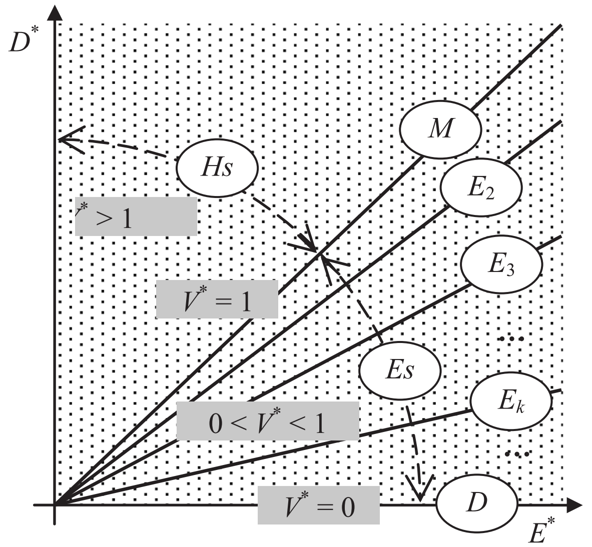


Рисунок 1. Факторизация пространства эмпирических характеристик $\{E^*(X), D^*(X)\}$ экспоненциальным M, гиперэкспоненциальным Hs, гипоэкспоненциальным (гиперэрланговским) Es и эрланговским распределением порядка k - E_k и вырожденным распределением D

Количественный анализ моделей

В качестве основных количественных оценок близости Hs-распределения к остальным моделям рассматриваются метрики в пространстве функций распределения из [16]:

– равномерная метрика – модуль максимального отклонения функций распределения друг от друга

$$\rho(F_i, F_j) = \sup_{t \geq 0} \left| F_i(t) - F_j(t) \right|; \qquad (5)$$

– средняя метрика – интеграл модуля отклонения функций распределения друг от друга, имеющий численной значение площади фигуры, заключенной между функциями распределения

$$\zeta(F_i, F_j) = \int_0^\infty \left| F_i(t) - F_j(t) \right| dt. \qquad (6)$$

В таблице 1 приведены количественные оценки близости Hs-распределения к остальным моделям случайной величины для $E^*(X) = 0{,}5$ при значениях коэффициентах вариации $V^*(X)$ из множества $\{1{,}2;\ 1{,}6;\ 2{,}0;\ 2{,}8;\ 3{,}6;\ 4{,}4;\ 5{,}2;\ 6{,}0\}$.

Можно видеть, что с увеличением коэффициента вариации $V^*(X)$ наблюдается рост отклонений по равномерной (5) и средней (6) метрикам. Вид функций $\left|F_{ЛН}(t) - F_{ГЭ}(t)\right|$, $\left|F_{ВГ}(t) - F_{ГЭ}(t)\right|$, $\left|F_{Г}(t) - F_{ГЭ}(t)\right|$ при наименьшем и наибольшем из рассматриваемых значениях – $V^*(X) = 1{,}2$ и $V^*(X) = 6{,}0$ – приведен на рисунке 2 (здесь по-прежнему $E^*(X) = 0{,}5$).

Наибольшее отклонение при $V^*(X) = 1{,}2$ (и в целом при малых коэффициентах вариации) наблюдается для логнормального распределения, при $V^*(X) = 6{,}0$ и больших дисперсиях – для гамма-распределения.

Распределение Вейбулла-Гнеденко в первом случае является самым близким к гиперэкспоненциальному, во втором – занимает промежуточное положение.

При $V^*(X) > 6{,}0$ это соотношение распределений сохраняется. Все указанные тенденции в целом сохраняются при увеличении математического ожидания случайной величины. Самые большие отклонения функций распределения наблюдаются для малых значений аргумента. Это служит положительным фактором для гиперэкспоненциальной аппроксимации, поскольку на практике при расчетах часто функция распределения умножается на плотность функции восстановления для подсчета числа событий за данный промежуток времени.

В таком случае наибольшее отклонение функции распределения компенсируется, так как плотность функции восстановления по определению равна нулю. Такой эффект наблюдается в примере расчета характеристик системы обслуживания в следующем разделе.

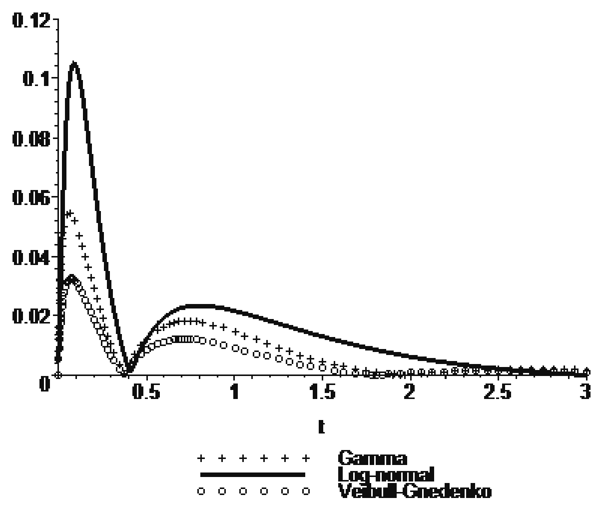
Пример расчета характеристик системы обслуживания $M/G/1/0$ с отказами

Рассмотрим пример расчета стационарных вероятностных характеристик системы $M/G/1/0$ с отказами обслуживающего прибора. Система функционирует следующим образом. Если обслуживающий прибор свободен, то поступившая в систему заявка начинает обслуживаться, в противном случае заявка теряется. После достижения прибором суммарной наработки, реализуемой как случайная величина общего вида, происходит его отказ, и сразу же начинается восстановление прибора. При этом обслуживаемая заявка, а также заявки, поступающие в систему во время восстановления прибора, теряются.

Базовым распределением наработки на отказ обслуживающего прибора является распределе-

Таблица 1. Количественные оценки аппроксимации *Hs*-распределением при $E^*(X)=0{,}5$

	Логарифмически нормальное распределение	Распределение Вейбулла-Гнеденко	Гамма-распределение	*Hs*
$V^*(X)=1{,}2$	$\mu=-1{,}139$, $\sigma=0{,}945$, $t^*=0{,}228$	$\Theta=0{,}455$, $\beta=0{,}838$	$\alpha=1{,}389$, $\nu=0{,}695$	$p=0{,}393$, $\lambda=3{,}214$
$\rho(F_i,F_j)$	0,105	0,033	0,055	
$\zeta(F_i,F_j)$	0,054	0,018	0,030	
$V^*(X)=1{,}6$	$\mu=-1{,}328$, $\sigma=1{,}127$, $t^*=0{,}117$	$\Theta=0{,}365$, $\beta=0{,}648$	$\alpha=0{,}781$, $\nu=0{,}391$	$p=0{,}202$, $\lambda=3{,}597$
$\rho(F_i,F_j)$	0,070	0,103	0,176	
$\zeta(F_i,F_j)$	0,050	0,057	0,088	
$V^*(X)=2{,}0$	$\mu=-1{,}498$, $\sigma=1{,}269$, $t^*=0{,}065$	$\Theta=0{,}288$, $\beta=0{,}543$	$\alpha=0{,}500$, $\nu=0{,}250$	$p=0{,}127$, $\lambda=3{,}747$
$\rho(F_i,F_j)$	0,38	0,168	0,291	
$\zeta(F_i,F_j)$	0,066	0,094	0,141	
$V^*(X)=2{,}8$	$\mu=-1{,}783$, $\sigma=1{,}476$, $t^*=0{,}025$	$\Theta=0{,}181$, $\beta=0{,}430$	$\alpha=0{,}255$, $\nu=0{,}128$	$p=0{,}064$, $\lambda=3{,}872$
$\rho(F_i,F_j)$	0,061	0,278	0,472	
$\zeta(F_i,F_j)$	0,118	0,126	0,225	
$V^*(X)=3{,}6$	$\mu=-2{,}011$, $\sigma=1{,}624$, $t^*=0{,}012$	$\Theta=0{,}119$, $\beta=0{,}370$	$\alpha=0{,}077$, $\nu=0{,}154$	$p=0{,}039$, $\lambda=3{,}923$
$\rho(F_i,F_j)$	0,117	0,348	0,597	
$\zeta(F_i,F_j)$	0,166	0,205	0,285	
$V^*(X)=4{,}4$	$\mu=-2{,}200$, $\sigma=1{,}736$, $t^*=0{,}007$	$\Theta=0{,}082$, $\beta=0{,}332$	$\alpha=0{,}103$, $\nu=0{,}052$	$p=0{,}026$, $\lambda=3{,}948$
$\rho(F_i,F_j)$	0,162	0,404	0,683	
$\zeta(F_i,F_j)$	0,204	0,243	0,328	
$V^*(X)=5{,}2$	$\mu=-2{,}360$, $\sigma=1{,}826$, $t^*=0{,}004$	$\Theta=0{,}059$, $\beta=0{,}306$	$\alpha=0{,}074$, $\nu=0{,}037$	$p=0{,}019$, $\lambda=3{,}963$
$\rho(F_i,F_j)$	0,197	0,448	0,745	
$\zeta(F_i,F_j)$	0,236	0,275	0,361	
$V^*(X)=6{,}0$	$\mu=-2{,}499$, $\sigma=1{,}900$, $t^*=0{,}003$	$\Theta=0{,}043$, $\beta=0{,}286$	$\alpha=0{,}028$, $\nu=0{,}056$	$p=0{,}064$, $\lambda=3{,}872$
$\rho(F_i,F_j)$	0,227	0,483	0,788	
$\zeta(F_i,F_j)$	0,262	0,301	0,385	



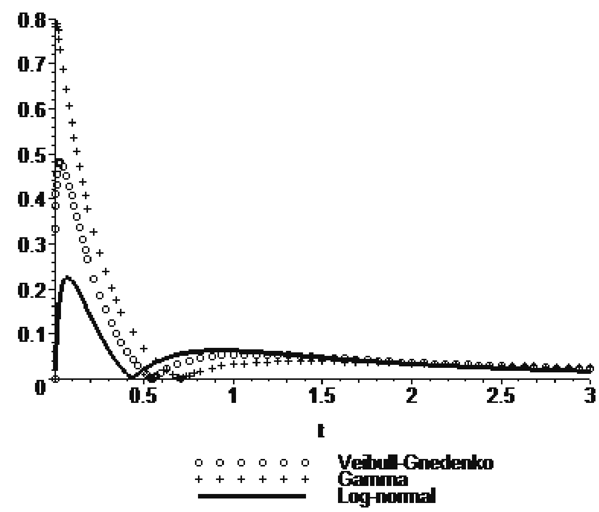


Рисунок 2. Количественные оценки аппроксимации распределений случайных величин Hs-распределением. Вид функций $\left|F_{ЛН}(t)-F_{ГЭ}(t)\right|$, $\left|F_{ВГ}(t)-F_{ГЭ}(t)\right|$, $\left|F_{Г}(t)-F_{ГЭ}(t)\right|$ при $V^*(X)=1{,}2$ и $V^*(X)=6{,}0$.

ние Вейбулла-Гнеденко. Исследуется его замена гиперэкспоненциальным распределением с помощью расчетных формул, полученных в [17] для общего вида случайных величин.

Исследовалась система обслуживания, в которой среднее время между поступлением заявок – 1 час; время обслуживания распределено по закону Эрланга 3-го порядка со средним значением 1,5 часа; наработка на отказ – случайная величина γ с распределением Вейбулла-Гнеденко и средним 4 часа. В таблице 2 приведено сравнение расчетов характеристик надежности системы с распределением наработки по законам Вейбулла-Гнеденко и Hs.

Определяемые характеристики системы – величины стационарных показателей функционирования p_0, p_1, p_2 - финальные вероятности пребывания обслуживающего прибора в свободном состоянии, в состоянии обслуживания заявки и в состоянии аварийного восстановления соответственно, а также среднее стационарное время T_1 пребывания системы в работоспособном состоянии. Соответствующие величины при аппроксимации наработки на отказ Hs-распределением обозначены в таблице 2 как p_0^*, p_1^*, p_2^*, T_1^*. Превышение абсолютной погрешности вычислений при аппроксимации для показателя среднего стационарного времени T_1 пребывания системы в работоспособном состоянии не превышает 5%, для остальных характеристик надежности – 2%.

Таблица 2. Количественная оценка аппроксимации характеристик системы $M/G/1/0$ Hs-распределением при $M^*(\gamma)=0{,}5$; $V^*(\gamma)\in[1{,}2;6]$

$V^*(\gamma)$	p_0	p_0^*	p_1	p_1^*	p_2	p_2^*	T_1	T_1^*
1,2	0,56244	0,56180	0,24309	0,24345	0,19447	0,19476	0,43220	0,43333
1,6	0,56728	0,56521	0,24040	0,24155	0,19232	0,19324	0,42378	0,42737
2,0	0,57089	0,56733	0,23840	0,24037	0,19072	0,19230	0,41759	0,42369
2,8	0,57577	0,56959	0,23568	0,23912	0,18855	0,19130	0,40936	0,41981
3,6	0,57890	0,57065	0,23395	0,23853	0,18716	0,19082	0,40412	0,41799
4,4	0,58108	0,57123	0,23273	0,23821	0,18619	0,19057	0,40052	0,41701
5,2	0,58269	0,57157	0,23184	0,23802	0,18547	0,19041	0,39787	0,41643
6,0	0,58394	0,57179	0,23114	0,23790	0,18492	0,19032	0,39583	0,41605

Заключение

Проведенный анализ позволяет сделать вывод о пригодности гиперэкспоненциального распределения *Hs* (4) для моделирования положительно определенных случайных величин с большим коэффициентом вариации. Анализ количественных критериев показал, что при значениях коэффициента вариации, больших единицы, *Hs*-распределение в разной степени «близко» к широко известным моделям.

Согласно рассмотренным критериям, наилучшими аппроксимационными свойствами при малых (то есть мало превышающих единицу) коэффициентах вариации *Hs*-распределение обладает по отношению к распределению Вейбулла-Гнеденко, при больших – к логонормальному распределению. Гамма-распределение хорошо аппроксимируется при малых значениях коэффициента вариациии, но значительно хуже – при больших. Точность аппроксимации логнормального распределения и распределения Вейбулла-Гнеденко менее подвержены влиянию дисперсионных свойств. Однако в целом чем больше коэффициент вариации, тем больше следует подвергать проверке возможность описания наблюдаемой случайной величины гиперэкспоненциальным распределением.

Если при расчетах функция распределения умножается на плотность функции восстановления для подсчета числа событий за данный промежуток времени, погрешность аппроксимации будет уменьшаться. Важно подчеркнуть, что использование гиперэкспоненциального распределения значительно упрощает аналитическое моделирование сложных систем за счет расщепления состояний на фазы, длительности пребывания в которых имеют экспоненциальные распределения.

Литература

1. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория случайных процессов и ее инженерные приложения. – М.: КНОРУС, 2013. – 448 с.
2. Бобков С.П., Бытев Д.О. Моделирование систем. – Иваново: Изд. ИвГХТУ, 2008. – 156 с.
3. Ремицкая А.Я., Суслина И.А. Марковские процессы и простейшие модели теории массового обслуживания. Компьютерное моделирование простейших моделей массового обслуживания // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. – 2007. – №38. – С. 239-248.
4. Корлат А.Н., Кузнецов В.Н., Новиков М.И., Турбин А.Ф. Полумарковские модели восстанавливаемых систем и систем массового обслуживания. – Кишинев: Штиинца, 1991. – 209 с.
5. Коваленко А.И. Системный анализ и много-критериальная оптимизация процессов профилактического восстановления в системах с отказами каналов обслуживания. Автореф. дис. к.т.н. – Самара, СамГТУ, 2017. – 20 с.
6. Manal M. Nassar A note on some characterizations of the hyperexponential distribution. // Springer-Verlag, Statistical Papers. – 2005. – No. 46. – P. 281-292. DOI: 10.1007/BF02762972.
7. Bladt M., Nielsen B.F. Matrix-Exponential Distributions in Applied Probability // Springer Science + Business Media LLC, Probability Theory and Stochastic Modelling. – 2017. – 749 p. DOI: 10.1007/978-1-4939-7049-0.
8. Baltzer J.C. Approximating probability densities on the positive half-line // Scientific Publishing Company, Queueing Systems. – 1989. – No. 4. – P. 115-136. DOI: 10.1007/BF01158548.
9. Рыжиков Ю.И. Теория очередей и управление запасами. – СПб: Питер, 2001. – 384 с.
10. Tarasov V.N. Analysis of Queues with Hyperexponential Arrival Distributions // Pleiades Publishing Inc., Problems of Information Transmission. – 2016. – Vol. 52. – No. 1. – P. 16–26. DOI: 10.1134/S0032946016010038.
11. Тарасов В.Н., Бахарева Н.Ф., Ахметшина Э.Г. Модели телетрафика на основе современной теории массового обслуживания // «Инфокоммуникационные технологии». – 2018. – Том 16. – №1. – С. 68-74. DOI: 10.18469/ikt.2018.16.1.07.
12. Рыжиков Ю.И., Уланов А.В. Применение гиперэкспоненциальной аппроксимации в задачах расчета немарковских систем массового обслуживания // Вестник ТГУ. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2016. – №3. – С. 60-65.
13. Смирнов С.В. Моделирование «сверхнерегулярных» случайных величин по экспериментальным данным // Автоматизация научных исследований: Межвуз. сб. научн. трудов. – Куйбышев: КуАИ, 1988. – С. 52-57.
14. Тараканов К.В., Овчаров Л.А. , Тырышкин А.Н. Аналитические методы исследования систем. – М.: Сов. радио, 1974. – 240 с.
15. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. – М.: Наука, 1984. – 832 с.
16. Калашников В.В. Количественные оценки в теории надежности. – М.: Знание, 1989. – 48 с.

17. Песчанский А.И., Коваленко А.И. Стационарные характеристики однолинейной системы обслуживания с потерями и ненадежным прибором // Таврический вестник информатики и математики. – 2013. – №1(22). – С. 69-79.

Получено 20.12.2018

Коваленко Анна Игоревна, к.т.н., с.н.с. Института проблем управления сложными системами (ИПУСС) РАН. Тел. (8-846) 333-26-77. E-mail: annushka199@bk.ru

Смирнов Сергей Викторович, д.т.н., г.н.с. ИПУСС РАН. Тел. (8-846) 333-27-70. E-mail: smirnov@iccs.ru

COMPARISON OF HYPEREXPONENTIAL DISTRIBUTION AND OTHER MODELS FOR POSITIVELY DEFINED RANDOM VARIABLES

Kovalenko A.I., Smirnov S.V.
Institute for the Control of Complex Systems of Russian Academy of Sciences, Samara, Russian Federation
E-mail: smirnov@iccs.ru

Due to the necessity of creating complex system models with a large number of possible states (for example, network-centric control systems), there is a need for qualitative and quantitative selection of a model that takes into account essential characteristics of random phenomena from the practical standpoint and is characterized by moderate computational difficulties in application.
In the article we compare various models of positively defined random variable with hyper exponential distribution of special Hs-type based on empirical numerical characteristics: expectation and variance. We study the log-normal, gamma, and Weibull-Gnedenko distributions. All these distributions are examined under the parameters providing a decreasing intensity of “failures” and the coefficient of variation being greater than one. The uniform and average metrics are considered in the space of distribution functions as quantitative estimates of the proximity of the Hs-distribution to the rest of the models. The possibility of replacing two-parameter distributions of a positively defined random variable by the hyperexponential Hs-distribution of a special type is shown. Estimates of the effectiveness of such an approximation for various sets of parameters and examples of its application are given. An example of calculating the stationary probability characteristics of a system with server failures is con-sidered, where the basic Weibull-Gnedenko distribution is replaced by the hyperexponential distribution of a special type.
According to the criteria considered, for small coefficients of variation Hs-distribution has the best approximation properties in relation to the Weibull-Gnedenko distribution, for large ones - to the log-normal distribution. In general, the larger the coefficient of variation is, the more precisely the possibility of describing the observed random variable by the hyperexponential distribution should be tested. But in case of such approximation admissibility, the use of the hyperexponential distribution greatly simplifies the analytical modeling of complex systems due to the splitting of states into phases, the sojourn time having exponential distributions.

Keywords: *model calculability, hyperexponential distribution, uniform metric, mean metric, queueing systems’ characteristics*

DOI: 10.18469/ikt.2019.17.1.02

Kovalenko Anna Igorevna, Institute for the Control of Complex Systems of Russian Academy of Sciences; 61 Sadovaya Str., Samara, 443020, Russian Federation; PhD in Technical Sciences, Senior Researcher. Tel. +78463332677. E-mail: annushka199@bk.ru

Smirnov Sergey Viktorovich, Institute for the Control of Complex Systems of Russian Academy of Sciences; 61 Sadovaya Str., Samara, 443020, Russian Federation; Doctor of Technical Science, Chief Researcher. Tel. +78463332770. E-mail: smirnov@iccs.ru

References

1. Ventsel' Ye.S., Ovcharov L.A. *Teoriya sluchainykh protsessov i yeye inzhenernyye prilozheniya: uchebnoye posobiye* [Theory of random processes and its engineering applications: tutorial]. Moscow, KNORUS Publ., 2013. 448 p.
2. Bobkov S.P, Bytev D.O. *Modelirovaniye sistem* [System modeling]. Ivanovo, Ivan. gos. him-technol. univ Publ., 2008. 156 p.
3. Remitskaya A.Ya., Suslina I.A. Markovskiye protsessy I prosteishyye modeli teorii massovogo obsluzhyvaniya. Komp'yuternoye modelirovaniye prosteishyh modeley massovogo obsluzhyvaniya [Markovian processes and elementary models of the queueing theory. Computer modelling of elementary models of the queueing theory]. *Nauchno-tekhnicheskiy vestnik informatsionnyh tekhnologiy, mehaniki i optiki*, 2007, no. 38, pp. 239-248.
4. Korlat A.N., Kuznetsov B.N., Novikov M.I., Turbin A.F. *Polumarkovskiye modeli vosstanavli-vayemyh sistem i system massovogo obsluzhyvaniya* [Semi-Markov models of restorable and queuing systems]. Kishinev, Shtiintsa Publ., 1991, 209 p. (In Russian)
5. Kovalenko A.I. *Sistemnyi analiz i mnogokriterial'naya optimizatsiya protsessov profilacti-cheskogo vosstanovleniya v sistemah s otkazami kanalov obsluzhyvaniya.* Diss. dokt. tekhn. nauk [System analysis and multicriterial optimization of maintenance processes in systems with server failures. Doct. Diss.] Samara, 2017. 168 p.
6. Manal M. Nassar. A note on some characterizations of the hyperexponential distribution. *Statistical Papers*, 2005, no. 46, pp. 281-292. DOI: 10.1007/BF02762972.
7. Bladt M., Nielsen B.F. *Matrix-Exponential Distributions in Applied Probability.* Springer Science+Business Media LLC, Probability Theory and Stochastic Modelling, 2017. 749 p. DOI: 10.1007/978-1-4939-7049-0.
8. Baltzer J.C. Approximating probability densities on the positive half-line. *Queueing Systems*, 1989, no. 4, pp. 115-136. DOI: 10.1007/BF01158548.
9. Ryzhikov Yu.I. *Teoriya ocheredei i upravleniye zapasami* [Queueing theory and inventory management]. St. Petersburg: Piter, 2001. 384 p.
10. Tarasov V.N. Analysis of Queues with Hyperexponential Arrival Distributions. *Problems of Information Transmission*, 2016, vol. 52, no. 1, pp. 16-26. DOI: 10.1134/S0032946016010038.
11. Tarasov V.N., Bahareva N.F., Ahmetshyna E.G. Modeli teletrafika na osnove sovremennoy teorii massovogo obsluzhyvaniya [Teletraffic models based on the modern queueing theory]. *Infokommunikacionnye tehnologii*, 2018, vol. 16, no. 1, pp. 68-74. DOI: 10.18469/ikt.2018.16.1.07.
12. Ryzhikov Ju.I. Primeneniye giperekspоnentsyal'noy approksimatsii v zadachah rascheta nemarkovskih system massovogo obsluzhyvaniya [Application of hyper exponential approximation in problems of non-Markov queueing systems]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravleniye, vychislitel'naya tehnika i informatika*, 2016, no. 3, pp. 60-65.
13. Smirnov S.V. Modelirovaniye “sverkhneregulyarnyh” sluchainyh velichin po eksperimental'nyh dannyh [Modelling of “extremely non-regular” random values using experimental data]. *Avtomatizatsiya nauchnykh issledovaniy: Mezhvuz. sb. nauchn. trudov.* Kuybyshev, KuAI, 1988, pp. 52-57.
14. Tarakanov K.V., Ovcharov L.A., Tyryshkin A.N. *Analiticheskiye metody issledovaniya sistem* [Analytical methods of system study]. Moscow, Soviet radio Publ., 1974. 240 p.
15. Korn G. *Spravochnik po matematike dlya nauchnyh rabotnikov i inzhenerov* [Manual for scientists and engineers]. Moscow, Nauka Publ., 1984. 832 p.
16. Kalashnikov V.V. *Kolichestvennyye otsenki v teorii nadezhnosti* [Quantitative evaluations in reliability theory]. Moscow, Znaniye Publ., 1989. 48 p.
17. Peschansky A.I., Kovalenko A.I. Statsionarnyye kharacteristiki odnolineinoi sistemy obsluzhyvaniya s poteryami i nenadezhnym priborom [Stationary characteristics of a single-server loss queueing system with unreliable server]. *Tavricheskiy vestnik informatiki i matematiki*, 2013, no. 22, pp. 69–79.

Received 20.12.2018