УДК 621.391.1: 621.395

СИСТЕМА МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ $HE_2/HE_2/1$

Тарасов В.Н., Бахарева Н.Ф., Када Отхмане
Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики, Самара, РФ
E-mail: tarasov-vn@psuti.ru

Статья посвящена теоретическому анализу системы массового обслуживания $HE_2/HE_2/1$ типа G/G/1 с гиперэрланговскими входными распределениями второго порядка. Ставится задача получения решения для среднего времени ожидания требований в очереди. Для этого использованы метод спектрального разложения решения интегрального уравнения Линдли и метод моментов. Показано, что гиперэрланговский закон распределения HE2 и гиперэкспоненциальный H_2 могут определяться как двумя, так и тремя первыми моментами. Предложен механизм аппроксимации гиперэрланговским законом произвольных распределений с помощью метода моментов. Выбор такого закона распределения вероятностей обусловлен тем, что его коэффициент вариации больше $1/\sqrt{2}$, и охватывает более широкий диапазон, чем у гиперэкспоненциального закона распределения, для которого коэффициент вариации больше единицы. Метод спектрального разложения решения интегрального уравнения Линдли для системы массового обслуживания $HE_2/HE_2/1$ позволяет получить резулдьтат в замкнутой форме. Полученная формула для среднего времени ожидания для системы $HE_2/HE_2/1$ дополняет и расширяет известную формулу для среднего времени ожидания в системе с произвольными законами распределений интервалов входного потока и времени обслуживания G/G/1.

Ключевые слова: *система массового обслуживания $HE_2/HE_2/1$, среднее время ожидания в очереди, метод спектрального разложения, интегральное уравнение Линдли, преобразование Лапласа*

Введение

Статья посвящена исследованию системы массового обслуживания (СМО) $HE_2/HE_2/1$ типа G/G/1 с гиперэрланговскими входными распределениями второго порядка. В теории массового обслуживания исследования систем G/G/1 особо актуальны в связи с тем, что до сих пор не существует решения в конечном виде для общего случая.

Начнем с определения гиперэрланговского закона распределения. Распределение с плотностью $f(t)=\sum_{i=1}^{R}\alpha_i \frac{k_i\lambda_i(k_i\lambda_i t)^{k-1}}{(k_i-1)!}e^{-k_i\lambda_i t}$, где $t\ge 0$, $\sum_{i=1}^{R}\alpha_i=1$, называют гиперэрланговским порядка R и обозначают HE_R [1-2]. Гиперэрланговское распределение представляет собой вероятностную смесь нормированных распределений Эрланга порядка k с функцией плотности вида $f_k(t)=\frac{k\lambda(k\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!}e^{-k\lambda t}$ и является наиболее общим распределением неотрицательных непрерывных случайных величин, поскольку имеет коэффициент вариации c_τ в интервале от 0 до ∞ [3].

Ограничимся гиперэрланговскими входными распределениями 2-го порядка с функцией плотности $f(t)=4p\lambda_1^2 t\,e^{-2\lambda_1 t}+4(1-p)\,\lambda_2^2 t\,e^{-2\lambda_2 t}$. Ниже будет показано, что коэффициент вариации для такого распределения $c_\tau>1/\sqrt{2}$. Это распределение в литературе обозначают как HE_2. Оно содержит три параметра ($0<p<1$, $\lambda_1,\lambda_2>0$) и таким образом позволяет аппроксимировать произвольные входные распределения на уровне трех первых моментов с использованием известного метода моментов. Ниже будет показано, что распределение HE_2, как и гиперэкспоненциальное H_2, может определяться как двумя, так и тремя первыми моментами.

В статье ставится задача нахождения решения для времени ожидания требований в очереди в СМО $HE_2/HE_2/1$ и построения механизма аппроксимации произвольных законов распределений гиперэрланговским.

Вывод решения для системы $HE_2/HE_2/1$

В СМО $HE_2/HE_2/1$ интервалы между соседними требованиями входного потока распределены по закону:

$$a(t)=4p\lambda_1^2te^{-2\lambda_1 t}+4(1-p)\lambda_2^2te^{-2\lambda_2 t}, \tag{1}$$

а время обслуживания –

$$b(t)=4q\mu_1^2te^{-2\mu_1 t}+4(1-q)\mu_2^2te^{-2\mu_2 t}. \tag{2}$$

Преобразование Лапласа (1) имеет вид:

$$A^*(s)=p\left(\frac{2\lambda_1}{s+2\lambda_1}\right)^2+(1-p)\left(\frac{2\lambda_2}{s+2\lambda_2}\right)^2, \tag{3}$$

а функции (2) –

$$B^*(s)=q\left(\frac{2\mu_1}{s+2\mu_1}\right)^2+(1-q)\left(\frac{2\mu_2}{s+2\mu_2}\right)^2. \tag{4}$$

Перейдем к определению спектрального разложения решения интегрального уравнения

Линдли (ИУЛ) в виде отношения двух рациональных функций $A^*(-s)\cdot B^*(s)-1=\psi_+(s)/\psi_-(s)$ в случае распределений (1)-(2) с учетом преобразований Лапласа (3)-(4), где сами функции $\psi_+(s)$ и $\psi_-(s)$ в отдельности могут быть определены только после получения полного разложения. Получим следующее выражение для отношения:

$$\frac{\psi_+(s)}{\psi_-(s)}=\left[p\left(\frac{2\lambda_1}{2\lambda_1-s}\right)^2+(1-p)\left(\frac{2\lambda_2}{2\lambda_2-s}\right)^2\right]\times$$
$$\times\left[q\left(\frac{2\mu_1}{2\mu_1+s}\right)^2+(1-q)\left(\frac{2\mu_2}{2\mu_2+s}\right)^2\right]-1.$$

Первый сомножитель в правой части в квадратных скобках представим в виде:

$$\left[p\left(\frac{2\lambda_1}{2\lambda_1-s}\right)^2+(1-p)\left(\frac{2\lambda_2}{2\lambda_2-s}\right)^2\right]=$$
$$=\frac{a_0-a_1s+a_2s^2}{(2\lambda_1-s)^2(2\lambda_2-s)^2},$$

где $a_0=16\lambda_1^2\lambda_2^2$; $a_1=16\lambda_1\lambda_2[p\lambda_1+(1-p)\lambda_2]$; $a_2=4[p\lambda_1^2+(1-p)\lambda_2^2]$. Аналогично представим второй сомножитель:

$$\left[q\left(\frac{2\mu_1}{2\mu_1+s}\right)^2+(1-q)\left(\frac{2\mu_2}{2\mu_2+s}\right)^2\right]=$$
$$=\frac{b_0+b_1s+b_2s^2}{(2\mu_1-s)^2(2\mu_2-s)^2},$$

где $b_0=16\mu_1^2\mu_2^2$, $b_1=16\mu_1\mu_2[q\mu_1+(1-q)\mu_2]$, $b_2=4[q\mu_1^2+(1-q)\mu_2^2]$. Тогда искомое выражение для спектрального разложения будет иметь вид:

$$\frac{\psi_+(s)}{\psi_-(s)}=\frac{(a_0-a_1s+a_2s^2)(b_0+b_1s+b_2s^2)}{(2\lambda_1-s)^2(2\lambda_2-s)^2(2\mu_1+s)^2(2\mu_2+s)^2}-$$
$$-\frac{(2\lambda_1-s)^2(2\lambda_2-s)^2(2\mu_1+s)^2(2\mu_2+s)^2}{(2\lambda_1-s)^2(2\lambda_2-s)^2(2\mu_1+s)^2(2\mu_2+s)^2}. \tag{5}$$

Многочлен в числителе в правой части такого разложения (5) как правило всегда имеет один нуль $s=0$ [1]. В данном случае свободный член разложения также равен нулю:

$$a_0b_0-256\lambda_1^2\lambda_2^2\mu_1^2\mu_2^2\equiv 0.$$

В числителе дроби в правой части разложения (5) получили многочлен 8-й степени $-s(s^7-c_6s^6-c_5s^5-c_4s^4-c_3s^3-c_2s^2-c_1s-c_0)$, коэффициенты которого равны:

$$c_0=a_0b_1-a_1b_0-256\lambda_1\lambda_2\mu_1\mu_2[\lambda_1\lambda_2(\mu_1+\mu_2)-$$
$$-\mu_1\mu_2(\lambda_1+\lambda_2)],$$

$$c_1=a_0b_2-a_1b_1+a_2b_0-64[\lambda_1^2\lambda_2^2(\mu_1^2+\mu_2^2)+$$
$$+\mu_1^2\mu_2^2(\lambda_1^2+\lambda_2^2)]-256\lambda_1\lambda_2\mu_1\mu_2(\lambda_1\lambda_2-$$
$$-\lambda_1\mu_1-\lambda_1\mu_2-\lambda_2\mu_1-\lambda_2\mu_2+\mu_1\mu_2),$$

$$c_2=a_2b_1-a_1b_2-64\{[\lambda_1^2\lambda_2^2+\mu_1\mu_2(\lambda_1^2+\lambda_2^2)]\times$$
$$\times(\mu_1+\mu_2)-(\lambda_1^2\lambda_2+\lambda_1\lambda_2^2)(\mu_1^2+\mu_2^2)+\mu_1^2\mu_2^2\times \tag{6}$$
$$\times(\lambda_1+\lambda_2)]\}+256\lambda_1\lambda_2\mu_1\mu_2(\lambda_1+\lambda_2-\mu_1-\mu_2),$$

$$c_3=a_2b_2-16[\lambda_1^2\lambda_2^2+\mu_1^2\mu_2^2+(\lambda_1^2+\lambda_2^2)(\mu_1^2+\mu_2^2)]+$$
$$+64[(\lambda_1+\lambda_2)(\mu_1+\mu_2)(\lambda_1\lambda_2+\mu_1\mu_2)-\lambda_1\lambda_2\times$$
$$\times(\mu_1^2+\mu_2^2)-\mu_1\mu_2(\lambda_1^2+\lambda_2^2)-4\lambda_1\lambda_2\mu_1\mu_2],$$

$$c_4=16[(\lambda_1+\lambda_2)(\lambda_1\lambda_2+4\mu_1\mu_2)-(\mu_1+\mu_2)\times$$
$$\times(\lambda_1^2+\lambda_2^2+4\lambda_1\lambda_2+\mu_1\mu_2)+(\lambda_1+\lambda_2)(\mu_1^2+\mu_2^2)],$$

$$c_5=16[(\lambda_1+\lambda_2)(\mu_1+\mu_2)-\lambda_1\lambda_2-\mu_1\mu_2-$$
$$-4(\lambda_1^2+\lambda_2^2+\mu_1^2+\mu_2^2)],$$

$$c_6=4(\lambda_1+\lambda_2-\mu_1-\mu_2).$$

Данные коэффициенты получены с помощью выполнения трудоемких символьных операций математического пакета Mathcad над числителем разложения (5), так как числитель разложения включает 90 слагаемых и вручную привести подобные члены после раскрытия скобок проблематично. Видимо поэтому в литературе, включая web-ресурсы, нет упоминаний о такой системе. Выделим многочлен в числителе (5):

$$s^7-c_6s^6-c_5s^5-c_4s^4-c_3s^3-c_2s^2-c_1s-c_0, \tag{7}$$

так как определение его корней и работа с ними является важным моментом метода спектрального разложения решения ИУЛ.

Исследование многочлена (7) с коэффициентами (6) с использованием формул Виета подтверждает наличие четырех отрицательных действительных корней либо двух отрицательных действительных корней и двух комплексно-сопряженных корней с отрицательными вещественными частями, а также трех положительных действительных корней либо одного положительного и двух комплексно сопряженных корней с положительными вещественными частями.

Исследование знака младшего коэффициента c_0 многочлена (7) показывает, что $c_0>0$. С учетом знака минус в многочлене перед коэффициентом c_0 формулы Виета не противоречат факту наличия четырех отрицательных корней у многочлена (7). В общем случае, наличие таких корней следует из существования и единственности спектрального разложения [1] или же факторизации [4].

Обозначив корни многочлена (7) с отрицательными вещественными частями для удобства через $-s_1, -s_2, -s_3, -s_4$, а с положительными вещественными частями через s_5, s_6, s_7, отношение $\psi_+(s)/\psi_-(s)$ окончательно можно разложить на следующие множители:

$$\frac{\psi_+(s)}{\psi_-(s)} = \\ = \frac{-s(s+s_1)(s+s_2)(s+s_3)(s+s_4)(s-s_5)(s-s_6)(s-s_7)}{(2\lambda_1-s)^2(2\lambda_2-s)^2(2\mu_1+s)^2(2\mu_2+s)^2}. \qquad (8)$$

Тогда с учетом условий, налагаемых на функции $\psi_+(s)$ и $\psi_-(s)$, за функцию $\psi_+(s)$ примем $\psi_+(s) = \dfrac{s(s+s_1)(s+s_2)(s+s_3)(s+s_4)}{(s+2\mu_1)^2(s+2\mu_2)^2}$, так как нули многочлена (7): $s=0$, $-s_1, -s_2, -s_3, -s_4$, и полюсы $s=-2\mu_1$, $s=-2\mu_2$ лежат в области $\mathrm{Re}(s)\le 0$. За функцию $\psi_-(s)$ примем $\psi_-(s) = \dfrac{-(2\lambda_1-s)^2(2\lambda_2-s)^2}{(s-s_5)(s-s_6)(s-s_7)}$. Таким образом, построенные функции $\psi_+(s)$ и $\psi_-(s)$ удовлетворяют всем условиям метода спектрального разложения.

Далее по методике спектрального разложения определим постоянную

$$K = \lim_{s\to 0}\frac{\psi_+(s)}{s} = \\ = \lim_{s\to 0}\frac{(s+s_1)(s+s_2)(s+s_3)(s+s_4)}{(s+2\mu_1)^2(s+2\mu_2)^2} = \frac{s_1 s_2 s_3 s_4}{16\mu_1^2\mu_2^2},$$

которая физически определяет вероятность того, что поступающее в систему требование застает ее свободной.

Функция $\psi_+(s)$ позволяет найти преобразование Лапласа функции распределения вероятностей времени ожидания $W(y)$:

$$\Phi_+(s) = \frac{K}{\psi_+(s)} = \\ = \frac{s_1 s_2 s_3 s_4 (s+2\mu_1)^2(s+2\mu_2)^2}{16\mu_1^2\mu_2^2 s(s+s_1)(s+s_2)(s+s_3)(s+s_4)}.$$

Тогда преобразованием Лапласа для функции плотности времени ожидания будет функция $s\cdot\Phi_+(s)$, то есть

$$W^*(s) = \frac{s_1 s_2 s_3 s_4 (s+2\mu_1)^2(s+2\mu_2)^2}{16\mu_1^2\mu_2^2 (s+s_1)(s+s_2)(s+s_3)(s+s_4)}. \qquad (9)$$

Среднее время ожидания в очереди равно значению производной от преобразования Лапласа (11) функции плотности со знаком минус в точке $s=0$:

$$-\left.\frac{dW^*(s)}{ds}\right|_{s=0} = \frac{1}{s_1}+\frac{1}{s_2}+\frac{1}{s_3}+\frac{1}{s_4}-\frac{1}{\mu_1}-\frac{1}{\mu_2}.$$

Окончательно среднее время ожидания в очереди для СМО $HE_2/HE_2/1$:

$$\overline{W} = \frac{1}{s_1}+\frac{1}{s_2}+\frac{1}{s_3}+\frac{1}{s_4}-\frac{1}{\mu_1}-\frac{1}{\mu_2}. \qquad (10)$$

Из выражения (9) также можно определить дисперсию времени ожидания. Вторая производная от преобразования (9) в точке $s=0$ дает второй начальный момент времени ожидания, что позволяет определить дисперсию времени ожидания. Учитывая определение джиттера в телекоммуникациях как разброс времени ожидания [8], тем самым получим возможность его определения через дисперсию. Этот результат является важным для анализа трафика, чувствительного к задержкам.

Аппроксимация законов распределения на уровне двух первых моментов

Воспользуемся свойством преобразования Лапласа воспроизведения моментов и запишем начальные моменты до второго порядка для распределения (1):

$$\overline{\tau}_\lambda = \frac{p}{\lambda_1}+\frac{(1-p)}{\lambda_2}; \qquad (11)$$

$$\overline{\tau_\lambda^2} = \frac{3}{2}\left[\frac{p}{\lambda_1^2}+\frac{(1-p)}{\lambda_2^2}\right]. \qquad (12)$$

Рассматривая равенства (11)-(12) как запись метода моментов, найдем неизвестные параметры распределения (1) λ_1, λ_2, p. Система уравнений (11)-(12) при этом является недоопределенной, поэтому к ней добавим выражение для квадрата коэффициента вариации

$$c^2 = \frac{\overline{\tau_\lambda^2}-(\overline{\tau}_\lambda)^2}{(\overline{\tau}_\lambda)^2}, \qquad (13)$$

как связующее условие между (11) и (12). Кроме того, коэффициент вариации будем использовать в расчетах в качестве входного параметра системы. Исходя из вида уравнения (11) положим

$$\lambda_1 = 2p / \bar{\tau}_\lambda, \ \lambda_2 = 2(1-p) / \bar{\tau}_\lambda \qquad (14)$$

и потребуем выполнения условия (13). Подставив выражения (11)-(12) и частное решение (14) в (13) и решив квадратное уравнение относительно параметра *p*, выберем одно нужное значение:

$$p = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{2(1+c_\lambda^2)-3}{8(1+c_\lambda^2)}}.$$

Отсюда следует, что коэффициент вариации $c_\lambda > 1/\sqrt{2}$. Таким образом, получено частное решение недоопределенной системы уравнений (11) и (12) методом подбора. Аналогично поступив с законом распределения (2), определяем его неизвестные параметры μ_1, μ_2, q.

Такой же подход к аппроксимации законов распределения гиперэкспоненциальным распределением применен в работах [5-7]. Таким образом, гиперэрланговский закон распределения может определяться полностью двумя первыми моментами и перекрывать весь диапазон изменения коэффициента вариации от $1/\sqrt{2}$ до ∞, что шире, чем у гиперэкспоненциального распределения $(1,\infty)$.

Учитывая тот факт, что распределение HE_2 является трехпараметрическим, аппроксимацию можно выполнить и на уровне трех первых моментов. Для этого запишем выражения для начального момента третьего порядка, полученное через преобразование Лапласа (3):

$$\overline{\tau_\lambda^3} = \frac{3p}{\lambda_1^3} + \frac{3(1-p)}{\lambda_2^3} \qquad (15)$$

Теперь, присоединив уравнение (15) к уравнениям моментов (11) и (12) и решив систему 3-х нелинейных уравнений с тремя неизвестными в пакете Mathcad, находим все три параметра λ_1, λ_2, p распределения (1). Аналогично определяем три параметра μ_1, μ_2, q распределения (2). Как показано в работе [5] на примере гиперэкспоненциальных входных распределений, аппроксимация с использованием двух первых моментов, в отличие от трех моментов может занижать величину среднего времени ожидания до 10% в зависимости от загрузки и величины третьего момента.

Практическое применение полученных результатов

Ниже в таблицах 1-2 приведены результаты расчетов в пакете Mathcad среднего времени ожидания для системы $HE_2/HE_2/1$ по полученной расчетной формуле (12) для случаев малой, средней и высокой нагрузки $\rho = 0{,}1; 0{,}5; 0{,}9$. Коэффициент загрузки в расчетах определяется отношением средних интервалов времени обслуживания и интервалов между требованиями $\rho = \bar{\tau}_\mu / \bar{\tau}_\lambda$. Расчеты проведены для нормированного времени обслуживания $\bar{\tau}_\mu = 1$.

В таблице 1 приведены результаты для коэффициентов вариаций (c_λ, c_μ), меньших единицы, а в таблице 2 – больших единицы. При этом для сравнения использованы результаты для СМО $E_2/E_2/1$ и $H_2/H_2/1$ соответственно. Как видно из таблиц 1-2, результаты в обоих случаях достаточно близки. Кроме того, полученные результаты хорошо согласуются с данными [11].

Таблица 1. Результаты для времени ожидания при коэффициентах вариаций (c_λ, c_μ), меньших единицы

Входные параметры		Среднее время ожидания	
ρ	$(c_\lambda; c_\mu)$	для системы $HE_2/HE_2/1$	для системы $E_2/E_2/1$
0,1	(0,71; 0,71)	0,02	0,02
0,5	(0,71; 0,71)	0,40	0,39
0,9	(0,71; 0,71)	4,40	4,36

Таблица 2. Результаты для времени ожидания при коэффициентах вариаций (c_λ, c_μ), больших единицы

Входные параметры		Среднее время ожидания	
ρ	$(c_\lambda; c_\mu)$	для системы $HE_2/HE_2/1$	для системы $H_2/H_2/1$
0,1	(2,2)	0,34	0,45
	(4,4)	1,68	1,78
	(8,8)	7,16	7,11
0,5	(2,2)	3,98	4,04
	(4,4)	16,53	16,13
	(8,8)	66,73	64,18
0,9	(2,2)	36,21	36,20
	(4,4)	145,31	144,83
	(8,8)	580,56	577,86

Заключение

В работе получено аналитическое решение для среднего времени ожидания для системы $HE_2/HE_2/1$ с использованием символьных операций пакета Mathcad. Этот результат дополняет и расширяет известную формулу для среднего времени ожидания для систем типа G/G/1. Используя предложенный подход, помимо среднего времени ожидания можно определить дисперсию и моменты высших порядков времени ожидания.

Полученный результат, с одной стороны, дополняет систему $H_2/H_2/1$, а с другой стороны расширяет диапазон изменения коэффициентов вариаций интервалов поступлений и времени обслуживания от $1/\sqrt{2}$ до ∞. Для убедительности, данные расчетов для системы $HE_2/HE_2/1$ сравниваются с результатами для систем $E_2/E_2/1$ и $H_2/H_2/1$, что демонстрирует их достаточную близость.

Полученный результат с успехом может быть применен в современной теории телетрафика, где задержки пакетов входящего трафика играют первостепенную роль. Для этого необходимо знать числовые характеристики интервалов входящего трафика и времени обслуживания на уровне двух первых моментов, что не вызывает трудностей при использовании современных анализаторов трафика [7].

Литература

1. Клейнрок Л. Теория массового обслуживания. Пер. с англ. – М. Машиностроение, 1979. – 432 с.
2. Brannstrom N. A Queueing Theory analysis of wireless radio systems – Appllied to HS-DSCH. Lulea university of technology, 2004. – 79 p.
3. Алиев Т.И. Основы моделирования дискретных систем. – СПб: СПбГУ ИТМО, 2009. – 363 с.
4. Бочаров П.П., Печинкин А.В. Теория массового обслуживания. – М.: Изд-во РУДН, 1995. – 529 с.
5. Тарасов В.Н. Исследование систем массового обслуживания с гиперэкспоненциальными входными распределениями // Проблемы передачи информации. – 2016. – №1. – С.16-26.
6. Тарасов В.Н., Карташевский И.В. Способы аппроксимации входных распределений для системы G/G/1 и анализ полученных результатов // Системы управления и информационные технологии. – 2015. – № 3. – С. 182-185.
7. Тарасов В.Н., Бахарева Н.Ф., Горелов Г.А., Малахов С.В. Анализ входящего трафика на уровне трех моментов распределений временных интервалов // Информационные технологии. – 2014. – №9. – С.54-59.
8. HTTPS: URL //tools.ietf.org/html/rfc3393. RFC 3393 IP Packet Delay Variation Metric for IP Performance Metrics (IPPM) (д.о. 26.02.2016).
9. Тарасов В.Н., Бахарева Н.Ф., Горелов Г.А. Математическая модель трафика с тяжело-хвостным распределением на основе системы массового обслуживания H2/M/1 // Инфокоммуникационные технологии. – 2014. – Т.12. – №3. – С. 36-41.
10. Тарасов В.Н. Бахарева Н.Ф. Обобщенная двумерная диффузионная модель массового обслуживания типа GI/G/1 // Телекоммуникации – 2009. – № 7. – С. 2-8.
11. Whitt W. Approximating a point process by a renewal process: two basic methods // Operation Research, 30. – 1982. – No. 1. – P. 125-147.

Получено 15.11.2018

Тарасов Вениамин Николаевич, д.т.н., профессор, заведующий Кафедрой программного обеспечения и управления в технических системах (ПОУТС) ФГБОУ ВО «Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики» (ПГУТИ). Тел. (8-846) 228-00-13. E-mail: tarasov-vn@psuti.ru

Бахарева Надежда Федоровна, д.т.н., профессор, заведующая Кафедрой информатики и вычислительной техники ПГУТИ. Тел. (8-846) 339-11-31. E-mail: bakhareva-nf@psuti.ru

Када Отхмане, аспирант Кафедры ПОУТС ПГУТИ. Тел. (8-846) 228-00-13. E-mail: otman2333@gmail.com

QUEUEING SYSTEM $HE_2/HE_2/1$

Tarasov V.N., Bakhareva N.F., Kada Othmane
Povolzhskiy State University of Telecommunications and Informatics, Samara, Russian Federation
E-mail: tarasov-vn@psuti.ru

The article is devoted to the analysis of the queuing system HE2/HE2/1 type G/G/1 with hyper Erlangen input distributions of the second order. The goal is to obtain a solution for the average waiting time for requests in the queue. To achieve it, the classical method of spectral de-composition of the solution of Lindley integral equation is used. For the practical application of the results obtained, the method of moments is used. It turns out that the hyper Erlangen distribution law HE_2, same as the hyperexponential law H_2, which has three parameters, can be defined by both the first two moments and the first three moments. The article proposes an approximation mechanism for the hyper Erlangen law of arbitrary distributions using the well-known method of moments. The choice of such a law of probability distribution is due to the fact that its coefficient of variation is larger and covers a wider range than the hyperex-ponential distribution law, for which the coefficient of variation is greater than one. The method of spectral decomposition of the solution of the Lindley integral equation for the QS HE2/HE2/1 allows one to obtain a closed-form solution. Thus, the system under consideration allows working with coefficients of variations in the intake intervals and service time in the range $(1/\sqrt{2}, \infty)$, which expands the field of application of QS. The resulting formula for the average waiting time for the $HE_2/HE_2/1$ system complements and extends the well-known formula for the average waiting time in the G/G/1 system with arbitrary laws of the distribution of input flow intervals and service time.

Keywords: *$HE_2/HE_2/1$ queuing system, average waiting time in a queue, spectral decomposition method, Lindley integral equation, Laplace transform*

DOI: 10.18469/ikt.2019.17.1.03

Tarasov Veniamin Nikolaevich, North Caucasus Federal University, 1 Pushkin Street, Stavropol, 355009, Russian Federation; Professor of the Department of Automatic Systems Information Security, Doctor of Technical Science. Tel. +78652956546. E mail: pashintsevp@mail.ru

Bakhareva Nadezhda Fedorovna, Povolzhsky State University of Telecommunications and Informatics, 77, Moskovskoe shosse, Samara, 443090, Russian Federation; Head of the Department of Informatics and Computer Technics, Doctor of Technical Science, Professor. Tel. +78463391131. E-mail: bakhareva-nf @psuti.ru

Kada Othmane, Povolzhsky State University of Telecommunications and Informatics, 77, Moskovskoe shosse, Samara, 443090, Russian Federation; PhD Student of the Department of Software and Management in Technical Systems. Tel. +78462280013. E-mail: otman2333@gmail.com

References

1. Kleinrock L. *Teoriya massovogo obsluzhivaniya* [Queuing theory]. Moscow, Mashinostroeinie Publ, 1979. 432 p.
2. Brannstrom N. *A Queueing Theory analysis of wireless radio systems – Appllied to HS-DSCH*. Lulea University of technology, 2004. 79 p.
3. Bocharov P.P., Pechinkin A.V. *Teoriya massovogo obsluzhivaniya* [Queuing theory]. Moscow, Publishing House of Peoples' Friendship University, 1995. 529 p.
4. Aliev T.I. *Osnovy modelirovaniya diskretnyh system* [Fundamentals of discrete systems modeling]. Saint Petersburg, SPbGU ITMO Publ., 2009.
5. Tarasov V.N. Analysis of queues with hyperexponential arrival distributions. *Problems of Information Transmission*, 2016, vol. 52, no. 1, pp.14-23. DOI:10.1134/S0032946016010038.
6. Tarasov V.N., Kartashevsky I.V. Sposoby approksimacii vhodnyh raspredelenij dlya sistemy G/G/1 i analiz poluchennyh rezul'tatov [Methods of approximation of input distributions for the system G/G/1 and analysis of the received results]. *Sistemy upravleniya i informacionnye tekhnologii*, 2015, no. 3, pp. 182-185.
7. Tarasov V.N., Bahareva N.F., Gorelov G.A., Malakhov S.V. Analiz vhodiaschego trafika na urovne treh momentov raspredeleniy [Analyzing the Incoming Traffic at the Three Moments Distribution of Time Intervals]. *Informacionnye technologii*, 2014, no. 9, pp. 54-59.
8. RFC 3393 IP Packet Delay Variation Metric for IP Performance Metrics (IPPM). Available at: tools.ietf.org/html/rfc3393 (accessed: 26.02.2016).
9. Tarasov V.N., Bahareva N.F., Gorelov G.A. Matematicheskaya model trafika s tyazhelohvostnym raspredeleniem na osnove sistemy massovogo obsluzhivaniya H_2/M/1 [Mathematical model of traffic with heavy-tailed distribution based on the queuing system H_2/M/1]. *Infokommunikacionnye tekhnologii*, 2014, no.3, pp. 36-41.
10. Tarasov V.N., Bahareva N.F. Obobshchennaya dvumepnaya diffuzionnaya model' massovogo obsluzhivaniya tipa GI/G/1 [A generalized two-dimensional diffusion queuing model of the GI/G/1 type]. *Telekommunikacii*, 2009, no.7, pp. 2-8.

11. Whitt W. Approximating a point process by a renewal process: two basic methods. *Operation Research*, 1982, vol. 30 no. 1, pp. 125-147.

Received 15.11.2018

ТЕХНОЛОГИИ ТЕЛЕКОММУНИКАЦИЙ

УДК 621.315.2

ИССЛЕДОВАНИЕ СТОЙКОСТИ КАБЕЛЕЙ СВЯЗИ К ИЗГИБАМ В УСЛОВИЯХ НИЗКИХ ОТРИЦАТЕЛЬНЫХ ТЕМПЕРАТУР

Алехин И.Н., Гаврюшин С.А., Попов В.Б., Никулина Т.Г., Мотин К.И.
Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики, Самара, РФ
E-mail: ntg81@list.ru

В статье представлены результаты анализа нормативно-технической документации и существующих методов испытаний кабелей связи на стойкость к отрицательным температурам. Рассмотрена методика испытания на холодоустойчивость защитного полиэтиленового шланга и методика испытания кабелей на стойкость к внешним воздействующим факторам, а именно к воздействию пониженной рабочей температуры окружающей среды. На основе выполненного анализа предложена методика испытаний кабелей на стойкость к изгибам при температуре окружающей среды –60°С. По предложенной методике выполнены исследования двух образцов кабелей связи: симметричных высокочастотных кабелей с пленко-пористо-пленочной полиэтиленовой изоляцией и симметричных высокочастотных кабелей связи с кордельно-полистирольной изоляцией. По результатам проведенных экспериментальных исследований показана высокая холодостойкость наружной полиэтиленовой оболочки испытанных образцов кабелей.

Ключевые слова: *кабель связи, жесткость, холодостойкость, полиэтиленовая оболочка, изгиб*

Введение

Вопросы обеспечения высокой надежности медножильных кабелей связи обладают в настоящее время большой актуальностью, поскольку «оптика» на сетях связи сегодня применяется не везде. Например, в сетях фиксированного широкополосного доступа (ШПД) наблюдается следующая ситуация: не более 10% населения в мире подключено к волокну непосредственно, что связано с достаточно большими затратами на реализацию технологии FTTH [1]. По этой причине многие операторы связи используют менее дорогие технологии FTTB и FTTC, в которых на абонентском участке используются медные кабели с применением высокоскоростного оборудования DSL. Ставку на использование медножильных кабелей при развитии ШПД делают сегодня операторы связи большинства стран Западной Европы. Например, в компании Deutshe Telecom затраты на строительство ШПД на основе VDSL2 на 70% ниже, чем по технологии FTTH [2]. Следует также сказать, что для решения технологических задач на ведомственных сетях связи еще достаточно широко используются симметричные кабели с медными жилами.

Отметим, что на сетях связи в России наиболее широко используются медножильные кабели связи четверочной скрутки типа МКПп и МКСА. Весьма часто эти кабели прокладываются и эксплуатируются в сложных, а порой и экстремальных природно-климатических условиях. Сильные морозы в продолжительный зимний период с низкими температурами осложняют прокладку и эксплуатацию кабелей.

Как показывает практика, при монтаже медножильных кабелей связи в районах с низкой отрицательной температурой (в России более 50% территории находится в районах вечной мерзлоты) кабели чаще всего повреждаются в месте их изгиба. В этой связи значительный практический интерес представляет проведение экспериментальных исследований стойкости наиболее широко применяемых кабелей связи типа МКПпАШп и МКСАШп к изгибам при низких отрицательных температурах.

Стандарты по испытаниям кабелей при низкой отрицательной температуре

Для разработки методики исследований был выполнен анализ методов испытаний кабелей связи на стойкость к низким отрицательным