

12. Subject-oriented ontology for IEEE 802.22 WRAN ver 1.0. Available at: https://www.researchgate.net/publication/327075775_Subject-oriented_ontology_for_IEEE_80222_WRAN_ver_10 (accessed 10.08.18). doi: 10.13140/RG.2.2.16894.43849

Received 05.09.2018

УДК 621.391.1:621.395

СИСТЕМА МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ $E_2/M/1$ С ОБЫЧНЫМИ И СДВИНУТЫМИ ВХОДНЫМИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯМИ

Тарасов В.Н., Бахарева Н.Ф., Ахметишина Э.Г.

Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики

E-mail: tarasov-vn@psuti.ru

В теории массового обслуживания исследования систем $G/M/1$ и $G/G/1$ особо актуальны в связи с тем, что до сих пор не существует решения в конечном виде в общем случае. В данной статье представлены результаты по системам массового обслуживания (СМО) $G/M/1$ и $G/G/1$ соответственно: системы $E_2/M/1$ с эрланговскими и экспоненциальными входными распределениями, а также системы $E_2^-/M^-/1$ с запаздыванием во времени. В качестве входных распределений для системы с запаздыванием выбраны сдвинутое вправо от нулевой точки распределение Эрланга 2-го порядка и также сдвинутое экспоненциальное распределение. Для таких законов распределений классический метод спектрального разложения решения интегрального уравнения Линдли для систем $G/G/1$ позволяет получить решение в замкнутой форме. Показано, что в такой системе с запаздыванием среднее время ожидания требований в очереди меньше, чем в обычной системе. Это связано с тем, что операция сдвига во времени уменьшает величину коэффициентов вариаций интервалов между поступлениями и времени обслуживания, а как известно из теории массового обслуживания, среднее время ожидания требований связано с этими коэффициентами вариаций квадратичной зависимостью. Система $E_2/M/1$ работает только при коэффициенте вариации интервалов поступления, равному $1/\sqrt{2}$ и коэффициенте вариации времени обслуживания, равному 1, а система позволяет работать с коэффициентами вариаций интервалов поступления в диапазоне $(0, 1/\sqrt{2})$ и коэффициентами вариаций времени обслуживания из интервала $(0, 1)$, что расширяет область применения этих систем. Для вывода решений использован классический метод спектрального разложения решения интегрального уравнения Линдли.

Ключевые слова: системы массового обслуживания $E_2/M/1$, $E_2^-/M^-/1$, среднее время ожидания в очереди, метод спектрального разложения, интегральное уравнение Линдли, преобразование Лапласа

Введение

Статья посвящена исследованию систем массового обслуживания (СМО) $E_2/M/1$ с эрланговским входным распределением 2-го порядка и $E_2^-/M^-/1$ с запаздыванием во времени. Первая система относится к типу $G/M/1$, а вторая $G/G/1$. В теории СМО исследования систем $G/G/1$ и $G/M/1$ актуальны в связи с тем, что до сих пор не существует решения в конечном виде для общего случая.

В работе авторов [1] впервые приведены результаты для системы $M/M/1$ с запаздыванием во времени и сдвинутыми экспоненциальными входными распределениями. Показано, что среднее время ожидания требования в очереди в системе $M/M/1$ с запаздыванием во времени меньше, чем в классической системе $M/M/1$ при одинаковом коэффициенте загрузки за счет того, что коэффициенты вариации времен поступления c_λ и обслуживания c_μ становятся меньше единицы при параметре запаздывания $t_0 > 0$.

Результаты [1] совместно с классикой теории СМО [2] позволяют распространить метод спектрального разложения решения интегрального уравнения Линдли (ИУЛ) также на сдвинутое эрланговское распределение.

Метод спектрального разложения решения ИУЛ составляет важную часть теории систем $G/G/1$. Для записи ИУЛ введем следующие обозначения: $W(y)$ – функция распределения вероятностей (ФРВ) времени ожидания требования в очереди; $C(u) = P(\tilde{u} < u)$ – ФРВ случайной величины $\tilde{u} = \tilde{x} - \tilde{t}$; $\tilde{x}$ – случайное время обслуживания требования; $\tilde{t}$ – случайный интервал времени между поступлениями требований. Тогда нужная нам форма уравнения Линдли будет выглядеть как

$$W(y) = \begin{cases} \int_{-\infty}^y W(y-u) dC(u), & y \geq 0; \\ 0, & y < 0. \end{cases}$$

При изложении метода решения ИУЛ будем придерживаться подхода и символики [2]. Для этого через $A^*(s)$ и $B^*(s)$ обозначим преобразования Лапласа функций плотности распределения интервалов между поступлениями и времени обслуживания соответственно. Суть решения ИУЛ методом спектрального разложения состоит в нахождении для выражения $A^*(-s) \cdot B^*(s) - 1$ представления в виде произведения двух множителей, которое давало бы рациональную функцию от s . Следовательно, для нахождения закона распределения времени ожидания необходимо следующее спектральное разложение

$$A^*(-s) \cdot B^*(s) - 1 = \psi_+(s) / \psi_-(s),$$

где $\psi_+(s)$ и $\psi_-(s)$ – некоторые рациональные функции от s , которые можно разложить на множители. Функции $\psi_+(s)$ и $\psi_-(s)$ должны удовлетворять следующим условиям [2].

1. Для $\text{Re}(s) > 0$ функция $\psi_+(s)$ является аналитической без нулей в этой полуплоскости;

2. Для $\text{Re}(s) < D$ функция $\psi_-(s)$ является аналитической без нулей в этой полуплоскости, где D – некоторая положительная константа, определяемая из условия

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{a(t)}{e^{-Dt}} < \infty. \quad (1)$$

Кроме того, функции $\psi_+(s)$ и $\psi_-(s)$ должны обладать следующими свойствами:

$$\begin{aligned} \lim_{|s| \rightarrow \infty, \text{Re}(s) > 0} \frac{\psi_+(s)}{s} &= 1; \\ \lim_{|s| \rightarrow \infty, \text{Re}(s) < D} \frac{\psi_-(s)}{s} &= -1. \end{aligned} \quad (2)$$

Построенные функции $\psi_+(s)$ и $\psi_-(s)$ должны удовлетворять условиям (1)-(2).

Система $E_2/M/1$ и вывод решения для среднего времени ожидания

Для системы $E_2/M/1$ законы распределения интервалов входного потока и времени обслуживания задаются функциями плотности вида:

$$a(t) = 4\lambda^2 t e^{-2\lambda t}; \quad (3)$$

$$b(t) = \mu e^{-\mu t}. \quad (4)$$

При таком задании функций (3) решения для среднего времени ожидания для системы $E_2/M/1$ в классике по теории СМО [2-3] авторами не най-

дено, поэтому это решение находим классическим методом спектрального разложения решения ИУЛ аналогично [4]. Такой подход позволяет определить не только среднее время ожидания, но и моменты высших порядков времени ожидания.

Тогда, учитывая определение джиттера в телекоммуникациях как разброс времени ожидания от его среднего значения [5], получим возможность определения джиттера через дисперсию. Преобразования Лапласа функций (3) и (4) будут соответственно

$$A^*(s) = \left(\frac{2\lambda}{2\lambda + s} \right)^2; \quad B^*(s) = \frac{\mu}{\mu + s}.$$

Для применения метода спектрального разложения воспользуемся результатами [2] для систем общего вида $G/M/1$, к которым принадлежит система $E_2/M/1$. Выражение для спектрального разложения решения ИУЛ для системы $G/M/1$ задается в виде

$$A^*(-s) \cdot B^*(s) - 1 = \frac{\psi_+(s)}{\psi_-(s)} = \left[\frac{\mu A^*(-s) - s - \mu}{s(s + s_1)} \right] \left[\frac{s(s + s_1)}{s + \mu} \right], \quad (5)$$

где $s = -s_1$ – единственный отрицательный корень уравнения $s + \mu - \mu A^*(-s) = 0$.

Выражение в первых скобках (5) не имеет ни полюсов, ни нулей в области $\text{Re}(s) \leq 0$ кроме $s = 0$ и $s = -s_1$. [2]. Поэтому, учитывая условия (1) и (2), за функцию $\psi_+(s)$ примем выражение во вторых скобках, так как его нули $s = 0$, $s = -s_1$ и полюс $s = -\mu$ лежат в области $\text{Re}(s) \leq 0$, а за функцию $\psi_-(s)$ – выражение в первых скобках:

$$\psi_+(s) = \frac{s(s + s_1)}{s + \mu}, \quad \psi_-(s) = \frac{-s(s + s_1)}{s + \mu - \mu A^*(-s)}.$$

Для окончательного построения функции $\psi_-(s)$ подставим в ее выражение

$$\begin{aligned} A^*(-s) &= \left(\frac{2\lambda}{2\lambda + s} \right)^2; \\ \psi_-(s) &= \frac{-s(s + s_1)}{s + \mu - \mu \times [4\lambda^2 / (2\lambda - s)^2]} = \\ &= \frac{-(s + s_1)(2\lambda - s)^2}{(s + s_1)(s - s_2)} = -\frac{(2\lambda - s)^2}{s - s_2}, \end{aligned}$$

так как квадратное уравнение $s^2 + (\mu - 4\lambda)s + 4\lambda(\lambda - \mu) = 0$, полученное из знаменателя, имеет один отрицательный корень:

$$-s_1 = -(\mu - 4\lambda) / 2 - \sqrt{[(\mu - 4\lambda)/2]^2 + 4\lambda(\mu - \lambda)}$$

и один положительный корень:

$$s_2 = (4\lambda - \mu)/2 + \sqrt{[(\mu - 4\lambda)/2]^2 + 4\lambda(\mu - \lambda)}.$$

В случае стабильной системы при $\lambda < \mu$ выполняется условие $4\lambda(\mu - \lambda) > 0$.

Теперь выполнение условия (1) для построенных функций $\psi_+(s)$ и $\psi_-(s)$ очевидно. Это подтверждает и рисунок 1, где отображены нули и полюса отношения $\psi_+(s)/\psi_-(s)$ на комплексной s -плоскости для исключения ошибок построения спектрального разложения. На рисунке 1 полюсы отмечены крестиками, а нули – кружками.

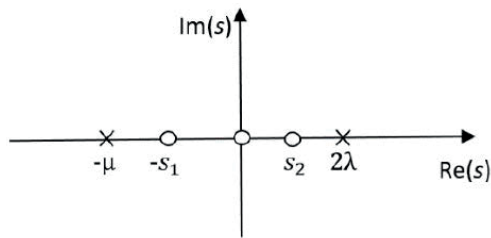


Рисунок 1. Нули и полюсы функции $\psi_+(s)/\psi_-(s)$ для системы $E_2/M/1$

Проверка выполнения условий (2) дает

$$\lim_{|s| \rightarrow \infty} \frac{\psi_+(s)}{s} = 1, \quad \lim_{|s| \rightarrow \infty} \frac{\psi_-(s)}{s} = \lim_{|s| \rightarrow \infty} \frac{(2\lambda - s)^2}{s(s - 2)} = -1,$$

следовательно, эти условия также выполнены.

Далее по методике спектрального разложения найдем константу K :

$$K = \lim_{|s| \rightarrow 0} \frac{\psi_+(s)}{s} = \lim_{|s| \rightarrow 0} \frac{s + s_1}{s + \mu} = \frac{s_1}{\mu}.$$

Далее построим функцию $\Phi_+(s) = K/\psi_+(s)$: $\Phi_+(s) = \frac{s_1(s + \mu)}{\mu s(s + s_1)}$. Отсюда преобразование Лапласа функции плотности времени ожидания

$$W^*(s) = s * \Phi_+(s) = \frac{s_1(s + \mu)}{\mu(s + s_1)}.$$

Для нахождения среднего времени ожидания найдем производную от функции $W^*(s)$ со знаком минус в точке $s = 0$:

$$\begin{aligned} -\frac{dW^*(s)}{ds} \Big|_{s=0} &= -\left[\frac{s_1\mu(s + s_1) - s_1(s + \mu)\mu}{\mu^2(s + s_1)^2} \right] \Big|_{s=0} = \\ &= \frac{s_1\mu^2 - s_1^2\mu}{\mu^2 s_1^2} = \frac{1}{s_1} - \frac{1}{\mu}. \end{aligned}$$

В окончательном виде среднее время ожидания для системы $E_2/M/1$ равно

$$\bar{W} = 1/s_1 - 1/\mu, \quad (6)$$

где $s_1 = (\mu - 4\lambda)/2 + \sqrt{[(\mu - 4\lambda)/2]^2 + 4\lambda(\mu - \lambda)}$, абсолютное значение корня $-s_1$.

Система $E_2/M/1$ с запаздыванием

Рассмотрим СМО, для которой законы распределения входного потока и времени обслуживания заданы функциями плотности как

$$a(t) = 4\lambda^2(t - t_0)e^{-2\lambda(t - t_0)}; \quad (7)$$

$$b(t) = \mu e^{-\mu(t - t_0)}. \quad (8)$$

Такую систему мы уже обозначили $E_2^-/M^-/1$.

Утверждение. Спектральное разложение решения ИУЛ для системы $E_2^-/M^-/1$ $A^*(-s) * B^*(s) - 1 = \psi_+(s)/\psi_-(s)$ имеет точно такой же вид, что и для системы $E_2/M/1$.

Доказательство. Преобразование Лапласа функции (7) есть

$$A^*(s) = \left(\frac{2\lambda}{2\lambda + s} \right)^2 e^{-t_0 s},$$

а функции (8):

$$B^*(s) = \frac{\mu}{\mu + s} e^{-t_0 s}.$$

Из предыдущего раздела следует, что для системы $E_2/M/1$ спектральное разложение имеет вид

$$\frac{\psi_+(s)}{\psi_-(s)} = -\frac{s(s + s_1)(s - s_2)}{(2\lambda - s)^2(s + \mu)}.$$

Для системы $E_2^-/M^-/1$ имеем

$$\begin{aligned} A^*(-s) * B^*(s) - 1 &= \left(\frac{2\lambda}{2\lambda - s} \right)^2 e^{t_0 s} \times \frac{\mu}{\mu + s} e^{-t_0 s} - 1 = \\ &= \left(\frac{2\lambda}{2\lambda - s} \right)^2 \times \frac{\mu}{\mu - s} - 1. \end{aligned}$$

Здесь показатели степени у экспонент обнуляются, и тем самым операция сдвига в спектральном разложении нивелируется. Спектральные разложения решения ИУЛ, а также преобразование Лапласа функции плотности времени ожидания (5) для обеих систем $E_2/M/1$ и $E_2^-/M^-/1$ совпадают, что и требовалось доказать.

Далее нам необходимо определить числовые характеристики распределений E_2^- (7) и M^- (8). Они нужны в свою очередь для определения неизвестных параметров распределений (7) и (8) по известному методу моментов.

Определение числовых характеристик распределения E_2^- и M^-

Для их определения воспользуемся свойством преобразования Лапласа функции плотности воспроизводить моменты:

$$-\frac{dA^*(s)}{ds}\Big|_{s=0} = -\frac{d}{ds}\left[\left(\frac{2\lambda}{2\lambda+s}\right)^2 e^{-t_0 s}\right]\Big|_{s=0} = \left[\frac{8\lambda^2}{(2\lambda+s)^3} e^{-t_0 s} + \left(\frac{2\lambda}{2\lambda+s}\right)^2 t_0 e^{-t_0 s}\right]\Big|_{s=0} = 1/\lambda + t_0.$$

Отсюда среднее значение интервала между поступлениями требований: $\bar{\tau}_\lambda = \lambda^{-1} + t_0$. Найдя вторую производную от преобразования Лапласа функции (7) при $s = 0$, определим второй начальный момент интервала между поступлениями $\frac{d^2 A^*(s)}{ds^2}\Big|_{s=0} = \frac{3}{2\lambda^2} + 2\frac{t_0}{\lambda} + t_0^2$. Тогда коэффициент вариации $c_\lambda = 1/\sqrt{2}(1 + \lambda t_0)$.

Второй начальный момент интервала между поступлениями $\frac{d^2 A^*(s)}{ds^2}\Big|_{s=0} = \frac{3}{2\lambda^2} + 2\frac{t_0}{\lambda} + t_0^2$, откуда $\bar{\tau}_\lambda^2 = \frac{3}{2\lambda^2} + 2\frac{t_0}{\lambda} + t_0^2$. Отсюда коэффициент вариации

$$c_\lambda = 1/\sqrt{2}(1 + \lambda t_0). \quad (9)$$

Поступив аналогично для распределения M^- с преобразованием Лапласа функции (8), получим среднее значение времени обслуживания $\bar{\tau}_\mu = \mu^{-1} + t_0$, а коэффициент вариации

$$c_\mu = 1/(1 + \mu t_0). \quad (10)$$

Заметим, что для распределения E_2^- : $\bar{\tau}_\lambda = \lambda^{-1}$, $c_\lambda = 1/\sqrt{2}$. Сравнивая результаты числовых характеристик $\bar{\tau}_\lambda$, c_λ для распределений E_2^- и E_2^- , можно увидеть разницу между ними, полученную ввиду сдвига законов распределений на $t_0 > 0$. Коэффициент вариации для распределения E_2^- : c_λ уменьшается при сдвиге в $(1 + \lambda t_0)$ раз по сравнению с коэффициентом c_λ для распределения E_2^- .

Для времени обслуживания по закону M^- коэффициент вариации c_μ уменьшается при сдвиге в $(1 + \mu t_0)$ раз по сравнению с коэффициентом c_μ для распределения M^- .

Учитывая, что среднее время ожидания в системе $G/G/1$ связано с коэффициентами вариаций времени между поступлениями требований и времени обслуживания квадратичной зависимостью, в системе с запаздыванием вре-

мя ожидания будет меньше, чем в обычной системе.

Теперь, исходя из полученных параметров распределения для системы $E_2^-/M^-/1$, время ожидания для нее определяем из выражения (6), где параметры $\lambda = 1/(\bar{\tau}_\lambda - t_0)$, $\mu = 1/(\bar{\tau}_\mu - t_0)$, $s_1 = (\mu - 4\lambda)/2 + \sqrt{[(\mu - 4\lambda)/2]^2 + 4\lambda(\mu - \lambda)}$.

Теперь, задав в качестве входных параметров для расчета системы $E_2^-/M^-/1$ полученные выше значения $\bar{\tau}_\lambda$, $\bar{\tau}_\mu$, c_λ , c_μ , t_0 , можно рассчитать среднее время ожидания по выражению (6) для диапазонов изменения коэффициентов вариаций $c_\lambda \in (0, 1/\sqrt{2})$ и $c_\mu \in (0, 1)$, определяемыми выражениями (9) и (10) соответственно в зависимости от величины параметра сдвига $t_0 > 0$.

Ниже в таблице 1 приведены данные расчетов для системы $E_2^-/M^-/1$, полученные при малой ($\rho = 0,1$), средней ($\rho = 0,5$) и высокой нагрузке ($\rho = 0,9$) и параметре сдвига $t_0 = 0,01; 0,1; 0,5; 0,9$. Для сравнения в правой колонке приведены данные для обычной системы $E_2/M/1$.

Таблица 1. Результаты экспериментов для СМО $E_2^-/M^-/1$ и $E_2/M/1$

Входные параметры				Среднее время ожидания	
ρ	c_λ	c_μ	t_0	Для $E_2^-/E_2^-/1$	Для $E_2/E_2/1$
0,1	0,64	0,1	0,9	0,000	0,030
	0,67	0,5	0,5	0,005	
	0,70	0,9	0,1	0,023	
	0,71	0,99	0,01	0,029	
0,5	0,39	0,1	0,9	0,003	0,618
	0,53	0,5	0,5	0,132	
	0,67	0,9	0,1	0,491	
	0,70	0,99	0,01	0,605	
0,9	0,13	0,1	0,9	0,055	6,588
	0,39	0,5	0,5	1,609	
	0,64	0,9	0,1	5,322	
	0,70	0,99	0,01	6,456	

С уменьшением значения параметра t_0 среднее время ожидания в системе $E_2^-/M^-/1$ стремится к среднему времени ожидания в системе $E_2/M/1$. Данные таблицы 1 подтверждают тот факт, что за счет уменьшения коэффициентов вариации c_λ и c_μ из-за ввода параметра

сдвига t_0 уменьшается среднее время ожидания в системе.

Заключение

Полученные результаты приводят к следующим выводам.

1. Операция сдвига во времени, с одной стороны, приводит к увеличению загрузки системы с запаздыванием. Для системы $E_2^-/M^-/1$ с запаздыванием загрузка увеличивается в $(1 + \lambda t_0) / (1 + \mu t_0)$ раз по сравнению с обычной системой $E_2/M/1$.

2. Операция сдвига во времени, с другой стороны, уменьшает коэффициенты вариаций интервала между поступлениями и времени обслуживания требований. В связи с тем, что среднее время ожидания в системе $G/G/1$ связано с коэффициентами вариаций интервалов поступления и обслуживания квадратичной зависимостью, среднее время ожидания в системе с запаздыванием будет меньше, чем в обычной системе при одинаковом коэффициенте загрузки. Например, для системы $E_2^-/M^-/1$ при загрузке $\rho = 0,9$ и параметре сдвига $t_0 = 0,9$ коэффициент вариации интервалов поступления c_λ уменьшается с 1 для обычной системы до 0,13; коэффициент вариации времени обслуживания c_μ уменьшается с $1/\sqrt{2}$ до 0,1, а время ожидания уменьшается с 6,59 единиц времени для обычной системы до 0,055 единиц времени.

3. Изложенные результаты справедливы только для одинаковых параметров сдвига t_0 для распределения интервалов между поступлениями требований и времени обслуживания.

Литература

1. Тарасов В.Н. Бахарева Н.Ф., Блатов И.А. Анализ и расчет системы массового обслуживания с запаздыванием // Автоматика и телемеханика – 2015. – № 11. – С.51–59.
2. Клейнрок Л. Теория массового обслуживания. Пер. с англ. М.: Машиностроение, 1979. – 432 с.

3. Brannstrom N. A Queueing Theory analysis of wireless radio systems – Applied to HS-DSCH. Lulea university of technology, 2004. – 79 p.
4. Тарасов В.Н. Исследование систем массового обслуживания с гиперэкспоненциальными входными распределениями // Проблемы передачи информации. – 2016. – №1. – С.16-26.
5. RFC 3393 IP Packet Delay Variation Metric for IP Performance Metrics (IPPM)// URL: <https://tools.ietf.org/html/rfc3393> (д.о. 26.02.2016).
6. Тарасов В.Н., Бахарева Н.Ф., Горелов Г.А. Математическая модель трафика с тяжелохвостным распределением на основе системы массового обслуживания $H_2/M/1$ // Инфокоммуникационные технологии. – 2014. – Т.12. – №3. – С.36-41.
7. Тарасов В.Н., Бахарева Н.Ф., Горелов Г.А., Малахов С.В. Анализ входящего трафика на уровне трех моментов распределений временных интервалов // Информационные технологии – 2014. – №9. – С.54-59.
8. Тарасов В.Н., Бахарева Н.Ф., Липилина Л.В. Математическая модель телетрафика на основе системы $G/M/1$ и результаты вычислительных экспериментов // Информационные технологии. – 2016. – №2. – С.121-126.
9. Тарасов В.Н., Горелов Г.А., Ушаков Ю.А. Восстановление моментных характеристик распределения интервалов между пакетами входящего трафика // Инфокоммуникационные технологии – 2014. – Т.12. – №2. – С. 40-44.
10. Whitt W. Approximating a point process by a renewal process : two basic methods // Operation Research, 30. – 1982. – No. 1. – P. 125-147.

Получено 30.08.2018

Тарасов Вениамин Николаевич, д.т.н., профессор, заведующий Кафедрой программного обеспечения и управления в технических системах (ПОУТС) Поволжского государственного университета телекоммуникаций и информатики (ПГУТИ). Тел. (8-846) 228-00-13. E-mail: tarasov-vn@psuti.ru

Бахарева Надежда Федоровна, д.т.н., профессор, заведующая Кафедрой информатики и вычислительной техники ПГУТИ. Тел. (8-846) 339-11-31. E-mail: bakhareva-nf@psuti.ru

Ахметшина Элеонора Газинуровна, ассистент Кафедры ПОУТС ПГУТИ. Тел. (8-846)2280013. E-mail: elyamalusha@mail.ru

SOLUTION FOR QUEUING SYSTEMS $E_2/M/1$ WITH ORDINARY AND SHIFTED INPUT DISTRIBUTIONS

Tarasov V.N., Bakhareva N.F., Akhmetshina E.G.

Povolzhskiy State University of Telecommunications and Informatics, Samara, Russian Federation

E-mail: tarasov-vn@psuti.ru

In queuing theory, the studies of the systems $G/M/1$ and $G/G/1$ are particularly relevant because there still exist no final solution for the general case. In this article we present results on (QS) $G/M/1$ and $G/G/1$ queuing systems (QS): $E_2/M/1$ with Erlang and exponential input distributions, and also systems $E_2^-/M^-/1$ with delay in time, respectively. For the system with time delay the Erlang distribution of the second order shifted to the right from the zero point is selected as the input distribution along with the shifted exponential distribution. For such distribution laws, the classical method of spectral decomposition of the solution of the Lindley's integral equation for systems $G/G/1$ allows to obtain a closed-form solution. It is shown that in a system with time delay the average waiting time in queue is less than in the usual system. This is explained by the fact that the time shift reduces the coefficients of variation of the intervals between the arrival and the service time, and as known from queuing theory, the average waiting time is related to these coefficients of variation by a quadratic dependence. The $E_2/M/1$ system works only for the arrival intervals variation factor equal to $1/\sqrt{2}$ and the service time variation factor equal to 1, while the $E_2^-/M^-/1$ system allows us to work with the arrival intervals variation factor in the range of $(0, 1/\sqrt{2})$ and the service time variation factor in the range of $(0, 1)$, which expands the scope of these systems. For deriving the solutions, the classical method of spectral decomposition of the solution of the Lindley's integral equation was used.

Keywords: *QS $E_2/M/1$, $E_2^-/M^-/1$, the average waiting time, the method of spectral decomposition, Lindley integral equation, Laplace transform*

DOI: 10.18469/ikt.2018.16.4.04

Tarasov Veniamin Nikolaevich, Povolzhsky State University of Telecommunications and Informatics, 77, Moskovskoe shosse, Samara, 443090, Russian Federation; Head of the Department of Software and Management in Technical Systems, Doctor of Technical Science, Professor. Tel. +78462280013. E-mail: tarasov-vn@psuti.ru

Bakhareva Nadezhda Fedorovna, Povolzhsky State University of Telecommunications and Informatics, 77, Moskovskoe shosse, Samara, 443090, Russian Federation; Head of the Department of Informatics and Computer Technics, Doctor of Technical Science, Professor. Tel. +78463391131. E-mail: bakhareva-nf@psuti.ru

Akhmetshina Eleonora Gazinurovna, Povolzhsky State University of Telecommunications and Informatics, 77, Moskovskoe shosse, Samara, 443090, Russian Federation; Assistant of the Department of Software and Management in Technical Systems. Tel. +78462280013. E-mail: elyamalusha@mail.ru

References

1. Tarasov V.N., Bakhareva N. F., Blatov I.A. Analysis and calculation of queuing system with delay. *Automation and Remote Control*, 2015, no.11, pp.1945-1951. doi: 10.1134/S0005117915110041.
2. Kleinrock L. *Teoriya massovogo obsluzhivaniy* [Queuing theory] Moscow, Mashinostroyeniye Publ, 1979, 432p.
3. Brannstrom N. *A Queueing Theory analysis of wireless radio systems – Applied to HS-DSCH*. Lulea university of technology, 2004. 79 p.
4. Tarasov V.N. Analysis of queues with hyperexponential arrival distributions. *Problems of Information Transmission*, 2016, no.52:1, pp.14-23. doi:10.1134/S0032946016010038
5. RFC 3393 [IP Packet Delay Variation Metric for IP Performance Metrics (IPPM)] Available at: <https://tools.ietf.org/html/rfc3393>. (accessed: 26.02.2016).
6. Tarasov V.N., Bakhareva N.F., Gorelov G.A. Matematicheskaya model trafika s tyazhelohvostnym raspredeleniem na osnove sistemy massovogo obsluzhivaniya $H_2/M/1$ [Mathematical model of traffic with heavy-tailed distribution based on the queuing system $H_2/M/1$] *Infokommunikacionnye tekhnologii*, 2014, no. 3, pp. 36-41.

7. Tarasov V. N., Bahareva N. F., Gorelov G. A., Malakhov S. V. Analiz vhodiaschego trafika na urovne treh momentov raspredeleniy [Analyzing the Incoming Traffic at the Three Moments Distribution of Time Intervals]. *Informacionnye tehnologii*, 2014, no. 9, pp. 54-59.
8. Tarasov V. N., Bahareva N. F., Lipilina L. V. Matematicheskaya model teletrafika na osnove sistemy G/M/1 i rezultaty vychislitelnykh eksperimentov [Mathematical Model of Teletraffic on the Based G/M/1 System and Results of Computational Experiment]. *Informacionnye tehnologii*, 2016, no. 2, pp.121-126.
9. Tarasov V.N., Gorelov G.A., Ushakov Y.A. Vosstanovlenie momentnykh harakteristik raspredeleniya intervalov vremeni mezhdu paketami vhodiaschego trafika [Restoring moment distribution characteristics interval between packets of incoming traffic]. *Informacionnye tehnologii*, 2014, no. 2, pp.40-44
10. Whitt W. Approximating a point process by a renewal process: two basic methods. *Operation Research*, 1982, vol. 30 no. 1, pp. 125-147.

Received 30.08.2018

ТЕХНОЛОГИИ КОМПЬЮТЕРНЫХ СИСТЕМ И СЕТЕЙ

УДК 519.872

АНАЛИЗ ВРЕМЕНИ ОЖИДАНИЯ В G/G/1 ОЧЕРЕДИ

Караулова О.А., Киреева Н.В., Чунахина Л.Р.

Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики, Самара, РФ

E-mail: garip4ik555@mail.ru

Актуальность и практическая значимость изучения очередей с зависимыми процессами прибытия очевидна, так как точные решения (аналитические или численные) обычно недоступны для очереди системы G/G/1. В настоящее время известны работы по исследованию сетевого трафика в IP-сетях, где каждому виду трафика сопоставлен закон распределения. Проведен анализ статистических параметров сетевого трафика. По результатам моделирования получены распределения для интервалов времени между пакетами и длительностей пакетов – функции распределения Вейбулла и Парето. Впоследствии произведена аппроксимация их суммой затухающих экспонент, и аппроксимации приближения PMRQ аппроксимации распределения услуг в пиковом режиме потока. Определена характеристика – среднее время ожидания пакетов в очереди. Приближение PMRQ в значении среднего времени ожидания в TES+/G/1, MMPP сравнимо с аналитическими значениями этой же величины при решении спектральным способом интегрального уравнения Линдли, полученными при моделировании реального трафика. Погрешность результатов полученного решения определяется точностью аппроксимации распределений для анализа системы G/G/1.

Ключевые слова: аппроксимация суммой затухающих экспонент, PMRQ, PMRS, интегральное уравнение Линдли, преобразование Лапласа, распределение с «тяжелым» хвостом, среднее время ожидания, очередь G/G/1, очередь TES+/G/1

Введение

В телекоммуникационном оборудовании аналитическое исследование и расчет статистических параметров трафика дает возможность приблизиться к определению пропускной способности сети, оптимального размера буфера. Для решения задач, в которых существуют случайные события, используются как аналитические, так и имитационные модели. Зачастую аналитические модели предпочтительнее имитационных по нескольким причинам: не требуется проведения большого числа испытаний; можно получить оптимальное решение.

Традиционная теория очередей посвящена очередям, где время между прибытием и время обслуживания являются независимыми процес-

сами обновления. Есть предположение о том, что длительности обслуживания пакетов взаимно независимы, а допущение о независимости потока пакетов от интервалов между прибытиями неоправданно – следовательно, необходимо учитывать при моделировании СМО G/G/1 свойство самоподобия данных процессов. Изучение очередей с зависимыми процессами прибытия является актуальным и имеет практическую ценность. Можно сделать вывод: точные решения (аналитические или численные) обычно недоступны для очереди G/G/1, так как исследователи прибегают к моделированию Монте-Карло или используют классическую теорию Маркова и ее вариации для проведения параметрического анализа по средней длине очереди [1].