

7. Klovsky D.D., Kontorovich V.Ya., Shirokov S.M. *Modeli nepreryvnyh kanalov svyazi na osnove stohasticheskikh differencial'nyh uravnenij* [Models of Continuous Communication Channels Based on Stochastic Differential Equations]. Moscow: Radio and Communication, 1984, 248 p. (In Russian).
8. Bykov V.V. *Cifrovoe modelirovanie v statisticheskoy radiotekhnike* [Digital Modeling in Statistical Radio Engineering]. Moscow: Soviet Radio, 1971, 328 p. (In Russian).
9. Ivanova V.G., Tyazhev A.I. *Cifrovaya obrabotka signalov i signal'nye processory* [Digital Signal Processing and Signal Processors]. Samara: Ofort, 2008, 264 p. (In Russian).
10. Kartashevsky V.G. *Obrabotka prostranstvenno-vremennyh signalov v kanalah s pamyat'yu* [Processing of Spatio-Temporal Signals in Channels with Memory]. Moscow: Radio and Communications, 2000, 272 p. (In Russian).

Received 01.11.2019

## ТЕХНОЛОГИИ ТЕЛЕКОММУНИКАЦИЙ

УДК 681.3

### МЕТОД РАСЧЕТА ВЕРОЯТНОСТИ ОШИБКИ НА БИТ В КАНАЛАХ СВЯЗИ С БЛОЧНЫМИ ЗАМИРАНИЯМИ ДЛЯ ПРИЕМНИКА С ЛИНЕЙНЫМ СЛОЖЕНИЕМ МЯГКИХ РЕШЕНИЙ НЕКОГЕРЕНТНОГО ДЕМОДУЛЯТОРА

Шевченко В.А.<sup>1</sup>, Пашинцев В.П.<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Департамент информационных систем Министерства обороны РФ, Москва, РФ

<sup>2</sup> Северо-Кавказский федеральный университет, Ставрополь, РФ

E-mail: shevv67@mail.ru

Определены выражения для верхней аддитивной границы вероятности ошибки на бит в «некогерентных» каналах связи с кодированием и псевдослучайным перемежением при использовании метрики с линейным сложением мягких решений демодулятора в условиях воздействия блочных замираний, вызывающих группирование ошибок. Выражения конкретизированы для замираний, подчиненных распределениям Райса, Накагами-*t* и Накагами-*q*. С использованием полученных выражений на примере двоичных расширенных кодов Боуза-Чоудхури-Хоквингхема показано, что при заданном ограничении на задержку передачи информации коды длиной 64, 128 обеспечивают допустимую вероятность ошибки 10–5 при отношении «сигнал/шум» на входе приемника 16–18 dB и энергетический выигрыш 3–4 dB по сравнению с кодом с восьмикратным повторением.

**Ключевые слова:** вероятность ошибки, пакет ошибок, замирания, некогерентный канал связи, метрика, кодирование

### Введение

Известно [1–3], что при наличии в каналах связи глубоких замираний (например, релеевского типа) для достижения вероятности ошибки на бит  $P_b = 10^{-5}$  требуется обеспечить на входе оптимального некогерентного приемника сигналов с двукратной частотной манипуляцией отношение энергии сигнала  $E_b$ , приходящейся на бит информации, к спектральной плотности мощности шума  $N_0$  (отношение «сигнал/шум», далее – СШ) порядка 50 dB. Это указывает на необходимость увеличения СШ на входе приемника на 37 dB по сравнению со случаем отсутствия замираний (когда достаточно обеспечить СШ на уровне 13 dB).

Кодирование с исправлением ошибок обеспечивает существенное повышение помехоустойчивости в каналах связи с замираниями [3; 4].

Определяющим при применении кодирования в каналах связи с замираниями является время когерентности канала связи. Когда время когерентности превышает длительность передачи символа кода, замирания становятся время-селективными (блочными, пакетированными). Для борьбы с такими замираниями в сочетании с кодированием используется перемежение.

Идея перемежения сводится к тому, что кодовые символы передаются в канал связи не в том порядке, в котором они поступают с выхода кодера, а после перестановки, после которой соседние символы одной кодовой комбинации разделяются символами других кодовых комбинаций [21]. Расстояние между такими символами зависит от глубины перемежения *t*. Как правило, глубина перемежения выбирается таким образом, чтобы исключить группирование ошибок в пакеты [11].

Согласно приближенным расчетам, приведенным в [3], допустимая вероятность ошибки на бит информации  $P_b = 10^{-5}$  в канале с релеевскими замираниями при использовании кодирования с перемежением обеспечивается при отношении СШ в пределах 13...21 дБ. Это указывает на возможность получения энергетических выигрышей 37...29 дБ по сравнению со случаем применения одиночного (неразнесенного) приема замирающих сигналов (когда требуется обеспечить СШ на уровне 50 дБ).

На практике, когда имеются ограничения на задержку передачи информации  $t_d$ , следует учитывать, что увеличение глубины перемежения с целью обеспечить независимость ошибок предполагает уменьшение длины кода и его корректирующей способности. В условиях априорной неопределенности относительно времени когерентности канала исключение группирования ошибок может привести к неоправданному укорочению длины кода. Возможным выходом из сложившейся ситуации является использование блочных ( $n, k$ ) кодов большой длины и с высокой корректирующей способностью в сочетании с перемежением, допускающим группирование ошибок.

Для подтверждения реализуемости указанного метода повышения помехоустойчивости канала связи требуется знание зависимости вероятности ошибки на бит  $P_b = \psi(E_b/N_0, n, k, m, F)$  от СШ на входе приемника ( $E_b/N_0$ ), параметров помехоустойчивых кодов ( $n, k$ ), глубины перемежения  $m$  и параметров замираний  $F$  для каналов с время-селективными (блочными) замираниями затруднительно. В качестве параметров замираний понимается вероятностное распределение, которому они подчиняются, а также время когерентности канала связи, нормированное относительно длительности передачи символа кода.

Для описания замираний в канале связи ограничимся рассмотрением распределений Накагами ( $-m, -q$ ) и Райса. Как показали исследования [10], Накагами- $m$  распределением наиболее хорошо описывается плотность распределения амплитуды сигнала в трансионосферном канале связи. При этом данное распределение достаточно близко аппроксимируется распределением Райса [11]. Распределение Накагами- $q$  (или Хойта) обычно наблюдается в каналах спутниковой связи, подвергающихся сильной ионосферной сцинтиляции [11]. Получить зависимость  $P_b = \psi(E_b/N_0, n, k, m, F)$  в виде точного аналитического выражения затруднительно.

Известные [4; 6–8] методы оценки помехоустойчивости приема сигналов в каналах связи с кодированием и время-селективными замираниями ограничены допущением, что в пределах пакета ошибок амплитуда и начальная фаза сигналов не изменяются. Для данной модели известен метод частично-когерентного приема, предлагающий «когерентное» сложение отсчетов на выходах каналов приема синфазной и квадратурной составляющих сигналов с последующим их «некогерентным» объединением. Порядок комбинирования когерентных решений в некогерентные при замираниях по законам Райса (с параметром глубины замираний  $K$ ) и Накагами- $m$  определен соответственно в [6; 7].

В [4; 8] проанализированы характеристики приемника с «субоптимальным» квадратичным комбинированием когерентных «мягких решений» синфазного и квадратурного каналов приема в условиях блочных замираний. Однако частично-когерентный прием неприменим для каналов связи с псевдослучайной перестройкой рабочей частоты (ППРЧ). В данных каналах связи время, в течение которого начальная фаза остается неизменной, определяется значением, обратным скорости перестройки рабочей частоты, и может быть существенно меньше времени когерентности канала связи. Последнее будет определять только время, в течение которого остается постоянной амплитуда сигнала, при условии, что замирания не являются частотно-селективными в пределах полосы частот сигнала с ППРЧ. Назовем такие блочные замирания некогерентными.

Известен общий метод расчета асимптотически точных верхних границ вероятности ошибки  $P_b$  с использованием границы Чернова для каналов связи с кодированием и псевдослучайным перемежением при наличии группирования ошибок, природа возникновения которых не конкретизирована [5].

Целью статьи является разработка метода расчета верхней границы вероятности ошибки на бит в «некогерентных» каналах связи при использовании метрики с линейным сложением мягких решений демодулятора в условиях воздействия блочных замираний.

### Модель канала связи

Пусть в канале связи для передачи информации используется блочный ( $n, k$ ) код, имеющий скорость  $r = k/n$  и минимальное расстояние  $d_{\min}$ . Дистанционные свойства кода характеризуются коэффициентами  $A_d = dC_d/n$ , где  $C_d$  – число кодовых комбинаций весом  $d$ .

Кодовая комбинация состоит из символов кода  $x_i$ , где  $i = 1, n$ , которые могут принимать одно из целых чисел от 0 до  $M - 1$ , где  $M$  – объем алфавита символов кода, и образует последовательность  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

Символы кода передаются соответствующими ортогональными сигналами из ансамбля  $\{S_0(t), S_1(t), \dots, S_{M-1}(t)\}$ . Объем ансамбля используемых сигналов равен объему алфавита кодовых символов  $M$ . На вход приемника поступает смесь полезного сигнала и теплового шума. Кроме того, полезный сигнал подвергается замираниям. Энергия сигнала, приходящаяся на бит информации, на входе демодулятора определяется величиной  $E_b$ .

Тепловой шум  $n(t)$  представляет собой аддитивный белый гауссовский шум с односторонней спектральной плотностью  $N_0$  и является независимым от амплитуды замирания. Замирания представляют собой мультиплектирующую помеху, в результате воздействия которой мгновенная мощность принятого сигнала модулируется амплитудой замирания  $a_j$  [7].

Амплитуда сигнала  $a_j$  является случайной величиной со среднеквадратичным значением  $\Omega = E(a_j^2)$ . При расчете энергетического бюджета радиолинии величину  $\Omega$  следует учесть в качестве дополнительных потерь (например, на поглощение энергии сигнала в среде распространения радиоволн). Флуктуационной составляющей амплитуды сигнала является нормированная интенсивность этого сигнала

$$c_j = a_j^2 / \Omega. \quad (1)$$

Отношение энергии сигнала с замираниями к спектральной плотности шума имеет среднее значение

$$\frac{\bar{\gamma}_{sn}^2}{2} = \frac{\Omega E_b}{N_0} r \log_2 M \quad (2)$$

и мгновенное

$$\xi_j = c_j \bar{\gamma}_{sn}^2 / 2. \quad (3)$$

Время когерентности канала связи  $\tau_F$  определяет количество кодовых символов  $B$ , в течение передачи которых амплитуда (интенсивность) сигнала остается постоянной.

При псевдослучайном перемежении с глубиной  $m \leq B$ , как показано в [5], возникают сдвоенные пакеты (блоки) либо одинаковой длины  $b = B/m$ , либо с длинами  $b-1$  и  $b+1$ . На интервале передачи одной кодовой комбинации возможно возникновение  $P = \lfloor n/2b \rfloor$  таких блоков. Кроме того, в случае, когда длина кода не делится на величину  $2b$  без остатка, существует блок длины  $n-2bP$ .

В демодуляторе принятая канальная последовательность обрабатывается параллельно в детекторах сигналов  $S_0(t)$ ,  $S_1(t)$ , ...,  $S_{M-1}(t)$ . На выходе детекторов по окончанию приема  $i$ -го символа кода формируются мягкие решения, нормированные значения которых относительно дисперсии теплового шума образуют вектор  $Y_i = (Y_{0,i}, Y_{1,i}, \dots, Y_{M-1,i})$ .

Примем, что точная и своевременная оценка начальной фазы передаваемых сигналов затруднительна и возможен только «некогерентный» прием. Тогда в случае воздействия замираний и теплового шума величина  $Y_{k,i}$ , где  $k = 0, M-1$ , имеет следующую плотность распределения [9]:

$$p_{Y_{k,i}}(y_{k,i}; z_j | x_i) = \begin{cases} \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{(y_{k,i} + c_j \bar{\gamma}_{sn}^2)}{2}\right) \times \\ \times I_0\left(\sqrt{y_{k,i} c_j \bar{\gamma}_{sn}^2}\right), & k = x_i, \\ \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{y_{k,i}}{2}\right), & k \neq x_i. \end{cases} \quad (4)$$

Декодирование производится по максимуму правдоподобия на основе решений демодулятора с использованием метрики  $m(Y_i, x_i; c_j)$ .

Под воздействием замираний и теплового шума возможна трансформация переданной кодовой последовательности  $\mathbf{x}$  в последовательность  $\hat{\mathbf{x}} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n)$ , отличающуюся от переданной  $d$  символами кода. Без потери общности примем, что  $x_i = 0$  и  $\hat{x}_i = 1$  для  $i = \overline{1, n}$ .

### Верхняя граница вероятности ошибки в канале связи с группированием ошибок

Верхняя аддитивная граница вероятности ошибки на бит имеет вид [19]

$$P_b \leq \sum_{d=d_{\min}}^n A_d P_d(E_{\hat{x}, x}), \quad (5)$$

где  $P_d(E_{\hat{x}, x})$  – вероятность ошибочного приема кодовой комбинации  $\hat{\mathbf{x}}$  с расстоянием Хэмминга  $d$  вместо переданной  $\mathbf{x}$ .

Для определения  $P_d(E_{\hat{x}, x})$  можно использовать производящие функции моментов разности метрик для принятых ошибочно и переданных символов в блоках. Пусть  $d - i$  ошибочных символов содержится в  $P$  блоках длиной  $2b$ , а остальные  $i$  – в блоке длиной  $n - 2bP$  (в  $P+1$  блоке). Производящую функцию моментов разности метрик для  $i$  ошибочных символов в  $P+1$  блоке обозначим как  $\tilde{D}_1(s, i, n - 2bP)$ , производящую функцию разности метрик для  $d$  ошибочных сим-

волов при их распределении по  $P$  блокам длиной  $2b$  – как  $\tilde{D}_p(s, d, 2b)$ . Производящие функции моментов разности метрик ошибок для блоков и пакетов назовем весовыми функциями.

В этом случае вероятность ошибочного приема кодовой комбинации в (5) определяется согласно выражению [5]

$$P_d(E_{\hat{x},x}) \leq \frac{1}{C_n^d} \sum_{i=\max(0,d-2bP)}^{\min(d,n-2bP)} C_{2bP}^{d-i} C_{n-2bP}^i \times \tilde{D}_p(s, i, n-2bP) \tilde{D}_p(s, d-i, 2b), \quad (6)$$

где  $C_n^d = n! / d!(n-d)!$

Весовая функция  $P$  блоков длиной  $2b$  в (6) описывается выражением

$$\begin{aligned} \tilde{D}_p(s, d, 2b) &= \frac{(2bF-d)! F!}{(2bF)!} \times \\ &\times \sum_{l=\lceil d/(2b) \rceil}^F \frac{A(d, l; \tilde{\mathbf{g}} = (\tilde{g}_1, \tilde{g}_2, \dots, \tilde{g}_{d-l+1}))}{(F-l)!}, \end{aligned} \quad (7)$$

где  $A(d, l; \tilde{\mathbf{g}} = (\tilde{g}_1, \tilde{g}_2, \dots, \tilde{g}_{d-l+1}))$  – однородные полиномы Белла,  $l$  – количество блоков с «ненулевым» весом, максимальное число которых  $F = \min(d, P)$ .

Формула для расчета  $v$ -го элемента последовательности  $\tilde{\mathbf{g}}$  в выражении (7) имеет вид

$$\tilde{g}_v = \tilde{D}_1(s, v, 2b)(2b)! / (2b-v)! \quad (8)$$

Здесь весовая функция блока длиной  $2b$  определяется как

$$\begin{aligned} \tilde{D}_1(s, v, 2b) &= \frac{1}{C_{2b}^v} (\Delta \tilde{D}_1(s, v, 2b) + \\ &+ \sum_{i=\max(0, k=v-b)}^{\min(v, b-1)} ((1-p_{b,b}) C_{b-1}^i C_{b+1}^{v-i} \times \\ &\times D_1(s, i; b-1) D_1(s, v-i; b+1) + \\ &+ p_{b,b} C_b^i C_b^{v-i} D_1(s, i; b) D_1(s, v-i; b))), \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$\Delta \tilde{D}_1(s, v, 2b) =$$

$$\begin{cases} 0, & v < b, \\ p_{b,b} D_1(s, b; b), & v = b, \\ p_{b,b} b D_1(s, 1; b) D_1(s, b; b) + \\ + (1-p_{b,b}) D_1(s, b+1; b+1), & v = b+1, \\ p_{b,b} C_b^{v-b} D_1(s, v-b; b) \times \\ \times D_1(s, b; b) + (1-p_{b,b}) C_{b-1}^{v-b-1} \times \\ \times D_1(s, v-b-1; b-1) \\ \times D_1(s, b+1; b+1), & v > b+1. \end{cases} \quad (10)$$

В выражениях (10), (11)  $p_{b,b} = (2P+1)/4P$  – вероятность появления блока из пакетов оди-

наковой длины,  $D_1(s, v, b)$ ,  $D_1(s, v, b-1)$ ,  $D_1(s, v, b+1)$  – весовые функции пакетов весом  $v$  и длиной  $b-1$ ,  $b+1$  соответственно.

Входящая в (6) весовая функция  $P+1$  блока длиной  $n-2bP$  и весом  $i$  имеет вид

$$\begin{aligned} \tilde{D}_1(s, i, n-2bP) &= \\ &= \begin{cases} D_1(s, i; n-bL), & L - \text{четное}, \\ \sum_{k=\max(0, i-b)}^{\min(n, n-bL)} \frac{C_{n-bL}^k C_b^{i-k}}{C_{b+n-bL}^i} \times \\ \times D_1(s, k; n-bL) \times \\ \times D_1(s, i-k; b), & L - \text{нечетное}. \end{cases} \end{aligned} \quad (11)$$

В выражении (11)  $L = \lfloor n/b \rfloor$  – число пакетов длиной  $b$  в пределах кодовой комбинации длиной  $n$ , а  $D_1(s, v, n-bL)$  – весовая функция пакета весом  $v$  и длиной  $n-bL$ .

### Весовые функции пакетов ошибок

Весовая функция пакета весом  $v$  при наличии в канале связи замираний не зависит от длины пакета  $x$  и определяется выражением

$$\begin{aligned} D_1(s, v, x) &= D(s, v) = \\ &= \int_0^\infty \Phi_{\Omega_1}^v(s; c_j) p_{c_j}(c_j) dc_j, \end{aligned} \quad (12)$$

где  $p_{c_j}(c_j)$  – плотность распределения вероятности нормированной интенсивности замирающего сигнала (1)  $c_j$ .

В выражении (12) производящая функция моментов  $\Phi_{\Omega_1}(s; c_j)$  разности метрик принятого ошибочно и переданного символов кода (далее – разность метрик ошибки)

$$\Omega_1 = m(\mathbf{Y}_i, \hat{x}_i = 1; c_j) - m(\mathbf{Y}_i, x_i = 0; c_j) \quad (13)$$

связана с плотностью распределения  $p_{\Omega_1}(\omega_1; c_j)$  случайной величины  $\Omega_1$  соотношением

$$\Phi_{\Omega_1}(s; c_j) = \int_{-\infty}^\infty \exp(s\omega_1) p_{\Omega_1}(\omega_1; c_j) d\omega_1. \quad (14)$$

### Линейное сложение мягких решений некогерентных квадратичных детекторов

Используя результаты [9], выражение (12) в случае использования для декодирования метрики с линейным взвешиванием мягких решений некогерентных квадратичных детекторов может быть конкретизировано следующим образом:

$$D(s, v) = \frac{1}{(1-4s^2)^v} M_{c_j} \left( -v \frac{\bar{\gamma}_{sn}^2}{2} \frac{2s}{1+2s} \right), \quad (15)$$

где

$$M_{c_j}(p) = \int_0^{\infty} \exp(p c_j) p(c_j) dc_j \quad (16)$$

представляет собой производящую функцию моментов интенсивности  $c_j$  сигналов (зависящую от среднего значения СШ (2)  $\bar{\gamma}_{sn}^2/2 = \Omega E_b r \log_2 M/N_0$ ).

Для замираний, подчиненных закону Райса с параметром  $0 \leq K < \infty$ , производящая функция моментов интенсивности сигналов (16) примет следующий вид [11]:

$$M_{c_j}(p) = \frac{(1+K)}{(1+K)-p} \exp\left[\frac{Kp}{(1+K)-p}\right]. \quad (17)$$

Для замираний, подчиненных закону Накагами- $m$  с параметром  $0.5 \leq m < \infty$ , выражение (16) сводится к следующему [11]:

$$M_{c_j}(p) = \left(1 - \frac{p}{m}\right)^{-m}. \quad (18)$$

Для замираний, подчиненных закону Накагами- $q$  (или Хойта) с параметром  $0 \leq q \leq 1$ , производящей функцией (16) является [11]

$$M_{c_j}(p) = \left[1 - 2p + \frac{(2p)^2 q^2}{(1+q^2)^2}\right]^{-1/2}. \quad (19)$$

### Линейное сложение мягких решений некогерентных детекторов огибающей

Рассмотрим теперь случай линейного взвешивания мягких решений некогерентных детекторов огибающей. Получить выражение, аналогичное (15), для указанного способа сложения затруднительно. Применим для оценки весовой функции  $D(s, v)$  следующий метод.

В интеграле (14) производящая функция моментов разности метрик ошибки  $\Phi_{\Omega_i}(s; c_j)$  является, по сути, верхней границей Чернова вероятности ошибочного приема кодового символа, которая монотонно уменьшается при увеличении мгновенного отношения СШ (3)  $\xi_j = c_j \bar{\gamma}_{sn}^2/2$ , и может быть представлена в следующем виде:

$$\Phi_{\Omega_i}(s; c_j) = C(s) \varphi(c_j \bar{\gamma}_{sn}^2/2) \times \exp(-c_j \bar{\gamma}_{sn}^2/2), \quad (20)$$

где  $C(s)$  – нормирующий коэффициент,  $\varphi(t)$  – мультипликативная функция. Если разложить мультипликативную функцию  $\varphi(t)$  в ряд

$$\varphi(t) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \frac{t^i}{i!} = \frac{1}{t} \sum_{i=1}^{\infty} i a_{i-1} \frac{t^i}{i!} = \frac{1}{t} \sum_{i=1}^{\infty} q_i \frac{t^i}{i!}, \quad (21)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{q} &= (q_1, q_2, \dots, q_{i+1}, \dots) = \\ &= (a_0, 2a_1, \dots, (i+1)a_i, \dots), \end{aligned} \quad (22)$$

то весовая функция (12) примет вид взвешенной суммы [12]

$$\begin{aligned} D(s, v) &= v! C^v(s) \times \\ &\times \sum_{i=v}^{\infty} \frac{A(i, v; \mathbf{q})}{i!} D_{c_j}\left(c_j \frac{\bar{\gamma}_{sn}^2}{2}, v, i-v\right), \end{aligned} \quad (23)$$

где

$$\begin{aligned} D_{c_j}\left(\frac{\bar{\gamma}_{sn}^2}{2}, v, i-v\right) &= \left(\frac{\bar{\gamma}_{sn}^2}{2}\right)^{i-v} \times \\ &\times E\left(c_j^{i-v} \exp\left(-v \frac{c_j \bar{\gamma}_{sn}^2}{2}\right)\right). \end{aligned} \quad (24)$$

Однородные полиномы Белла  $A(i, v; \mathbf{q})$ , с учетом того, что  $A(1, 1; \mathbf{q}) = q_1$ , могут быть определены из следующего рекуррентного соотношения [13]:

$$\begin{aligned} A(v+i, v; \mathbf{q}) &= \\ &= \begin{cases} q_{v+i}, & v = 1, \\ \sum_{j=1}^{i+1} C_{v+i-j}^{v-1} g_j A(v+i-j, v-1; \mathbf{q}), & v > 1. \end{cases} \end{aligned} \quad (25)$$

Для метрики с линейным сложением мягких решений детектора огибающей

$$m(Y_i, k; c_j) = \sqrt{Y_{k,i}} \quad (26)$$

производящая функция моментов разницы метрик ошибки описывается выражением [14]

$$\begin{aligned} \Phi_{\Omega_i}(s; c_j) &= \exp\left(-\frac{c_j \bar{\gamma}_{sn}^2}{2}\right) \times \\ &\times FS(s) FS\_E\left(\sqrt{c_j \bar{\gamma}_{sn}^2}, s\right), \end{aligned} \quad (27)$$

где

$$FS(s) = 1 + s \sqrt{\frac{\pi}{2}} \exp\left(\frac{s^2}{2}\right) \left(1 + \operatorname{erf}\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right)\right), \quad (28)$$

$$\begin{aligned} FS\_E(p, s) &= \\ &= \int_0^{\infty} u \exp(-su - u^2/2) I_0(up) du. \end{aligned} \quad (29)$$

Используя в (29) разложение модифицированной функции Бесселя нулевого порядка  $I_0(up)$  в ряд, запишем выражение (27) в виде

$$\begin{aligned} \Phi_{\Omega_i}(s; c_j) &= \exp(-c_j \bar{\gamma}_{sn}^2/2) FS(s) \times \\ &\times \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^i}{2^i (i!)^2} \int_0^{\infty} u^{2i+1} \exp(-su - u^2/2) du. \end{aligned} \quad (30)$$

Интеграл в правой части выражения (30) используется в интегральном представлении функции параболического цилиндра  $U(a, s)$  [15]:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty x^{a-1/2} \exp(-x^2/2 - sx) dx = \\ = \Gamma(a+1/2) \exp(s^2/4) U(a, s), \end{aligned} \quad (31)$$

где  $a = 2i + 3/2$ . С учетом (31) выражение (30) примет следующий вид:

$$\begin{aligned} \Phi_{\Omega_i}(s; c_j) = \\ = C(s) \exp(-c_j \bar{\gamma}_{sn}^2/2) \phi(c_j \bar{\gamma}_{sn}^2/2), \end{aligned} \quad (32)$$

где

$$C(s) = FS(s), \quad (33)$$

$$\phi(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^i}{i!} B_i U(2i+3/2, s). \quad (34)$$

В выражении (34)

$$\begin{aligned} B_i = \frac{(2i+1)!}{2^i i!} = (2i+1) \frac{(2i-1)!}{2^{i-1} (i-1)!} = \\ = (2i+1) B_{i-1}, \quad B_0 = 1. \end{aligned} \quad (35)$$

Функция параболического цилиндра  $U(a, s)$  может быть найдена с использованием рекуррентного соотношения [15]

$$\begin{aligned} U(n+1/2, s) = \\ = \frac{U(n-3/2, s) - sU(n-1/2, s)}{n}, \end{aligned} \quad (36)$$

с учетом того, что

$$\begin{aligned} U(-1/2, s) &= \exp(-s^2/4), \\ U(1/2, s) &= \sqrt{\pi/2} \exp(s^2/4) \operatorname{erfc}(s/\sqrt{2}). \end{aligned} \quad (37)$$

Из сравнения выражений (34) и (21) можно получить формулы для определения переменных полиномов Белла (22) для метрики с линейным сложением мягких решений детекторов огибающей:

$$\begin{aligned} q_i &= ia_{i-1}, \quad a_{i-1} = B_{i-1} U(2i-1/2, s), \\ q_1 &= a_0 = U(3/2, s). \end{aligned} \quad (38)$$

Величина  $D_{c_j}(\bar{\gamma}_{sn}^2/2, v, i-v)$  в выражении (24) с точностью до знака аргумента является обобщенной производящей функцией моментов мгновенного отношения сигнал/шум  $\xi_j = c_j \bar{\gamma}_{sn}^2/2$ :

$$\begin{aligned} \Phi_{\xi_j}^{(i)}(s) &= D_{c_j}(\bar{\gamma}_{sn}^2/2, -s, i) = \\ &= \frac{1}{\bar{\gamma}_{sn}^2/2} \int_0^\infty \xi_j^i \exp(s\xi_j) p_{c_j}(c_j = \xi_j / (\bar{\gamma}_{sn}^2/2)) d\xi_j. \end{aligned} \quad (39)$$

Обобщенная производящая функция моментов мгновенного отношения сигнал/шум  $D_{c_j}(\bar{\gamma}_{sn}^2/2, -s, i)$  для распределений Райса и Накагами известна [12]. Это позволяет определить

выражения для весовых функций  $D(s, v)$  согласно (23).

Для замираний по закону Райса весовая функция примет вид

$$\begin{aligned} D(s, v) &= \frac{(K+1)}{p \bar{\gamma}_{sn}^2/2} \exp\left(\frac{a}{p} - K\right) C^v(s) \times \\ &\times \sum_{i=v}^{\infty} B_i(p, v) L_{i-v}\left(-\frac{a}{p}\right) A(i, v, \mathbf{q}), \end{aligned} \quad (40)$$

где

$$a = \frac{K(1+K)}{\bar{\gamma}_{sn}^2/2}, \quad p = v + \frac{1+K}{\bar{\gamma}_{sn}^2/2}, \quad (41)$$

$$\begin{aligned} B_i(p, v) &= \left(1 - \frac{v}{i}\right) \frac{1}{p} B_{i-1}(p, v), \\ B_0(p, v) &= 1. \end{aligned} \quad (42)$$

Для полиномов Лаггера справедлива рекуррентная формула [16]

$$L_{i+1}(x) = ((2i+1-x)L_i(x) - iL_{i-1}(x))/(i+1). \quad (43)$$

Когда замирания подчинены распределению Накагами- $m$ , весовая функция определится выражением

$$\begin{aligned} D(s, v) &= \left(\frac{m}{p \bar{\gamma}_{sn}^2/2}\right)^m C^v(s) \times \\ &\times \sum_{i=v}^{\infty} B_i(p, v) A(i, v, \mathbf{q}), \end{aligned} \quad (44)$$

где

$$p = v + m/(\bar{\gamma}_{sn}^2/2), \quad (45)$$

$$\begin{aligned} B_i(p, v) &= \left(1 - \frac{v+1-m}{i}\right) \frac{B_{i-1}(p, v)}{p}, \\ B_0(p, v) &= 1. \end{aligned} \quad (46)$$

При наличии в канале связи замираний Накагами- $q$  будем иметь

$$\begin{aligned} D(s, v) &= \frac{1}{\sqrt{p^2 - a^2}} \frac{1+q^2}{2q \bar{\gamma}_{sn}^2/2} C^v(s) \times \\ &\times \sum_{i=v}^{\infty} B_i(p, a, v) P_{i-v}\left(\frac{p}{\sqrt{p^2 - a^2}}\right) A(i, v, \mathbf{q}), \end{aligned} \quad (47)$$

где

$$a = \frac{1-q^4}{4q^2 \bar{\gamma}_{sn}^2/2}, \quad p = v + \frac{(1+q^2)^2}{4q^2 \bar{\gamma}_{sn}^2/2}, \quad (48)$$

$$\begin{aligned} B_i(p, a, v) &= \left(1 - \frac{v}{i}\right) \frac{1}{\sqrt{p^2 - a^2}} B_{i-1}(p, a, v) \\ B_0(p, a, v) &= 1. \end{aligned} \quad (49)$$

Полиномы Лежандра в выражении (47) могут быть вычислены по рекуррентной формуле [15]

$$\begin{aligned} P_{n+1}(x) &= \frac{2n+1}{n+1}xP_n(x) - \frac{n}{n+1}P_{n-1}(x), \\ P_0(x) &= 1, \quad P_1(x) = x. \end{aligned} \quad (50)$$

## Анализ полученных результатов

Таким образом, разработан метод определения верхней границы вероятности ошибки на бит в «некогерентных» каналах связи при использовании метрики с линейным сложением мягких решений демодулятора в условиях воздействия блочных замираний с распределениями Райса и Накагами.

Данный метод предусматривает выполнение следующих операций.

1. Расчет вероятности ошибки на бит  $P_b$  в виде совокупности выражений (5)–(12), (14) как комбинации весовых функций  $D(s, v)$ , представляющих собой производящие функции моментов разности метрик для принятых ошибочно и переданных символов кода в пакетах ошибок.

2. В случае, когда для декодирования используется метрика с линейным сложением мягких решений квадратичного детектора, весовая функция  $D(s, v)$  определяется выражением (15) и зависит от среднего отношения СИШ (2)  $\bar{\gamma}_{sn}^2/2 = \Omega E_b(k/n) \log_2 M/N_0$  и производящей функции моментов интенсивности сигнала  $M_{c_j}(p)$ . Последняя конкретизирована для замираний по закону Райса, Накагами- $m$  и Накагами- $q$  в виде выражений (17)–(19), зависящих от глубины замираний ( $K, m, q$ ).

3. В случае, когда для декодирования используется метрика с линейным сложением мягких решений детектора огибающей, весовая функция  $D(s, v)$  представлена в виде взвешенной суммы (23) обобщенных производящих функций моментов мгновенного СИШ возрастающего порядка с использованием полиномов Белла в качестве взвешивающих коэффициентов. Выражения для  $D(s, v)$  конкретизированы для обобщенной производящей функции моментов мгновенного СИШ при замираниях по закону Райса (40), Накагами- $m$  (44) и Накагами- $q$  (47).

Все выражения получены в виде рекуррентных формул, не требующих значительных вычислительных затрат.

Отметим, что параметры распределений  $K, m, q$  связаны однозначно с количеством замираний  $AF$  [11]

$$AF = \frac{1+2K}{(1+K)^2}, \quad AF = \frac{1}{m}, \quad (51)$$

$$AF = \frac{2(1+q^4)}{(1+q^2)^2},$$

которое представляет собой нормированную дисперсию амплитуды сигнала

$$AF = \frac{E((a_j^2 - \Omega^2)^2)}{\Omega^2}. \quad (52)$$

Количество замираний  $AF$  может быть использовано в качестве универсального показателя глубины замираний. К примеру, для замираний, обусловленных сцинтиляцией в ионосфере, количество замираний является квадратом индекса сцинтиляции:  $AF = S_4^2$  [20].

Разработанный метод позволяет получить зависимости вероятности ошибки на бит  $P_b = \psi(E_b/N_0, n, k, b, (AF, LW))$  от отношения сигнал/шум на входе приемника ( $E_b/N_0$ ), параметров помехоустойчивых кодов ( $n, k$ ), глубины перемежения ( $m$ ), определяющей длину пакетов ошибок  $b = B/m$ , глубины замираний (с учетом взаимосвязи параметров Райса  $K$  и Накагами  $m, q$  с количеством замираний  $AF$ ) и закона, которому они подчинены  $LW$ , для каналов с времязадержками (блочными) замираниями.

Воспользуемся полученными зависимостями для подтверждения реализуемости метода повышения помехоустойчивости каналов связи с замираниями при наличии ограничения на время задержки передачи информации  $t_D$  за счет использования блочных ( $n, k$ ) кодов большой длины и с высокой корректирующей способностью в сочетании с перемежением, допускающим группирование ошибок в пакеты.

Отношение допустимого времени задержки передачи информации  $t_D$  к времени когерентности канала связи  $\tau_F$  определяет соотношение длины кода  $n$  и средней длины пакетов ошибок  $b = B/m$ :

$$\frac{t_D}{\tau_F} = \frac{n}{B/m} = \frac{n}{b}. \quad (53)$$

Из выражения (53) следует, что увеличение глубины перемежения  $m$  и уменьшение длины пакетов ошибок  $b = B/m$  требует укорочения длины кода  $n$  и наоборот. На объем алфавита кодовых символов степень группирования ошибок влияния не оказывает. Выбор  $m = 2B$  позволяет исключить группирование ошибок.

В качестве примера оценим с использованием полученных выражений помехоустойчивость каналов связи с применением двоичных ( $M = 2$ ) расширенных кодов Боуза – Чоудхури – Хоквингхема (БЧХ) длиной от  $n = 8$  до  $n = 128$  в условиях

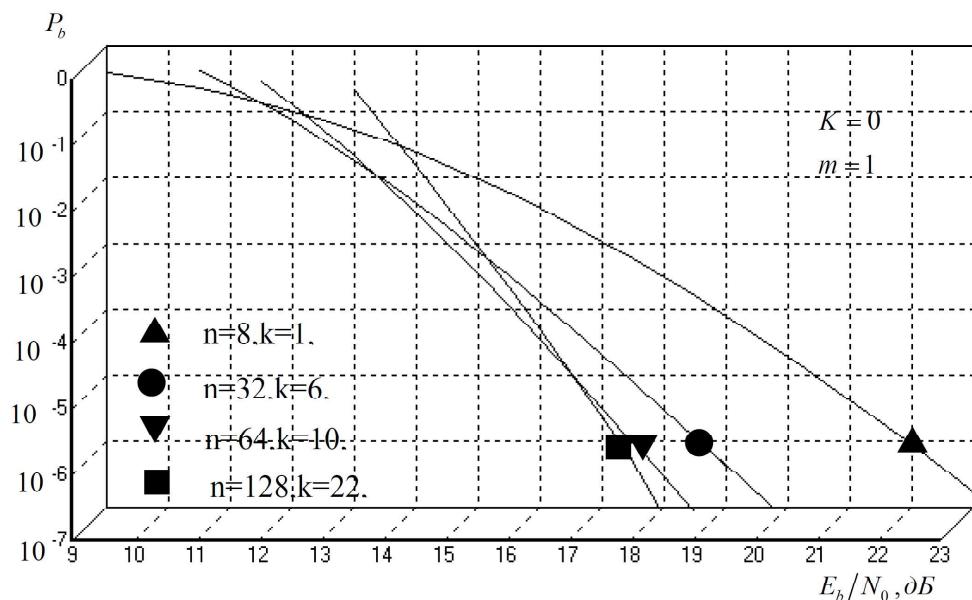


Рисунок. Зависимость вероятности ошибки  $P_b$  от отношения сигнал/шум  $E_b/N_0$  для расширенных кодов БЧХ при наличии в канале связи блоковых релеевских замираний

наличия релеевских замираний (когда  $K = 0$ , что соответствует  $m = 1$  и  $q = 1$ ).

Распределение весов кодовых комбинаций известно для всех расширенных кодов БЧХ длиной  $n \leq 128$  [17; 18]. Выберем расширенный двоичный код БЧХ с  $n = 8$  как код минимальной длины. В канале с эталонным кодом ( $n = 8$ ) исключить группирования ошибок ( $m = 2B$ ) возможно при  $n/b = 16$ .

Выражение  $n/b = 16$  определяет также длину пакетов ошибок при использовании кодов с большей длиной. Выберем коды, которые для каждой из рассматриваемых длин  $n$  кодов (8, 32, 64, 128) обеспечивают для допустимого значения  $P_b = 10^{-5}$  наименьшее значение отношения  $E_b/N$ . Для указанных кодов на рисунке приведены зависимости вероятности ошибки на бит  $P_b$  от отношения  $E_b/N_0$ , полученные согласно выражениям (5)–(12), (23), (40) применительно к каналам связи, в которых для декодирования используется метрика с линейным сложением мягких решений детекторов, огибающей при наличии блоковых ( $n/b = 16$ ) релеевских ( $K = 0$ ,  $m = 1$ ,  $q = 1$ ) замираний.

## Выводы

Анализ графиков, представленных на рисунке, позволяет сделать следующие выводы:

1. Применение результатов разработанного метода позволяет получить искомые зависимости  $P_b = \psi(E_b/N_0, n, k, b, (AF, LW))$  вероятности ошибки на бит от отношения СШ на входе приемника ( $E_b/N_0$ ), параметров помехоустойчивых

кодов ( $n, k$ ), длины пакетов ошибок  $b = B/m$  и глубины замираний (количества замираний, определяющего значения параметров Райса  $K$  и Накагами  $m, q$ ) для каналов с времязаделективными (блочными) замираниями с учетом ограничения на задержку передачи информации  $t_D/\tau_F = n/b$ .

2. При заданном ограничении на задержку передачи информации  $t_D$  и измеренном времени когерентности  $\tau_F$ , глубине замираний  $AF$  и статистическому закону, которому они подчинены  $LW$ , в канале связи возможно выбрать параметры кода ( $n, k$ ) и глубину перемежения ( $m, b = B/m$ ), обеспечивающие достижение допустимой вероятности ошибки  $P_b = 10^{-5}$  при СШ на входе приемника  $E_b/N_0 = 16\dots18$  дБ. Это указывает на возможность получения энергетических выигрышей 32…34 дБ по сравнению со случаем применения одиночного (неразнесенного) приема замирающих сигналов.

3. Использование «оптимальных» кодов длиной  $n = 64, 128$  позволяет обеспечить отношение  $E_b/N_0$ , требуемое для достижения вероятности ошибки на бит  $P_b = 10^{-5}$ , на 3…4 дБ меньше по сравнению со случаем, когда используется код с восьмикратным повторением ( $n = 8, k = 1$ ). При этом учтено, что длина пакетов ошибок при увеличении длины кода растет в соответствии с соотношением  $n/b = 16$ .

Для рассмотренных расширенных кодов БЧХ зависимости вероятности ошибки  $P_b$  от отношения СШ  $E_b/N_0$ , определяемые согласно выражениям (5)–(12), (15) и (17) применительно к

каналам связи, в которых для декодирования используется метрика с линейным сложением мягких решений квадратичных детекторов и имеются блоковые релеевские замирания, практически не будут отличаться от приведенных на рисунке.

### Заключение

Разработан метод расчета верхней границы вероятности ошибки на бит в «некогерентных» каналах связи при использовании метрики с линейным сложением мягких решений демодулятора в условиях воздействия блочных замираний с распределениями Райса и Накагами. Полученные с его использованием зависимости вероятности ошибки на бит от СШ позволяют подтвердить реализуемость метода повышения помехоустойчивости каналов связи с замираниями при наличии ограничения на время задержки передачи информации за счет использования двоичных блочных ( $n, k$ ) кодов большой длины и с высокой корректирующей способностью в сочетании с перемежением, допускающим группирование ошибок в пакеты.

Работа выполнена при поддержке РФФИ в рамках выполнения проекта № 18-07-01020.

### Литература

1. Прокис Д. Цифровая связь / пер. с англ. М.: Радио и связь, 2000. 800 с.
2. Склар Б. Цифровая связь. Теоретические основы и практическое применение / пер. с англ. М.: ИД «Вильямс», 2003. 1104 с.
3. Волков Л.Н., Немировский М.С., Шинаков Ю.С. Системы цифровой радиосвязи: базовые методы и характеристики. М.: Эко-Тренз, 2005. 392 с.
4. Zummo S.A, Stark W.E. A union bound on the error probability of binary codes over block-fading channels // IEEE Transactions on Communication. 2005. Vol. 54. P. 2085–2093.
5. Шевченко В.А. Верхняя аддитивная граница вероятности ошибки в канале связи с памятью при использовании кодирования и псевдослучайного перемежения // Известия Института инженерной физики. 2019. № 2 (52). С. 68–71.
6. Jacobs I. Probability of error bounds for binary transmission on the slowly fading Rician channel // IEEE Transactions on Information Theory. 1966. Vol. IT-12. P. 431–441.
7. Charash U. Reception through Nakagami fading multipath channels with random delays // IEEE Transactions on Communications. 1979. Vol. COM-27. P. 657–670.
8. Bounds on the decoding error probability of binary block codes over noncoherent block AWGN and fading channels / X. Wu [et al.] // IEEE Transactions on Wireless Communications. 2006. Vol. 5. № 11. P. 3193–3203.
9. Шевченко В.А., Снедков Д.М. Критическая скорость кодирования для некогерентных каналов связи с группированием ошибок, вызванных замираниями и воздействием импульсной помехи // Двойные технологии. 2018. № 1 (82). С. 54–60.
10. Fremouw E.J., Livingston R.C., Miller D.A. On the statistics of scintillating signals // Journal of Atmospheric and Terrestrial Physics. 1980. Vol. 42. P. 717–731.
11. Simon M.K., Alouini M.-S. Digital communication over fading channels: a unified approach to performance Analysis. Hoboken: John Wiley & Sons, Inc., 2000. 546 p.
12. Шевченко В.А. Верхняя аддитивная граница вероятности ошибки на бит для двоичных кодов в некогерентных каналах связи с блочными замираниями // Двойные технологии. 2016. № 4 (77). С. 29–35.
13. Кузьмин О.В. Обобщенные пирамиды Паскаля и их приложения. Новосибирск: Наука. Сибирская издательская фирма РАН, 2000. 294 с.
14. Шевченко В.А., Бойченко И.А., Снедков Д.М. О метрике с адаптивным взвешиванием мягких решений детектора огибающей в условиях воздействия на канал связи импульсной помехи // Двойные технологии. 2019. № 3 (88). С. 71–77.
15. Абрамовиц М. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / пер. с англ. М.: Наука, 1979. 835 с.
16. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены. М.: Наука, 1966. 296 с.
17. Морелос-Сарагоса Р. Искусство помехоустойчивого кодирования. Методы, алгоритмы, применение. М.: Техносфера. 2005. 320 с.
18. Desaki Y., Fujiwara T., Kasami T. The weight distribution of extended binary primitive BCH code of lenght 128 // IEEE Transaction on Information Theory. 1997. Vol. 43. № 4. P. 1364–1371.
19. Divsalar D. A simple tight bound on error probability of block codes with application to turbo codes // The Telecommunications and Mission Operations Progress Report, TMO PR 42-139. 1999. P. 1–35.

20. Buckley R. Diffraction by a random phase screen with very large r.m.s. phase deviation. II. Two-dimensional screen // Australian Journal of Physics. 1971. Vol. 24. P. 373–396.
21. Кларк Дж., Кейн Дж. Кодирование с исправлением ошибок в системах цифровой связи / пер. с англ. М.: Радио и связь, 1987. 392 с.

*Получено 05.09.2019*

**Шевченко Вячеслав Анатольевич**, к.т.н., с.н.с., начальник отдела – заместитель начальника управления Департамента информационных систем Министерства обороны РФ. 119160, Российская Федерация, г. Москва, Фрунзенская наб., 22/2. Тел. +7 916 138-87-96. E-mail: shevv67@mail.ru

**Пашинцев Владимир Петрович**, д.т.н., профессор кафедры информационной безопасности автоматизированных систем Северо-Кавказского федерального университета. 355017, Российская Федерация, г. Ставрополь, ул. Пушкина, 1. Тел. +7 918 741-33-16. E-mail: pashintsevp@mail.ru

## **THE METHOD OF CALCULATING THE ERROR PROBABILITY PER BIT IN THE COMMUNICATION CHANNELS WITH BLOCK FREEZE-UPS FOR THE RECEIVER WITH LINEAR ADDITION OF SOFT SOLUTIONS OF THE INCOHERENT DEMODULATOR**

*Shevchenko V.A.<sup>1</sup>, Pashintsev V.P.<sup>2</sup>*

*<sup>1</sup> Department of Information Systems of the Ministry of Defense of the Russian Federation, Moscow, Russian Federation*

*<sup>2</sup> North Caucasus Federal University, Stavropol, Russian Federation  
E-mail: shevv67@mail.ru*

Expressions for the upper additive limit of error probability per bit in «incoherent» communication channels with coding and pseudo-random motion are defined at the use of metrics with linear addition of soft decisions of the demodulator in the conditions of influence of the block freezing causing grouping of errors. Expressions are specified for freeze-ups described by Rice, Nakagami-m and Nakagami-q distributions. Using the expressions obtained from the binary extended BCH codes, it is shown that with a given limit on the delay in the transfer of information codes length of 64, 128 provide a permissible error probability of  $10^{-5}$  with respect to the «signal/noise» at the receiver input 16–18 dB and an energy gain of 3–4 dB compared to the code with eight-fold repetition.

**Keywords:** error probability, error packet, freeze-up, incoherent communication channel, metrics, coding

**DOI:** 10.18469/ikt.2019.17.4.03

**Shevchenko Vyacheslav Anatolievich**, Department of Information Systems of the Ministry of Defense of the Russian Federation, 22/2, Frunzenskaya nab., Moscow, 119160, Russian Federation; Ph.D., Senior Researcher, Head of Division - Deputy Head. Tel. +7 916 138-87-96. E-mail: shevv67@mail.ru

**Pashintsev Vladimir Petrovich**, North Caucasus Federal University, 1, Pushkin Street, Stavropol, 355017, Russian Federation; Doctor of Technical Sciences, Professor, Professor of the Department of Information Security of Automated Systems. Tel. +7 918 741-33-16. E-mail: pashintsevp@mail.ru

### **References**

1. Prokis D. *Tsifrovaya svyaz* [Digital Communications]. Moscow: Radio i svyaz Publ., 2000, 800 p. (In Russian).
2. Sklar B. *Tsifrovaya svyaz. Teoreticheskie osnovy i prakticheskoe primenenie* [Digital Communications. Fundamentals and Applications]. Moscow: Williams Publ., 2003, 1104 p. (In Russian).
3. Volkov L.N., Nemirovskiy M.S., Shinakov Yu.S. *Sistemy tsifrovoy padiosvyazi: bazovye metody i harakteristiki*. [Digital Radio Communication Systems: Basic Methods And Characteristics]. Moscow: Eco-Trends Publ., 2005, 392 p. (In Russian).
4. Zummo S.A, Stark W.E. A union bound on the error probability of binary codes over block-fading channels. *IEEE Transactions on Communication*, 2005, vol. 54, pp. 2085–2093.

5. Shevchenko V.A. Verhnya additivnaya granitsa veroyatnosti ohibki v kanale svyazi s pamyatyu pri ispolzovanii kodirovanya i psevdosluchajnogo peremezheniya [Additive upper bound of error probability in the communication channel with memory using encoding and pseudorandom alternation]. *Izvestiya instituta inzhenernoj fiziki* [Buletine of Institute of Engineering Physics], 2019, no. 2, pp. 68–71. (In Russian).
6. Jacobs I. Probability of error bounds for binary transmission on the slowly fading Rician channel. *IEEE Transactions on Information Theory*, 1966, vol. IT-12, pp. 431–441.
7. Charash U. Reception through Nakagami fading multipath channels with random delays. *IEEE Transactions on Communications*, 1979, vol. COM-2, pp. 657–670.
8. Wu X. et al. Bounds on the decoding error probability of binary block codes over noncoherent block AWGN and fading channels. *IEEE Transactions on Wireless Communications*, 2006, vol. 5, no. 11, pp. 3193–3203.
9. Shevchenko V.A., Snedkov D.M. Kriticheskaya skorost kodirovanya dlya nekogerentnykh kanalov svyazi c gruppirovaniem oshibok, vyzvannyh zamiraniyami i vozdejstviem impulsnoy pomehi [Critical speed coding for noncoherent channels with grouping errors caused by fading and pulsed interference]. *Dvojnye tekhnologii* [Dual Technologies], 2018, no. 1, pp. 54–60. (In Russian).
10. Fremouw E.J., Livingston R.C., Miller D.A. On the statistics of scintillating signals. *Journal of Atmospheric and Terrestrial Physics*, 1980, vol. 42, pp. 717–731.
11. Simon M.K., Alouini M.-S. *Digital communication over fading channels: a unified approach to performance Analysis*. Hoboken: John Wiley & Sons, Inc., 2000, 546 p. (In Russian).
12. Shevchenko V.A. Verhnya additivnaya granitsa veroyatnosti ohibki na bit dlya dvoichnyh kodov v nekogerentnykh kanalah svyazi s blochnymi zamiraniyami [Additive upper bound on error probability at the bit for binary codes in incoherent communication channels with block fading]. *Dvojnye tekhnologii* [Dual Technologies], 2016, no. 4, pp. 29–35. (In Russian).
13. Kuzmin O.V. *Obobshchennye piramidy Paskalya i ikh prilozheniya* [Generalized Pascal Pyramids and Their Applications]. Novosibirsk: Nauka Publ., 2000. 294 p. (In Russian).
14. Shevchenko V.A., Boychenko I.A., Snedkov D.M. O metrike s adaptivnym vzveshivaniem myagkih reshenij detektora ouibayushchej v usloviyah vozdejstviya na kanal svyazi impulsnoy pomehi [On the metric with adaptive weighting of soft envelope detector solutions under the influence of impulse noise on the communication channel]. *Dvojnye tekhnologii* [Dual Technologies], 2019, no. 3, pp. 71–77. (In Russian).
15. Abramovits M. *Spravochnik po spetsialnym funktsiyam s formulami, grafikami b matematicytskimi tablitsami* [Special Functions Reference with Formulas, Charts, and Math Tables]. Moscow: Nauka Publ., 1979, 875 p. (In Russian).
16. Bejmen G., Ardeji A. *Vysshie transsendentnye funktsii. Funktsii Besselya, funktsii parabolicheskogo tsilindra, ortogonalnye mnogochlony* [Higher transcendental functions. Bessel functions, parabolic cylinder functions, orthogonal polynomials]. Moscow: Nauka Publ., 1966, 296 p. (In Russian).
17. Morelos-Saragosa R. *Iskusstvo pomehoustojchevogo kodirovaniya. Metody, algoritmy, primechenie* [The art of noiseless coding. Methods, algorithms, application]. Moscow: Tekhnosfera Publ., 2005, 320 p. (In Russian).
18. Desaki Y., Fujiwara T., Kasami T. The weight distribution of extended binary primitive BCH code of lenght 128. *IEEE Transaction on Information Theory*, 1997, vol. 43, no. 4, pp. 1364–1371.
19. Divsalar D. A simple tight bound on error probability of block codes with application to turbo codes. *The Telecommunications and Mission Operations Progress Report*, TMO PR 42-139, 1999, pp. 1–35.
20. Buckley R. Diffraction by a random phase screen with very large r.m.s. phase deviation. II. Two-dimensional screen. *Australian Journal of Physics*, 1971, vol. 24, pp. 373–396.
21. Klark D, Keyn D. *Kodirovanie s ispravleniem oshibok v sistemah tsifrovoy svyazi* [Error correction coding in digital communication systems]. Moscow: Radio i svyaz Publ., 1987, 392 p. (In Russian).

Received 05.09.2019