УДК 621.391.1:621.395

ИССЛЕДОВАНИЕ И СРАВНЕНИЕ ПАРЫ ДВОЙСТВЕННЫХ СИСТЕМ С ГИПЕРЭРЛАНГОВСКИМИ И ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫМИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯМИ

Тарасов В.Н.
Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики, Самара, РФ
E-mail: tarasov-vn@psuti.ru

В статье представлены результаты исследований по системам массового обслуживания $HE_2/M/1$ и $M/HE_2/1$ с гиперэрланговскими и экспоненциальными входными распределениями. По определению Кендалла, эти системы относятся к классам G/M/1 и M/G/1 соответственно, а также составляют двойственную пару. В теории массового обслуживания исследования таких систем актуальны в связи с тем, что они активно используются в современной теории телетрафика. Использование распределений гипер-Эрланга более высокого порядка затруднительно для вывода решения для среднего времени ожидания требований в очереди из-за нарастающей вычислительной сложности. Для гиперэрланговского закона распределения, как и гиперэкспоненциального закона, метод спектрального разложения решения дает возможность получить решение в конечном виде. Приведены результаты по спектральным разложениям решения интегрального уравнения Линдли для систем массового обслуживания $HE_2/M/1$ и $M/HE_2/1$, а также расчетные формулы для среднего времени ожидания требований в очереди. Адекватность полученных результатов подтверждена корректностью использования классического метода спектрального разложения и результатами численного моделирования. Для вывода полученных результатов, а также для численных расчетов использован известный метод моментов теории вероятностей.

Ключевые слова: *СМО $HE_2/M/1$ и $M/HE_2/1$, среднее время ожидания в очереди, метод спектрального разложения, интегральное уравнение Линдли, преобразование Лапласа*

Введение

Статья посвящена анализу систем массового обслуживания (СМО) $HE_2/M/1$ и $M/HE_2/1$ с гиперэрланговским (HE_2) и экспоненциальным (M) входными распределениями. В открытом доступе автору не удалось обнаружить результаты для среднего времени ожидания требований в очереди в таких СМО. Как известно из теории массового обслуживания, среднее время ожидания является главной характеристикой для любых СМО. По этой характеристике, например, оценивают задержки пакетов в сетях пакетной коммутации при их моделировании с помощью СМО. Рассматриваемые СМО относятся к типу G/M/1 M/G/1 соответственно.

Исследования таких систем актуальны в связи с тем, что они активно используются в современной теории телетрафика. Законы распределений Вейбулла или гамма наиболее общего вида, которые обеспечивают диапазон изменения коэффициентов вариаций от 0 до ∞ в зависимости от величины их параметров, не позволяют их использовать в теории массового обслуживания. Поэтому остается использовать другие частные законы распределений.

Метод спектрального разложения решения интегрального уравнения Линдли (ИУЛ) в теории систем массового обслуживания G/G/1 занимает важное место. Для записи ИУЛ, а также при рассмотрении метода спектрального разложения решения ИУЛ будем использовать стандартные обозначения [1]. Через $A^*(s)$ и $B^*(s)$ обозначим преобразования Лапласа функций плотности распределения интервалов между поступлениями и времени обслуживания соответственно. Суть решения ИУЛ методом спектрального разложения состоит в нахождении для выражения $A^*(-s)\cdot B^*(s)-1$ представления в виде произведения двух множителей, которое давало бы рациональную функцию от s. Следовательно, для нахождения закона распределения времени ожидания необходимо следующее спектральное разложение: $A^*(-s)\cdot B^*(s)-1=\psi_+(s)/\psi_-(s)$, где ш$_+(s)$ и $\psi_-(s)$ некоторые дробно-рациональные функции от s, удовлетворяющие специальным условиям согласно [1], которые здесь опускаем.

Постановка задачи

В статье ставится задача вывода формул для среднего времени ожидания для рассматриваемых систем $HE_2/M/1$ и $M/HE_2/1$, а также подтверждения адекватности построенных математических моделей путем численного моделирования в пакете Mathcad. Вывод решения для среднего времени ожидания проводится методом спектрального разложения решения ИУЛ, как это показано в [2–6].

Решение для системы HE$_2$/M/1

В системе HE$_2$/M/1 интервалы времени между поступлениями требований заданы функцией плотности

$$a(t) = 4p\lambda_1^2 te^{-2\lambda_1 t} + 4(1-p)\lambda_2^2 te^{-2\lambda_2 t}, \qquad (1)$$

преобразование Лапласа которой имеет вид:

$$A^*(s) = p\left(\frac{2\lambda_1}{s+2\lambda_1}\right)^2 + (1-p)\left(\frac{2\lambda_2}{s+2\lambda_2}\right)^2. \qquad (2)$$

Время обслуживания распределено с функцией плотности

$$b(t) = \mu e^{-\mu t}, \qquad (3)$$

а ее преобразование Лапласа имеет вид

$$B^*(s) = \left(\frac{\mu}{s+\mu}\right). \qquad (4)$$

Тогда спектральное разложение решения ИУЛ для системы HE$_2$/M/1 $A^*(-s)\cdot B^*(s) - 1 = \psi_+(s)/$ $/\psi_-(s)$ примет вид

$$\frac{\psi_+(s)}{\psi_-(s)} = \left[p\left(\frac{2\lambda_1}{2\lambda_1 - s}\right)^2 + \right.$$
$$\left. + (1-p)\left(\frac{2\lambda_2}{2\lambda_2 - s}\right)^2\right]\left(\frac{\mu}{\mu+s}\right) - 1. \qquad (5)$$

Первый сомножитель (5) после соответствующих выкладок представим в виде

$$\left[p\left(\frac{2\lambda_1}{2\lambda_1 - s}\right)^2 + (1-p)\left(\frac{2\lambda_2}{2\lambda_2 - s}\right)^2\right] =$$
$$= \frac{a_0 - a_1 s + a_2 s^2}{(2\lambda_1 - s)^2(2\lambda_2 - s)^2},$$

где промежуточные параметры

$$a_0 = 16\lambda_1^2\lambda_2^2,$$
$$a_1 = 16\lambda_1\lambda_2[p\lambda_1 + (1-p)\lambda_2],$$
$$a_2 = 4[p\lambda_1^2 + (1-p)\lambda_2^2].$$

Продолжая разложение (5), получим

$$\frac{\psi_+(s)}{\psi_-(s)} = \frac{4\mu^2(a_0 - a_1 s + a_2 s^2)}{(2\lambda_1 - s)^2(2\lambda_2 - s)^2(\mu+s)} -$$
$$- \frac{(2\lambda_1 - s)^2(2\lambda_2 - s)^2(\mu+s)}{(2\lambda_1 - s)^2(2\lambda_2 - s)^2(\mu+s)} =$$
$$= \frac{-s(s+s_1)(s+s_2)(s-s_3)(s-s_4)}{(2\lambda_1 - s)^2(2\lambda_2 - s)^2(\mu+s)}.$$

Окончательно спектральное разложение решения ИУЛ для системы HE$_2$/M/1 имеет вид

$$\frac{\psi_+(s)}{\psi_-(s)} = \frac{-s(s+s_1)(s+s_2)(s-s_3)(s-s_4)}{(2\lambda_1 - s)^2(2\lambda_2 - s)^2(\mu+s)}. \qquad (6)$$

Исследование многочлена в числителе разложения (6) и определение его корней является основным моментом метода спектрального разложения решения ИУЛ. Многочлен четвертой степени в числителе разложения

$$s^4 + c_3 s^3 + c_2 s^2 + c_1 s + c_0 \qquad (7)$$

с коэффициентами

$$c_0 = a_1\mu + 16\lambda_1\lambda_2[\lambda_1\lambda_2 - \mu(\lambda_1 + \lambda_2)],$$
$$c_1 = 4\mu(\lambda_1^2 + 4\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2^2) - 16\lambda_1\lambda_2(\lambda_1 + \lambda_2) - a_2\mu,$$
$$c_2 = 4(\lambda_1^2 + \lambda_2^2) + 16\lambda_1\lambda_2 - 4\mu(\lambda_1 + \lambda_2),$$
$$c_3 = \mu - 4(\lambda_1 + \lambda_2)$$

в случае стабильной системы имеет один действительный отрицательный корень и три положительных корня (либо вместо последних один действительный положительный и два комплексно-сопряженных с положительной вещественной частью). Эти коэффициенты сформированы с помощью символьных операций Mathcad и выражаются через параметры распределений (1) и (3), которые предстоит еще определить.

Далее строим рациональные функции $\psi_+(s)$ и $\psi_-(s)$: $\psi_+(s) = s(s+s_1)/(\mu+s)$, так как нули многочлена (6): $s = 0$, $s = -s_1$ и полюс $s = -\mu$ лежат в области $\mathrm{Re}(s) \le 0$, а функция

$$\psi_-(s) = -\frac{(2\lambda_1 - s)^2(2\lambda_2 - s)^2}{(s-s_2)(s-s_3)(s-s_4)},$$

так как ее нули и полюсы лежат в области $\mathrm{Re}(s) > D$, как того требует метод спектрального разложения.

Далее по методике спектрального разложения найдем константу K:

$$K = \lim_{s\to 0}\frac{\psi_+(s)}{s} = \lim_{s\to 0}\frac{(s+s_1)}{(s+\mu)} = \frac{s_1}{\mu},$$

где s_1 – абсолютное значение отрицательного корня $-s_1$. Постоянная K определяет вероятность того, что поступающее в систему требование застает ее свободной.

Для нахождения преобразования Лапласа функции плотности времени ожидания построим функцию

$$\Phi_+(s) = \frac{K}{\psi_+(s)} = \frac{s_1(s+\mu)}{s\mu(s+s_1)}.$$

Отсюда преобразование Лапласа функции плотности времени ожидания $W^*(s) = s\cdot\Phi_+(s)$ будет равно

$$W^*(s) = \frac{s_1(s+\mu)}{\mu(s+s_1)}. \qquad (8)$$

Для нахождения среднего времени ожидания найдем производную от функции $W^*(s)$ со знаком минус в точке $s = 0$:

$$-\frac{dW^*(s)}{ds}\Big|_{s=0}=\frac{1}{s_1}-\frac{1}{\text{м}}.$$

Окончательно среднее время ожидания для системы $HE_2/M/1$

$$\overline{W}=1/s_1-1/\text{м}. \quad (9)$$

Выражение (8) для преобразования Лапласа функции плотности времени ожидания позволяет определить также моменты высших порядков времени ожидания, а именно вторая производная от преобразования (8) в точке $s=0$ дает второй начальный момент времени ожидания, что позволяет определить дисперсию времени ожидания. В стандарте [9] джиттер (дрожание задержки) в телекоммуникациях определен как колебание времени ожидания вокруг его среднего значения. Тогда джиттер можно определить через дисперсию времени ожидания. При анализе трафика, чувствительного к задержкам, это будет важным подспорьем.

Для использования формулы (9) при расчетах необходимо знать числовые характеристики распределения (1). Для распределения (3) они легко определяются. Через числовые характеристики будем определять неизвестные параметры распределений (1) и (3) методом моментов. Для этого воспользуемся основным свойством преобразований Лапласа (2) и (4) воспроизведения моментов и запишем первые два начальных момента для распределения (1):

$$\overline{\tau}_\lambda=\frac{p}{\lambda_1}+\frac{(1-p)}{\lambda_2},\quad \overline{\tau_\lambda^2}=\frac{3}{2}\left[\frac{p}{\lambda_1^2}+\frac{(1-p)}{\lambda_2^2}\right]. \quad (10)$$

Рассматривая равенства (10) как форму записи метода моментов, найдем неизвестные параметры распределения (1) λ_1, λ_2, p. Так как система двух уравнений (10) является недоопределенной, к ней добавим в качестве недостающего уравнения выражение для квадрата коэффициента вариации:

$$c_\lambda^2=\frac{\overline{\tau_\lambda^2}-(\overline{\tau}_\lambda)^2}{(\overline{\tau}_\lambda)^2}. \quad (11)$$

Выбираем значения параметров λ_1, λ_2 так, чтобы они были решениями первого уравнения (10)

$$\lambda_1=2p/\overline{\tau}_\lambda,\quad \lambda_2=2(1-p)/\overline{\tau}_\lambda \quad (12)$$

и потребуем выполнения условия (11) [2; 3]. Подставив выражения (12) в (11), получим уравнение четвертой степени относительно неизвестного параметра p: $p(1-p)[8(1+c_\lambda^2)p^2-8(1+c_\lambda^2)p+3]=0$. Отбросив тривиальные решения $p=0$ и $p=1$, получим квадратное уравнение следующего вида: $8(1+c_\lambda^2)p^2-8(1+c_\lambda^2)p+3=0$, решив которое выберем для однозначности больший корень для параметра p:

$$p=\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{2(1+c_\lambda^2)-3}{8(1+c_\lambda^2)}}. \quad (13)$$

Отсюда следует, что коэффициент вариации $c_\lambda\geq 1/\sqrt{2}$. Теперь, подставив (13) в (12), определяем все три неизвестных параметра λ_1, λ_2, p распределения (1) [2].

Для распределения (3) числовые характеристики равны $\overline{\tau}_\mu=1/\mu$, $c_\mu=1$ [4]. Аналогичную аппроксимацию законов распределений с использованием начальных моментов можно увидеть в [7; 8].

Решение для системы M/HE$_2$/1

Для двойственной системы законы распределения входного потока и времени обслуживания задаются функциями плотности

$$a(t)=\lambda e^{-\lambda t}, \quad (14)$$

$$b(t)=4q\mu_1^2te^{-2\mu_1 t}+4(1-q)\mu_2^2te^{-2\mu_2 t}. \quad (15)$$

Запишем преобразования Лапласа функций (14), (15):

$$A^*(s)=\frac{\lambda}{s+\lambda},$$

$$B^*(s)=q\left(\frac{2\mu_1}{s+2\mu_1}\right)^2+(1-q)\left(\frac{2\mu_2}{s+2\mu_2}\right)^2.$$

В этом случае выражение для спектрального разложения решения ИУЛ примет следующий вид:

$$\frac{\psi_+(s)}{\psi_-(s)}=\left(\frac{\lambda}{\lambda-s}\right)\times$$
$$\times\left[q\left(\frac{2\mu_1}{s+2\mu_1}\right)^2+(1-q)\left(\frac{2\mu_2}{s+2\mu_2}\right)\right]-1. \quad (16)$$

Поступив аналогично с системой $HE_2/M/1$ и опустив некоторые выкладки, выпишем многочлен четвертой степени в числителе разложения (16):

$$s^4+d_3s^3+d_2s^2+d_1s+d_0 \quad (17)$$

с коэффициентами

$$d_0=b_1\lambda+16\mu_1\mu_2[\mu_1\mu_2-\lambda(\mu_1+\mu_2)],$$
$$d_1=16\mu_1\mu_2(\mu_1+\mu_2)-4\lambda(\mu_1^2+4\mu_1\mu_2+\mu_2^2)+b_2\lambda,$$
$$d_2=4(\mu_1^2+\mu_2^2)+16\mu_1\mu_2-4\lambda(\mu_1+\mu_2),$$
$$d_3=4(\mu_1+\mu_2)-\lambda.$$

Многочлен (17) с положительными коэффициентами имеет четыре действительных отрицательных корня либо два действительных отрицательных корня и два комплексно-сопряженных корня с отрицательными вещественными частями. Тогда окончательно спектральное разложение решения ИУЛ для системы M/HE$_2$/1 имеет вид

$$\frac{\psi_+(s)}{\psi_-(s)} = \frac{s(s+\sigma_1)(s+\sigma_2)(s+\sigma_3)(s+\sigma_4)}{(2\mu_1+s)^2(2\mu_2+s)^2(\lambda-s)}, \quad (18)$$

где через $-\sigma_1$, $-\sigma_2$, $-\sigma_3$, $-\sigma_4$ обозначены для удобства отрицательные корни многочлена (17).

Далее по правилам спектрального разложения строим функции $\psi_+(s)$ и $\psi_-(s)$:

$$\psi_+(s) = \frac{s(s+\sigma_1)(s+\sigma_2)(s+\sigma_3)(s+\sigma_4)}{(2\mu_1+s)^2(2\mu_2+s)^2},$$

$$\psi_-(s) = \lambda - s.$$

Константа спектрального разложения

$$K = \lim_{s\to 0}\frac{\psi_+(s)}{s} =$$

$$= \lim_{s\to 0}\frac{(s+\sigma_1)(s+\sigma_2)(s+\sigma_3)(s+\sigma_4)}{(2\mu_1+s)^2(2\mu_2+s)^2} =$$

$$= \frac{\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4}{16\mu_1^2\mu_2^2}.$$

Отсюда преобразование Лапласа функции плотности времени ожидания будет равно

$$W^*(s) =$$

$$= \frac{\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4(2\mu_1+s)^2(2\mu_2+s)^2}{16\mu_1^2\mu_2^2(s+\sigma_1)(s+\sigma_2)(s+\sigma_3)(s+\sigma_4)}, \quad (19)$$

а среднее время ожидания

$$\overline{W} = -\frac{dW^*(s)}{ds}$$

при $s=0$:

$$\overline{W} = \frac{1}{\sigma_1}+\frac{1}{\sigma_2}+\frac{1}{\sigma_3}+\frac{1}{\sigma_4}-\frac{1}{\mu_1}-\frac{1}{\mu_2}. \quad (20)$$

Определение неизвестных параметров распределений (14) и (15) будет аналогично для системы HE$_2$/M/1. Параметр q аналогично p будет

$$q = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{2(1+c_\mu^2)-3}{8(1+c_\mu^2)}},$$

подставив его в выражения $\mu_1 = 2q/\overline{\tau}_\mu$, $\mu_2 = 2(1-q)/\overline{\tau}_\mu$, найдем все неизвестные параметры распределения (15).

Результаты численного моделирования

Ниже в таблице приведены данные расчетов среднего времени ожидания для систем HE$_2$/M/1 и M/HE$_2$/1 для случаев малой, средней и высокой нагрузки $\rho = 0{,}1$; 0,5; 0,9. Заметим, что первая система определена для коэффициентов вариаций интервалов поступления и обслуживания $c_\lambda \geq 1/\sqrt{2}$ и $c_\mu = 1$, а вторая – для $c_\lambda = 1$ и $c_\mu \geq 1/\sqrt{2}$.

Коэффициент загрузки ρ определяется отношением средних интервалов $\rho = \overline{\tau}_\mu / \overline{\tau}_\lambda$. Результаты, приведенные в таблице, получены для нормированного времени обслуживания $\overline{\tau}_\mu = 1$. Данные таблицы свидетельствуют о незначительном различии сравниваемых систем в случае высоких нагрузок и более значительных расхождениях – при средних и малых нагрузках. Двойственные системы этим и отличаются друг от друга.

Результаты расчетов для системы хорошо согласуются с данными [10] в той области изменения параметров, при которых применимы данные системы.

Заключение

В работе получены спектральные разложения решения ИУЛ для систем HE$_2$/M/1 и M/HE$_2$/1, а через них выведены расчетные формулы для среднего времени ожидания требований в очереди для этих систем. Эти формулы дополняют известную незавершенную формулу теории массового обслуживания для среднего времени ожидания систем типа G/G/1.

Известно, что среднее время ожидания требований в очереди является главной характеристикой СМО, так как все остальные характеристики: средняя задержка, средняя длина очереди, среднее количество требований в системе и другие определяются через среднее время ожидания.

Адекватность полученных результатов обеспечена корректным использованием классического метода спектрального разложения, а проведенные вычислительные эксперименты только подтверждают данный факт.

Таблица. Результаты экспериментов для СМО HE$_2$/M/1 и M/HE$_2$/1

Входные параметры			Среднее время ожидания	
ρ	c_λ	c_μ	для системы HE$_2$/M/1	для системы M/HE$_2$/1
0,1	0,71	0,71	0,03	0,09
	2	2	0,08	0,28
	4	4	0,10	0,94
	8	8	0,11	3,61
0,5	0,71	0,71	0,62	0,75
	2	2	2,00	2,50
	4	4	4,62	8,50
	8	8	10,15	32,50
0,9	0,71	0,71	6,61	6,77
	2	2	22,59	22,50
	4	4	77,28	76,50
	8	8	295,96	292,50

Литература

1. Клейнрок Л. Теория массового обслуживания / под ред. В.И. Неймана; пер. с англ. И.И. Глушко. М.: Машиностроение, 1979. 432 с.
2. Тарасов В.Н. Исследование систем массового обслуживания с гиперэкспоненциальными входными распределениями // Проблемы передачи информации. 2016. № 1. С. 16–26. DOI: 10.1134/S0032946016010038.
3. Тарасов В.Н., Бахарева Н.Ф., Липилина Л.В. Математическая модель телетрафика на основе системы G/M/1 и результаты вычислительных экспериментов // Информационные технологии. 2016. Т. 22. № 2. С. 121–126.
4. Тарасов В.Н., Карташевский И.В. Способы аппроксимации входных распределений для системы G/G/1 и анализ полученных результатов // Системы управления и информационные технологии. 2015. № 3. С. 182–185.
5. Тарасов В.Н., Горелов Г.А., Ушаков Ю.А. Восстановление моментных характеристик распределения интервалов между пакетами входящего трафика // Инфокоммуникационные технологии. 2014. № 2. С. 40–44.
6. Тарасов В.Н. Вероятностное компьютерное моделирование сложных систем. Самара: СНЦ РАН, 2002. 194 с.
7. Myskja A. An improved heuristic approximation for the GI/GI/1 queue with bursty arrivals // Teletraffic and Datatraffic in a Period of Change, ITC-13. Elsevier Science Publishers, 1991. P. 683–688.
8. Whitt W. Approximating a point process by a renewal process: two basic methods // Operation Research. 1982. Vol. 30. № 1. P. 125–147.
9. IP Packet Delay Variation Metric for IP Performance Metrics (IPPM). URL: https://tools.ietf.org/html/rfc3393 (дата обращения: 26.02.2016).
10. Тарасов В.Н., Бахарева Н.Ф. Обобщенная двумерная диффузионная модель массового обслуживания типа GI/G/1 // Телекоммуникации. 2009. № 7. С. 2–8.
11. Тарасов В.Н., Малахов С.В., Карташевский И.В. Теоретическое и экспериментальное исследование задержки в программно-конфигурируемых сетях // Инфокоммуникационные технологии. 2015. Т. 13. № 4. С. 409–413.

Получено 26.09.2019

Тарасов Вениамин Николаевич, д.т.н., профессор, заведующий кафедрой программного обеспечения и управления в технических системах Поволжского государственного университета телекоммуникаций и информатики. 443010, Российская Федерация, г. Самара, ул. Л. Толстого, 23. Тел. +7 846 228-00-13. E-mail: tarasov-vn@psuti.ru

RESEARCH AND COMPARISON OF PAIRS OF DUAL SYSTEMS WITH HYPER-ERLANG AND EXPONENTIAL DISTRIBUTIONS

Tarasov V.N.
Povolzhskiy State University of Telecommunications and Informatics, Samara, Russian Federation
E-mail: tarasov-vn@psuti.ru

This article presents the results of research on $HE_2/M/1$ and $M/HE_2/1$ mass service systems with hyper-Erlang and exponential input distributions. By Kendall's definition, these systems belong to classes G/M/1 and M/G/1 respectively, and also form a dual pair. In the queueing theory, studies of such systems are relevant because they are actively used in the modern theory of teletraffic. The use of higher-order hyper-Erlang distributions to derive a solution for the average waiting time of requirements in the queue is difficult due to the increasing complexity of computation. For the hyper-Erlang distribution law, as well as for the hyperexponential law, the spectral decomposition method of the solution makes it possible to obtain a solution in its final form. The article presents the results of the spectral decomposition of the Lindley solution for $HE_2/M/1$ and $M/HE_2/1$ mass maintenance systems, as well as the computational formulas for the average waiting time of the requirements in the queue. The appropriateness of the obtained results is confirmed by the correctness of using the classical method of spectral decomposition and the results of numerical simulation. To derive the results, as well as for numerical calculations, the well-known method of moments of probability theory is used.

Keywords: *MSS HE2/M/1 and M/HE2/1, average waiting time in queue, spectral decomposition method, Lindley integral equation, Laplace transformation*

DOI: 10.18469/ikt.2019.17.4.05

Tarasov Veniamin Nikolaevich, Povolzhskiy State University of Telecommunications and Informatics, 23, L. Tolstoy Street, Samara, 443010, Russian Federation; Head of Software and Management in Technical Systems Department. Tel. +7 846 228-00-13. E-mail: tarasov-vn@psuti.ru

References

1. Kleinrock L. *Teoriya massovogo obsluzhivaniya* [Queuing theory]. Moscow: Mashinostroeinie, 1979, 432 p. (In Russian).
2. Tarasov V.N. Issledovanie sistem massovogo obsluzhivanija s giperjeksponencial'nymi vhodnymi raspredelenijami [Analysis of queues with hyperexponential arrival distributions]. *Problemy peredachi informacii* [Problems of Information Transmission], 2016, vol. 52, no. 1, pp. 14–23. DOI: 10.1134/S0032946016010038. (In Russian).
3. Tarasov V.N., Bakhareva N.F., Lipilina L.V. Matematicheskaya model' teletrafika na osnove sistemy G/M/1 i rezul'taty vychislitel'nyh eksperimentov [Mathematical model of teletraffic on the based G/M/1 system and results of computational experiment]. *Informacionnye technologii* [Information Technology], 2016, vol. 22, no. 2, pp. 121–126. (In Russian).
4. Tarasov V.N., Kartashevskiy I.V. Sposoby approksimacii vhodnyh raspredelenij dlya sistemy G/G/1 i analiz poluchennyh rezul'tatov [Methods for approximating input distributions for the G/G/1 system and analysis of the results]. *Sistemy upravleniya i informatsionniye tehnologii* [Management Systems and Information Technology], 2015, no. 3. pp. 182–185. (In Russian).
5. Tarasov V.N., Gorelov G.A., Ushakov Y.A. Vosstanovlenie momentnyh harakteristik raspredeleniya intervalov vremeni mezhdu paketami vhodyaschego trafika [Restoring moment distribution characteristics interval between packets of incoming traffic]. *Infokommunikacionnye tehnologii* [Infocommunication Technologies], 2014, no. 2, pp. 40–44. (In Russian).
6. Tarasov V.N. *Veroyatnostnoe komp'yuternoe modelirovanie slozhnyh sistem* [Probabilistic Computer Modeling of Complex Systems]. Samara: SNC RAN Publ., 2002. 194 p. (In Russian).
7. Myskja A. An improved heuristic approximation for the GI/GI/1 queue with bursty arrivals. *Teletraffic and datatraffic in a Period of Change, ITC-13*. Elsevier Science Publishers, 1991, pp. 683–688.
8. Whitt W. Approximating a point process by a renewal process: two basic methods. *Operation Research*, 1982, vol. 30, no. 1, pp. 125–147.
9. *IP Packet Delay Variation Metric for IP Performance Metrics* (IPPM). Available at: https://tools.ietf.org/html/rfc3393 (accessed: 26.02.2016).
10. Tarasov V.N., Bahareva N.F. Obobshchennaya dvumepnaya diffuzionnaya model' massovogo obsluzhivaniya tipa GI/G/1 [Generalized two-dimensional diffusion queuing model type GI/G/1]. *Telekommunikacii* [Telecommunications], 2009, no. 7, pp. 2–8. (In Russian).
11. Tarasov V.N., Malakhov S.V., Kartashevskiy I.V. Teoreticheskoe i eksperimental'noe issledovanie zaderzhki v programmno-kofiguriruemyh setyah [Theoretical and experimental study of delay in software-configured networks]. *Infokommunikacionnye tehnologii* [Infocommunication Technologies], 2015, no. 4, pp. 409–413. (In Russian).

Received 26.09.2019