

**НОВЫЕ ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ  
ТРУДЫ УЧЕНЫХ НАУЧНОЙ ШКОЛЫ «ИНТЕРВАЛЬНЫЕ  
МЕТОДЫ КОНТРОЛЯ И МОНИТОРИНГА СИСТЕМ МАССОВОГО  
ОБСЛУЖИВАНИЯ» ПОВОЛЖСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО  
УНИВЕРСИТЕТА ТЕЛЕКОММУНИКАЦИЙ И ИНФОРМАТИКИ**

УДК 621.3911:621.395

**ИНТЕРВАЛЬНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ГРУППОВЫХ ПУАССОНОВСКИХ  
МОДЕЛЕЙ ТРАФИКА ТЕЛЕКОММУНИКАЦИОННЫХ СИСТЕМ**

*Лихтциндер Б.Я.*

*Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики, Самара, РФ  
E-mail: lixt@psuti.ru*

Показана недостаточная эффективность применения моделей самоподобных процессов к анализу очередей в телекоммуникационных системах. Рассмотрены эволюция моделей потоков, управляемых цепью Маркова; особенности применения марковских потоков в качестве моделей трафика телекоммуникационных систем. Представлены модели одноканальных систем массового обслуживания с входными потоками, имеющими произвольную корреляцию. Для данных систем приведены обобщения формулы Хинчина – Поллачека. Показана перспективность применения разрабатываемых автором интервальных методов анализа очередей в системах массового обслуживания с коррелированными входными потоками. В качестве модели телекоммуникационного трафика предлагается использовать групповой неординарный пуассоновский поток. Исследованы интервальные характеристики указанных потоков и перспективность их применения. Рассмотрены вопросы мультиплексирования таких потоков при обработке в системах массового обслуживания. Показано, что при суммировании нескольких групповых пуассоновских потоков результирующий поток также является групповым пуассоновским потоком. Сделанные выводы подтверждены результатами имитационного моделирования. На примерах показана адекватность характеристик таких моделей характеристикам реальных потоков видеотрафика.

**Ключевые слова:** системы массового обслуживания, групповые модели, очереди, видеотрафик, корреляции, формула Хинчина – Поллачека

### **Введение**

Появление сетей передачи данных с коммутацией пакетов показало, что пуассоновские модели потоков не являются адекватными, и потребовало разработки новых моделей, основанных на непуассоновских распределениях. Исследуются потоки с распределениями Вейбулла, Эрланга, Парето, гамма-распределениями и др. Все интервалы времени, представляемые данными распределениями вероятностей, по-прежнему считались взаимно независимыми. Это позволяло применить хорошо разработанный аппарат теории очередей для анализа сетей с пакетной коммутацией. Описание сложных коррелированных потоков в современных телекоммуникационных сетях часто производилось с использованием «фрактальных» процессов. Сотни работ посвящены анализу «самоподобного» трафика. Однако ощутимых практических результатов указанные исследования не дали.

Недостаточная эффективность представления трафика моделями «самоподобных» процессов привела к созданию целого класса моделей потоков, управляемых цепью Маркова. Этапы разви-

тия указанных моделей представлены в обзоре [1]. В нашей стране они были названы МС-потоками, а в США эволюционировали от «разносторонних (versatile) потоков», через « $N$ -потоки (потоки Ньютса) [2] до марковских входных потоков (МАР – Markovian Arrival Process) и их обобщения – групповых марковских входных потоков (ВМАР – Batch Markovian Arrival Process) [6–13].

Стимулом к развитию ВМАР-моделей явились их матричные представления, предложенные в работах М. Ньютса. Переход к матричным представлениям вероятностных характеристик ВМАР-потоков позволил осуществлять описание их работы и открыл широкий простор для аналитических исследований. Однако определение характеристик входного потока заявок часто осуществлялось отдельно от характеристик обрабатывающей его системы. Вместе с тем такая характеристика, как время обработки пакета в телекоммуникационных системах, зависит не только от пропускной способности системы, но и тесно связана с размером пакета, который является одной из характеристик входного потока. Наиболее значительной работой в области анализа систем массового обслуживания (СМО) с подоб-

ными потоками, по-видимому, можно считать [3]. Одним из перспективных, на наш взгляд, направлений изучения пакетного трафика является разрабатываемый нами интервальный метод [4], позволяющий заменить анализ интервалов времени между соседними заявками и интервалов времени обработки заявок, анализом одной случайной величины – числом заявок, поступающих в течение последовательных интервалов времени обработки каждой из заявок. Показано, что дисперсия и корреляционные свойства указанной случайной величины при заданной загрузке полностью характеризуют средний размер очереди в СМО [4].

Для одноканальных СМО было получено соотношение (1), обобщающее известную формулу Хинчина – Поллачека для среднего значения очереди  $\overline{q(\rho)}$  и справедливое для любых стационарных потоков заявок при заданном коэффициенте загрузки  $\rho$ :

$$\overline{q(\rho)} = \frac{D_m(\rho) + 2Cov[q_{i-1}(\rho); m_i(\rho)]}{2(1-\rho)} - \frac{\rho}{2} = \frac{mE(\rho)}{2(1-\rho)} - \frac{\rho}{2}. \quad (1)$$

Анализ числителя  $mE(\rho)$  формулы (1) показывает, что среднее значение очереди для потоков любого вида зависит от двух составляющих: первая составляющая – это дисперсия  $D_m(\rho)$  числа заявок (пакетов)  $m_i(\rho)$ , поступающих в течение интервала времени обработки одной заявки, а вторая – это составляющая, обусловленная наличием корреляционных связей в указанном потоке. Корреляционные связи учитываются ковариацией  $Cov[q_{i-1}(\rho); m_i(\rho)]$  между значениями  $m_i(\rho)$  и значениями очереди  $q_{i-1}(\rho)$  на предыдущем интервале анализа.

В частном случае для пуассоновского потока указанная составляющая равна нулю, а дисперсия  $D_m(\rho) = \rho$ . Тогда при постоянном времени обслуживания обобщенная формула (1) приобретает обычный вид:

$$\overline{q(\rho)} = \frac{\rho^2}{2(1-\rho)}. \quad (2)$$

### Групповой неординарный пуассоновский поток

Одной из разновидностей ВМАР-потоков является неординарный пуассоновский поток событий. В таком потоке выполняются свойства стационарности и отсутствия последствия, но не выполняется свойство ординарности. Рассмотрим пуассоновский поток независимых событий с параметром  $\lambda$ . Каждое событие заключается в

одновременном появлении в момент  $t_k$  «пачки» из  $\mu_k$  независимых случайно распределенных чисел заявок с распределением  $P|\mu_k = k| = f_k$ . Такой поток называют пуассоновским неординарным (групповым) потоком независимых событий, и он рассмотрен в [5].

Примем, что  $\tau$  – это интервал времени обработки одной заявки. Разделим достаточно большой промежуток времени  $T$ , в течение которого действует поток указанных событий, на  $N_\tau$  таких последовательных интервалов. Пусть  $m_i(\tau)$  – число событий, произошедших в течение  $i$ -го интервала времени  $\tau$ . Тогда вероятности наступления на интервале  $\tau$  ровно  $n$  событий подчиняются закону Пуассона:

$$P|m_i(\tau) = n| = P_n(\lambda\tau) = \frac{(\lambda\tau)^n}{n!} e^{-\lambda\tau}.$$

Каждому из событий сопутствует появление «пачки» с распределением вероятностей чисел заявок  $f_k$ . Введем производящую функцию  $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k z^k$ . Поскольку все  $\mu_k$  взаимно независимы и одинаково распределены, появлению на интервале  $\tau$  ровно  $m_i(\tau)$  заявок при условии, что на указанном интервале произошло  $n$  событий, соответствуют вероятность  $(f_k)^n$  и производящая функция  $[f(z)]^n$ .

Производящая функция  $G_{m(\tau)}(z)$  числа заявок на интервале  $\tau$  есть

$$\begin{aligned} G_{m(\tau)}(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\lambda\tau) [f(z)]^n = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda\tau)^n}{n!} e^{-\lambda\tau} [f(z)]^n = \\ &= \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda\tau f(z))^n}{n!} e^{-\lambda\tau f(z)} \right] e^{\lambda\tau [f(z)-1]} = e^{\lambda\tau [f(z)-1]}. \end{aligned}$$

Определим среднее число заявок на  $\tau$ :

$$\begin{aligned} \overline{m(\tau)} &= \sum_{i=0}^{\infty} m_i(\tau) P_1[m_i(\tau)] = \left. \frac{\partial G_{m(\tau)}(z)}{\partial z} \right|_{z=1} = \\ &= \lambda\tau f^1(z) e^{\lambda\tau [f(z)-1]} \Big|_{z=1} = \lambda\tau f^1(1). \end{aligned}$$

Учитывая, что

$$f^1(1) = \left. \frac{d}{dz} \sum_{k=0}^{\infty} f_k z^k \right|_{z=1} = \sum_{k=0}^{\infty} k f_k = \bar{k},$$

получим  $\overline{m(\tau)} = \lambda\tau \bar{k}$ , где  $\bar{k}$  – среднее число заявок в «пачке». Определим второй начальный момент:

$$\overline{m(\tau)^2} = \sum_{i=0}^{\infty} m_i^2(\tau) P_2[m_i(\tau)] = \left. \frac{\partial^2 G_{m(\tau)}(z)}{\partial z^2} \right|_{z=1} =$$

$$\begin{aligned}
&= \lambda \tau f^1(z) e^{\lambda \tau [f(z)-1]} \Big|_{z=1} = \\
&= [\lambda \tau f^{11}(z) + (\lambda \tau f^1(z))^2] e^{\lambda \tau [f(z)-1]} \Big|_{z=1} = \\
&= \lambda \tau \bar{k}^2 + (\lambda \tau \bar{k})^2 = \lambda \tau \bar{k}^2 + \overline{m(\tau)}^2.
\end{aligned}$$

Определим дисперсию  $D_m(\tau)$  числа заявок на интервалах  $\tau$ :

$$\begin{aligned}
D_m(\tau) &= \overline{m(\tau)^2} - \overline{m(\tau)}^2 = \lambda \tau \bar{k}^2 = \\
&= \lambda \tau (D_k + \bar{k}^2) = \rho \bar{k} (1 + v_k^2),
\end{aligned} \quad (3)$$

где  $\rho = \lambda \tau \bar{k} = \overline{m(\tau)}$  – общий коэффициент загрузки;

$v_k^2 = \frac{D_k}{(\bar{k})^2}$  – квадрат коэффициента вариации чисел заявок в пачках.

Дисперсия  $D_m(\rho)$  линейно зависит от коэффициента загрузки  $\rho$ . Преобразуем формулу (1):

$$\overline{q(\rho)} = \frac{D_m(\rho) J(\rho)}{2(1-\rho)} - \frac{\rho}{2}, \quad (4)$$

где  $J(\rho) = 1 + 2r_{q_{i-1}m_i}(\rho)$  называют ковариационным индексом дисперсии, а

$$r_{q_{i-1}m_i}(\rho) = \frac{\text{Cov}[q_{i-1}(\rho); m_i(\rho)]}{D_m(\rho)}$$

– нормированная ковариационная функция.

В дальнейшем с помощью имитационного моделирования мы покажем, что при малых коэффициентах загрузки значение индекса дисперсии для потоков с пуассоновским распределением чисел заявок в пачках мало отличается от единицы и корреляционная составляющая практически отсутствует. При этом формула (1) упрощается  $mE(\rho) = D_m(\rho) = \rho E$  и

$$\overline{q(\rho)} = \frac{D_m(\rho)}{2(1-\rho)} - \frac{\rho}{2} = \frac{\rho E}{2(1-\rho)} - \frac{\rho}{2}, \quad (5)$$

где  $E = \bar{k}(1 + v_k^2)$ . Дисперсия  $D_m(\rho)$  в (5) линейно зависит от коэффициента загрузки  $\rho$ , а ее значение пропорционально среднему числу заявок в пачке.

Рассмотрим частные случаи.

1. Ординарный пуассоновский поток:  $k_i = 1$ ,  $\bar{k} = 1$ ,  $v_k^2 = 0$ ,  $E = 1$  – при этом справедлива формула (2).

2. Все пачки имеют одинаковое число заявок:  $\bar{k} = k$ ,  $v_k^2 = 0$ ,  $E = k$ .

3. Числа заявок в пачках распределены по закону Пуассона:  $\bar{k} = k$ ,  $v_k^2 = \frac{1}{k}$ ,  $E = \bar{k} + 1$ .

4. Числа заявок в пачках целые и распределены по экспоненциальному закону:  $\bar{k} = k$ ,  $v_k^2 = 1$ ,  $E = 2\bar{k}$ .

## Групповые неординарные пуассоновские потоки с зависимым числом заявок в пакете

Мы рассмотрели групповые пуассоновские потоки, в которых случайные, взаимно независимые числа заявок  $\mu_k$  в пачках не зависят также и от интервалов времени между соседними событиями (соседними пачками). Рассмотрим теперь поток, в котором указанные числа заявок в пачках пропорциональны длительностям интервалов времени  $\vartheta_k = t_{k+1} - t_k$  между соседними пачками  $\mu_k = \bar{k} \lambda \vartheta_k$ . Очевидно, что  $\bar{\mu}_k = \bar{k}$ . Поскольку интервалы  $\vartheta_k$  между соседними пачками взаимно независимы и имеют экспоненциальное распределение, числа заявок  $\mu_k$  в пачках также взаимно независимы и имеют экспоненциальное распределение со средним значением  $\bar{k}$ , параметрами  $v_k^2 = 1$  и  $E = 2\bar{k}$ .

Однако, в отличие от рассмотренного выше примера, числа заявок в каждой из пачек пропорциональны длительностям соответствующих интервалов  $\vartheta_k$ , и очередь, возникающая с появлением каждой пачки, успевает завершиться до появления следующей пачки заявок, причем даже при коэффициенте загрузки, равном единице.

Покажем это, принимая во внимание, что  $\mu_k \tau = \bar{k} \lambda \tau \vartheta_k = \rho \vartheta_k$  – длительность времени обработки всех заявок на интервале  $\vartheta_k$ . Обозначим через  $\Delta_k = \vartheta_k - \rho \vartheta_k = \vartheta_k (1 - \rho)$  запас по времени обработки всех заявок на указанном интервале. Относительный запас по времени  $\frac{\Delta_k}{\vartheta_k} = 1 - \rho$

остаётся постоянным на всех интервалах и зависит только от коэффициента загрузки. При максимальной загрузке  $\rho = 1$  запас равен нулю, но обработка всех заявок в очереди успевает завершиться до появления очередной пачки заявок (это хорошо иллюстрируют рисунки 7, 8 в разделе с результатами имитационного моделирования).

Даже в случае максимальной загрузки, когда на интервале, предшествующем интервалу появления пачки, происходит обработка последней заявки, очередь заявок  $q_{i-1}(\rho) = 0$ , и, следовательно,  $q_{i-1}(\rho) m_i(\rho) = 0$ . Учитывая, что  $\text{Cov}[q_{i-1}(\rho); m_i(\rho)] = q_{i-1}(\rho) [m_i(\rho) - \rho]$ , преобразуем формулу (1):

$$\begin{aligned}
\overline{q(\rho)}(1-\rho) &= \frac{D_m(\rho)}{2} + \\
&+ \text{Cov}[q_{i-1}(\rho); m_i(\rho)] - \frac{\rho(1-\rho)}{2} = \\
&= \frac{D_m(\rho)}{2} + \overline{q_{i-1}(\rho) m_i(\rho)} - \overline{q(\rho)} \rho - \frac{\rho(1-\rho)}{2}, \quad (6)
\end{aligned}$$

$$\overline{q(\rho)} = \frac{D_m(\rho)}{2} - \frac{\rho(1-\rho)}{2} = \frac{E\rho - \rho(1-\rho)}{2},$$

$$\overline{q(\rho)} = \bar{k}\rho - \frac{\rho(1-\rho)}{2}.$$

Максимальное значение дроби в полученном выражении не превышает 0.125, поэтому даже при небольших значениях чисел заявок в пачках характеристика  $\overline{q(\rho)}$  практически линейна, как это будет видно из рисунка 9 в разделе имитационного моделирования.

Равенство нулю математического ожидания  $\overline{q_{i-1}(\rho)m_i(\rho)} = 0$  свидетельствует, что для данного потока взаимная ковариация  $Cov[q_{i-1}(\rho); m_i(\rho)]$  не равна нулю и отрицательна:

$$Cov[q_{i-1}(\rho); m_i(\rho)] = \overline{q_{i-1}(\rho)m_i(\rho)} - \overline{q(\rho)}\rho = -\overline{q(\rho)}\rho.$$

Подставляя значения  $\overline{q(\rho)}$  из (6), получим:

$$Cov[q_{i-1}(\rho); m_i(\rho)] = -\bar{k}\rho^2 + \frac{\rho^2(1-\rho)}{2} = -\bar{k}\rho^2\left(1 - \frac{1-\rho}{2\bar{k}}\right). \quad (7)$$

При достаточно больших значениях чисел заявок в пачках ковариация имеет практически квадратичную зависимость от коэффициента загрузки.

Соотношение (7) позволяет определить значения числителя в первой дроби (1), обозначенного нами в разделе моделирования на рисунке 9 через  $mE(\rho)$ :

$$mE(\rho) = 2\bar{k}\rho(1-\rho)\left(1 + \frac{\rho}{2\bar{k}}\right). \quad (8)$$

Указанная зависимость имеет максимум при значениях  $\rho \approx 0,5$  – см. рисунок 9. Именно наличие члена  $(1-\rho)$ , сокращающегося при подстановке в формулу (1), приводит для данного потока к практически линейной зависимости среднего размера очереди от коэффициента загрузки, показанной в (6).

### Групповые гиперпуассоновские потоки

Сумму независимых одновременно параллельно протекающих рассмотренных выше потоков назовем групповым гиперпуассоновским потоком. В отличие от большинства потоков, управляемых цепью Маркова, протекание всех суммируемых потоков происходит не последовательно, а непрерывно, параллельно во времени. При получении гиперпуассоновского потока происходит суммирование нескольких пуассоновских потоков событий, каждое из которых представляет пачку одновременно поступающих

заявок. Однако суммарный поток событий (появлений пачек) является пуассоновским. Следовательно, суммарный поток заявок также является групповым пуассоновским потоком.

Линейная зависимость числителя в формуле (5) от коэффициента загрузки при малых нагрузках существенно упрощает определение средних размеров очередей суммарного гиперпуассоновского потока при мультиплексировании взаимно независимых групповых пуассоновских потоков:

$$\rho_\Sigma = \sum_{j=1}^M \rho_j; \quad E_\Sigma = \sum_{j=1}^M \frac{\rho_j}{\rho_\Sigma} E_j.$$

С точки зрения средних значений образуемых очередей полученный суммарный гиперпуассоновский поток эквивалентен соответствующему групповому пуассоновскому потоку, однако характеристики их мгновенных значений могут существенно отличаться. В дальнейшем мы покажем, что соответствующим выбором характеристик суммируемых потоков можно получить суммарный гиперпуассоновский поток с характеристиками, весьма близкими к реальному моделируемому потоку.

### Имитационное моделирование

В этом разделе подтвердим полученные выводы результатами имитационного моделирования с помощью разработанной нами программной системы АМС [4]. Система позволяет получить и исследовать основные интервальные характеристики потоков, представленных в формате .txt в виде последовательности моментов поступления заявок.

**Групповой поток с пуассоновским распределением вероятностей независимых чисел заявок в пачке.** Были сгенерированы два групповых пуассоновских потока с одинаковыми значениями интенсивностей  $\lambda = 1$  заявка в секунду. Первый поток содержал пачки заявок, имеющих пуассоновское распределение чисел заявок в пачке, со средним значением  $\bar{k}_1 = 10$  заявок в пачке и интенсивностью поступления пачек  $\lambda_1 = 0,1$  пачка в секунду.  $\lambda = \bar{k}_1\lambda_1 = 1$ . Второй поток имел следующие характеристики:

$$\lambda = \lambda_2 = 1; \quad \bar{k}_2 = k_2 = 1,$$

то есть каждая пачка состояла точно из одной заявки и, следовательно, второй поток был обычным пуассоновским потоком с интенсивностью, равной  $\lambda$ .

На рисунке 1 совмещены графики чисел заявок на интервалах обслуживания для первого и второго потоков при коэффициенте загрузки  $\rho = 0,1$ . Пуассоновский поток весьма равномерен



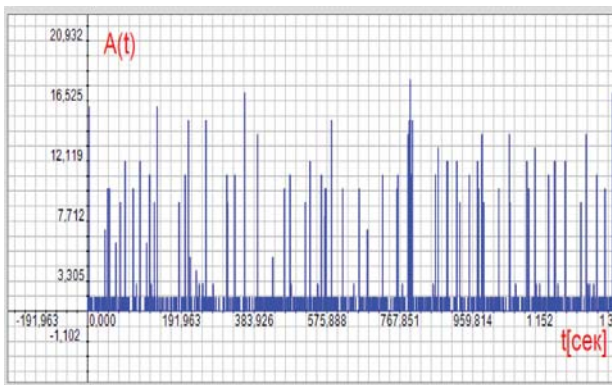


Рисунок 1. Числа заявок на интервалах обслуживания для первого и второго потоков при коэффициенте загрузки  $\rho = 0,1$

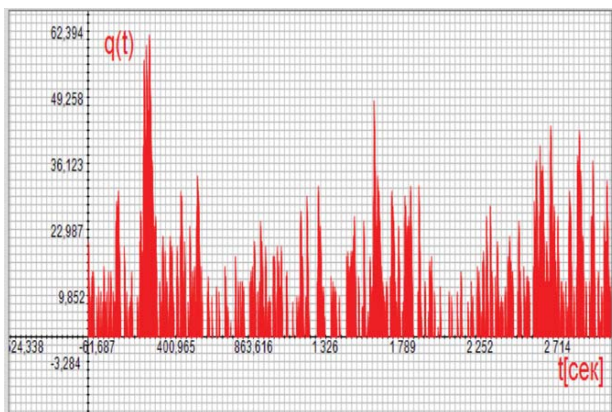


Рисунок 2. Очереди, возникающие при обслуживании группового пуассоновского потока в однолинейной СМО при коэффициенте загрузки  $\rho = 0,5$

и в основном имеет не более одной заявки, в то время как групповой пачечный поток на аналогичном интервале имеет свыше 10 заявок, числа которых распределены по закону Пуассона. Пачечный характер группового потока приводит к возникновению больших очередей при его обслуживании.

На рисунке 2 показан график изменения очереди при обслуживании группового пуассоновского потока в однолинейной СМО при коэффициенте загрузки  $\rho = 0,5$ . Максимальные значения чисел заявок в очередях превышают 60, что является результатом высокой пачечности потока.

Наиболее значительной интервальной характеристикой рассматриваемых потоков является зависимость дисперсии  $D_m(\rho)$  чисел заявок на интервалах обслуживания от коэффициента загрузки. Нами было показано, что указанная зависимость носит линейный характер и для пуассоновского распределения вероятностей чисел заявок в пачках определяется соотношением (3). При заданных параметрах группового потока:

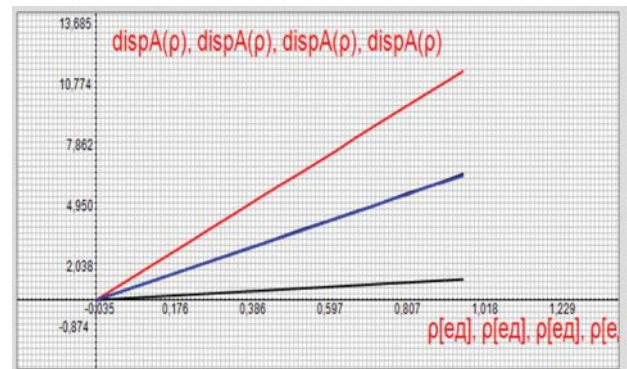


Рисунок 3. Зависимости дисперсии  $D_m(\rho)$  чисел заявок на интервалах обслуживания от коэффициента загрузки

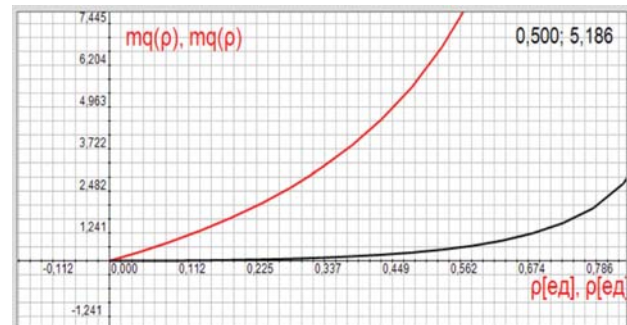


Рисунок 4. Зависимости средних размеров очередей  $\bar{q}(\rho)$  от коэффициента загрузки

$$v_k^2 = \frac{D_k}{(k)^2} = \frac{1}{k} = 0,1; \quad E = \bar{k}(1 + v_k^2) = 11,$$

в то время как для обычного пуассоновского потока  $E = 1$ . Зависимости дисперсии  $D_m(\rho)$  чисел заявок на интервалах обслуживания от коэффициента загрузки, полученные в результате имитационного моделирования обоих потоков, отражены на рисунке 3. Верхний график соответствует групповому пуассоновскому потоку с углом наклона  $E = 11$ . Нижний график соответствует обычному пуассоновскому потоку с углом наклона  $E = 1$ .

Средний график соответствует потоку, полученному в результате суммирования указанных потоков. Видно, что все зависимости строго линейны. На рисунке 4 показаны зависимости средних размеров очередей  $\bar{q}(\rho)$  от коэффициента загрузки, полученные в результате имитационного моделирования обоих потоков.

Верхний график – групповой поток, нижний график – пуассоновский поток. В верхнем углу показано значение размера очереди для группового потока при коэффициенте загрузки  $\rho = 0,5$ , полученное непосредственно с графика,  $\bar{q}(\rho) = 5,186$ . Теоретическое значение, определенное по формуле (4),  $\bar{q}(\rho) = 5,25$ . Незначитель-



Рисунок 5. Изменение значений числителя  $D_m(\rho)J(\rho)$  и изменение значений дисперсии  $D_m(\rho)$

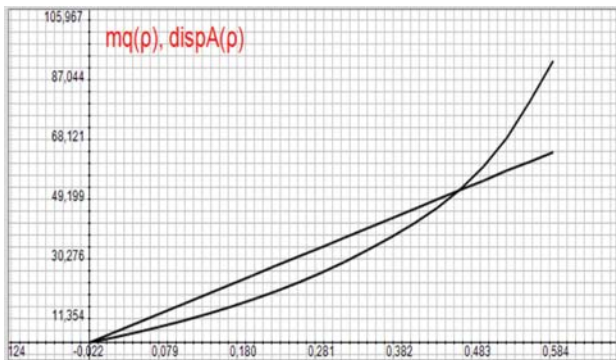


Рисунок 6. Изменение средних значений размера очереди и дисперсии для коэффициентов загрузки  $\rho$ , не превышающих 0,5

ная разница объясняется погрешностью процесса имитационного моделирования и влиянием корреляционных связей.

**Очереди при малых нагрузках.** Был сгенерирован групповой пуассоновский поток со значением интенсивности  $\lambda = 100$  заявок в секунду. Поток содержал пачки заявок, имеющих пуассоновское распределение чисел заявок в пачке, со средним значением  $\bar{k}_1 = 100$  заявок в пачке и интенсивностью поступления пачек  $\lambda_1 = 1$  пачка в с,  $\lambda = \bar{k}_1 \lambda_1 = 100$ .

На рисунке 5 показаны изменение значений числителя  $D_m(\rho)J(\rho)$  в формуле (4) (сплошная линия) и изменение дисперсии  $D_m(\rho)$  (точечная линия) для коэффициентов загрузки  $\rho$ , не превышающих 0,5.

На участках, где линии совпадают, индекс дисперсии равен единице, что означает малое влияние корреляционной составляющей. Среднее значение очереди определяется в основном дисперсией.

На рисунке 6 показаны изменение средних значений размера очереди и изменение дисперсии  $D_m(\rho)$  (прямая линия) для коэффициентов загрузки  $\rho$ , не превышающих 0,5. На указанном

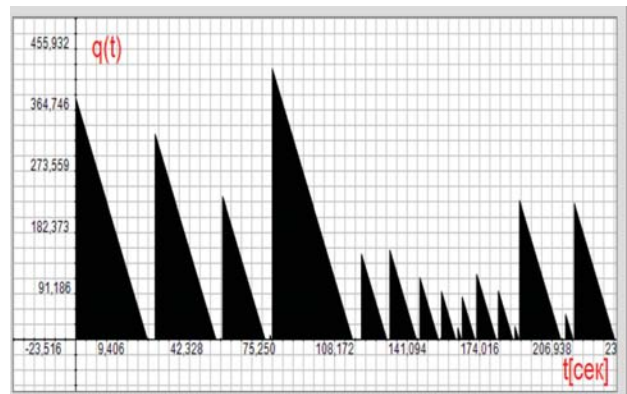


Рисунок 7. Изменение размеров очередей во времени для первого потока

участке разница составляет примерно 30 %. Исследуем этот параметр более подробно:

$$\Delta(\rho) = D_m(\rho) - \overline{q(\rho)} = \rho E - \frac{\rho E}{2(1-\rho)} - \frac{\rho}{2}.$$

Точка пересечения линий соответствует загрузке

$$\rho_0 = \frac{E+1}{2E} \approx 0,5.$$

Максимальное значение разности соответствует загрузке

$$\rho_m = \frac{E+1}{2(2E-1)} \approx 0,25.$$

Максимальная разность  $\Delta(\rho_m) \approx 8,3$  превышает значение очереди  $\overline{q(\rho_m)}$  также примерно на 30 %.

### Групповой поток с экспоненциальным распределением вероятностей чисел заявок в пачках, зависимость от интервалов времени между пачками

Моделирование проводилось в сравнении с групповым потоком, имеющим пуассоновское распределение вероятностей независимых заявок в пачках. Были сгенерированы два потока пачек с одинаковыми интенсивностями  $\lambda = 1$  и экспоненциальным распределением вероятностей интервалов между соседними пачками. Числа заявок в пачках первого потока имеют экспоненциальное распределение вероятностей со средним значением  $\bar{k}_1 = 100$  и пропорциональны длительностям интервалов между пачками. Числа заявок в пачках второго потока распределены по закону Пуассона со средним числом заявок в пачке  $\bar{k}_2 = 200$ . Это позволило для обоих потоков сделать одинаковыми дисперсии чисел заявок на интервалах обслуживания. Для каждого из потоков было сгенерировано по  $10^5$  заявок.



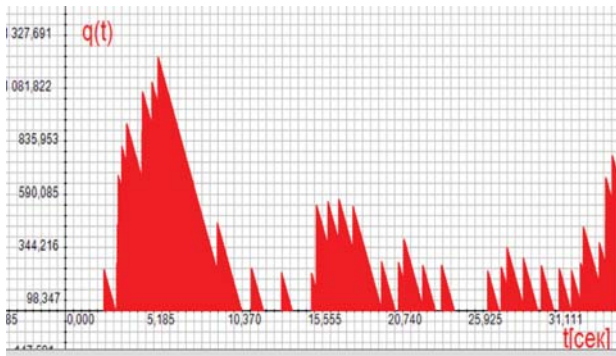


Рисунок 8. Изменение размеров очередей во времени для второго потока

На рисунках 7, 8 показаны графики изменения очередей при коэффициенте загрузки  $\rho = 0,9$  для первого и второго потоков соответственно. Из рисунка 7 видно, что очереди, возникающие при появлении пачек заявок, не пересекаются во времени и перед появлением каждой очередной пачки очередь отсутствует. Для второго потока, показанного на рисунке 8, наоборот, очереди пересекаются и максимальные значения очередей намного превышают максимальные значения первого потока.

На рисунке 9 для сравнения совмещены некоторые характеристики рассматриваемых потоков. Зависимости дисперсий  $D_m(\rho)$  для обоих потоков совмещены и представлены верхней (сплошной) прямой линией. Зависимость очереди  $q(\rho)$  для первого потока также линейна, представлена нижней (точечной) прямой линией, имеющей угол наклона, вдвое меньший линии дисперсии, что полностью соответствует (6).

Для обоих потоков совмещены (верхняя сплошная прямая). Зависимость очереди для первого потока (точечная прямая); зависимость очереди  $q(\rho)$  для второго потока (точечная кривая); зависимость  $mE(\rho)$  числителя в формуле (1) для первого потока (дуга, сплошная линия).

### Аппроксимация средних значений очередей реального трафика

Анализ двух рассмотренных выше потоков показал, что они имеют принципиально различные характеристики зависимостей очередей от коэффициента загрузки. Если характеристика потока с зависимыми заявками строго линейна, то характеристика потока с независимыми числами заявок в пачках нелинейно возрастает при больших нагрузках. Эти различия можно использовать, создав групповой гиперпуассоновский поток из двух таких потоков. Соответствующим выбором параметров этого потока можно получить зависимости средних размеров очередей

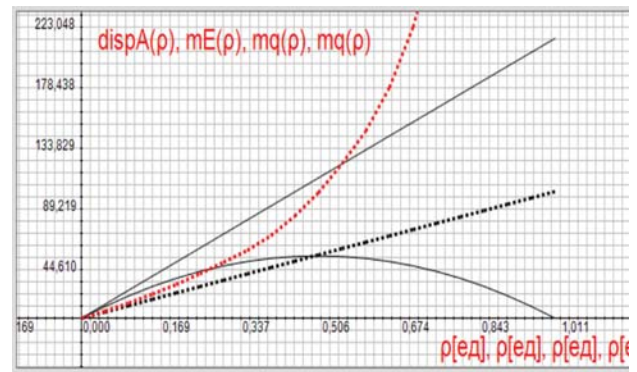


Рисунок 9. Зависимости дисперсий  $D_m(\rho)$

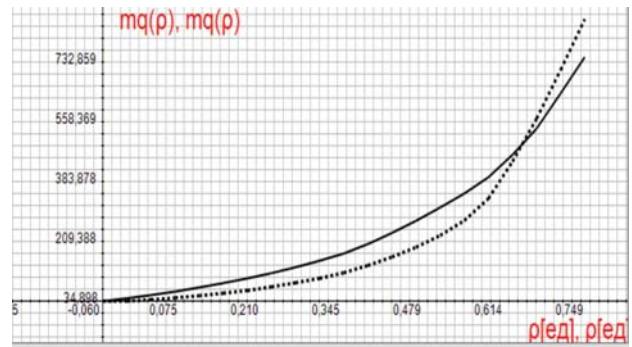


Рисунок 10. Зависимости средних размеров очередей  $q(\rho)$  для реального видеотрафика (точечная линия) и для группового потока (сплошная линия)

$q(\rho)$  от коэффициента загрузки, весьма близкие к соответствующим характеристикам реального трафика.

На рисунке 10 показаны зависимости средних размеров очередей  $q(\rho)$  от коэффициента загрузки для реального видеотрафика и для группового потока, имеющего пуассоновское распределение чисел заявок в пачках со значением  $\bar{k} = 420$ . Наблюдаем удовлетворительное совпадение. Однако причины возникновения очередей в обоих случаях существенно различны. В случае видеотрафика основной вклад в образование очередей вносят корреляционные связи. Во втором случае, наоборот, основной вклад вносит дисперсия при незначительном влиянии корреляционных связей.

Сказанное хорошо иллюстрируется представленными на рисунке 11 зависимостями дисперсий обоих потоков от коэффициента загрузки.

Размеры дисперсии чисел заявок группового пуассоновского потока при одинаковых нагрузках значительно превышают соответствующие значения дисперсии потока реального видеотрафика.

### Выводы

1. Незначительное влияние корреляционных связей в групповом пуассоновском потоке

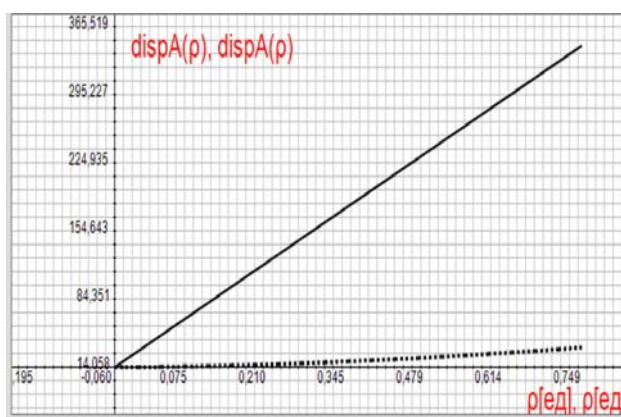


Рисунок 11. Зависимости дисперсий для реального видеотрафика (точечная линия) и для группового потока (сплошная линия)

делает его привлекательным в качестве модели телекоммуникационного трафика.

2. При суммировании нескольких групповых пуассоновских потоков результирующий поток также является групповым пуассоновским потоком.

3. Предложенный в работе групповой пуассоновский поток с зависимым числом заявок в пачках имеет линейную характеристику среднего размера очереди  $q(\rho)$ .

4. В групповом потоке с независимым числом заявок в пачках, распределенным по закону Пуассона, ковариационная составляющая числителя в обобщенной формуле Хинчина – Поллачека практически отсутствует и средний размер очереди определяется значениями дисперсии  $D_m(\rho)$ , линейно зависящими от коэффициента загрузки.

5. Принципиальное различие характеристик указанных выше потоков позволяет при их мультиплексировании получить суммарную зависимость, хорошо аппроксимирующую характеристику реального телекоммуникационного трафика.

## Литература

1. Вишнеvский В.М., Дудин А.Н. Системы массового обслуживания с коррелированными входными потоками и их применение для моделирования телекоммуникационных сетей // Автоматика и телемеханика. 2017. № 8. С. 3–59.
2. Neuts M.F. Versatile Markovian point process // Journal of Applied Probability. 1979. Vol. 16. № 4. P. 764–779. DOI: <https://doi.org/10.2307/3213143>.

3. Дудин А.Н., Клименок В.И. Системы массового обслуживания с коррелированными потоками. Минск: БГУ, 2000. 175 с.
4. Лихтциндер Б.Я. Трафик мультисервисных сетей доступа (интервальный анализ и проектирование). М.: Горячая линия – Телеком, 2018. 290 с.
5. Варианты пуассоновского потока событий. URL: <https://studfile.net/preview/7316586/page:7> (дата обращения: 26.09.2019).
6. Ramaswami V. The N/G/1 queue and its detailed analysis // Advances in Applied Probability. 1980. Vol. 12. № 1. P. 222–261. DOI: <https://doi.org/10.2307/1426503>.
7. Lakatos L., Szeidl L., Telek M. Introduction to Queueing Systems with Telecommunication Applications. Berlin: Springer Science+Business Media, 2013. 388 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-1-4614-5317-8>.
8. Flexible dual-connectivity spectrum aggregation for decoupled uplink and downlink access in 5G heterogeneous systems / M.A. Lema [et al.] // IEEE Journal on Selected Areas in Communications. 2016. Vol. 34. № 1. P. 2851–2865. DOI: <https://doi.org/10.1109/JSAC.2016.2615185>.
9. A multiband OFDMA heterogeneous network for millimeter wave 5G wireless applications / S. Niknam [et al.] // IEEE Access. 2016. Vol. 4. P. 5640–5648. DOI: <https://doi.org/10.1109/ACCESS.2016.2604364>.
10. Vishnevsky V., Larionov A., Frolov S. Design and scheduling in 5G stationary and mobile communication systems based on wireless millimeter-wave mesh networks // Distributed Computer and Communication Networks. 2014. Vol. 279. P. 11–27. DOI: [https://doi.org/10.1007/978-3-319-05209-0\\_2](https://doi.org/10.1007/978-3-319-05209-0_2).
11. Applying graph-theoretic approach for time-frequency resource allocation in 5G MmWave backhaul network / V.M. Vishnevsky [et al.] // Advances in Wireless and Optical Communications (RTUWO). 2016. P. 221–224. DOI: <https://doi.org/10.1109/RTUWO.2016.7821888>.
12. On the self-similar nature of Ethernet traffic / W.E. Leland [et al.] // IEEE/ACM Transactions on Networking. 1994. Vol. 2. № 1. P. 1–15.
13. Цыбаков Б.С. Модель телетрафика на основе самоподобного случайного процесса // Радиотехника. 1999. № 5. С. 24–31.

Получено 21.04.2020



**Лихтциндер Борис Яковлевич**, д.т.н., профессор кафедры сетей и систем связи Поволжского государственного университета телекоммуникаций и информатики, 443010, Российская Федерация, г. Самара, ул. Л. Толстого, 23. Тел. +7 846 333-47-69. E-mail: lixt@psuti.ru

## INTERVAL CHARACTERISTICS OF GROUP POISSON MODELS OF TELECOMMUNICATION SYSTEMS TRAFFIC

*Likhttsinder B.Ya.*

*Povolzhskiy State University of Telecommunications and Informatics, Samara, Russian Federation  
E-mail: lixt@psuti.ru*

Lack of efficacy of applying self-similar processes models to the analysis of queues in telecommunication systems is shown. The evolution of flow models controlled by the Markov chain is considered. The features of applying Markov flows as traffic models of telecommunication systems are considered. Models of single-channel queuing systems with input flows with arbitrary correlation are presented. Generalizations of the Khinchin–Pollachek formula are given for these systems. The prospects of using interval methods of queue analysis developed by the author in queuing systems with correlated input flows are shown. It is proposed to use the group nonordinary Poisson flow as the model of telecommunication traffic. Interval characteristics of these flows are considered and the prospects of their application are shown. The questions of multiplexing such flows during processing in queuing systems are considered. It is shown that when summing several group Poisson flows, the resulting flow is also a group Poisson flow. The conclusions made are confirmed by the results of simulation. By examples, the adequacy of characteristics of such models to the characteristics of real flows of video traffic is shown.

**Keywords:** *queuing systems, group models, queues, video traffic, correlations, Khinchin–Pollachek formula*

**DOI:** 10.18469/ikt.2020.18.3.08

**Likhttsinder Boris Yakovlevich**, Povolzhskiy State University of Telecommunications and Informatics, 23, L. Tolstoy Street, Samara, 443010, Russian Federation; Professor of Networks and Communication Systems Department, Doctor of Technical Science. Tel. +7 846 333-47-69. E-mail: lixt@psuti.ru

### References

1. Vishnevskij V.M., Dudin A.N. Queuing systems with correlated input flows and their application for modeling telecommunication networks. *Avtomatika i telemekhanika*, 2017, no. 8, pp. 3–59. (In Russian.)
2. Neuts M.F. Versatile Markovian point process. *Journal of Applied Probability*, 1979, vol. 16, no. 4, pp. 764–779. DOI: <https://doi.org/10.2307/3213143>.
3. Dudin A.N., Klimenok V.I. *Queuing Systems with Correlated Flows*. Minsk: BGU, 2000, 175 p. (In Russian.)
4. Lihttsinder B.Ya. *Traffic of Multiservice Access Networks (Interval Analysis and Design)*. Moscow: Gorjachaja linija – Telekom, 2018, 290 p. (In Russian.)
5. *Poisson event flow variants*. URL: <https://studfile.net/preview/7316586/page:7> (accessed 26.09.2019). (In Russian.)
6. Ramaswami V. The N/G/1 queue and its detailed analysis. *Advances in Applied Probability*, 1980, vol. 12, no. 1, pp. 222–261. DOI: <https://doi.org/10.2307/1426503>.
7. Lakatos L., Szeidl L., Telek M. *Introduction to Queueing Systems with Telecommunication Applications*. Berlin: Springer Science+Business Media, 2013, 388 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-1-4614-5317-8>.

8. Lema M.A. et al. Flexible dual-connectivity spectrum aggregation for decoupled uplink and downlink access in 5G heterogeneous systems. *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, 2016, vol. 34, no. 1, pp. 2851–2865. DOI: <https://doi.org/10.1109/JSAC.2016.2615185>.
9. Niknam S. et al. A multiband OFDMA heterogeneous network for millimeter wave 5G wireless applications. *IEEE Access*, 2016, vol. 4, pp. 5640–5648. DOI: <https://doi.org/10.1109/ACCESS.2016.2604364>.
10. Vishnevsky V., Larionov A., Frolov S. Design and scheduling in 5G stationary and mobile communication systems based on wireless millimeter-wave mesh networks. *Distributed Computer and Communication Networks*, 2014, vol. 279, pp. 11–27. DOI: [https://doi.org/10.1007/978-3-319-05209-0\\_2](https://doi.org/10.1007/978-3-319-05209-0_2).
11. Vishnevsky V.M. et al. Applying graph-theoretic approach for time-frequency resource allocation in 5G MmWave backhaul network. *Advances in Wireless and Optical Communications (RTUWO)*, 2016, pp. 221–224. DOI: <https://doi.org/10.1109/RTUWO.2016.7821888>.
12. Leland W.E. et al. On the self-similar nature of Ethernet traffic. *IEEE/ACM Transactions on Networking*, 1994, vol. 2, no. 1, pp. 1–15.
13. Tsybakov B.S. Teletraffic model based on a self-similar random process. *Radiotekhnika*, 1999, no. 5, pp. 24–31. (In Russian.)

*Received 21.04.2020*

УДК 621.391:621.39

## АЛГОРИТМЫ УПРАВЛЕНИЯ ПОТОКОВЫМ ВИДЕОТРАФИКОМ

*Лихтциндер Б.Я.*

*Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики, Самара, РФ*

*E-mail: lixt@psuti.ru*

Рассмотрены алгоритмы управления потоковым видеотрафиком. Анализируются особенности трафика видеокодеков, который имеет явно выраженный пачечный характер. Исследуются характеристики таких потоков и их влияние на размеры очередей и задержек в узлах телекоммуникационных сетей. Приводится обобщенная формула Хинчина – Поллачека, и показана линейная зависимость числителя указанной формулы от коэффициента загрузки. Рассмотрены основные причины задержек пакетов в очередях телекоммуникационной сети, и показано влияние этих задержек на процессы управления потоковым видеотрафиком. Предлагается алгоритм управления видеопотоком, базирующийся на измерении размеров буферной памяти в оборудовании клиента. Показано, что подобный алгоритм исключает влияние задержек из цепи обратной связи системы управления. Приводятся результаты имитационного моделирования рассматриваемых процессов.

**Ключевые слова:** *видеотрафик, управление, задержки, очереди, битрейт, алгоритм, видеокодеки, групповые потоки, моделирование*

### Введение

Сегодня технология потокового вещания видео все более замещает общепринятую видеотрансляцию, основанную на протоколах RTP/UDP [1]. Технология передачи с использованием протокола TCP обладает высокой надежностью, поскольку, благодаря наличию обратной связи, восстанавливает поврежденные или утерянные во время передачи пакеты. Алгоритм управления видеопотоком предусматривает возможно более полную загрузку TCP-канала, а в случае возникновения перегрузок и появления информации об увеличении числа теряемых пакетов передатчик производит их повторное воспроизведение.

Сокращая размер «окна», в течение которого ведется передача, он уменьшает интенсивность поступления пакетов, снижая тем самым возможность возникновения перегрузки.

Одним из наиболее распространенных алгоритмов стабилизации TCP-видеопотоков является алгоритм CUBIC [2]. Управление потоком осуществляется передающей стороной. При детектировании наличия потерь пакетов передатчик понижает скорость их отправки до исчезновения потерь, а затем ступенчато повышает ее по кубической степенной зависимости до появления информации о вновь возникающих потерях.

Пропускная способность TCP-канала регулируется размером «окна перегрузки». При на-