9. Slepov N.N. *Sovremennie tekhnologii cifrovikh optovolokonnikh setey svayzi* [Modern technology of digital fiber optic communication networks]. Moscow: Radio i sviaz, 2000, pp. 298–299. (In Russian).
10. Ruffin A.B. Stimulated Brillouin scattering: an overview of measurements, system impairments, and applications. *Technical Digest: Symposium on Optical Fiber Measurements*, Boulder, CO, USA, 2004, pp. 23–28.

Received 07.02.2020

ТЕХНОЛОГИИ КОМПЬЮТЕРНЫХ СИСТЕМ И СЕТЕЙ

ТРУДЫ НАУЧНОЙ ШКОЛЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ ЕСТЕСТВОЗНАНИЯ «МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ И СЕТЕЙ»

УДК 621.391.1:621.395

ИССЛЕДОВАНИЕ СИСТЕМЫ СО СДВИНУТЫМИ ГИПЕРЭРЛАНГОВСКИМ И ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫМ ВХОДНЫМИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯМИ

Тарасов В.Н.
Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики, Самара, РФ
E-mail: tarasov-vn@psuti.ru

В данной статье представлены результаты исследований по системе массового обслуживания $HE_2/M/1$ со сдвинутыми вправо от нулевой точки гиперэрланговским и экспоненциальным входными распределениями. По определению Кендалла, система $HE_2/M/1$ с обычными распределениями относится к типу G/M/1, для которых в общем случае неизвестно решение для среднего времени ожидания требований в очереди. Эта же система со сдвинутыми распределениями трансформируется в систему G/G/1, для которой в общем случае также неизвестно решение для среднего времени ожидания. Учитывая тот факт, что, начиная с коэффициента вариации, равного четырем, распределение гипер-Эрланг имеет тяжелый хвост, рассматриваемая система может иметь активное приложение в современной теории телетрафика. Использование распределений гипер-Эрланга более высокого порядка затруднительно для вывода решения для среднего времени ожидания требований в очереди из-за нарастающей вычислительной сложности. Для гиперэрланговского закона распределения, как и гиперэкспоненциального закона, метод спектрального разложения решения интегрального уравнения Линдли дает возможность получить решение в конечном виде. В статье приведены результаты по спектральному разложению решения интегрального уравнения Линдли для системы массового обслуживания $HE_2/M/1$ со сдвинутыми распределениями, а также расчетная формула для среднего времени ожидания требований в очереди. Показано, что система $HE_2/M/1$ со сдвинутыми распределениями является системой с запаздыванием во времени и обеспечивает меньшее время ожидания по сравнению с обычной системой. Адекватность полученных результатов подтверждена корректностью использования классического метода спектрального разложения и результатами численного моделирования. Для вывода полученных результатов, а также для численных расчетов использован известный метод моментов теории вероятностей.

Ключевые слова: *СМО $HE_2/M/1$ со сдвинутыми распределениями, среднее время ожидания в очереди, метод спектрального разложения, интегральное уравнение Линдли, преобразование Лапласа*

Введение

Настоящая статья посвящена анализу системы массового обслуживания) СМО $HE_2/M/1$ со сдвинутыми вправо от нулевой точки гиперэрланговским и экспоненциальным входными распределениями. Система $HE_2/M/1$ с обычными распределениями рассмотрена в [1], где для нее представлены спектральное разложение решения интегрального уравнения Линдли и расчетная формула для главной характеристики СМО – среднего времени ожидания требований в очереди. В отличие от обычной системы $HE_2/M/1$, систему со сдвинутыми распределениями обозначим $HE_2^-/M^-/1$.

Метод спектрального разложения решения интегрального уравнения Линдли (ИУЛ) в теории систем массового обслуживания G/G/1 занимает важное место. Одна из форм интегрального уравнения Линдли выглядит так [2; 3]:

$$W(y)=\begin{cases}\int\limits_{-\infty}^{y} W(y-u)\mathrm{d}C(u), & y\ge 0,\\ 0, & y<0.\end{cases}$$

Для записи ИУЛ, а также при рассмотрении метода спектрального разложения решения ИУЛ будем использовать стандартные обозначения [2]: через $A^*(s)$ и $B^*(s)$ обозначим преобразования Лапласа функций плотности распределения интервалов между поступлениями и времени обслуживания соответственно.

Суть решения ИУЛ методом спектрального разложения состоит в нахождении для выражения $A^*(-s)\cdot B^*(s)-1$ представления в виде произведения двух множителей, которое давало бы рациональную функцию от *s*. Следовательно, для нахождения закона распределения времени ожидания необходимо следующее спектральное разложение: $A^*(-s)\cdot B^*(s)-1=\psi_+(s)/\psi_-(s)$, где $\psi_+(s)$ и $\psi_-(s)$ – некоторые дробно-рациональные функции от *s*, удовлетворяющие специальным условиям согласно [2], которые здесь опускаем.

Постановка задачи

В статье ставится задача вывода формулы для среднего времени ожидания для рассматриваемой системы со сдвинутыми распределениями $HE_2/M/1$, а также подтверждения адекватности построенной математической модели путем численного моделирования в пакете Mathcad. Вывод решения для среднего времени ожидания проводится методом спектрального разложения решения ИУЛ, как это показано в работах [4–7]. Близкие аппроксимативные подходы использованы в [8–11].

Решение для системы $HE_2^-/M^-/1$

В системе $HE_2^-/M^-/1$ интервалы времени между поступлениями требований заданы функцией плотности

$$a(t)=4p\lambda_1^2(t-t_0)e^{-2\lambda_1(t-t_0)}+ \\ +4(1-p)\lambda_2^2(t-t_0)e^{-2\lambda_2(t-t_0)}, \tag{1}$$

преобразование Лапласа которой имеет вид

$$A^*(s)= \\ =\left[p\left(\frac{2\lambda_1}{s+2\lambda_1}\right)^2+(1-p)\left(\frac{2\lambda_2}{s+2\lambda_2}\right)^2\right]e^{-t_0 s}. \tag{2}$$

Время обслуживания распределено с плотностью

$$b(t)=\mu e^{-\mu(t-t_0)}, \tag{3}$$

а ее преобразование Лапласа вычисляется как:

$$B^*(s)=\left(\frac{\mu}{s+\mu}\right)e^{-t_0 s}. \tag{4}$$

В выражениях (1)–(4) $t_0>0$ представляет собой параметр сдвига распределений.

Тогда спектральное разложение решения ИУЛ для системы $HE_2^-/M^-/1$ $A^*(-s)\cdot B^*(s)-1=$ $=\psi_+(s)/\psi_-(s)$ примет вид

$$\frac{\psi_+(s)}{\psi_-(s)}=\left[p\left(\frac{2\lambda_1}{2\lambda_1-s}\right)^2+(1-p)\left(\frac{2\lambda_2}{2\lambda_2-s}\right)^2\right]\times \\ \times e^{t_0 s}\left(\frac{\mu}{\mu+s}\right)e^{-t_0 s}-1. \tag{5}$$

В разложении (5) экспоненты с противоположными знаками обнуляются, тогда получаем спектральное разложение:

$$\frac{\psi_+(s)}{\psi_-(s)}=\left[p\left(\frac{2\lambda_1}{2\lambda_1-s}\right)^2+(1-p)\left(\frac{2\lambda_2}{2\lambda_2-s}\right)^2\right]\times \\ \times\left(\frac{\mu}{\mu+s}\right)-1. \tag{6}$$

Таким образом, спектральное разложение решения ИУЛ для системы $HE_2^-/M^-/1$ полностью совпадает с таким же разложением для обычной системы $HE_2/M/1$, поэтому мы в дальнейшем изложении можем воспользоваться результатами [1].

Окончательно спектральное разложение решения ИУЛ для системы $HE_2/M/1$ имеет вид [1]

$$\frac{\psi_+(s)}{\psi_-(s)}=\frac{-s(s+s_1)(s-s_2)(s-s_3)(s-s_4)}{(2\lambda_1-s)^2(2\lambda_2-s)^2(\mu+s)}. \tag{7}$$

Исследование многочлена в числителе разложения (7) и определение его корней являются основным моментом метода спектрального разложения решения ИУЛ.

Многочлен четвертой степени в числителе разложения (6)–(7)

$$s^4+c_3s^3+c_2s^2+c_1s+c_0 \tag{8}$$

с коэффициентами

$$c_0=a_1\mu+16\lambda_1\lambda_2[\lambda_1\lambda_2-\mu(\lambda_1+\lambda_2)],$$

$$c_1=4\mu(\lambda_1^2+4\lambda_1\lambda_2+\lambda_2^2)-16\lambda_1\lambda_2(\lambda_1+\lambda_2)-a_2\mu,$$

$$c_2=4(\lambda_1^2+\lambda_2^2)+16\lambda_1\lambda_2-4\mu(\lambda_1+\lambda_2),$$

$$c_3=\mu-4(\lambda_1+\lambda_2)$$

в случае стабильной системы имеет один действительный отрицательный корень $-s_1$ и три положительных корня s_2, s_3, s_4 (либо вместо последних один действительный положительный и два комплексно сопряженных с положительной вещественной частью). Эти коэффициенты сформированы с помощью символьных операций Mathcad и выражаются через параметры распределений (1) и (3), которые предстоит еще определить.

Рациональные функции $\psi_+(s)$ и $\psi_-(s)$ будем строить по правилам метода спектрального разложения: $\psi_+(s) = s(s+s_1)/(\mu+s)$, так как нули многочлена (6) $s=0$, $s=-s_1$ и полюс $s=-\mu$ лежат в области $\operatorname{Re}(s) \le 0$, а функция

$$\psi_-(s) = -\frac{(2\lambda_1 - s)^2 (2\lambda_2 - s)^2}{(s-s_2)(s-s_3)(s-s_4)},$$

так как ее нули и полюсы лежат в области $\operatorname{Re}(s) > D$, как того требует метод спектрального разложения.

Далее по методике спектрального разложения найдем константу K:

$$K = \lim_{s\to 0} \frac{\psi_+(s)}{s} = \lim_{s\to 0} \frac{(s+s_1)}{(s+\mu)} = \frac{s_1}{\mu},$$

где s_1 – абсолютное значение отрицательного корня $-s_1$. Постоянная K определяет вероятность того, что поступающее в систему требование застает ее свободной.

Для нахождения преобразования Лапласа функции плотности времени ожидания построим функцию

$$\Phi_+(s) = \frac{K}{\psi_+(s)} = \frac{s_1(s+\mu)}{s\mu(s+s_1)}.$$

Отсюда преобразование Лапласа функции плотности времени ожидания $W^*(s) = s \cdot \Phi_+(s)$ будет

$$W^*(s) = \frac{s_1(s+\mu)}{\mu(s+s_1)}. \tag{9}$$

Для вычисления среднего времени ожидания найдем производную от функции $W^*(s)$ со знаком минус в точке $s=0$:

$$-\left.\frac{dW^*(s)}{ds}\right|_{s=0} = \frac{1}{s_1} - \frac{1}{\mu}.$$

Окончательно среднее время ожидания для системы $\mathrm{HE}_2^-/\mathrm{M}^-/1$:

$$\bar{W} = 1/s_1 - 1/\mu. \tag{10}$$

Выражение (9) для преобразования Лапласа функции плотности времени ожидания позволяет определить также моменты высших порядков времени ожидания, а именно: вторая производная от преобразования (9) в точке $s=0$ дает второй начальный момент времени ожидания, что позволяет определить дисперсию времени ожидания. В стандарте [12] джиттер (дрожание задержки) в телекоммуникациях определен как колебание времени ожидания вокруг его среднего значения. Тогда джиттер можно определить через дисперсию времени ожидания. При анализе трафика, чувствительного к задержкам, это будет важным подспорьем.

Для использования формулы (10) при расчетах необходимо знать числовые характеристики распределения (1) и (3). Через числовые характеристики будем определять неизвестные параметры распределений (1) и (3) методом моментов. Для этого воспользуемся основным свойством преобразований Лапласа (2) и (4) воспроизведения моментов и запишем первые два первых начальных момента для распределения (1):

$$\begin{aligned} \bar{\tau}_\lambda &= \frac{p}{\lambda_1} + \frac{(1-p)}{\lambda_2} + t_0, \\ \overline{\tau_\lambda^2} &= t_0^2 + 2t_0\left[\frac{p}{\lambda_1} + \frac{(1-p)}{\lambda_2}\right] + \frac{3p}{2\lambda_1^2} + \frac{3(1-p)}{2\lambda_2^2}. \end{aligned} \tag{11}$$

Отсюда определим квадрат коэффициента вариации интервалов поступления:

$$c_\lambda^2 = \frac{\lambda_1^2 - 2p\lambda_2(\lambda_1-\lambda_2) + p(1-2p)(\lambda_1-\lambda_2)^2}{2[\lambda_1 - p(\lambda_1-\lambda_2) + t_0\lambda_1\lambda_2]^2}. \tag{12}$$

Для распределения (3) эти же моменты равны

$$\bar{\tau}_\mu = \mu^{-1} + t_0. \tag{13}$$

Второй начальный момент времени обслуживания выглядит как

$$\overline{\tau_\mu^2} = t_0^2 + \frac{2t_0}{\mu} + \frac{2}{\mu^2}. \tag{14}$$

Отсюда коэффициент вариации времени обслуживания будет равен

$$c_\mu = (1+\mu t_0)^{-1}. \tag{15}$$

Рассматривая равенства (11)–(15) как форму записи метода моментов, найдем неизвестные параметры распределений (1) и (3) λ_1, λ_2, p, μ, t_0. Теперь, исходя из вида первого уравнения (11), положим

$$\lambda_1 = 2p/(\bar{\tau}_\lambda - t_0), \ \lambda_2 = 2(1-p)/(\bar{\tau}_\lambda - t_0) \tag{16}$$

и потребуем выполнения условия (12). Подставив (16) в (12), решаем полученное уравнение четвертой степени относительно параметра p с учетом условия $0 < p < 1$ и выбираем нужное решение:

$$p = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{3(\bar{\tau}_\lambda - t_0)^2}{8[(\bar{\tau}_\lambda - t_0)^2 + c_\lambda^2 \bar{\tau}_\lambda^2]}},$$

а затем определяем из (16) параметры λ_1 и λ_2.

Определим параметры распределения (3) из уравнений моментов (13)–(15). Из (13) получим значение $t_0 = \bar{\tau}_\mu - \mu^{-1}$ и, подставив его в (15), найдем параметр распределения (3) $\mu = 1/c_\mu \bar{\tau}_\mu$.

Таблица. Результаты экспериментов для СМО $HE_2^-/M^-/1$ и $HE_2/M/1$

Входные параметры		Среднее время ожидания			
ρ	c_μ / c_λ	для $HE_2^-/M^-/1$			для $HE_2/M/1$
		$c_\mu = 0,1$ $t_0 = 0,9$	$c_\mu = 0,5$ $t_0 = 0,5$	$c_\mu = 0,99$ $t_0 = 0,01$	
0,1	0,71	0,000	0,005	0,029	0,03
	2	0,000	0,013	0,078	0,08
	4	0,000	0,016	0,094	0,10
	8	0,000	0,017	0,099	0,11
0,5	0,71	0,005	0,181	0,610	0,62
	2	0,008	0,458	1,966	2,00
	4	0,009	0,599	4,503	4,62
	8	0,009	0,655	9,706	10,15
0,9	0,71	0,344	2,956	6,516	6,61
	2	0,805	16,002	22,465	22,59
	4	1,102	60,607	77,044	77,28
	8	1,260	238,99	295,29	295,96

Параметр сдвига будет связан с параметрами обслуживания условием

$$t_0 = \overline{\tau}_\mu (1 - c_\mu). \tag{17}$$

Выражение (17) будет определять диапазон изменения параметра сдвига $t_0 \in (0, 1)$.

Тогда алгоритм расчета среднего времени ожидания в очереди для системы $HE_2^-/M^-/1$ сводится к следующим этапам.

1. Задавая значения $\overline{\tau}_\lambda$, $\overline{\tau}_\mu$, c_λ, c_μ, t_0 в качестве входных параметров системы, определяем методом моментов все неизвестные параметры распределений (1) и (3).

2. Находим нужный корень $-s_1$ уравнения (8) и используем расчетную формулу (10).

Аналогичную аппроксимацию законов распределений с использованием начальных моментов можно увидеть в [7; 8].

Теперь рассмотрим влияние параметра сдвига на коэффициенты вариаций распределений. Для обычного распределения HE_2, как следует из выражения (12), при $t_0 = 0$:

$$c_\lambda^2 = \frac{\lambda_1^2 - 2p\lambda_2(\lambda_1 - \lambda_2) + p(1-2p)(\lambda_1 - \lambda_2)^2}{2[\lambda_1 - p(\lambda_1 - \lambda_2)]^2}.$$

Сравнивая последнее выражение с (12), убеждаемся, что параметр сдвига во времени $t_0 > 0$ уменьшает коэффициент вариации интервалов поступлений в $1 + \frac{t_0\lambda_1\lambda_2}{[\lambda_1(1-p) + \lambda_2 p]}$ раз. Аналогично для экспоненциального закона времени обслуживания параметр сдвига уменьшает коэффициент вариации времени обслуживания в $1 + \mu t_0$ раз. Учитывая квадратичную зависимость среднего времени ожидания от коэффициентов вариаций интервалов поступлений и времени обслуживания, убеждаемся в том, что введение параметра сдвига в законы распределения (1) и (3) уменьшает среднее время ожидания в очереди в СМО.

Результаты численного моделирования

В таблице приведены данные расчетов среднего времени ожидания для систем $HE_2^-/M^-/1$ и $HE_2/M/1$ для случаев малой, средней и высокой нагрузки $\rho = 0,1;\ 0,5;\ 0,9$.

Коэффициент загрузки ρ определяется отношением средних интервалов $\rho = \overline{\tau}_\mu / \overline{\tau}_\lambda$. Результаты, приведенные в таблице, получены для нормированного времени обслуживания $\overline{\tau}_\mu = 1$.

Данные таблицы подтверждают сделанные выше предположения о среднем времени ожидания в системе с запаздыванием. Кроме того, с уменьшением параметра сдвига t_0 среднее время ожидания в системе с запаздыванием стремится к значению этого времени в обычной системе, что дополнительно подтверждает адекватность полученных результатов. Результаты расчетов хорошо согласуются с данными [13] в той области изменения параметров, где применимы данные рассматриваемой системы.

Заключение

В работе получено спектральное разложение решения ИУЛ для системы $HE_2^-/M^-/1$, а через нее выведена расчетная формула для среднего времени ожидания требований в очереди для этой системы. Эта формула дополняет известную незавершенную формулу теории массового обслуживания для среднего времени ожидания для систем типа G/G/1.

Результаты вычислительных экспериментов подтверждают, что новая система $HE_2^-/M^-/1$ обеспечивает намного меньшее время ожидания в очереди, чем обычная система $HE_2/M/1$, за счет введения в законы распределения параметра сдвига $t_0 \in (0,1)$.

Известно, что среднее время ожидания требований в очереди является главной характеристикой СМО, так как остальные характеристики: средняя задержка, средняя длина очереди, среднее количество требований в системе и др. – определяются через среднее время ожидания. Адекватность полученных результатов обеспечена корректным использованием классического метода спектрального разложения, а проведенные вычислительные эксперименты только подтверждают данный факт.

Литература

1. Тарасов В.Н., Бахарева Н.Ф., Када О. Математическая модель телетрафика на основе системы $HE_2/M/1$ // Информационные технологии. 2019. Т. 25. № 4. С. 205–210. DOI: 10.17587/it.25.205-210.
2. Клейнрок Л. Теория массового обслуживания / пер. с англ. М.: Машиностроение, 1979. 432 с.
3. Brannstrom N. A Queueing Theory analysis of wireless radio systems. Appllied to HS-DSCH. Lulea University of Technology, 2004. 79 p.
4. Тарасов В.Н., Бахарева Н.Ф., Липилина Л.В. Математическая модель телетрафика на основе системы G/M/1 и результаты вычислительных экспериментов // Информационные технологии. 2016. Т. 22. № 2. С. 121–126.
5. Тарасов В.Н., Карташевский И.В. Способы аппроксимации входных распределений для системы G/G/1 и анализ полученных результатов // Системы управления и информационные технологии. 2015. № 3. С. 182–185.
6. Тарасов В.Н., Горелов Г.А., Ушаков Ю.А. Восстановление моментных характеристик распределения интервалов между пакетами входящего трафика // Инфокоммуникационные технологии. 2014. Т. 12. № 2. С. 40–44.
7. Тарасов В.Н. Вероятностное компьютерное моделирование сложных систем. Самара: СНЦ РАН, 2002. 194 с.
8. Myskja A. An improved heuristic approximation for the GI/GI/1 queue with bursty arrivals // Teletraffic and datatraffic in a Period of Change, ITC-13. 1991. P. 683–688.
9. Whitt W. Approximating a point process by a renewal process: two basic methods // Operation Research. 1982. Vol. 30. № 1. P. 125–147.
10. Алиев Т.И. Основы моделирования дискретных систем. СПб: СПбГУ ИТМО, 2009. 363 с.
11. Алиев Т.И. Аппроксимация вероятностных распределений в моделях массового обслуживания // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2013. № 2 (84). С. 88–93.
12. RFC 3393 IP Packet Delay Variation Metric for IP Performance Metrics (IPPM). URL: https://tools.ietf.org/html/rfc3393 (дата обращения: 26.02.2016).
13. Тарасов В.Н., Бахарева Н.Ф. Обобщенная двумерная диффузионная модель массового обслуживания типа GI/G/1 // Телекоммуникации. 2009. № 7. С. 2–8.
14. Тарасов В.Н., Малахов С.В., Карташевский И.В. Теоретическое и экспериментальное – исследование задержки в программно-конфигурируемых сетях // Инфокоммуникационные технологии. 2015. Т. 13. № 4. С. 409–413.

Получено 04.10.2019

Тарасов Вениамин Николаевич, д.т.н., профессор, заведующий кафедрой программного обеспечения и управления в технических системах Поволжского государственного университета телекоммуникаций и информатики. 443010, Российская Федерация, г. Самара, ул. Л. Толстого, 23. Тел. +7 846 228-00-13. E-mail: tarasov-vn@psuti.ru

RESEARCH OF SYSTEM WITH SHIFTED HYPER-ERLANG AND EXPONENTIAL INPUT DISTRIBUTIONS

Tarasov V.N.
Povolzhskiy State University of Telecommunications and Informatics, Samara, Russian Federation
E-mail: tarasov-vn@psuti.ru

This article presents the results of studies on the $HE_2/M/1$ queuing system with hyper-Erlang and exponential input distributions shifted to the right from the zero point. By Kendall's definition, the $HE_2/M/1$ system with conventional distributions is of type G/M/1, for which, in general the solution for the average queue waiting time is not known. The same system with shifted distributions is transformed into the G/G/1 system, for which, in the general case, the solution for the average waiting time is also unknown. Considering the fact that, starting with a coefficient of variation equal to four, the distribution of hyper-Erlang has a heavy tail, the system in question can have an active application in the modern theory of teletraffic. Using higher-order hyper-Erlang distributions is difficult to derive a solution for the average waiting time of requests in a queue due to increasing computational complexity. For the hyper-Erlangian distribution law, as well as the hyperexponential law, the spectral decomposition method for solving the Lindley integral equation makes it possible to obtain a final solution. The article presents the results on the spectral decomposition of the solution of the Lindley integral equation for the queuing system $HE_2/M/1$ with shifted distributions, as well as the calculation formula for the average waiting time for claims in the queue. It is shown that the $HE_2/M/1$ system with shifted distributions is a system with a time lag and provides a shorter waiting time compared to a conventional system. The adequacy of the results is confirmed by the correct use of the classical method of spectral decomposition and the results of numerical simulation. To derive the obtained results, as well as for numerical calculations, the well-known method of moments of probability theory is used.

Keywords: *QS $HE_2/M/1$ with shifted distributions, average waiting time in the queue, the method of spectral decomposition, the Lindley integral equation, the Laplace transform*

DOI: 10.18469/ikt.2020.18.1.04

Tarasov Veniamin Nikolaevich, Povolzhskiy State University of Telecommunications and Informatics, 23, L. Tolstoy Street, Samara, 443010, Russian Federation; Head of Software and Management in technical Systems Department, Doctor of Technical Science, Professor. Tel. +7 846 228-00-13. E-mail: tarasov-vn@psuti.ru

References

1. Tarasov V.N., Bakhareva N.F., Kada O. Matematicheskaya model' teletrafika na osnove sistemy $HE_2/M/1$ [The mathematical model of teletraffik based on the $HE_2/M/1$ system]. *Informacionnye technologii*, 2019, vol. 25, no. 4, pp. 205–210. DOI: 10.17587/it.25.205-210. (In Russian).
2. Kleinrock L. *Teoriya massovogo obsluzhivaniya* [Queuing Theory]. Moscow: Mashinostroeinie Publ., 1979, 432 p. (In Russian).
3. Brannstrom N. A *Queueing Theory Analysis of Wireless Radio Systems. Appllied to HS-DSCH*. Lulea University of Technology, 2004. 79 p.
4. Tarasov V.N., Bakhareva N.F., Lipilina L.V. Matematicheskaya model' teletrafika na osnove sistemy G/M/1 i rezul'taty vychislitel'nyh eksperimentov [Mathematical model of teletraffic on the based G/M/1 system and results of computational experiment]. *Informacionnye technologii*, 2016, vol. 22, no. 2, pp. 121–126. (In Russian).
5. Tarasov V.N., Kartashevskiy I.V. Sposoby approksimacii vhodnyh raspredelenij dlya sistemy G/G/1 i analiz poluchennyh rezul'tatov [Methods for approximating input distributions for the G/G/1 system and analysis of the results]. *Sistemy upravleniya i informatsionniye tehnologii*, 2015, no. 3. pp. 182–185. (In Russian).
6. Tarasov V.N., Gorelov G.A., Ushakov Y.A. Vosstanovlenie momentnyh harakteristik raspredeleniya intervalov vremeni mezhdu paketami vhodyaschego trafika [Restoring moment distribution characteristics interval between packets of incoming traffic]. *Informacionnye technologii*, 2014, no. 2, pp. 40–44. (In Russian).
7. Tarasov V.N. *Veroyatnostnoe komp'yuternoe modelirovanie slozhnyh sistem* [Probabilistic Computer Modeling of Complex Systems]. Samara: SNC RAN Publ., 2002, 194 p. (In Russian).
8. Myskja A. An improved heuristic approximation for the GI/GI/1 queue with bursty arrivals. *Teletraffic and datatraffic in a Period of Change, ITC-13*, 1991, pp. 683–688.
9. Whitt W. Approximating a point process by a renewal process: two basic methods. *Operation Research*, 1982, vol. 30, no. 1, pp. 125–147.

10. Aliev T.I. *Osnovy modelirovaniya diskretnyh system* [Fundamentals of Modeling Discrete Systems]. SPb.: SPbGU ITMO, 2009, 363 p. (In Russian).
11. Aliev T.I. Approksimaciya veroyatnostnyh raspredelenij v modelyah massovogo obsluzhivaniya [Approximation of probability distributions in queuing models]. *Nauchno-tekhnicheskij vestnik informacionnyh tekhnologij, mekhaniki i optiki*, 2013, no. 2 (84), pp. 88–93. (In Russian).
12. RFC 3393 IP Packet Delay Variation Metric for IP Performance Metrics (IPPM). URL: https://tools.ietf.org/html/rfc3393 (accessed: 26.02.2016).
13. Tarasov V.N., Bahareva N.F. Obobshchennaya dvumepnaya diffuzionnaya model' massovogo obsluzhivaniya tipa GI/G/1 [Generalized two-dimensional diffusion queuing model type GI/G/1]. *Telekommunikacii*, 2009, no. 7, pp. 2–8. (In Russian).
14. Tarasov V.N., Malakhov S.V., Kartashevskiy I.V. Teoreticheskoe i eksperimental'noe issledovanie zaderzhki v programmno-konfiguriruemyh setyah [Theoretical and experimental study of delay in software-configured networks]. *Infokommunikacionnye technologii*, 2015, no. 4, pp. 409–413. (In Russian).

Received 04.10.2019

УДК 621.391.1:621.395

ИССЛЕДОВАНИЕ СИСТЕМ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ M/E$_2$/1 С ОБЫЧНЫМИ И СДВИНУТЫМИ ВХОДНЫМИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯМИ

Тарасов В.Н., Бахарева Н.Ф., Ахметшина Э.Г.
Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики, Самара, РФ
E-mail: tarasov-vn@psuti.ru, nadin1956_04@inbox.ru, elyamalusha@mail.ru

В статье представлены результаты по двум системам массового обслуживания: для обычной системы M/E$_2$/1 с экспоненциальным и эрланговским распределениями, а также этой системы со сдвинутыми вправо от нулевой точки распределениями. Операция сдвига законов распределений в данном случае трансформирует систему M/G/1 в систему типа G/G/1 вследствие уменьшения коэффициента вариации интервалов входного потока в систему. Как оказалось, для рассматриваемых законов распределений используемый метод спектрального разложения решения интегрального уравнения Линдли для систем G/G/1 позволяет получить решение для среднего времени ожидания в конечном виде. Показано, что в такой системе с запаздыванием во времени среднее время ожидания требований в очереди может быть во много раз меньше, чем в аналогичной обычной системе. Это следует из того, что операция сдвига во времени законов распределений уменьшает величину коэффициентов вариаций интервалов между поступлениями и времени обслуживания. В то же время известно, что среднее время ожидания требований в очереди к системе зависит прямо пропорционально от квадратов этих коэффициентов вариаций. Система M/E$_2$/1 применима только при коэффициенте вариации интервалов поступления, равном единице и, коэффициенте вариации времени обслуживания, равном $1/\sqrt{2}$, а система с запаздыванием применима при коэффициентах вариаций интервалов поступления в диапазоне (0, 1) и коэффициентах вариаций времени обслуживания из интервала $(0,\ 1/\sqrt{2})$, что резко расширяет область применения этих систем. Для вывода решений по среднему времени ожидания в очереди использован метод спектрального разложения.

Ключевые слова: *системы массового обслуживания M/E$_2$/1, $M^-/E_2^-/1$, среднее время ожидания в очереди, метод спектрального разложения, интегральное уравнение Линдли, преобразование Лапласа*

Введение

Статья посвящена исследованию двух систем массового обслуживания (СМО) M/E$_2$/1 с обычными и сдвинутыми вправо экспоненциальным и эрланговским входными распределениями. Первая система относится к типу M/G/1, а вторая – G/G/1. В теории массового обслуживания исследования систем G/G/1 актуальны до сих пор в связи с тем, что нельзя получить решения для среднего времени ожидания в очереди в конечном виде в общем случае.

В работе авторов [1] впервые приведены результаты по исследованию системы M/M/1 с запаздыванием во времени со сдвинутыми экспоненциальными входными распределениями. В [1] показано, что среднее время ожидания требования в очереди в системе с запаздыванием во времени меньше, чем в классической системе M/M/1 при одинаковом коэффициенте загрузки за счет того, что коэффициенты вариации времен поступления c_λ и обслуживания c_μ становятся меньше единицы при параметре запаздывания