10. Aliev T.I. *Osnovy modelirovaniya diskretnyh system* [Fundamentals of Modeling Discrete Systems]. SPb.: SPbGU ITMO, 2009, 363 p. (In Russian).
11. Aliev T.I. Approksimaciya veroyatnostnyh raspredelenij v modelyah massovogo obsluzhivaniya [Approximation of probability distributions in queuing models]. *Nauchno-tekhnicheskij vestnik informacionnyh tekhnologij, mekhaniki i optiki*, 2013, no. 2 (84), pp. 88–93. (In Russian).
12. RFC 3393 IP Packet Delay Variation Metric for IP Performance Metrics (IPPM). URL: https://tools.ietf.org/html/rfc3393 (accessed: 26.02.2016).
13. Tarasov V.N., Bahareva N.F. Obobshchennaya dvumepnaya diffuzionnaya model' massovogo obsluzhivaniya tipa GI/G/1 [Generalized two-dimensional diffusion queuing model type GI/G/1]. *Telekommunikacii*, 2009, no. 7, pp. 2–8. (In Russian).
14. Tarasov V.N., Malakhov S.V., Kartashevskiy I.V. Teoreticheskoe i eksperimental'noe issledovanie zaderzhki v programmno-konfiguriruemyh setyah [Theoretical and experimental study of delay in software-configured networks]. *Infokommunikacionnye technologii*, 2015, no. 4, pp. 409–413. (In Russian).

Received 04.10.2019

УДК 621.391.1:621.395

ИССЛЕДОВАНИЕ СИСТЕМ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ M/E$_2$/1 С ОБЫЧНЫМИ И СДВИНУТЫМИ ВХОДНЫМИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯМИ

Тарасов В.Н., Бахарева Н.Ф., Ахметшина Э.Г.
Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики, Самара, РФ
E-mail: tarasov-vn@psuti.ru, nadin1956_04@inbox.ru, elyamalusha@mail.ru

В статье представлены результаты по двум системам массового обслуживания: для обычной системы M/E$_2$/1 с экспоненциальным и эрланговским распределениями, а также этой системы со сдвинутыми вправо от нулевой точки распределениями. Операция сдвига законов распределений в данном случае трансформирует систему M/G/1 в систему типа G/G/1 вследствие уменьшения коэффициента вариации интервалов входного потока в систему. Как оказалось, для рассматриваемых законов распределений используемый метод спектрального разложения решения интегрального уравнения Линдли для систем G/G/1 позволяет получить решение для среднего времени ожидания в конечном виде. Показано, что в такой системе с запаздыванием во времени среднее время ожидания требований в очереди может быть во много раз меньше, чем в аналогичной обычной системе. Это следует из того, что операция сдвига во времени законов распределений уменьшает величину коэффициентов вариаций интервалов между поступлениями и времени обслуживания. В то же время известно, что среднее время ожидания требований в очереди к системе зависит прямо пропорционально от квадратов этих коэффициентов вариаций. Система M/E$_2$/1 применима только при коэффициенте вариации интервалов поступления, равном единице и, коэффициенте вариации времени обслуживания, равном $1/\sqrt{2}$, а система с запаздыванием применима при коэффициентах вариаций интервалов поступления в диапазоне (0, 1) и коэффициентах вариаций времени обслуживания из интервала $(0,\ 1/\sqrt{2})$, что резко расширяет область применения этих систем. Для вывода решений по среднему времени ожидания в очереди использован метод спектрального разложения.

Ключевые слова: *системы массового обслуживания M/E$_2$/1, $M^-/E_2^-/1$, среднее время ожидания в очереди, метод спектрального разложения, интегральное уравнение Линдли, преобразование Лапласа*

Введение

Статья посвящена исследованию двух систем массового обслуживания (СМО) M/E$_2$/1 с обычными и сдвинутыми вправо экспоненциальным и эрланговским входными распределениями. Первая система относится к типу M/G/1, а вторая – G/G/1. В теории массового обслуживания исследования систем G/G/1 актуальны до сих пор в связи с тем, что нельзя получить решения для среднего времени ожидания в очереди в конечном виде в общем случае.

В работе авторов [1] впервые приведены результаты по исследованию системы M/M/1 с запаздыванием во времени со сдвинутыми экспоненциальными входными распределениями. В [1] показано, что среднее время ожидания требования в очереди в системе с запаздыванием во времени меньше, чем в классической системе M/M/1 при одинаковом коэффициенте загрузки за счет того, что коэффициенты вариации времен поступления c_λ и обслуживания c_μ становятся меньше единицы при параметре запаздывания

$t_0 > 0.$ В [2] идеи статьи [1] перенесены на системы $H_2/H_2/1$, $H_2/M/1$ и $M/H_2/1$.

Результаты работ [1; 2] совместно с классической теорией массового обслуживания [3] позволяют расширить теорию метода спектрального разложения (МСР) решения интегрального уравнения Линдли (ИУЛ) также на сдвинутое распределение Эрланга.

При решении задачи методом спектрального разложения будем использовать стандартную символику оригинала [3], в которой для преобразований Лапласа функций плотностей распределений интервалов между поступающими в систему требованиями и времени обслуживания введены обозначения $A^*(s)$ и $B^*(s)$. Метод спектрального разложения состоит в преобразовании ключевого выражения $A^*(-s)\cdot B^*(s)-1$ к произведению некоторых двух множителей в виде дробно-рациональных функций. Для определенности это произведение представим в виде $A^*(-s)\cdot B^*(s)-1=\psi_+(s)/\psi_-(s)$, где рациональные функции $\psi_+(s)$ и $\psi_-(s)$ являются компонентами метода спектрального разложения. Конструирование этих компонент $\psi_+(s)$ и $\psi_-(s)$ является важной частью МСР, и они должны удовлетворять специальным условиям.

Система $M/E_2/1$ и вывод решения для среднего времени ожидания

Для системы $M/E_2/1$ законы распределения интервалов входного потока и времени обслуживания задаются функциями плотности вида

$$a(t)=\lambda e^{-\lambda t}, \tag{1}$$

$$b(t)=4\mu^2 t e^{-2\mu t}. \tag{2}$$

При таком виде функции (2) решения для среднего времени ожидания для системы $M/E_2/1$ в теории массового обслуживания [3; 4; 8; 9] авторами не найдено, и поэтому это решение находим методом спектрального разложения решения ИУЛ, как это показано в [1; 2; 6; 11–13]. Такой подход позволяет определить не только среднее время ожидания, но и моменты высших порядков времени ожидания. Учитывая тот факт, что понятие «дрожание задержки» в стандарте [7] определено как разброс времени ожидания от его среднего значения W, дрожание задержки можно определить через дисперсию.

Преобразования Лапласа функций (1) и (2) соответственно имеют вид

$$A^*(s)=\frac{\lambda}{\lambda+s};\quad B^*(s)=\left(\frac{2\mu}{2\mu+s}\right)^2.$$

В связи с тем что система $M/E_2/1$ относится к классу систем $M/G/1$, воспользуемся результатом для данной системы. Среднее время ожидания в системе $M/G/1$ дается формулой Полячека – Хинчина [3]:

$$\bar{W}=\frac{\lambda\,\overline{\tau_\mu^2}}{2(1-\rho)}, \tag{3}$$

где λ – интенсивность входного потока; $\overline{\tau_\mu^2}$ – второй начальный момент времени обслуживания; ρ – коэффициент загрузки $0<\rho<1.$ Для распределения Эрланга второго порядка E_2 виторой начальный момент времени обслуживания $\overline{\tau_\mu^2}=3/(2\mu^2)$, тогда среднее время ожидания в системе $M/E_2/1$ окончательно равно

$$\bar{W}=\frac{3\rho}{4\mu(1-\rho)}. \tag{4}$$

Результатом (4) мы воспользуемся при исследовании системы со сдвинутыми распределениями, которую обозначим как $M^-/E_2^-/1$.

Система $M^-/E_2^-/1$ и вывод решения для среднего времени ожидания

Для системы $M^-/E_2^-/1$ функциями плотностей распределений интервалов будут сдвинутые вправо от нулевой точки распределения:

– для входного потока

$$a(t)=\lambda e^{-\lambda(t-t_0)}, \tag{5}$$

– для времени обслуживания

$$b(t)=4\mu^2(t-t_0)e^{-2\mu(t-t_0)}. \tag{6}$$

Для вывода решения по среднему времени ожидания для данной системы используем классический метод спектрального разложения решения интегрального уравнения Линдли (ИУЛ).

Преобразование Лапласа функции (5) есть функция

$$A^*(s)=\frac{\lambda}{\lambda+s}e^{-t_0 s},$$

а для функции (6):

$$B^*(s)=\left(\frac{2\mu}{2\mu+s}\right)^2 e^{-t_0 s}.$$

Тогда спектральное разложение: $A^*(-s)\cdot B^*(s)-1=\psi_+(s)/\psi_-(s)$ для рассматриваемой системы примет вид

$$A^*(-s)\times B^*(s)-1=\frac{\lambda}{\lambda-s}e^{t_0 s}\left(\frac{2\mu}{2\mu+s}\right)^2 e^{-t_0 s}-1=$$

$$=\frac{\lambda}{\lambda-s}\times\left(\frac{2\mu}{2\mu+s}\right)^2-1=$$

$$=\frac{s\left[s^2+(4\mu-\lambda)s+4\mu(\mu-\lambda)\right]}{(\lambda-s)(2\mu+s)^2}.$$

Показатели степени у экспонент с противоположными знаками здесь обнуляются, и эффект от операции сдвига исчезает.

Квадратный трехчлен в числителе последнего выражения $s^2+(4\mu-\lambda)s+4(\mu^2-\lambda\mu)$, где $4\mu(\mu-\lambda)>0$ и $(4\mu-\lambda)>0$ при $\mu>\lambda$ в случае стабильной системы, имеет два действительных отрицательных корня $-s_1$, $-s_2$:

$$-s_1=-(4\mu-\lambda)/2+\sqrt{[(4\mu-\lambda)/2]^2-4\mu(\mu-\lambda)},$$

$$-s_2=-(4\mu-\lambda)/2-\sqrt{[(4\mu-\lambda)/2]^2-4\mu(\mu-\lambda)}.$$

Тогда мы придем к окончательному виду спектрального разложения:

$$A^*(-s)\cdot B^*(s)-1=\frac{\psi_+(s)}{\psi_-(s)}=\frac{s(s+s_1)(s+s_2)}{(\lambda-s)(2\mu+s)^2}.$$

Исходя из правил построения функций $\psi_+(s)$ и $\psi_-(s)$, строим их в виде

$$\psi_+(s)=\frac{s(s+s_1)(s+s_2)}{(2\mu+s)^2},\quad \psi_-(s)=\lambda-s.$$

Далее по методике спектрального разложения находим константу:

$$K=\lim_{s\to 0}\frac{\psi_+(s)}{s}=\frac{s_1s_2}{4\mu^2}=\frac{4\mu(\mu-\lambda)}{4\mu^2}=1-\rho,$$

которая представляет вероятность того, что очередное поступающее в систему требование застает ее свободной. Теперь построим функцию

$$\Phi_+(s)=\frac{K}{\psi_+(s)}=\frac{(1-\rho)(2\mu+s)^2}{s(s+s_1)(s+s_2)},$$

через которую получим преобразование Лапласа функции плотности времени ожидания в системе $\mathrm{M}^-/\mathrm{E}_2^-/1$:

$$W^*(s)=s*\Phi_+(s)=\frac{(1-\rho)(2\mu+s)^2}{(s+s_1)(s+s_2)}. \tag{7}$$

В [3] приведено уравнение Полячека – Хинчина для преобразования Лапласа функции плотности времени ожидания для системы M/G/1:

$$W^*(s)=\frac{s(1-\rho)}{s-\lambda+\lambda B^*(s)}, \tag{8}$$

где $B^*(s)$ – преобразование Лапласа функции плотности времени обслуживания. Теперь предстоит доказать тождественность выражений (7) и (8). В нашем случае $B^*(s)=4\mu^2/(s+2\mu)^2$ и после подстановки этой функции в (8) получим:

$$W^*(s)=\frac{s(1-\rho)}{s-\lambda+\lambda[2\mu/(2\mu+s)]^2}=$$

$$=\frac{s(1-\rho)(2\mu+s)^2}{(s-\lambda)(2\mu+s)^2+4\lambda\mu^2}=\frac{(1-\rho)(2\mu+s)^2}{(s+s_1)(s+s_2)},$$

так как знаменатель раскладывается на множители вида

$$(s-\lambda)(2\mu+s)^2+4\lambda\mu^2=$$

$$\cancel{s\Big[s^2 \quad (4} \qquad) \;\; 4 \;\; (\qquad) \Big]$$

$$=s(s+s_1)(s+s_2).$$

Следовательно, равенства (7) и (8) тождественны. Далее необходимо определить числовые характеристики сдвинутых распределений (5), (6). Они нужны, в свою очередь, для определения неизвестных параметров распределений (5), (6) по методу моментов.

Определение числовых характеристик распределений $\mathbf{M}^-$ и $\mathbf{E}_2^-$

Числовые характеристики сдвинутого экспоненциального распределения M^- приведены в [1]. Средний интервал поступлений равен

$$\overline{\tau}_\lambda=\lambda^{-1}+t_0. \tag{9}$$

Коэффициент вариации интервалов поступлений выглядит как

$$c_\lambda=(1+\lambda t_0)^{-1}. \tag{10}$$

Для определения числовых характеристик сдвинутого распределения Эрланга E_2^- воспользуемся свойством преобразования Лапласа функции плотности воспроизводить моменты:

$$-\left.\frac{dB^*(s)}{ds}\right|_{s=0}=-\frac{d}{ds}\left[\left(\frac{2\mu}{2\mu+s}\right)^2 e^{-t_0 s}\right]\Bigg|_{s=0}=$$

$$=\left[\frac{8\mu^2}{(2\mu+s)^3}e^{-t_0 s}+\left(\frac{2\mu}{2\mu+s}\right)^2 t_0 e^{t_0 s}\right]\Bigg|_{s=0}=1/\mu+t_0.$$

Отсюда среднее время обслуживания требований:

$$\overline{\tau}_\mu=\mu^{-1}+t_0. \tag{11}$$

Найдя вторую производную от преобразования Лапласа функции (8) при $s=0$, определяем второй начальный момент интервала между поступлениями:

$$\left.\frac{d^2B^*(s)}{ds^2}\right|_{s=0}=\frac{3}{2\mu^2}+2\frac{t_0}{\mu}+t_0^2.$$

Отсюда определим коэффициент вариации времени обслуживания:

$$c_\mu=\left[\sqrt{2}(1+\mu t_0)\right]^{-1}. \tag{12}$$

Теперь оценим влияние параметра сдвига t_0 на числовые характеристики рассматриваемых распределений. Для интервалов поступлений по закону M^- коэффициент вариации c_λ уменьшается при сдвиге в $(1+\lambda t_0)$ раз по сравнению с коэффициентом $c_\lambda=1$ для распределения M.

Таблица. Результаты экспериментов для СМО $M/E_2/1$ и $M^-/E_2^-/1$

Входные параметры				Среднее время ожидания	
ρ	c_λ	c_μ	t_0	Для $M^-/E_2^-/1$	Для $M/E_2/1$
0,1	0,643	0,071	0,9	0,001	0,083
	0,950	0,354	0,5	0,021	
	0,990	0,636	0,1	0,068	
	0,999	0,700	**0,01**	**0,082**	
0,5	0,550	0,071	0,9	0,008	0,75
	0,750	0,354	0,5	0,188	
	0,950	0,636	0,1	0,608	
	0,995	0,700	**0,01**	**0,735**	
0,9	0,190	0,071	0,9	0,068	6,75
	0,550	0,354	0,5	1,688	
	0,910	0,636	0,1	5,468	
	0,991	0,700	**0,01**	**6,616**	

Коэффициент вариации времени обслуживания для распределения E_2^-: c_μ уменьшается при сдвиге в $(1+\mu t_0)$ раз по сравнению с коэффициентом $c_\mu = 1/\sqrt{2}$ для распределения E_2.

Учитывая, что среднее время ожидания в системе G/G/1 связано с коэффициентами вариаций времени между поступлениями требований и времени обслуживания квадратичной зависимостью, в системе с запаздыванием время ожидания будет меньше, чем в обычной системе.

Таким образом, для определения среднего времени ожидания мы можем использовать формулу (4) с параметрами $\rho = \overline{\tau}_\mu / \overline{\tau}_\lambda$, где $\overline{\tau}_\lambda$ и $\overline{\tau}_\mu$ определены (9) и (11), а μ рассчитываем из (11) при заданных $\overline{\tau}_\mu$, $\overline{\tau}_\lambda$ и параметре сдвига t_0. В качестве входных параметров для расчета системы $M^-/E_2^-/1$ удобнее брать $\overline{\tau}_\lambda$, $\overline{\tau}_\mu$, c_λ, c_μ и t_0. Диапазоны изменения коэффициентов вариаций определяются, соответственно, выражениями (10) и (12): $c_\lambda \in (0,1)$, а $c_\mu \in \left(0, 1/\sqrt{2}\right)$ в зависимости от величины параметра сдвига $t_0 > 0$.

В таблице приведены расчеты для системы $M^-/E_2^-/1$ при малой, средней и высокой нагрузках $\rho = 0{,}1;\ 0{,}5;\ 0{,}9$.

При этих коэффициентах загрузки значения параметра сдвига $t_0 = 0{,}01;\ 0{,}1;\ 0{,}5$ и $0{,}9$ обеспечивают определенные значения коэффициентов вариаций входного потока c_λ и времени обслуживания c_μ согласно равенствам (10) и (12). С уменьшением параметра сдвига t_0 среднее время ожидания в системе $M^-/E_2^-/1$ стремится к значению среднего времени ожидания в обычной системе $M/E_2/1$. Как и следовало ожидать, уменьшение коэффициентов вариации c_λ и c_μ влечет за собой сокращение времени ожидания.

Заключение

Полученные результаты позволяют сделать следующие выводы.

1. Введение операции сдвига во времени в законы распределения, описывающие работу СМО, приводит к увеличению загрузки системы с запаздыванием. Для системы $M^-/E_2^-/1$ с запаздыванием загрузка увеличивается в $(1+\mu t_0)/(1+\lambda t_0)$ раз по сравнению с обычной системой $M/E_2/1$.

2. Однако операция сдвига уменьшает коэффициенты вариаций случайного интервала между поступлениями и времени обслуживания требований. В связи с тем что среднее время ожидания в системе G/G/1 зависит от квадратов этих коэффициентов вариаций, среднее время ожидания в очереди к системе с запаздыванием будет меньше, чем в обычной системе при одной и той же загрузке. Например, для системы $M^-/E_2^-/1$ при загрузке $\rho = 0{,}9$ и параметре сдвига $t_0 = 0{,}9$ коэффициент вариации интервалов поступления c_λ уменьшается с 1 для обычной системы до 0,19 для системы с запаздыванием, коэффициент вариации времени обслуживания c_μ снижается с $1/\sqrt{2}$ до 0,071, а время ожидания сокращается с 6,75 единицы времени для обычной системы до 0,19 единицы.

3. Изложенные результаты справедливы только для одинаковых параметров сдвига t_0 для распределения интервалов между поступлениями требований и времени обслуживания.

Литература

1. Тарасов В.Н., Бахарева Н.Ф., Блатов И.А. Анализ и расчет системы массового обслуживания с запаздыванием // Автоматика и телемеханика. 2015. № 11. С. 51–59. DOI: 10.1134/S0005117915110041.
2. Тарасов В.Н. Расширение класса систем массового обслуживания с запаздыванием // Автоматика и телемеханика. 2018. № 12. С. 57–70. DOI: 10.1134/S0005117918120056.
3. Клейнрок Л. Теория массового обслуживания / пер. с англ. М.: Машиностроение, 1979. 432 с.
4. Brannstrom N. A Queueing Theory analysis of wireless radio systems. Appllied to HS-DSCH. Lulea University of Technology, 2004. 79 p.
5. RFC 3393 IP Packet Delay Variation Metric for IP Performance Metrics (IPPM). URL: https://tools.ietf.org/html/rfc3393 (дата обращения: 26.02.2016).
6. Тарасов В.Н., Бахарева Н.Ф., Липилина Л.В. Математическая модель телетрафика на ос-

нове системы G/M/1 и результаты вычислительных экспериментов // Информационные технологии. 2016. Т. 22. № 2. С. 121–126.
7. Алиев Т.И. Аппроксимация вероятностных распределений в моделях массового обслуживания // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2013. № 2 (84). С. 88–93.
8. Myskja A. An improved heuristic approximation for the GI/GI/1 queue with bursty arrivals // Teletraffic and datatraffic in a Period of Change, ITC-13. 1991. P. 683–688.
9. Whitt W. Approximating a point process by a renewal process: two basic methods // Operation Research. 1982. Vol. 30. № 1. P. 125–147.
10. Legros B. M/G/1 queue with event-dependent arrival rates // Queueing Systems. 2018. Vol. 89. № 3. P. 269–301.
11. Тарасов В.Н., Карташевский И.В. Способы аппроксимации входных распределений для системы G/G/1 и анализ полученных результатов // Системы управления и информационные технологии. 2015. № 3. С. 182–185.
12. Тарасов В.Н., Горелов Г.А., Ушаков Ю.А. Восстановление моментных характеристик распределения интервалов между пакетами входящего трафика // Инфокоммуникационные технологии. 2014. Т. 12. № 2. С. 40–44.
13. Тарасов В.Н., Малахов С.В., Карташевский И.В. Теоретическое и экспериментальное – исследование задержки в программно-конфигурируемых сетях // Инфокоммуникационные технологии. 2015. Т. 13. № 4. С. 409–413.
14. Тарасов В.Н. Вероятностное компьютерное моделирование сложных систем. Самара: СНЦ РАН, 2002. 194 с.

Получено 15.01.2020

Тарасов Вениамин Николаевич, д.т.н., профессор, заведующий кафедрой программного обеспечения и управления в технических системах Поволжского государственного университета телекоммуникаций и информатики (ПГУТИ). 443010, Российская Федерация, г. Самара, ул. Л. Толстого, 23. Тел. +7 846 228-00-13. E-mail: tarasov-vn@psuti.ru

Бахарева Надежда Федоровна, д.т.н., профессор, заведующий кафедрой информатики и вычислительной техники ПГУТИ. 443010, Российская Федерация, г. Самара, ул. Л. Толстого, 23. Тел. +7 846 339-11-31. E-mail: bakhareva-nf@psuti.ru

Ахметшина Элеонора Газинуровна, ассистент кафедры программного обеспечения и управления в технических системах ПГУТИ. 443010, Российская Федерация, г. Самара, ул. Л. Толстого, 23. Тел. +7 846 228-00-13. E-mail: elyamalusha@mail.ru

RESEARCH OF TWO QUEUING SYSTEMS M/E$_2$/1 WITH ORDINARY AND SHIFTED INPUT DISTRIBUTIONS

Tarasov V.N., Bakhareva N.F., Akhmetshina E.G.
Povolzhskiy State University of Telecommunications and Informatics, Samara, Russian Federation
E-mail: tarasov-vn@psuti.ru, nadin1956_04@inbox.ru, elyamalusha@mail.ru

Teletraffic theory often uses queuing systems like M/G/1 and G/G/1. Studies of the latter are still relevant due to the fact that it is impossible to obtain solutions for the average waiting time in the queue in the final form in the general case. This article presents the results for two queuing systems: for a regular M/E$_2$/1 system with exponential and Erlangian distributions, as well as this system with distributions shifted to the right from the zero point. The operation of shifting the laws of distributions in this case transforms the M/G/1 system into a G/G/1 type system due to a decrease in the coefficient of variation of the intervals of the input flow into the system. As it turned out, for the distribution laws under consideration, the spectral decomposition method used for solving the Lindley integral equation for G/G/1 systems allows us to obtain a solution for the average waiting time in the final form. It is shown that in such a system with a delay in time, the average waiting time for requests in the queue can be many times shorter than in a similar conventional system. This follows from the fact that the time-shift operation of the distribution laws reduces the coefficient of variation of the intervals between arrivals and service time. At the same time, it is known that the average waiting time for requirements in the queue for the system depends directly on the squares of these variation coefficients. The $M/E_2/1$ system is applicable only when the coefficient of variation of the intervals of arrival equal to 1 and the coefficient of variation of the service time is equal to $1/\sqrt{2}$, and the system with delay is applicable when the coefficients of variation of the intervals of arrival in the range (0, 1) and the coefficients of variation of the time of service from the interval $(0,\ 1/\sqrt{2})$, which dramatically expands the scope of these systems. To derive solutions by the average waiting time in the queue, the spectral decomposition method of solving the Lindley integral equation, known in queuing theory, was used.

Keywords: *QS $M/E_2/1$, $M^-/E_2^-/1$, the average waiting time, the method of spectral decomposition, Lindley integral equation, Laplace transform*

DOI: 10.18469/ikt.2020.18.1.05

Tarasov Veniamin Nikolaevich, Povolzhskiy State University of Telecommunications and Informatics, 23, L. Tolstoy Street, Samara, 443010, Russian Federation; Head of Software and Management in technical Systems Department, Doctor of Technical Science, Professor. Tel. +7 846 228-00-13. E-mail: tarasov-vn@psuti.ru

Bakhareva Nadezhda Fedorovna, Povolzhskiy State University of Telecommunications and Informatics, 23, L. Tolstoy Street, Samara, 443010, Russian Federation; Head of Informatics and Computer Technics Department, Doctor of Technical Science, Professor. Tel. +7 846 339-11-31. E-mail: bakhareva-nf@psuti.ru

Akhmetshina Eleonora Gazinurovna, Povolzhskiy State University of Telecommunications and Informatics, 23, L. Tolstoy Street, Samara, 443010, Russian Federation; Assistant of Software and Management in technical Systems Department. Tel. +7 846 228-00-13. E-mail: elyamalusha@mail.ru

References

1. Tarasov V.N., Bakhareva N.F., Blatov I.A. Analiz i raschet sistemy massovogo obsluzhivaniya s zapazdyvaniem [Analysis and calculation of queuing system with delay]. *Avtomatika i telemekhanika*, 2015, no. 11, pp. 1945–1951. DOI: 10.1134/S0005117915110041. (In Russian).
2. Tarasov V.N. Rasshirenie klassa sistem massovogo obsluzhivaniya s zapazdyvaniem [Extension of the class of queueing systems with delay]. *Avtomatika i telemekhanika*, 2018, vol. 79, no. 12, pp. 2147–2157. DOI: 10.1134/S0005117918120056. (In Russian).
3. Kleinrock L. *Teoriya massovogo obsluzhivaniya* [Queuing Theory]. Moscow: Mashinostroeinie Publ., 1979, 432 p. (In Russian).
4. Brannstrom N. A *Queueing Theory Analysis of Wireless Radio Systems. Appllied to HS-DSCH*. Lulea University of Technology, 2004. 79 p.
5. RFC 3393 IP Packet Delay Variation Metric for IP Performance Metrics (IPPM). URL: https://tools.ietf.org/html/rfc3393 (accessed: 26.02.2016).
6. Tarasov V.N., Bakhareva N.F., Lipilina L.V. Matematicheskaya model' teletrafika na osnove sistemy G/M/1 i rezul'taty vychislitel'nyh eksperimentov [Mathematical model of teletraffic on the based G/M/1 system and results of computational experiment]. *Informacionnye technologii*, 2016, vol. 22, no. 2, pp. 121–126. (In Russian).
7. Aliev T.I. Approksimaciya veroyatnostnyh raspredelenij v modelyah massovogo obsluzhivaniya [Approximation of probability distributions in queuing models]. *Nauchno-tekhnicheskij vestnik informacionnyh tekhnologij, mekhaniki i optiki*, 2013, no. 2 (84), pp. 88–93. (In Russian).
8. Myskja A. An improved heuristic approximation for the GI/GI/1 queue with bursty arrivals. *Teletraffic and datatraffic in a Period of Change, ITC-13*, 1991, pp. 683–688.
9. Whitt W. Approximating a point process by a renewal process: two basic methods. *Operation Research*, 1982, vol. 30, no. 1, pp. 125–147.
10. Legros B. M/G/1 queue with event-dependent arrival rates. *Queueing Systems*, 2018, vol. 89, no. 3, pp. 269–301.

11. Tarasov V.N., Kartashevskiy I.V. Sposoby approksimacii vhodnyh raspredelenij dlya sistemy G/G/1 i analiz poluchennyh rezul'tatov [Methods for approximating input distributions for the G/G/1 system and analysis of the results]. *Sistemy upravleniya i informatsionniye tehnologii*, 2015, no. 3. pp. 182–185. (In Russian).
12. Tarasov V.N., Gorelov G.A., Ushakov Y.A. Vosstanovlenie momentnyh harakteristik raspredeleniya intervalov vremeni mezhdu paketami vhodyaschego trafika [Restoring moment distribution characteristics interval between packets of incoming traffic]. *Informacionnye technologii*, 2014, no. 2, pp. 40–44. (In Russian).
13. Tarasov V.N., Malakhov S.V., Kartashevskiy I.V. Teoreticheskoe i eksperimental'noe issledovanie zaderzhki v programmno-konfiguriruemyh setyah [Theoretical and experimental study of delay in software-configured networks]. *Infokommunikacionnye technologii*, 2015, no. 4, pp. 409–413. (In Russian).
14. Tarasov V.N. *Veroyatnostnoe komp'yuternoe modelirovanie slozhnyh sistem* [Probabilistic Computer Modeling of Complex Systems]. Samara: SNC RAN Publ., 2002, 194 p. (In Russian).

Received 15.01.2020

УДК 621.391.1:621.395

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕЛЕТРАФИКА НА ОСНОВЕ СИСТЕМЫ $E_2/HE_2/1$

Тарасов В.Н., Бахарева Н.Ф., Када О.
Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики, Самара, РФ
E-mail: tarasov-vn@psuti.ru

Представлены результаты вывода формулы для среднего времени ожидания для системы массового обслуживания $E_2/HE_2/1$ с эрланговскими и гиперэрланговскими входными распределениями второго порядка. По определению Кендалла, эта система относится к классу G/G/1 с произвольными законами распределения интервалов входного потока и времени обслуживания. В теории массового обслуживания исследования таких систем особо актуальны в связи с тем, что невозможно найти решение для среднего времени ожидания в очереди в конечном виде для общего случая. Для рассматриваемой системы такое решение возможно получить в замкнутой форме на основе классического метода спектрального разложения решения интегрального уравнения Линдли для систем типа G/G/1. Использование же распределений Эрланга и гипер-Эрланга более высокого порядка затруднительно для вывода решения для среднего времени ожидания из-за нарастающей вычислительной сложности. В статье представлены полученное спектральное разложение решения интегрального уравнения Линдли для рассматриваемой системы и расчетная формула для среднего времени ожидания в очереди. Адекватность полученных результатов подтверждена корректностью использования классического метода спектрального разложения и результатами численного моделирования. Система $E_2/HE_2/1$ применима при коэффициенте вариации интервалов поступления, равного $1/\sqrt{2}$, и коэффициенте вариации времени обслуживания, большего $1/\sqrt{2}$. Для практического применения полученных результатов использован метод моментов теории вероятностей. Результаты численного моделирования в пакете Mathcad однозначно подтверждают тот факт теории массового обслуживания, что среднее время ожидания связано с коэффициентами вариаций интервалов поступления и времени обслуживания квадратичной зависимостью.

Ключевые слова: *система массового обслуживания $E_2/HE_2/1$, среднее время ожидания в очереди, метод спектрального разложения, интегральное уравнение Линдли, преобразование Лапласа*

Введение

Статья посвящена анализу системы массового обслуживания (СМО) $E_2/HE_2/1$ с эрланговским (E_2) и с гиперэрланговским (HE_2) входными распределениями. В открытом доступе авторам не удалось обнаружить результаты для среднего времени ожидания требований в очереди для такой СМО. Как известно из теории массового обслуживания, среднее время ожидания является главной характеристикой для любых СМО. По этой характеристике, например, оценивают задержки пакетов в сетях пакетной коммутации при их моделировании с помощью СМО. Рассматриваемая СМО относится к типу G/G/1.

В теории массового обслуживания исследования систем G/G/1 актуальны в связи с тем, что они активно используются в современной теории телетрафика, к тому же нельзя получить решения для таких систем в конечном виде для