11. Tarasov V.N., Kartashevskiy I.V. Sposoby approksimacii vhodnyh raspredelenij dlya sistemy G/G/1 i analiz poluchennyh rezul'tatov [Methods for approximating input distributions for the G/G/1 system and analysis of the results]. *Sistemy upravleniya i informatsionniye tehnologii*, 2015, no. 3. pp. 182–185. (In Russian).
12. Tarasov V.N., Gorelov G.A., Ushakov Y.A. Vosstanovlenie momentnyh harakteristik raspredeleniya intervalov vremeni mezhdu paketami vhodyaschego trafika [Restoring moment distribution characteristics interval between packets of incoming traffic]. *Informacionnye technologii*, 2014, no. 2, pp. 40–44. (In Russian).
13. Tarasov V.N., Malakhov S.V., Kartashevskiy I.V. Teoreticheskoe i eksperimental'noe issledovanie zaderzhki v programmno-konfiguriruemyh setyah [Theoretical and experimental study of delay in software-configured networks]. *Infokommunikacionnye technologii*, 2015, no. 4, pp. 409–413. (In Russian).
14. Tarasov V.N. *Veroyatnostnoe komp'yuternoe modelirovanie slozhnyh sistem* [Probabilistic Computer Modeling of Complex Systems]. Samara: SNC RAN Publ., 2002, 194 p. (In Russian).

Received 15.01.2020

УДК 621.391.1:621.395

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕЛЕТРАФИКА НА ОСНОВЕ СИСТЕМЫ $E_2/HE_2/1$

Тарасов В.Н., Бахарева Н.Ф., Када О.
Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики, Самара, РФ
E-mail: tarasov-vn@psuti.ru

Представлены результаты вывода формулы для среднего времени ожидания для системы массового обслуживания $E_2/HE_2/1$ с эрланговскими и гиперэрланговскими входными распределениями второго порядка. По определению Кендалла, эта система относится к классу G/G/1 с произвольными законами распределения интервалов входного потока и времени обслуживания. В теории массового обслуживания исследования таких систем особо актуальны в связи с тем, что невозможно найти решение для среднего времени ожидания в очереди в конечном виде для общего случая. Для рассматриваемой системы такое решение возможно получить в замкнутой форме на основе классического метода спектрального разложения решения интегрального уравнения Линдли для систем типа G/G/1. Использование же распределений Эрланга и гипер-Эрланга более высокого порядка затруднительно для вывода решения для среднего времени ожидания из-за нарастающей вычислительной сложности. В статье представлены полученное спектральное разложение решения интегрального уравнения Линдли для рассматриваемой системы и расчетная формула для среднего времени ожидания в очереди. Адекватность полученных результатов подтверждена корректностью использования классического метода спектрального разложения и результатами численного моделирования. Система $E_2/HE_2/1$ применима при коэффициенте вариации интервалов поступления, равного $1/\sqrt{2}$, и коэффициенте вариации времени обслуживания, большего $1/\sqrt{2}$. Для практического применения полученных результатов использован метод моментов теории вероятностей. Результаты численного моделирования в пакете Mathcad однозначно подтверждают тот факт теории массового обслуживания, что среднее время ожидания связано с коэффициентами вариаций интервалов поступления и времени обслуживания квадратичной зависимостью.

Ключевые слова: *система массового обслуживания $E_2/HE_2/1$, среднее время ожидания в очереди, метод спектрального разложения, интегральное уравнение Линдли, преобразование Лапласа*

Введение

Статья посвящена анализу системы массового обслуживания (СМО) $E_2/HE_2/1$ с эрланговским (E_2) и с гиперэрланговским (HE_2) входными распределениями. В открытом доступе авторам не удалось обнаружить результаты для среднего времени ожидания требований в очереди для такой СМО. Как известно из теории массового обслуживания, среднее время ожидания является главной характеристикой для любых СМО. По этой характеристике, например, оценивают задержки пакетов в сетях пакетной коммутации при их моделировании с помощью СМО. Рассматриваемая СМО относится к типу G/G/1.

В теории массового обслуживания исследования систем G/G/1 актуальны в связи с тем, что они активно используются в современной теории телетрафика, к тому же нельзя получить решения для таких систем в конечном виде для общего случая. Законы распределений Вейбулла или Гамма наиболее общего вида, которые обеспечивают диапазон изменения коэффициентов вариаций от 0 до ∞ в зависимости от величины их параметров, не позволяют их использовать в теории массового обслуживания. Поэтому остается применять другие частные законы распределений.

В исследовании систем G/G/1 важную роль играет метод спектрального разложения решения интегрального уравнения Линдли и большинство результатов в теории массового обслуживания получены именно с помощью данного метода.

Метод спектрального разложения решения интегрального уравнения Линдли (ИУЛ) составляет важную часть теории систем G/G/1. Для записи ИУЛ введем следующие обозначения [1]: $W(y)$ – функция распределения вероятностей (ФРВ) времени ожидания требования в очереди; $C(u)=P(\tilde{u}<u)$ – ФРВ случайной величины $\tilde{u}=\tilde{x}-\tilde{t}$; $\tilde{x}$ – случайное время обслуживания требования; $\tilde{t}$ – интервал времени между поступлениями требований. Тогда одна из форм уравнения Линдли выглядит так [1]:

$$W(y)=\begin{cases}\int\limits_{-\infty}^{y} W(y-u)\mathrm{d}C(u), & y\ge 0\\ 0, & y<0\end{cases}.$$

При кратком изложении метода спектрального разложения решения ИУЛ будем придерживаться подхода [1]. Для этого через $A^*(s)$ и $B^*(s)$ обозначим преобразования Лапласа функций плотности распределения интервалов между поступлениями и времени обслуживания соответственно. Суть решения ИУЛ методом спектрального разложения состоит в нахождении для выражения $A^*(-s)\cdot B^*(s)-1$ представления в виде произведения двух множителей, которое давало бы рациональную функцию от s. Следовательно, для нахождения закона распределения времени ожидания необходимо следующее спектральное разложение: $A^*(-s)\cdot B^*(s)-1=\psi_+(s)/\psi_-(s)$, где $\psi_+(s)$ и $\psi_-(s)$ – некоторые дробно-рациональные функции от s. Функции $\psi_+(s)$ и $\psi_-(s)$ должны удовлетворять следующим условиям согласно [1]:

– для $\mathrm{Re}(s)>0$ функция $\psi_+(s)$ является аналитической без нулей в этой полуплоскости;

– для $\mathrm{Re}(s)<D$ функция $\psi_-(s)$ – аналитическая без нулей в этой полуплоскости, где D – некоторая положительная константа, определяемая из условия $\lim\limits_{t\to\infty} a(t)/e^{-Dt}<\infty$.

Кроме того, функции $\psi_+(s)$ и $\psi_-(s)$ должны обладать следующими свойствами:

$$\lim_{|s|\to\infty,\,\mathrm{Re}(s)>0}\frac{\psi_+(s)}{s}=1; \qquad (1)$$

$$\lim_{|s|\to\infty,\,\mathrm{Re}(s)<D}\frac{\psi_-(s)}{s}=-1. \qquad (2)$$

Теперь остается применить метод спектрального разложения к рассматриваемой системе.

Постановка задачи

В статье ставится задача вывода формулы для среднего времени ожидания для рассматриваемой системы $E_2/HE_2/1$ и подтверждения адекватности построенной математической модели путем численного моделирования в пакете Mathcad. Вывод решения для среднего времени ожидания проводится классическим методом спектрального разложения решения ИУЛ, как это показано в [3–6; 13]. Аналогичные подходы к аппроксимации законов распределений использованы в [2; 7–10; 12].

Решение для системы $E_2/HE_2/$ 1

В системе $E_2/HE_2/1$ интервалы времени между поступлениями требований заданы функцией плотности

$$a(t)=4\lambda^2te^{-2\lambda t}, \qquad (3)$$

преобразование Лапласа которой выглядит как:

$$A^*(s)=\left(\frac{2\lambda}{s+2\lambda}\right)^2. \qquad (4)$$

Время обслуживания распределено с функцией плотности

$$b(t)=4q\mu_1^2te^{-2\mu_1 t}+4(1-q)\mu_2^2te^{-2\mu_2 t}, \qquad (5)$$

а ее преобразование Лапласа имеет вид

$$B^*(s)=q\left(\frac{2\mu_1}{s+2\mu_1}\right)^2+(1-q)\left(\frac{2\mu_2}{s+2\mu_2}\right)^2. \qquad (6)$$

Тогда спектральное разложение решения ИУЛ для системы $E_2/HE_2/1$ $A^*(-s)\cdot B^*(s)-1=$ $=\psi_+(s)/\psi_-(s)$ примет вид:

$$\frac{\psi_+(s)}{\psi_-(s)}=\left(\frac{2\lambda}{2\lambda-s}\right)^2\times$$
$$\times\left[q\left(\frac{2\mu_1}{2\mu_1+s}\right)^2+(1-q)\left(\frac{2\mu_2}{2\mu_2+s}\right)^2\right]-1. \qquad (7)$$

Выражение в квадратных скобках (7) примет вид:

$$\left[q\left(\frac{2\mu_1}{2\mu_1+s}\right)^2+(1-q)\left(\frac{2\mu_2}{2\mu_2+s}\right)^2\right]=$$
$$=\frac{q\left(16\mu_1^2\mu_2^2+16\mu_1^2\mu_2 s+4\mu_1^2s^2\right)}{(2\mu_1+s)^2(2\mu_2+s)^2}+$$

$$+\frac{(1-q)\left(16\mu_1^2\mu_2^2+16\mu_1\mu_2^2 s+4\mu_2^2 s^2\right)}{(2\mu_1+s)^2(2\mu_2+s)^2}=$$

$$=\frac{b_0+b_1 s+b_2 s^2}{(2\mu_1+s)^2(2\mu_2+s)^2},$$

где промежуточные параметры

$$b_0=16\mu_1^2\mu_2^2,$$

$$b_1=16\mu_1\mu_2[q\mu_1+(1-q)\mu_2],$$

$$b_2=4[q\mu_1^2+(1-q)\mu_2^2].$$

Продолжая разложение (7), получим:

$$\frac{\psi_+(s)}{\psi_-(s)}=\frac{4\lambda^2(b_0+b_1 s+b_2 s^2)}{(2\lambda-s)^2(2\mu_1+s)^2(2\mu_2+s)^2}-$$

$$-\frac{(2\lambda-s)^2(2\mu_1+s)^2(2\mu_2+s)^2}{(2\lambda-s)^2(2\mu_1+s)^2(2\mu_2+s)^2}=$$

$$=\frac{-s(s^5-d_4 s^4-d_3 s^3-d_2 s^2-d_1 s-d_0)}{(2\lambda-s)^2(2\mu_1+s)^2(2\mu_2+s)^2}=$$

$$=\frac{-s(s+\sigma_1)(s+\sigma_2)(s+\sigma_3)(s+\sigma_4)(s-\sigma_5)}{(2\lambda-s)^2(2\mu_1+s)^2(2\mu_2+s)^2}.$$

Окончательно спектральное разложение решения ИУЛ для системы HE$_2$/E$_2$/1 имеет вид

$$\frac{\psi_+(s)}{\psi_-(s)}=$$
$$=\frac{-s(s+\sigma_1)(s+\sigma_2)(s+\sigma_3)(s+\sigma_4)(s-\sigma_5)}{(2\lambda-s)^2(2\mu_1+s)^2(2\mu_2+s)^2}. \quad (8)$$

Исследование многочлена в числителе разложения (8) и определение его корней являются основным моментом метода спектрального разложения решения ИУЛ. Поэтому выпишем многочлен пятой степени в числителе разложения (8):

$$s^5-d_4 s^4-d_3 s^3-d_2 s^2-d_1 s-d_0. \quad (9)$$

Его коэффициенты, сформированные с помощью символьных операций Mathcad, равны:

$$d_0=64\lambda\mu_1\mu_2[\mu_1\mu_2-\lambda(\mu_1+\mu_2)+4b_1\lambda^2];$$

$$d_1=16\{4\lambda\mu_1\mu_2(\mu_1+\mu_2)-$$
$$-\lambda^2[2\mu_1\mu_2+(\mu_1+\mu_2)^2]+4b_2\lambda^2\};$$

$$d_2=16\lambda[(\mu_1+\mu_2)^2+2\mu_1\mu_2]-$$
$$-16(\mu_1+\mu_2)(\lambda^2+\mu_1\mu_2);$$

$$d_3=-4[\lambda^2+\mu_1^2+\mu_2^2-4\lambda(\mu_1+\mu_2)+4\mu_1\mu_2];$$

$$d_4=4(\lambda-\mu_1-\mu_2),$$

и выражаются через параметры распределений (3) и (5), которые предстоит еще определить.

Многочлен (9) имеет четыре действительных отрицательных корня $-\sigma_1$, $-\sigma_2$, $-\sigma_3$, $-\sigma_4$ (либо два действительных отрицательных корня и два комплексно сопряженных с отрицательными действительными частями) и один положительный корень σ_5. Исследование знака младшего коэффициента d_0 показывает, что $d_0>0$ всегда в случае стабильной системы, когда $0<\rho<1$. С учетом знака минус перед d_0 в многочлене (6) это также подтверждает предположение о наличии таких корней многочлена.

С учетом условий [1] строим рациональные функции $\psi_+(s)$ и $\psi_-(s)$:

$$\psi_+(s)=\frac{s(s+\sigma_1)(s+\sigma_2)(s+\sigma_3)(s+\sigma_4)}{(2\mu_1+s)^2(2\mu_2+s)^2},$$

так как нули многочлена (9) $s=0$, $s=-\sigma_1$, $s=-\sigma_2$, $s=-\sigma_3$, $s=-\sigma_4$ и двукратные полюсы $s=-2\mu_1$ и $s=-2\mu_2$ лежат в области $\mathrm{Re}(s)\le 0$, $\psi_-(s)=-\frac{(2\lambda-s)^2}{(s-\sigma_5)}$, так как ее нули и полюсы лежат в области $\mathrm{Re}(s)>D$, определенной условием [1]. Теперь выполнение обоих условий метода спектрального разложения для построенных функций $\psi_+(s)$ и $\psi_-(s)$ очевидно. Далее по методике спектрального разложения найдем константу K:

$$K=\lim_{s\to 0}\frac{\psi_+(s)}{s}=$$

$$=\lim_{s\to 0}\frac{(s+\sigma_1)(s+\sigma_2)(s+\sigma_3)(s+\sigma_4)}{(s+2\mu_1)^2(s+2\mu_2)^2}=$$

$$=\frac{\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4}{16\mu_1^2\mu_2^2},$$

где σ_1, σ_2, σ_3, σ_4 – абсолютные значения отрицательных корней $-\sigma_1$, $-\sigma_2$, $-\sigma_3$, $-\sigma_4$. Постоянная K определяет вероятность того, что поступающее в систему требование застает ее свободной.

Для нахождения преобразования Лапласа ФРВ времени ожидания построим функцию

$$\Phi_+(s)=\frac{K}{\psi_+(s)}=\frac{\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4}{16\mu_1^2\mu_2^2 s}\times$$
$$\times\frac{(s+2\mu_1)^2(s+2\mu_2)^2}{(s+\sigma_1)(s+\sigma_2)(s+\sigma_3)(s+\sigma_4)}.$$

Отсюда преобразование Лапласа ФРВ времени ожидания $W^*(s)=s\cdot\Phi_+(s)$ будет равно

$$W^*(s)=$$
$$=\frac{\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4(s+2\mu_1)^2(s+2\mu_2)^2}{16\mu_1^2\mu_2^2(s+\sigma_1)(s+\sigma_2)(s+\sigma_3)(s+\sigma_4)}. \quad (10)$$

Для нахождения среднего времени ожидания вычислим производную от функции $W^*(s)$ со знаком минус в точке $s=0$:

$$-\frac{dW^*(s)}{ds}\bigg|_{s=0} = \frac{1}{\sigma_1}+\frac{1}{\sigma_2}+\frac{1}{\sigma_3}+\frac{1}{\sigma_4}-\frac{1}{\mu_1}-\frac{1}{\mu_2}.$$

Окончательно среднее время ожидания для системы $E_2/HE_2/1$:

$$\overline{W} = \frac{1}{\sigma_1}+\frac{1}{\sigma_2}+\frac{1}{\sigma_3}+\frac{1}{\sigma_4}-\frac{1}{\mu_1}-\frac{1}{\mu_2}. \quad (11)$$

Из выражения (10) при необходимости также можно определить моменты высших порядков времени ожидания, например, вторая производная от преобразования (10) в точке $s=0$ дает второй начальный момент времени ожидания, что позволяет определить дисперсию времени ожидания. Учитывая определение джиттера в телекоммуникациях как разброс времени ожидания вокруг его среднего значения [10], тем самым получим возможность определения джиттера через дисперсию. Это является важным результатом для анализа трафика, чувствительного к задержкам.

Для практического применения формулы (11) необходимо определить числовые характеристики распределений (3) E_2 и (5) HE_2, а через них – неизвестные параметры этих распределений. Для распределения E_2 среднее значение $\overline{\tau}_\lambda = \lambda^{-1}$, коэффициент вариации $c_\lambda = 1/\sqrt{2}$. Для нахождения числовых характеристик до второго порядка для распределения (5) воспользуемся свойством преобразования Лапласа $B^*(s)$ воспроизведения моментов и запишем начальные моменты:

$$\overline{\tau}_\mu = \frac{q}{\mu_1}+\frac{(1-q)}{\mu_2}, \quad \overline{\tau^2_\mu} = \frac{3}{2}\left[\frac{q}{\mu_1^2}+\frac{(1-q)}{\mu_2^2}\right]. \quad (12)$$

Рассматривая равенства (12) как запись метода моментов, найдем неизвестные параметры распределения (5) $\mu_1,\ \mu_2,\ q$. Система двух уравнений (12) при этом является недоопределенной, поэтому к ней добавим выражение для квадрата коэффициента вариации:

$$c_\mu^2 = \frac{\overline{\tau^2_\mu}-(\overline{\tau}_\mu)^2}{(\overline{\tau}_\mu)^2}, \quad (13)$$

как связующее условие между (12). Кроме того, коэффициент вариации будем использовать в расчетах в качестве входного параметра системы. Исходя из вида первого уравнения (12), положим

$$\mu_1 = 2q/\overline{\tau}_\mu, \quad \mu_2 = 2(1-q)/\overline{\tau}_\mu \quad (14)$$

и потребуем выполнения условия (13) [2; 3]. Подставив выражения (12) и (14) в (13), получим уравнение четвертой степени относительно неизвестного параметра q:

$$q(1-q)[8(1+c_\mu^2)q^2 - 8(1+c_\mu^2)q+3] = 0.$$

Отбросив тривиальные решения $q=0$ и $q=1$, получим квадратное уравнение $8(1+c_\mu^2)q^2 - 8(1+c_\mu^2)q+3=0,$ решив его, выберем для однозначности больший корень:

$$q = \frac{1}{2}+\sqrt{\frac{2(1+c_\mu^2)-3}{8(1+c_\mu^2)}}. \quad (15)$$

Отсюда следует, что коэффициент вариации $c_\mu \ge 1/\sqrt{2}.$ Теперь, подставив (15) в (14), определяем все три неизвестных параметра распределения (5).

Аналогичную аппроксимацию законов распределений с использованием начальных моментов можно увидеть в [3–5; 13].

Таблица. Исходные данные и результаты вычислительного эксперимента для СМО $E_2/HE_2/1$

Входные параметры		Среднее время ожидания	
ρ	c_μ	для системы $E_2/HE_2/1$	для системы $E_2/H_2/1$
0,1	0,71	0,018	–
	2	0,160	0,160
	4	0,796	0,795
	8	3,452	3,448
0,5	0,71	0,395	–
	2	2,102	2,094
	4	8,092	8,082
	8	32,089	32,079
0,9	0,71	4,380	
	2	20,082	20,072
	4	74,075	74,065
	8	290,074	290,063

Результаты численного моделирования

В таблице приведены данные расчетов для системы $E_2/HE_2/1$ для случаев малой, средней и высокой нагрузки $\rho = 0{,}1;\ 0{,}5;\ 0{,}9$. Заметим, что эта система определена для $c_\lambda = 1/\sqrt{2}$ и $c_\mu \ge 1/\sqrt{2}$. Данные расчетов для системы $E_2/HE_2/1$ сравниваются с результатами близкой системы $E_2/H_2/1$, где H_2 – гиперэкспоненциальный закон распределения второго порядка. Прочерки в таблице означают, что при данных параметрах система $E_2/H_2/1$ неприменима.

Коэффициент загрузки ρ определяется отношением средних интервалов $\rho = \overline{\tau}_\mu/\overline{\tau}_\lambda$. Результаты, приведенные в таблице, получены для нормированного времени обслуживания $\overline{\tau}_\mu = 1$.

Данные таблицы свидетельствуют о незначительном различии сравниваемых систем, так как сами распределения HE_2 и H_2 мало отличаются друг от друга. Результаты для системы $E_2/HE_2/1$ хорошо согласуются с данными [10] в той области изменения параметров, при которых применима данная система, что свидетельствует об адекватности разработанной модели.

Заключение

В работе получено спектральное разложение решения интегрального уравнения Линдли для системы $E_2/HE_2/1$ и через него выведена расчетная формула для среднего времени ожидания в очереди в такой системе. Это расчетное выражение дополняет известную незавершенную формулу для среднего времени ожидания для систем типа G/G/1.

Среднее время ожидания в очереди – это основная характеристика для систем массового обслуживания, так как все остальные характеристики: время задержки, средняя длина очереди, количество требований в системе и др. – являются производными от основной характеристики.

Адекватность полученных результатов обеспечена корректным использованием классического метода спектрального разложения, а проведенные вычислительные эксперименты только подтверждают данный факт.

Литература

1. Клейнрок Л. Теория массового обслуживания / пер. с англ. М.: Машиностроение, 1979. 432 с.
2. Brannstrom N. A Queueing Theory analysis of wireless radio systems. Appllied to HS-DSCH. Lulea University of Technology, 2004. 79 p.
3. Тарасов В.Н., Бахарева Н.Ф., Липилина Л.В. Математическая модель телетрафика на основе системы G/M/1 и результаты вычислительных экспериментов // Информационные технологии. 2016. Т. 22. № 2. С. 121–126.
4. Тарасов В.Н., Карташевский И.В. Способы аппроксимации входных распределений для системы G/G/1 и анализ полученных результатов // Системы управления и информационные технологии. 2015. № 3. С. 182–185.
5. Тарасов В.Н., Горелов Г.А., Ушаков Ю.А. Восстановление моментных характеристик распределения интервалов между пакетами входящего трафика // Инфокоммуникационные технологии. 2014. Т. 12. № 2. С. 40–44.
6. Тарасов В.Н. Вероятностное компьютерное моделирование сложных систем. Самара: СНЦ РАН, 2002. 194 с.
7. Myskja A. An improved heuristic approximation for the GI/GI/1 queue with bursty arrivals // Teletraffic and datatraffic in a Period of Change, ITC-13. 1991. P. 683–688.
8. Whitt W. Approximating a point process by a renewal process: two basic methods // Operation Research. 1982. Vol. 30. № 1. P. 125–147.
9. Алиев Т.И. Основы моделирования дискретных систем. СПб.: СПбГУ ИТМО, 2009. 363 с.
10. Алиев Т.И. Аппроксимация вероятностных распределений в моделях массового обслуживания // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2013. № 2 (84). С. 88–93.
11. RFC 3393 IP Packet Delay Variation Metric for IP Performance Metrics (IPPM). URL: https://tools.ietf.org/html/rfc3393 (дата обращения: 26.02.2016).
12. Тарасов В.Н., Бахарева Н.Ф. Обобщенная двумерная диффузионная модель массового обслуживания типа GI/G/1 // Телекоммуникации. 2009. № 7. С. 2–8.
13. Тарасов В.Н., Малахов С.В., Карташевский И.В. Теоретическое и экспериментальное – исследование задержки в программно-конфигурируемых сетях // Инфокоммуникационные технологии. 2015. Т. 13. № 4. С. 409–413.

Получено 16.01.2020

Тарасов Вениамин Николаевич, д.т.н., профессор, заведующий кафедрой программного обеспечения и управления в технических системах (ПОУТС) Поволжского государственного университета телекоммуникаций и информатики (ПГУТИ). 443010, Российская Федерация, г. Самара, ул. Л. Толстого, 23. Тел. +7 846 228-00-13. E-mail: tarasov-vn@psuti.ru

Бахарева Надежда Федоровна, д.т.н., профессор, заведующий кафедрой информатики и вычислительной техники ПГУТИ. 443010, Российская Федерация, г. Самара, ул. Л. Толстого, 23. Тел. +7 846 339-11-31. E-mail: bakhareva-nf@psuti.ru

Када Отхмане, аспирант кафедры ПОУТС ПГУТИ. 443010, Российская Федерация, г. Самара, ул. Л. Толстого, 23. Тел. +7 846 228-00-13. E-mail: otman2333@gmail.com

SIMULATION OF TELETRAFIC BASED ON $E_2/HE_2/1$ SYSTEM

Tarasov V.N., Bakhareva N.F., Kada O.
Povolzhskiy State University of Telecommunications and Informatics, Samara, Russia Federation
E-mail: tarasov-vn@psuti.ru

This article presents the results of deriving the formula for the average waiting time for the queuing system $E_2/HE_2/1$ with second-order Erlang and hyper-Erlang input distributions. By the definition of Kendall, this system belongs to the class G/G/1 with arbitrary laws of distribution of intervals of the input stream and service time. In queuing theory, studies of such systems are particularly relevant because it is impossible to find a solution for the average waiting time in the queue in the final form for the general case. For the system under consideration, such a solution can be obtained in closed form based on the classical method of spectral decomposition of the solution of the Lindley integral equation for systems of type G/G/1. Using higher-order Erlang and hyper-Erlang distributions is difficult to derive a solution for the average latency due to increasing computational complexity. The article presents the obtained spectral decomposition of the solution of the Lindley integral equation for the system under consideration and the calculation formula for the average waiting time in the queue. The adequacy of the results is confirmed by the correct use of the classical method of spectral decomposition and the results of numerical simulation. The $E_2/HE_2/1$ system is applicable when the coefficient of variation of the intervals of receipt is equal to $1/\sqrt{2}$ and the coefficient of variation of the service time is greater $1/\sqrt{2}$. For practical application of the results obtained, the probability method moments method is used. The results of numerical modeling in the Mathcad package unambiguously confirm the fact of the queuing theory that the average waiting time is related to the coefficients of variation of the intervals of arrival and service time by a quadratic dependence.

Keywords: *queuing system $E_2/HE_2/1$, average waiting time in the queue, the method of spectral decomposition, the Lindley integral equation, the Laplace transform*

DOI: 10.18469/ikt.2020.18.1.06

Tarasov Veniamin Nikolaevich, Povolzhskiy State University of Telecommunications and Informatics, 23, L. Tolstoy Street, Samara, 443010, Russian Federation; Head of Software and Management in technical Systems Department, Doctor of Technical Science, Professor. Tel. +7 846 228-00-13. E-mail: tarasov-vn@psuti.ru

Bakhareva Nadezhda Fedorovna, Povolzhskiy State University of Telecommunications and Informatics, 23, L. Tolstoy Street, Samara, 443010, Russian Federation; Head of Informatics and Computer Technics Department, Doctor of Technical Science, Professor. Tel. +7 846 339-11-31. E-mail: bakhareva-nf@psuti.ru

Kada Othmane, Povolzhskiy State University of Telecommunications and Informatics, 23, L. Tolstoy Street, Samara, 443010, Russian Federation; PhD Student of Software and Management in technical Systems Department. E-mail: otman2333@gmail.com

References

1. Kleinrock L. *Teoriya massovogo obsluzhivaniya* [Queuing Theory]. Moscow: Mashinostroeinie Publ., 1979, 432 p. (In Russian).
2. Brannstrom N. A *Queueing Theory Analysis of Wireless Radio Systems. Appllied to HS-DSCH*. Lulea University of Technology, 2004. 79 p.
3. Tarasov V.N., Bakhareva N.F., Lipilina L.V. Matematicheskaya model' teletrafika na osnove sistemy G/M/1 i rezul'taty vychislitel'nyh eksperimentov [Mathematical model of teletraffic on the based G/M/1 system and results of computational experiment]. *Informacionnye technologii*, 2016, vol. 22, no. 2, pp. 121–126. (In Russian).
4. Tarasov V.N., Kartashevskiy I.V. Sposoby approksimacii vhodnyh raspredelenij dlya sistemy G/G/1 i analiz poluchennyh rezul'tatov [Methods for approximating input distributions for the G/G/1 system and analysis of the results]. *Sistemy upravleniya i informatsionniye tehnologii*, 2015, no. 3. pp. 182–185. (In Russian).

5. Tarasov V.N., Gorelov G.A., Ushakov Y.A. Vosstanovlenie momentnyh harakteristik raspredeleniya intervalov vremeni mezhdu paketami vhodyaschego trafika [Restoring moment distribution characteristics interval between packets of incoming traffic]. *Informacionnye technologii*, 2014, no. 2, pp. 40–44. (In Russian).
6. Tarasov V.N. *Veroyatnostnoe komp'yuternoe modelirovanie slozhnyh sistem* [Probabilistic Computer Modeling of Complex Systems]. Samara: SNC RAN Publ., 2002, 194 p. (In Russian).
7. Myskja A. An improved heuristic approximation for the GI/GI/1 queue with bursty arrivals. *Teletraffic and datatraffic in a Period of Change, ITC-13*, 1991, pp. 683–688.
8. Whitt W. Approximating a point process by a renewal process: two basic methods. *Operation Research*, 1982, vol. 30, no. 1, pp. 125–147.
9. Aliev T.I. *Osnovy modelirovaniya diskretnyh system* [Fundamentals of Modeling Discrete Systems]. SPb.: SPbGU ITMO, 2009, 363 p. (In Russian).
10. Aliev T.I. Approksimaciya veroyatnostnyh raspredelenij v modelyah massovogo obsluzhivaniya [Approximation of probability distributions in queuing models]. *Nauchno-tekhnicheskij vestnik informacionnyh tekhnologij, mekhaniki i optiki*, 2013, no. 2 (84), pp. 88–93. (In Russian).
11. RFC 3393 IP Packet Delay Variation Metric for IP Performance Metrics (IPPM). URL: https://tools.ietf.org/html/rfc3393 (accessed: 26.02.2016).
12. Tarasov V.N., Bahareva N.F. Obobshchennaya dvumepnaya diffuzionnaya model' massovogo obsluzhivaniya tipa GI/G/1 [Generalized two-dimensional diffusion queuing model type GI/G/1]. *Telekommunikacii*, 2009, no. 7, pp. 2–8. (In Russian).
13. Tarasov V.N., Malakhov S.V., Kartashevskiy I.V. Teoreticheskoe i eksperimental'noe issledovanie zaderzhki v programmno-konfiguriruemyh setyah [Theoretical and experimental study of delay in software-configured networks]. *Infokommunikacionnye technologii*, 2015, no. 4, pp. 409–413. (In Russian).

Received 16.01.2020

НОВЫЕ ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

УДК 681.3

АДАПТИВНЫЙ МЕТОД ОБНАРУЖЕНИЯ УЯЗВИМОСТЕЙ ИНТЕРФЕЙСОВ БЕСПИЛОТНЫХ ТРАНСПОРТНЫХ СРЕДСТВ В ИНФРАСТРУКТУРЕ УМНОГО ГОРОДА

Скатков А.В., Брюховецкий А.А., Моисеев Д.В., Шевченко В.И.
Севастопольский государственный университет, Севастополь, РФ
E-mail: dmitriymoiseev@mail.ru

Предлагается метод обнаружения уязвимостей интерфейсов беспилотных транспортных средств на основе анализа состояния трафика в каналах связи беспилотных транспортных систем. Подход базируется на методах непараметрической статистики для оценки информационных состояний контролируемых объектов, к которым относятся такие ресурсы беспилотных транспортных систем, как: канал связи, процессор, память, источник питания и др. Для каждого из этих ресурсов предлагается оценивать изменение таких характеристик, как степень загрузки ресурса и скорость его изменения. Распознавание состояния сетевого трафика осуществляется в условиях дефицита априорной информации о свойствах источника вторжений и стохастической природы распознаваемых событий. Для повышения уровня достоверности обнаружения уязвимостей в модели производится адаптивная динамическая настройка правил принятия решений по классификации информационного состояния трафика беспилотных транспортных средств.

Ключевые слова: *беспилотное транспортное средство, адаптивная модель, обнаружение уязвимостей, классификация информационных состояний, оценочная матрица*