

# МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРИВодОВ С ТАНДЕМНЫМИ ПНЕВМАТИЧЕСКИМИ ЦИЛИНДРАМИ

Журкин Н.А., д.т.н. Донской А.С., д.т.н. Жарковский А.А.

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, Санкт-Петербург, Россия  
zhurkin47@mail.ru

*В статье рассмотрен вопрос математического моделирования tandemных пневматических цилиндров. Несмотря на то, что вопрос математического описания работы приводов с однопоршневыми цилиндрами достаточно подробно рассмотрен в литературе, особенность приводов с tandemными цилиндрами, а именно коммутация их рабочих полостей с пневматическими линиями нагнетания и выхлопа через один пневмораспределитель, требует формирования определенного подхода к их математическому описанию. Для этого в исследовании представлены два варианта математических моделей, описывающих их работу. Первый вариант предполагает учет некоторых условных промежуточных камер за пневмораспределителем, в которых происходит деление и объединение потоков сжатого воздуха между пневматическим распределителем и рабочими полостями tandemного пневматического цилиндра, во втором, упрощенном, варианте рабочие полости цилиндра рассматриваются независимо. Сравнение результатов математического моделирования по двум вариантам показало достаточно существенное различие во времени перемещения поршня цилиндра. При этом из результатов видно, что данное различие связано в первую очередь с распределением давления воздуха между промежуточными камерами и рабочими полостями цилиндра. Исходя из полученных результатов следует, что при разработке пневматических приводов и пневмоприводных устройств с tandemными пневматическими цилиндрами, несмотря на усложнение расчета, предпочтительно в математической модели учитывать промежуточные камеры, в которых происходит деление и объединение потоков сжатого воздуха.*

*Разработанная модель может применяться при проектировании пневматических приводов различных машин и механизмов, в которых используются tandemные пневматические цилиндры. Сформированный подход к моделированию может быть использован при исследовании других многопоршневых пневматических двигателей или приводов с несколькими двигателями, управляемыми одним пневматическим распределительным устройством.*

**Ключевые слова:** пневматический цилиндр, tandemный цилиндр, деление потока сжатого воздуха.

## Введение

Пневматические приводы, обладая рядом существенных преимуществ перед другими типами приводов, в настоящее время широко применяются в различных отраслях промышленности. К основным преимуществам пневматических приводов относятся пожаро- и взрывобезопасность, низкая масса, простота монтажа, низкая стоимость эксплуатации в сравнении с гидравлическими приводами. Одним из основных компонентов пневматических приводов являются пневматические двигатели, наибольшее распространение среди которых получили пневматические цилиндры (ПЦ), которые легко позволяют реализовать линейное возвратно-поступательное движение механизмов. В ряде случаев требуется обеспечение цилиндрами повышенных усилий при ограничении радиальных или осевых га-

баритов. Для этих целей применяют tandemные пневматические цилиндры. Подобные цилиндры используют в различных станочных приспособлениях, тормозных устройствах, пневмоприводных насосах и компрессорах высокого давления, и в других механизмах и машинах стационарной и мобильной техники.

При проектировании пневматических приводов актуальным остается математическое моделирование их работы, позволяющее с достаточной точностью определить их характеристики. Вопросам математического моделирования пневматических приводов посвящено достаточно большое количество работ, например [1–5]. Однако в указанных работах рассматриваются однопоршневые цилиндры, имеющие одну или две рабочих полости. Tandемные цилиндры имеют четыре рабочих полости, при этом их коммутация с пневматическими

линиями нагнетания и выхлопа осуществляется с помощью одного пневматического распределителя, следствием чего является деление и объединение потоков сжатого воздуха.

Целью настоящей статьи является формирование подхода к математическому моделированию пневматических приводов с тандемными ПЦ с учетом их особенностей.

**Приводы с тандемными пневмоцилиндрами**

На рис. 1 представлены типичные схемы пневматических приводов с тандемными ПЦ. На рис. 1, а тандемный ПЦ имеет последовательно соединенные поршни. Данная конструк-

ция ПЦ обеспечивает повышение развиваемого усилия при сохранении диаметра корпуса. На рис. 1, б тандемный ПЦ имеет параллельно соединенные поршни. Данная конструкция обеспечивает повышение развиваемого усилия при сохранении осевого размера. При этом, поршни могут располагаться в одном или двух отдельных корпусах.

**Математическая модель тандемного пневматического цилиндра**

На рис. 2 представлена расчетная схема тандемного ПЦ, соответствующая принципиальной схеме, показанной на рис. 1, а.

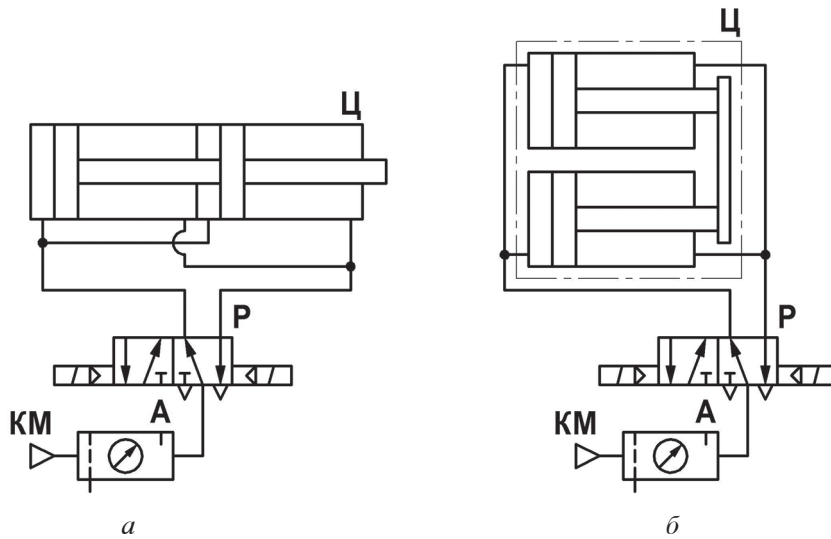


Рис. 1. Принципиальная схема привода с тандемным ПЦ:

а – с последовательно соединенными поршнями; б – с параллельно соединенными поршнями

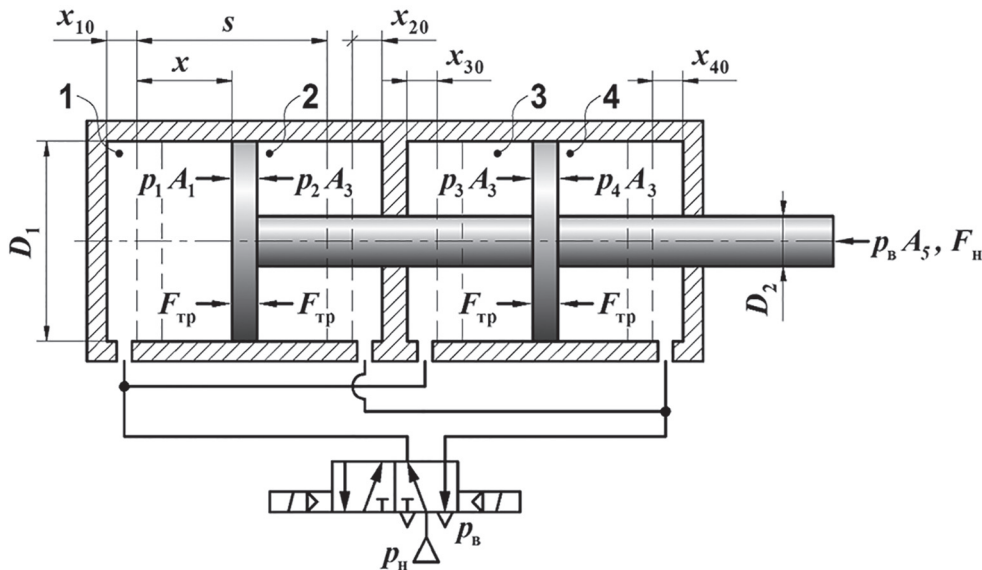


Рис. 2. Расчетная схема тандемного ПЦ

Следует отметить, что последовательное или параллельное расположение поршней тандемного ПЦ не влияет на математическое описание его работы, поэтому приводимые далее уравнения справедливы для любой конструктивной схемы цилиндра.

Математическая модель тандемного ПЦ включает уравнение движения составного поршня и уравнения изменения давления воздуха в его рабочих полостях. При разработке математической модели также принимаются некоторые допущения: газодинамические процессы, происходящие в полостях пневматического приводного цилиндра, являются адиабатическими, в пневматических линиях – изотермическими [3, 4].

Уравнение движения составного поршня тандемного ПЦ имеет следующий вид:

$$m\ddot{x} = p_1A_1 - p_2A_2 + p_3A_3 - p_4A_4 - p_bA_5 - F_{тр} - F_H, \quad (1)$$

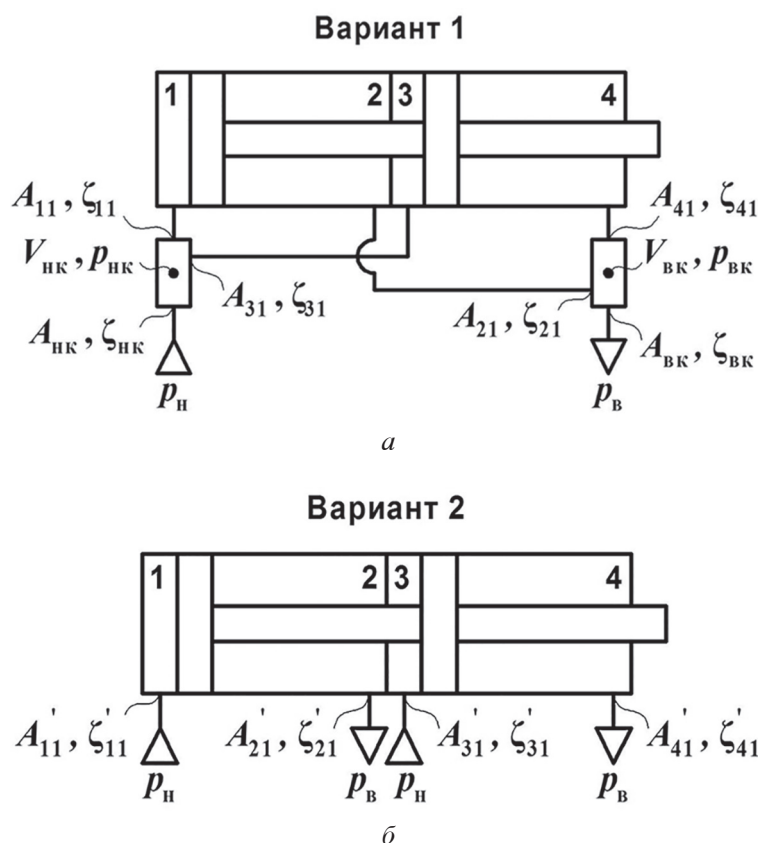
где  $m$  – масса подвижных частей тандемного ПЦ;  $x$  – координата текущего положения составного поршня;  $p_1, p_2, p_3, p_4$  – абсолютное давление в рабочих полостях 1, 2, 3 и 4 соответственно;  $p_b$  – давление в пневматической выхлопной линии (атмосферное давление);  $A_1, A_2, A_3, A_4$  – эффективные площади рабочих полостей 1, 2, 3 и 4 соответственно;  $A_5$  – площадь поперечного сечения штока тандемного ПЦ;  $F_{тр}$  – суммарная сила трения;  $F_H$  – сила от полезной нагрузки.

Как было отмечено выше, особенностью приводов с тандемными ПЦ является коммутация рабочих полостей с пневматическими линиями нагнетания и выхлопа с помощью одного пневматического распределителя. В связи с этим возможны два варианта описания изменения давления воздуха в рабочих полостях цилиндра. Первый вариант предполагает коммутацию рабочих полостей тандемного ПЦ с линиями нагнетания и выхлопа с учетом процессов деления и объединения потоков воздуха, которые происходят в некоторых промежуточных камерах. При этом площади подводящих и отводящих отверстий промежуточных камер принимаются равными между собой, что соответствует выпускаемому серийно пневматическому оборудованию, в частности, элементам соединения пневматических трубопроводов. Во втором, упрощенном, варианте рабочие полости цилиндра рассматриваются независимо друг от друга. При этом, исходя из предполо-

жения деления потоков воздуха в равных количествах между полостями, для второго варианта принимаются уменьшенные в два раза площади подводящих отверстий рабочих полостей. Данное предположение позволяет считать представленные ниже два варианта коммутации рабочих полостей эквивалентными. Схемы коммутации рабочих полостей для двух рассматриваемых вариантов представлены на рис. 3.

Изменение давления воздуха в рабочих полостях тандемного ПЦ для первого варианта математической модели описывается следующей системой уравнений:

$$\begin{cases} \dot{p}_{HK} = \frac{kA_{HK}\sqrt{RT_H}}{V_{HK}\sqrt{\zeta_{HK}}}\sqrt{p_H^2 - p_{HK}^2} - \frac{kA_{11}\sqrt{RT_H}}{A_1(x+x_{10})\sqrt{\zeta_{11}}}\times \\ \times \left(\frac{p_{HK}}{p_H}\right)^{\frac{k-1}{2k}}\sqrt{p_{HK}^2 - p_1^2} - \\ - \frac{kA_{31}\sqrt{RT_H}}{A_3(x+x_{30})\sqrt{\zeta_{31}}}\left(\frac{p_{HK}}{p_H}\right)^{\frac{k-1}{2k}}\sqrt{p_{HK}^2 - p_3^2}, \\ \dot{p}_{BK} = -\frac{kA_{BK}\sqrt{RT_H}}{V_{BK}\sqrt{\zeta_{BK}}}\left(\frac{p_{BK}}{p_H}\right)^{\frac{k-1}{2k}}\sqrt{p_{BK}^2 - p_b^2} + \\ + \frac{kA_{21}\sqrt{RT_H}}{A_2(s-x+x_{20})\sqrt{\zeta_{21}}}\sqrt{p_2^2 - p_{BK}^2} + \\ + \frac{kA_{41}\sqrt{RT_H}}{A_4(s-x+x_{40})\sqrt{\zeta_{41}}}\sqrt{p_4^2 - p_{BK}^2}, \\ \dot{p}_1 = \frac{kA_{11}\sqrt{RT_H}}{A_1(x+x_{10})\sqrt{\zeta_{11}}}\sqrt{p_{HK}^2 - p_1^2} - \frac{kp_1}{x+x_{10}}\dot{x}, \\ \dot{p}_2 = -\frac{kA_{21}\sqrt{RT_H}}{A_2(s-x+x_{20})\sqrt{\zeta_{21}}}\left(\frac{p_2}{p_H}\right)^{\frac{k-1}{2k}}\sqrt{p_2^2 - p_{BK}^2} + \\ + \frac{kp_2}{s-x+x_{20}}\dot{x}, \\ \dot{p}_3 = \frac{kA_{31}\sqrt{RT_H}}{A_3(x+x_{30})\sqrt{\zeta_{31}}}\sqrt{p_{HK}^2 - p_3^2} - \frac{kp_3}{x+x_{30}}\dot{x}, \\ \dot{p}_4 = -\frac{kA_{41}\sqrt{RT_H}}{A_4(s-x+x_{40})\sqrt{\zeta_{41}}}\left(\frac{p_4}{p_H}\right)^{\frac{k-1}{2k}}\sqrt{p_4^2 - p_{BK}^2} + \\ + \frac{kp_4}{s-x+x_{40}}\dot{x}, \end{cases} \quad (2)$$



**Рис. 3.** Расчетная схема коммутации рабочих полостей тандемного ПЦ

где  $x_{10}, x_{20}, x_{30}, x_{40}$  – приведенные координаты мертвых объемов рабочих полостей 1, 2, 3 и 4 соответственно;  $s$  – ход поршня;  $A_1, A_2, A_3, A_4$  – эффективные площади рабочих полостей 1, 2, 3 и 4 соответственно;  $A_{11}, A_{21}, A_{31}, A_{41}$  – площади проходных сечений подводящих отверстий рабочих полостей 1, 2, 3 и 4 соответственно;  $\zeta_{11}, \zeta_{21}, \zeta_{31}, \zeta_{41}$  – коэффициенты сопротивления подводящих отверстий рабочих полостей 1, 2, 3 и 4 соответственно;  $V_{HK}, V_{BK}$  – объемы промежуточных камер в пневматических линиях нагнетания и выхлопа соответственно;  $A_{HK}, A_{BK}$  – площади проходных сечений подводящих отверстий промежуточных камер в пневматических линиях нагнетания и выхлопа соответственно;  $\zeta_{HK}, \zeta_{BK}$  – коэффициенты сопротивления подводящих отверстий промежуточных камер в пневматических линиях нагнетания и всасывания соответственно;  $p_{HK}, p_{BK}$  – давление воздуха в условных промежуточных камерах в пневматических линиях нагнетания и всасывания соответственно;  $p_H$  – давление воздуха в пневматической линии нагнетания;  $p_B$  – давление воздуха в пневматической линии выхлопа;  $k$  – показатель адиабаты;  $R$  – универсальная газовая постоянная;  $T_H$  – температура сжатого воздуха в пневматической линии нагнетания.

Для второго варианта математического описания работы тандемного ПЦ изменение давления воздуха в рабочих полостях описывается упрощенной системой уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{p}_1 = \frac{k \frac{A_{HK}}{2} \sqrt{RT}}{A_1 (x + x_{10}) \sqrt{\zeta_{HK}}} \sqrt{p_H^2 - p_1^2} - \frac{kp_1}{x + x_{10}} \dot{x}, \\ \dot{p}_2 = -\frac{k \frac{A_{BK}}{2} \sqrt{RT}}{A_2 (s - x + x_{20}) \sqrt{\zeta_{BK}}} \left( \frac{p_2}{p_H} \right)^{\frac{2k}{k-1}} \sqrt{p_2^2 - p_B^2} + \\ + \frac{kp_2}{s - x + x_{20}} \dot{x}, \\ \dot{p}_3 = \frac{k \frac{A_{HK}}{2} \sqrt{RT}}{A_3 (x + x_{30}) \sqrt{\zeta_{HK}}} \sqrt{p_H^2 - p_3^2} - \frac{kp_3}{x + x_{30}} \dot{x} \\ \dot{p}_4 = -\frac{k \frac{A_{BK}}{2} \sqrt{RT}}{A_4 (s - x + x_{40}) \sqrt{\zeta_{BK}}} \left( \frac{p_4}{p_i} \right)^{\frac{2k}{k-1}} \sqrt{p_4^2 - p_B^2} + \\ + \frac{kp_4}{s - x + x_{40}} \dot{x}, \end{array} \right. \quad (3)$$

Суммарная сила трения описывается следующим выражением:

$$F_{тр} = F_{ст} + \mu_{вт} \dot{x}, \quad (4)$$

где  $F_{ст}$  – сила сухого трения в уплотнительных узлах подвижных соединений,  $\mu_{вт}$  – коэффициент вязкого трения.

Таким образом, уравнения (1), (4) и система уравнений (2) представляют первый вариант математической модели работы тандемного ПЦ, уравнения (1), (4) и система уравнений (3) – второй вариант.

### Результаты моделирования

Исходные данные для моделирования представлены в таблице 1. Для сравнения результатов моделирования по двум вариантам диаметры подводящих отверстий рабочих полостей тандемного ПЦ и промежуточных

камер, их коэффициенты сопротивления, координаты мертвого объема рабочих полостей и объемы условных промежуточных камер принимаются равными соответственно между собой. Объемы промежуточных камер выбраны приблизительно равными объему внутренней полости серийно выпускаемых тройников для пневматических систем.

На рис. 4 представлены графики перемещения составного поршня от времени для двух вариантов математических моделей.

Из рисунка видно, что характер перемещения составного поршня тандемного ПЦ совпадает при моделировании по двум вариантам, однако время перемещения составного поршня при моделировании по первому варианту больше. Из рисунка также видно, что начало движения поршня при моделировании по двум вариантам происходит практиче-

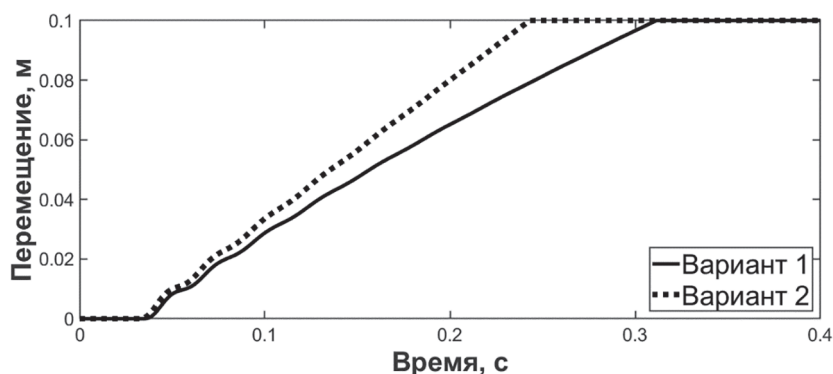


Рис. 4. Зависимость перемещения поршня от времени

Таблица 1

### Исходные данные для моделирования

Параметр	Обозначение	Ед. измерения	Значение
Диаметр поршня	$D_1$	м	0,05
Диаметр штока	$D_2$	м	0,01
Ход поршня	$s$	м	0,1
Приведенные координаты мертвых объемов	$x_{10} \dots x_{40}$	м	0,02
Диаметры подводящих отверстий	$D_{кн}, D_{кв}, D_{11} \dots D_{41}$	м	0,004
Коэф. сопротивления подводящих отверстий	$\zeta_{кн}, \zeta_{кв}, \zeta_{11} \dots \zeta_{41}$	–	12
Объемы промежуточных камер	$V_{нк}, V_{вк}$	м <sup>3</sup>	$1 \cdot 10^{-6}$
Давление воздуха в линии нагнетания	$p_n$	Па	$5 \cdot 10^5$
Давление воздуха в линии выхлопа	$p_b$	Па	$1 \cdot 10^5$
Температура воздуха в линии нагнетания	$T_n$	К	293
Сила сухого трения	$F_{ст}$	Н	20
Коэф. вязкого трения	$\mu_{вт}$	Н·с/м	30
Сила от полезной нагрузки	$F$	Н	1000

ски одновременно. Из этого следует, что время наполнения и опустошения условных промежуточных камер с принятыми объемами практически не оказывает влияние на время движения поршня, а увеличение времени перемещения поршня связано, в первую очередь, с учетом в математической модели процессов деления и объединения потоков воздуха.

На рис. 6 представлены графики зависимости изменения давления воздуха в рабочих полостях 1 и 3 тандемного ПЦ, которые в соответствии с расчетной схемой соединяются с пневматической линией нагнетания.

Из рисунка видно, характер изменения давления при моделировании по двум вариантам несколько отличается. При этом время нарастания давления при моделировании по первому варианту больше, что связано с учетом деления потока сжатого воздуха между рабочими полостями и, как следствие, повышением сопротивления пневматической линии нагнетания.

На рис. 6 представлены графики зависимости изменения давления воздуха в рабочих

полостях 2 и 4 тандемного ПЦ, которые в соответствии с расчетной схемой соединяются с пневматической линией выхлопа.

Из рисунка видно, что изменение давления сжатого воздуха в рабочих полостях 2 и 4 идентично. Такой результат связан с тем, что рабочие полости 2 и 4, их мертвые объемы и подводящие линии в соответствии и исходными данными имеют одинаковые размеры. При этом максимальное значение давления при моделировании по первому варианту оказывается существенно выше. Это обусловлено учетом дополнительного сопротивления при объединении потоков воздуха, вытекающего из двух рабочих полостей тандемного ПЦ, перед выхлопной пневматической линией.

На рис. 7 представлен график зависимости времени перемещения составного поршня тандемного ПЦ от полезной нагрузки на штоке для двух вариантов математической модели.

Из рисунка следует, что при моделировании по первому варианту время перемещения оказывается больше, что связано с дополнительным сопротивлением пневматических

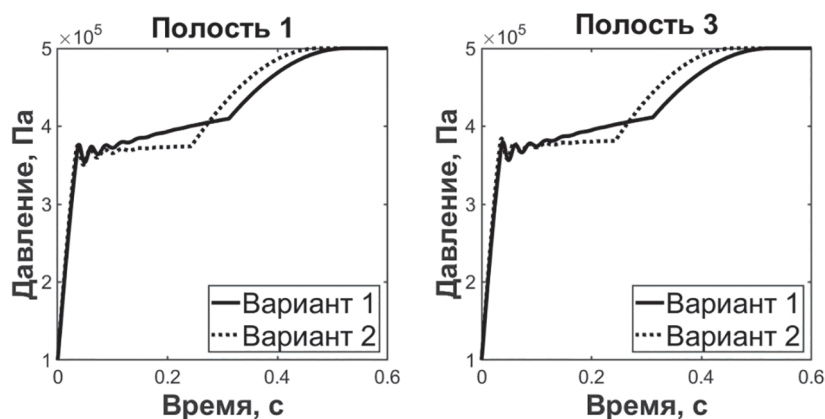


Рис. 5. Зависимость изменения давления в полостях 1 и 3 от времени

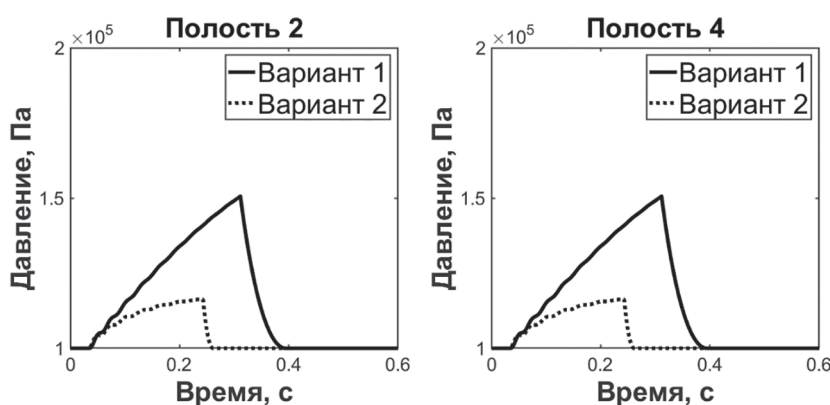


Рис. 6. Зависимость изменения давления в полостях 2 и 4 от времени

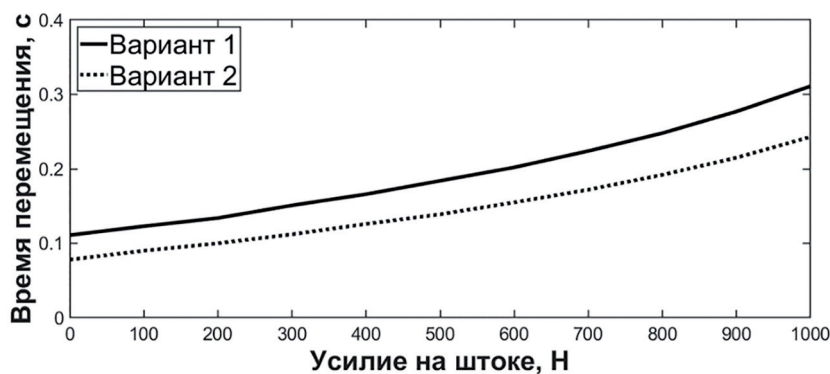


Рис. 7. Зависимость времени перемещения поршня от нагрузки на штоке

линий при учете процессов деления и объединения потоков воздуха и, как следствие, увеличением времени заполнения и опустошения рабочих полостей тандемного ПЦ. На холостом ходу отличие результатов моделирования по двум вариантам достигает более чем 40 %.

Из представленных на рис. 5–8 результатов следует, что учет процессов деления и объединения потоков сжатого воздуха оказывает существенное влияние на время перемещения составного поршня тандемного ПЦ.

### Заключение

Полученные результаты продемонстрировали существенное влияние учета при математическом моделировании процессов деления и объединения потоков сжатого воздуха между рабочими полостями на динамику работы привода с тандемным ПЦ и, в первую очередь, на время перемещения поршня цилиндра. Из этого следует, что при проектировании пневматических приводов, в которых используется данный тип пневматических двигателей, требуется, несмотря на усложнение математической модели, полное математическое описание пневматической схемы коммутации рабочих полостей тандемного ПЦ с пневматическими линиями нагнетания и выхлопа, то есть применение первого предложенного варианта математической модели. Особенно актуальным предложенный подход к математическому моделированию становится при проектировании приводов, обеспечивающих минимальное время срабатывания, определяющее длительность технологических процессов. Также предложенный подход актуален при проектировании циклически работающих приводов. Дальнейшие исследования будут на-

правлены на экспериментальную верификацию и уточнение разработанной математической модели, а также применение ее при разработке математических моделей устройств с тандемными ПЦ.

Предложенный подход также может быть использован при моделировании пневматических цилиндров с тремя и более поршнями, а также для приводов с несколькими однопоршневыми цилиндрами (многомашинных приводов), управляемыми одним пневматическим распределителем.

### Литература

1. Герц Е.В., Крейнин Г.Н. Динамика пневматических приводов машин-автоматов. М.: Машиностроение, 1964. 236 с.
2. Герц Е.В., Крейнин Г.Н. Расчет пневмоприводов: Справочное пособие. М.: Машиностроение, 1975. 272 с.
3. Донской А.С. Обобщенные математические модели элементов пневмосистем. СПб.: РИЦ СПГУТД, 2001. 214 с.
4. Донской А.С. Моделирование и расчет пневматических приводов: Учеб. пособие. СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2019. 78 с.
5. Погорелов В.И. Газодинамические расчеты пневматических приводов. Л.: Машиностроение, 1971. 182 с.

### References

1. Gerts Ye.V., Kreynin G.N. *Dinamika pnevmaticheskikh privodov mashin-avtomatov* [Dynamics of pneumatic drives of automatic machines]. Moscow: Mashinostroyeniye Publ., 1964. 236 p.
2. Gerts Ye.V., Kreynin G.N. *Raschet pnevmo-privodov: Spravochnoye posobiye* [Pneumatic drive calculation: Reference guide]. Moscow: Mashinostroyeniye Publ., 1975. 272 p.

3. Donskoy A.S. *Obobshchennyye matematicheskiye modeli elementov pnevmosistem* [Generalized mathematical models of elements of pneumatic systems]. St. Petersburg: RITs SPGUTD Publ., 2001. 214 p.
4. Donskoy A.S. *Modelirovaniye i raschet pnevmaticheskikh privodov: Ucheb. Posobiye* [Modeling and calculation of pneumatic drives: Textbook]. St. Petersburg: Izd-vo Politekhn. un-ta Publ., 2019. 78 p.
5. Pogorelov V.I. *Gazodinamicheskkiye raschety pnevmaticheskikh privodov* [Gas-dynamic calculations of pneumatic drives]. Leningrad: Mashinostroyeniye Publ., 1971. 182 p.

## MATHEMATICAL MODELING OF DRIVES WITH TANDEM PNEUMATIC CYLINDERS

**N.A. Zhurkin**, DSc in Engineering **A.S. Donskoy**, DSc in Engineering **A.A. Zharkovskiy**  
 Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russia  
 zhurkin47@mail.ru

*The article considers the issue of mathematical modeling of tandem pneumatic cylinders. Despite the fact that the mathematical description of the operation of drives with single-piston cylinders is considered in sufficient detail in the literature, the peculiarity of drives with tandem cylinders, namely the commutation of their working cavities with pneumatic discharge and exhaust lines through one pneumatic distributor, requires the formation of a certain approach to their mathematical description. The paper shows two developed versions of mathematical models that describe their work. The first option involves taking into account some conventional intermediate chambers behind the pneumatic distributor, where the division and combination of compressed air flows between the pneumatic distributor and the working cavities of the tandem pneumatic cylinder takes place. The second one (the simplified) considers the working cavities of the cylinder independently. Comparison of the results of mathematical modeling for two options showed a fairly significant difference in the time of movement of the piston of the cylinder. Moreover, it can be seen from the results that this difference is primarily associated with the distribution of air pressure between the intermediate chambers and the working cavities of the cylinder. According to the obtained results, it follows that when developing pneumatic drives and pneumatic actuators with tandem pneumatic cylinders, despite the complexity of the calculation, it is preferable to take into account in the mathematical model the intermediate chambers, where the division and combination of compressed air flows takes place.*

*The developed model can be used in the design of pneumatic drives of various machines and mechanisms that use tandem pneumatic cylinders. This modeling approach can be used in the study of other multi-piston pneumatic engines or drives with several engines controlled by a single pneumatic switchgear.*

**Keywords:** pneumatic cylinder, tandem cylinder, compressed air flow division.