

КВАЗИ-КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНАЯ МОДЕЛЬ КАЧЕНИЯ ЭЛАСТИЧНОГО КОЛЕСА ПО НЕРОВНОСТЯМ ДЕФОРМИРУЕМОГО ОПОРНОГО ОСНОВАНИЯ ПРИ КРИВОЛИНЕЙНОМ ДВИЖЕНИИ КОЛЕСНОЙ МАШИНЫ

д.т.н. **Вольская Н.С.**, д.т.н. **Жилейкин М.М.**, к.т.н. **Захаров А.Ю.**, **Паньшин М.В.**

МГТУ им. Н. Э. Баумана, Москва, Россия, zakharov-al@mail.ru

Одним из основных направлений экономического развития России было и должно оставаться ускоренное развитие районов Севера и Северо-Востока, занимающих более 60% территории страны. Дальнейшее освоение этих территорий требует новых подходов и новых технологий для решения транспортно-технологических задач при перемещении грузов и людей в условиях, когда полотном пути является бездорожье. При этом движение транспортно-технологических машин не только затруднено, но в ряде случаев исключается совсем. Существующая вездеходная техника, выполненная по старым традиционным схемам и серийно выпускаемая промышленностью, не отвечает требованиям, определяющим эффективность и экологичность движителей машин в сложных природно-климатических условиях эксплуатации. В сложившейся ситуации задача прогнозирования проходимости колесных машин (КМ) по опорной поверхности со слабыми несущими свойствами является актуальной. Одним из основных методов прогнозирования проходимости является имитационное моделирование движения колесных машин в различных условиях эксплуатации, которое основано на математических моделях взаимодействия эластичной шины с деформируемыми неровностями опорного основания. В настоящее время при теоретическом исследовании взаимодействия движителей с грунтом сформировались два основных направления: аналитический метод, предусматривающий математическое описание исследуемого процесса, и конечно-элементный метод, основанный на компьютерном моделировании. Целью данного исследования является разработка математической модели качения эластичного колеса по деформируемому неровному опорному основанию с учетом деформации пятна контакта в каждой конечной элементарной площадке. Разработанная математическая модель совмещает в себе как математическое описание физических процессов взаимодействия эластичной шины с неровностями деформируемого основания, так и конечно-элементный подход, основанный на рассмотрении процессов в каждой конечной элементарной площадке пятна контакта.

Ключевые слова: качение эластичного колеса; неровности деформируемого опорного основания; элементарная площадка пятна контакта; прогнозирования проходимости колесных машин.

Введение

Одним из основных направлений экономического развития России было и должно оставаться ускоренное развитие районов Севера и Северо-Востока, занимающих более 60% территории страны.

Дальнейшее освоение этих территорий требует новых подходов и новых технологий для решения транспортно-технологических задач при перемещении грузов и людей в условиях, когда полотном пути является бездорожье. При этом движение транспортно-технологических машин не только затруднено, но в ряде случаев исключается совсем.

Существующие модели колесных, гусеничных и роторно-винтовых машин не отвечают поставленным функциональным требованиям, требованиям эффективности, надежности и экологичности движителей машин при эксплуатации в северных регионах страны, имеющих слабонесущие опорные поверхности. Таким образом, в настоящее время существует техническая, экономическая и социальная потребность в создании и использовании транспортных средств на пневмоколесных движителях, в том числе сверхнизкого давления, удовлетворяющих поставленным требованиям.

Следует отметить, что в настоящее время наша страна не располагает необходимым парком энергоэффективных машин высокой проходимости. Существующая вездеходная техника, выполненная по старым традиционным схемам и серийно выпускаемая промышленностью, не отвечает требованиям, определяющим эффективность и экологичность двигателей машин в сложных природно-климатических условиях эксплуатации. В сложившейся ситуации задача прогнозирования проходимости колесных машин (КМ) по опорной поверхности со слабыми несущими свойствами является актуальной [1, 2].

Одним из основных методов прогнозирования проходимости является имитационное моделирование движения КМ в различных условиях эксплуатации, которое основано на математических моделях взаимодействия эластичной шины с деформируемыми неровностями опорного основания.

Установлено [3, 4], что на опорно-тяговую проходимость КМ взаимно влияют как деформативные свойства шин, так и физико-механические характеристики грунта: нормальный прогиб шины и глубина колеи; изменение площади опорного пятна контакта в зависимости от нагрузки и давления воздуха в шине; наличие гистерезисных потерь в материале шины, которые влияют на сопротивление качению, обусловленное трением в пятне контакта о почву; создание касательных реакций почвы по всей площади контакта.

Наряду с определением зависимостей для описания процессов «распределение давления в пятне контакта – деформирование грунта» и «нагрузка – деформирование двигателя» не менее важной задачей является вопрос выбора модели расчета вертикальных деформаций грунта при контакте с пневматической шиной. От правильности выбора типа и вида аппроксимационной зависимости во многом определяется как качественная, так и количественная стороны общего решения задачи контактного взаимодействия эластичного двигателя с деформируемым полотном пути [5].

В настоящее время при теоретическом исследовании взаимодействия двигателей с грунтом сформировались два основных направления: аналитический метод, предусматривающий математическое описание исследуемого процесса [6–8] и конечно-элементный метод (МКЭ), основанный на компьютерном

моделировании [9–13]. В области исследования взаимодействия колесных двигателей с грунтом аналитический метод нашел широкое применение. Разработанные математические модели взаимодействия шины с грунтом позволяют решать различные задачи. Эти модели используются как при исследовании процессов взаимодействия одиночного колесного двигателя с грунтовым массивом, так и при исследованиях динамических моделей мобильных машин, эксплуатируемых в специфических дорожно-грунтовых условиях (ДГУ) с неоднородными физико-механическими показателями. Одним из самых значимых недостатков этих моделей является описание взаимодействия колеса с ровным деформируемым основанием, в то время как профиль реальной опорной поверхности может иметь значительную высоту неровностей, соизмеримую с радиусом колеса.

Исследования процессов, протекающих в грунтовом массиве при воздействии колесного двигателя методом конечных элементов, являются относительно новыми, получившими в последнее время наибольшее применение. Этот метод лучше других обеспечен численными процедурами исследования математических моделей объектов. Наиболее важным его преимуществом является наличие неявных методов интегрирования систем дифференциальных уравнений. Применение данного метода позволяет наиболее точно описать процесс взаимодействия колесных двигателей с грунтом, определить напряжения в грунтовом массиве, деформацию шины и грунта, уплотнение грунта. В отличие от аналитических методов определяется форма пятна контакта эластичной шины с опорной поверхностью, зависящая от конкретных характеристик грунта и конструктивных и эксплуатационных параметров двигателя [13]. Однако существенным недостатком метода является его высокая вычислительная трудоемкость, поэтому при существующих на сегодняшний день компьютерах применять эти модели в составе общей модели движения многоосных колесных машин затруднительно.

Целью данного исследования является разработка математической модели качения эластичного колеса по деформируемому неровному опорному основанию с учетом изменяющейся деформации пятна контакта в каждой конечной элементарной площадке.

Математическая модель взаимодействия эластичной шины с неровностями деформируемого опорного основания

В предлагаемой модели используются две различные системы координат (рис. 1), что обусловлено структурой и формой уравнений движения объекта.

Первая, неподвижная система координат (НСК) $O_2X_2Y_2Z_2$, служит для моделирования заданных дорожно-грунтовых условий движения. Начало координат системы, точка O_2 , совпадает с началом моделируемой трассы.

Для определения сил, действующих на автомобиль со стороны грунта, введем *микродвижущую систему координат (МПСК)*, под которой будем понимать систему $O_TX_TY_TZ_T$, центр которой O_T совпадает с геометрическим центром вращения колеса, ось O_TX_T совпадает с проекцией продольной оси симметрии колеса на опорную поверхность.

Основные допущения

- Нормальное давление в пятне контакта распределено пропорционально прогибу шины на каждом элементарном участке контактной площадки.
- Сила взаимодействия колеса с опорным основанием направлена в обратную сторону от скорости проскальзывания.

Рассмотрим расчетную схему движения колеса на рис. 1.

Для разработки модели воспользуемся результатами работы [14]. На нижней полуокружности недеформированного профиля колеса выберем некоторое количество точек n , положение которых будем определять углом α_i между вертикалью, опущенной из центра колеса на ось X_2 , и лучом, соединяющим точку недеформированного профиля колеса с его центром (рис. 1). Количество точек выбирается исходя из компромисса между точностью модели и ее быстродействием. Определим координаты X_{2i} и Y_{2i} выбранных точек профиля в НСК (рис. 2).

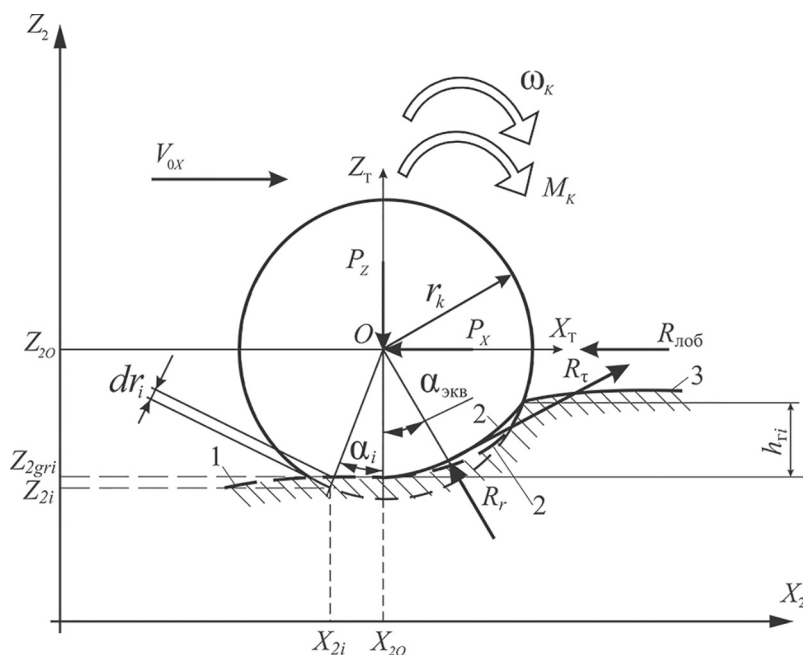


Рис. 1. Расчетная схема качения колеса по неровностям опорного основания:

1 – деформированный профиль грунта; 2 – деформируемый профиль грунта; 3 – недеформированный профиль грунта; O – центр колеса; Z_{20} , X_{20} – координаты центра колеса в НСК; ω_k – угловая скорость вращения колеса; M_k – крутящий момент, приложенный к колесу; V_{ox} – продольная скорость центра колеса; P_z , P_x – вертикальная и продольная силы, приложенные к центру колеса со стороны оси КМ; R_r , R_t – радиальная и тангенциальная проекции реакции взаимодействия колеса с опорным основанием; $R_{\text{лоб}}$ – сила лобового сопротивления качению колеса; r_k – свободный радиус колеса; $Z_{2\text{гп}}$, X_{2i} – координаты точки опорного основания под i -й точкой недеформированного профиля колеса; α_i – угол между вертикальной осью и i -й точкой недеформированного профиля колеса; $\alpha_{\text{экв}}$ – эквивалентный угол точки приложения суммарной реакции; dr_i – прогиб шины в радиальном направлении для i -й точки недеформированного профиля колеса; $h_{\text{гп}}$ – глубина колеи под i -й точкой недеформированного профиля колеса

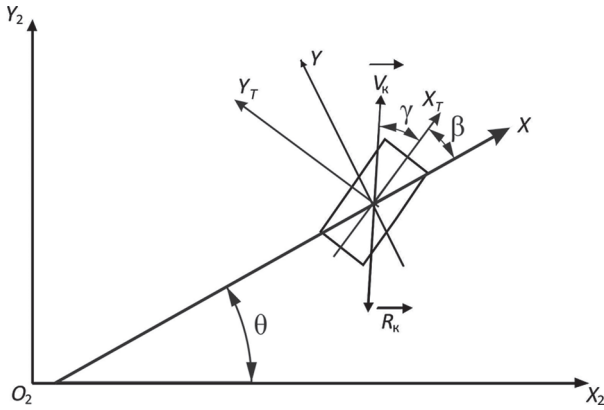


Рис. 2. Расчетная схема для определения силы взаимодействия колеса с опорной поверхностью:

\vec{V}_k – вектор линейной скорости центра колеса;
 \vec{R}_k – вектор реакции взаимодействия колеса с опорным основанием; θ – угол между продольной осью машины и осью X_2 НСК; β – угол поворота управляемого колеса; γ – угол между плоскостью симметрии колеса и вектором \vec{V}_k

$$X_{2i} = X_{20} + r_k \sin \alpha_i \cos(\theta + \beta);$$

$$Y_{2i} = Y_{20} + r_k \sin \alpha_i \sin(\theta + \beta);$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq \alpha_i \leq \frac{\pi}{2};$$

где X_{20} , Y_{20} – координаты центра колеса O в НСК.

Вертикальную координату Z_{2i} i -й точки недеформированного профиля колеса в НСК определим по формулам:

$$Z_{2i} = Z_{20} - r_k \cos \alpha_i,$$

где Z_{20} – вертикальная координата центра колеса в НСК.

Формирование продольного профиля Z_{2gri} проводится по следующему алгоритму:

$$Z_{2gri} = Z_{2gri}^{\text{недеф}} - h_{\Gamma i},$$

где $h_{\Gamma i}$ – вертикальная осадка грунта под i -й элементарной площадкой пятна контакта (см. далее); $Z_{2gri}^{\text{недеф}}$ – вертикальная координата недеформированного профиля колеи (моделируется заранее по известной методике, изложенной, например, в [15]).

Прогиб шины dr_i в радиальном направлении для i -й точки недеформированного профиля находим из следующих соотношений:

$$dr_i = \begin{cases} 0, & Z_{2gri} \leq Z_i, \\ (Z_{2gri} - Z_{2i}) \cos \alpha_i, & Z_{2gri} > Z_{2i}, \end{cases}$$

где Z_{2gri} – вертикальная координата профиля опорного основания под i -й точкой колеса.

Таким образом, для определения реакций взаимодействия колеса с опорной поверхностью R_x и R_z в МПСК при наличии нескольких зон перекрытия профилем опорного основания недеформированного контура колеса необходимо определить эквивалентный угол $\alpha_{\text{эКВ}}$ точки приложения суммарной радиальной реакции R_r в радиальном направлении и тангенциальной реакции R_t (рис. 1).

Определим $\alpha_{\text{эКВ}}$ как взвешенное среднее значение:

$$\alpha_{\text{эКВ}} = \frac{\sum_{i=1}^n \alpha_i dr_i}{\sum_{i=1}^n dr_i}.$$

Радиальная реакция R_r является суммой двух составляющих: упругой R_{ry} и демпфирующей R_{rd} : $R_r = R_{ry} + R_{rd}$.

R_{ry} зависит от эквивалентного прогиба шины:

$$dr_{\text{эКВ}} = \frac{\sum_{i=1}^n dr_i}{n_k},$$

где n_k – количество точек недеформированного профиля, находящихся в контакте с опорной поверхностью.

R_{rd} зависит от скорости прогиба шины в радиальном направлении. Для этого определим проекции скорости точек контура колеса на оси X_T и Z_T :

$$V_{iX_T} = \omega_k (r_k - dr_i) \cos \alpha_i + V_{0X_T},$$

$$V_{iZ_T} = \omega_k (r_k - dr_i) \sin \alpha_i + V_{0Z_T},$$

где ω_k – угловая скорость вращения колеса; V_{0X_T} и V_{0Z_T} – проекции вектора скорости центра колеса (точка O) на оси X_T и Z_T соответственно.

Вектор линейной скорости i -й точки недеформированного профиля колеса в радиальном направлении:

$$V_{ri} = V_{iX_T} \sin \alpha_i + V_{iZ_T} \cos \alpha_i.$$

Скорость деформации профиля i -й точки в радиальном направлении:

$$\frac{d}{dt}(dr_i) = \frac{dZ_{2gri}}{dt} \cos \alpha_i - V_{ri}.$$

Эквивалентная скорость прогиба:

$$\frac{dr_{\text{эКВ}}}{dt} = \frac{\sum_{i=1}^n \left(\frac{d}{dt}(dr_i) \right)}{n_k}.$$

Далее, зная упругую и демпфирующую характеристики шины в радиальном направлении, находим R_r .

Сила взаимодействия i -го колеса с грунтом в плоскости X_2OY_2 :

$$\mathbf{R}_{ki} = -\mu_s |N_i| \frac{\mathbf{V}_{cki}}{|\mathbf{V}_{cki}|},$$

где μ_s – коэффициент трения частичного скольжения, N_i – нормальная реакция, \mathbf{V}_{cki} – вектор скорости скольжения колеса.

$$\mu_s = \mu_{s\delta\max} \cdot \left(1 - e^{-\frac{S_k}{S_0}} \right),$$

здесь $\mu_{s\delta\max}$ – коэффициент трения полного скольжения для данного угла δ поворота вектора скорости скольжения; S_k – коэффициент буксования; S_0 – константа.

Данное выражение справедливо для несвязных грунтов. Величина $\mu_{s\delta\max}$ определяет максимальное значение функции $\mu_s(S_k)$, а в совокупности с константой S_0 – градиент функции $\mu_s(S_k)$ в начале координат, *отражающий свойства грунта при малых скольжениях*.

Для связных грунтов может быть принято следующее выражение μ_s :

$$\mu_s = \mu_{s\delta\max} \cdot \left(1 - e^{-\frac{S_k}{S_0}} \right) \cdot \left(1 + e^{-\frac{S_k}{S_1}} \right),$$

где S_1 – константа.

Коэффициент трения полного скольжения в соответствии с представлениями об эллипсе трения [16] можно представить в виде:

$$\mu_{s\delta\max} = \frac{\mu_{sx\max} \cdot \mu_{sy\max}}{\sqrt{\mu_{sx\max}^2 \cdot \sin^2 \delta + \mu_{sy\max}^2 \cdot \cos^2 \delta}},$$

где $\mu_{sx\max}$, $\mu_{sy\max}$ – параметры эллипса трения (рис. 3).

Коэффициент буксования:

$$S_k = \frac{V_{KX_T} - \omega_k r_\delta}{\omega_k \cdot r_\delta} \text{ – для тягового режима качения колеса;}$$

$$S_k = \frac{V_{KX_T} - \omega_k r_\delta}{V_{KX_T}} \text{ – для тормозного или ведомого режима качения колеса,}$$

где V_{KX_T} – проекция линейной скорости центра колеса на ось X_T микроподвижной системы координат.

Рассмотрим одно из колес МКМ (рис. 2). Координаты центра i -го колеса в НСК:

$$\mathbf{L}_{K_i2} = \mathbf{P}_{C2} + \mathbf{B}\mathbf{L}_{K_i0},$$

где \mathbf{P}_{C2} – радиус-вектор положения центра масс КМ в НСК; \mathbf{L}_{K_i0} – радиус-вектор центра i -го колеса к корпусу в ПСК.

Вектор линейной скорости центра колеса в ПСК:

$$\mathbf{V}_{K0} = \mathbf{V}_{C0} + \boldsymbol{\omega}_C \times \mathbf{L}_{K0},$$

где \mathbf{V}_{C0} – вектор скорости центра масс машины в ПСК; $\boldsymbol{\omega}_C$ – вектор угловой скорости центра масс машины; \mathbf{L}_{K0} – радиус-вектор крепления центров колес к корпусу.

Раскроем векторное произведение $\boldsymbol{\omega}_C \times \mathbf{L}_{K0}$:

$$\boldsymbol{\omega}_C \times \mathbf{L}_{K0} = \begin{bmatrix} \omega_Y L_{kz0} - \omega_Z L_{ky0} \\ \omega_Z L_{kx0} - \omega_X L_{kz0} \\ \omega_X L_{ky0} - \omega_Y L_{kx0} \end{bmatrix},$$

где $L_{kx0}, L_{ky0}, L_{kz0}$ – проекции радиус-вектора крепления подвески к корпусу в ПСК.

Вектор линейной скорости центра колеса в НСК:

$$\mathbf{V}_{K2} = \mathbf{B}\mathbf{V}_{K0}.$$

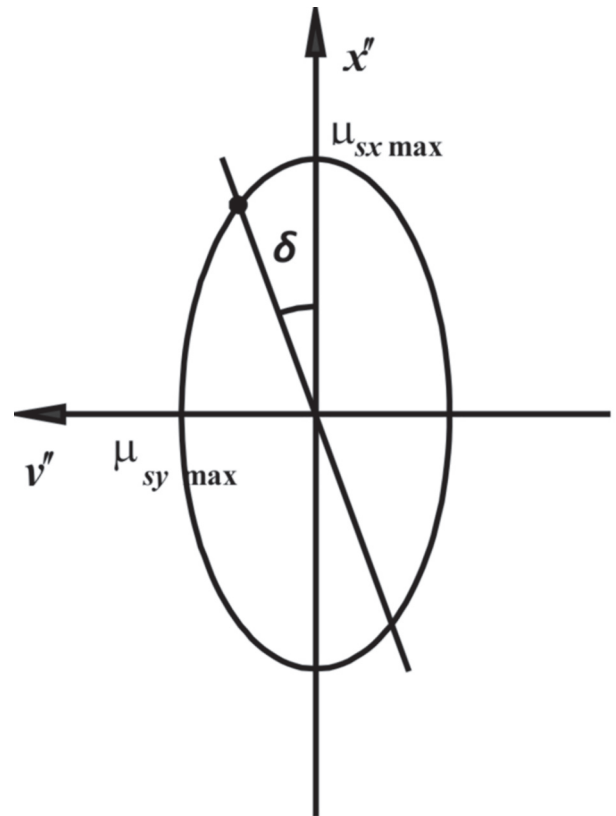


Рис. 3. Эллипс трения

Проекция вектора линейной скорости центра колеса в МПСК:

$$\omega_C \times L_{K0} = \begin{bmatrix} \omega_Y L_{kz0} - \omega_Z L_{ky0} \\ \omega_Z L_{kx0} - \omega_X L_{kz0} \\ \omega_X L_{ky0} - \omega_Y L_{kx0} \end{bmatrix},$$

где φ , ψ – углы продольного и поперечного наклона корпуса машины соответственно.

Определим скорость скольжения колеса в микроподвижной системе координат:

$$\begin{aligned} V_{CK} &= \sqrt{V_{X_{CK}}^2 + V_{Y_{CK}}^2}, \\ V_{X_{CK}} &= V_{KX_T} - \omega_k \cdot r_{\partial}, \\ V_{Y_{CK}} &= V_{KY_T}. \end{aligned}$$

Угол δ между вектором скорости центра колеса и осью X_T определяется следующим образом. Если $V_{CK} \neq 0$, то:

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{V_{KY_T}}{\sqrt{V_{KY_T}^2 + V_{KX_T}^2}},$$

иначе $\cos \delta_i = 1$; $\sin \delta_i = 0$.

Если $\omega_k r_{k0} \neq 0$, то:

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{\mu_{x \max} \cdot \mu_{y \max}}{\sqrt{(\mu_{x \max} \cdot \sin \delta_i)^2 + (\mu_{y \max} \cdot \cos \delta_i)^2}} \times \\ &\times \left(1 - \exp \left(- \frac{\sqrt{(V_{X_{\dot{N}\dot{E}}})^2 + (V_{Y_{\dot{N}\dot{E}}})^2}}{|\omega_k \cdot r_{k0}| \cdot S_0} \right) \right), \end{aligned}$$

иначе:

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{\mu_{x \max} \cdot \mu_{y \max}}{\sqrt{(\mu_{x \max} \cdot \sin \delta_i)^2 + (\mu_{y \max} \cdot \cos \delta_i)^2}} \times \\ &\times \left(1 - \exp \left(- \frac{\sqrt{(V_{X_{\dot{N}\dot{E}}})^2 + (V_{Y_{\dot{N}\dot{E}}})^2}}{0.001 \cdot S_0} \right) \right). \end{aligned}$$

Реакции взаимодействия шины с опорным основанием в МПСК:

$$\begin{aligned} R_{\tau} &= R_r \cdot \cos \delta; \\ R_{KX_T} &= R_{\tau} \cdot \cos \alpha_{\text{эКВ}} - R_r \cdot \sin \alpha_{\text{эКВ}} - R_{\text{лоб}}; \\ R_{KY_T} &= R_r \cdot \sin \delta - R_{\text{бок}}; \\ R_{Z_T} &= R_{\tau} \cdot \sin \alpha_{\text{эКВ}} + R_r \cdot \cos \alpha_{\text{эКВ}}, \end{aligned}$$

где $R_{\text{лоб}}$, $R_{\text{бок}}$ – силы лобового сопротивления грунта качению колеса (бульдозерный эффект) и бокового отпора, которые определяются по методике, изложенной в работе [17].

$$R_{\text{лоб}} = 0,5 b_{\text{ш}} (r_k - h_T - dr_{\text{эКВ}})^2 q_{\text{пас}} \gamma_T,$$

$$R_{\text{бок}} = \left| \frac{b_{\text{ш}}}{2} q_{\text{пас}} \gamma_T (r_k - h_T - dr_{\text{эКВ}}) h_T \right|,$$

$$q_{\text{пас}} = a_{\text{п}} \cdot (0,01 \cdot 90^\circ)^{b_{\text{п}}},$$

$$a_{\text{п}} = 1 + a_{fa} \cdot (0,1 \cdot \varphi_0)^{b_{fa}},$$

$$b_{\text{п}} = a_{fb} \cdot (0,1 \cdot \varphi_0)^{b_{fb}},$$

$$a_{fa} = 0,3082 - 0,0709 \cdot \frac{\varphi_{\text{ш}}}{\varphi_0},$$

$$b_{fa} = 2,0751 + 1,3354 \cdot \frac{\varphi_0}{\varphi_{\text{ш}}},$$

$$a_{fb} = 0,5756 + 0,1024 \cdot \frac{\varphi_{\text{ш}}}{\varphi_0},$$

$$b_{fb} = 1,0608 + 0,0619 \cdot \frac{\varphi_{\text{ш}}}{\varphi_0},$$

где $b_{\text{ш}}$ – ширина шины; γ_T – удельный вес грунта, МН/м³; $\varphi_0, \varphi_{\text{ш}}$ – соответственно угол внутреннего трения грунта и угол трения грунта о стенку шины, град.

Графики для определения $\varphi_0, \varphi_{\text{ш}}$ представлены в работе [17].

Проекция реакции взаимодействия шины с опорным основанием в ПСК:

$$R_{KX_0} = (R_{KX_T} \cos \alpha_{\text{эКВ}} - R_{\tau} \sin \alpha_{\text{эКВ}}) \cos \beta - R_{KY_T} \sin \beta,$$

$$R_{KY_0} = -R_{KX_T} \sin \beta + R_{KY_T} \cos \beta,$$

$$R_{KZ_0} = R_{KZ_T} \cos \varphi \cos \psi.$$

Численное моделирование движения автомобиля проводят для различных типов твердого опорного основания со следующими параметрами.

Динамика вращения колеса представлена на рис. 1 и описывается уравнениями:

$$J_k \dot{\omega}_k = M_k - R_{X_T} (r_k - dr_{\text{эКВ}}) - M_f - M_h - M_T,$$

$$M_f = R_r (r_k - dr_{\text{эКВ}}) \sin \alpha_{\text{эКВ}} \cos \alpha_{\text{эКВ}},$$

$$M_h = R_{Z_T} r_k (1 - S_k),$$

где M_k – крутящий момент, подводимый к колесу; M_T – тормозной момент на колесе; M_f – момент сопротивления качению колеса за счет смещения реакции R_r ; R_{X_T} – проекция силы взаимодействия колеса с грунтом в МПСК на ось OX_T ; M_h – момент сопротивления, вызванный вертикальной деформацией грунта [17].

Определение параметров пятна контакта и глубины колеи h_r

Площадь i -й элементарной площадки пятна контакта $F_{ши}$ (рис. 4) определим по формуле:

$$F_{ши} = 2 \int_{\alpha_{i-1}}^{\alpha_i} b(\alpha) [r_k - dr(\alpha)] d\alpha,$$

$$b(\alpha) = b_{ши} \left(1 + \frac{dr(\alpha)}{r_k} \right), \quad (1)$$

где $b_{ши}$ – ширина шины.

Дискретный аналог формулы (1) можно записать так:

$$F_{ши} = b_{ши} \left(2 + \frac{dr_{i+1} + dr_i}{r_k} \right) \left(r_k - \frac{dr_i + dr_{i-1}}{2} \right) \times (\alpha_{i+1} - \alpha_i).$$

Определим нормальные давления p_{0zi} в i -й элементарной площадке пятна контакта. Каждая такая площадка (рис. 4) образуется двумя плоскостями, проходящими через ось вращения колеса и повернутыми друг относительно друга на угол $\alpha_i - \alpha_{i-1}$. По формуле Бернштейна-Летошнева [17]:

$$p_{0zi} = ch_{ri}^\mu, \text{ МПа},$$

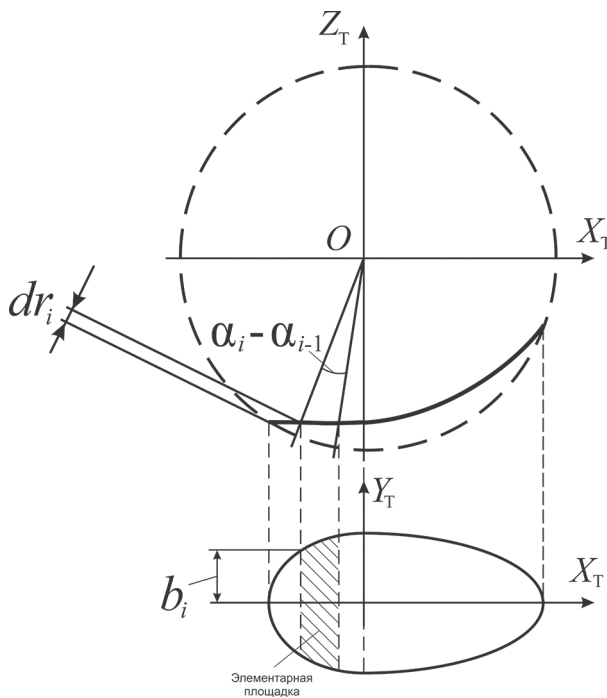


Рис. 4. Расчетная схема для определения площади пятна контакта

где c – коэффициент деформации грунта; μ – показатель плотности грунта.

С другой стороны:

$$p_{0zi} = \frac{P_z}{F_{ши} 10^6} \cdot \frac{dr_i}{\sum_{i=1}^n dr_i} k_d \cos \alpha_i, \text{ МПа},$$

$$k_d = \left[1 + \frac{\delta}{k_n t \phi_0} \right]^{-1},$$

$$\delta = 0,0087 \text{ рад} \cdot \text{с},$$

где P_z – вертикальная нагрузка на колесо; k_d – коэффициент Покровского, учитывающий влияние времени действия нагрузки на деформативные свойства грунта [18]; t – время действия нагрузки, с; k_n – число проходов колеса по колее (учет цикличности нагружения грунта).

Тогда:

$$h_{ri} = \left(\frac{P_z}{c F_{ши} 10^6} \cdot \frac{dr_i}{\sum_{i=1}^n dr_i} k_d \cos \alpha_i \right)^{\frac{1}{\mu}}, \quad i = 1, \dots, n_k.$$

Общая длина L пятна контакта по средней линии может быть определена как сумма длин элементарных площадок L_i :

$$L = \sum_{i=1}^{n_k} L_i, \quad L_i = \left(r_k - \frac{dr_i + dr_{i-1}}{2} \right) (\alpha_{i+1} - \alpha_i).$$

Влияние грунтозацепов на параметры движения колеса

При наличии грунтозацепов необходимо дополнительно вычислить касательные силы в зонах выступов и впадин, а также вынос грунта из зоны контакта в случае интенсивного буксования колеса.

Дополнительное вертикальное заглубление $dh_{гэ}$ центра колеса в грунт, вызванное экскавацией грунта из зоны контакта, вычисляются по формуле [18]:

$$dh_{гэ} = \frac{t_{вп} h_{гэ} S_k}{t_{гэ} (1 - S_k)}, \quad t_{гэ} = \frac{2\pi r_k}{n_{гэ}},$$

где $t_{вп}$ – длина впадины грунтозацепа; $h_{гэ}$ – высота грунтозацепа; $t_{гэ}$ – шаг грунтозацепа; $n_{гэ}$ – общее количество грунтозацепов по длине окружности шины.

Тогда суммарное вертикальное заглубление $h_{сум}$ центра колеса:

$$h_{сум} = h_r + dh_{гэ}.$$

Будем считать, что если $h_{\text{сум}} \geq r_k$, то происходит потеря подвижности машины вследствие вывешивания корпуса на грунте.

Для определения дополнительных касательных сил $R_{tj}^{\text{грз}}$ в зонах выступов и впадин грунтозацепов (рис. 5) воспользуемся результатами, полученными в работе [18]:

$$R_{tj}^{\text{грз}} = F_{\text{грз}} c_{\text{гр}} 10^6 \cdot \exp \left[-\frac{(|e_x| - e_{xm})^2}{0,05 e_{xm}} \cdot \text{tg } \varphi_0 \right],$$

$$e_x = S(\Delta t) - \int_{t_1}^{t_2} \omega_k(t) (r_k - dr_{\text{эКВ}}) dt,$$

$$\Delta t = t_2 - t_1,$$

где $F_{\text{грз}}$ – площадь лобовой проекции грунтозацепа; e_{xm} – максимальный сдвиг грунта, при котором связанность частиц грунта не нарушена; e_x – текущий сдвиг грунта; $S(\Delta t)$ – путь, пройденный центром колеса за время Δt ; $\omega_k(t)$ – текущая угловая скорость вращения колеса.

Суммарная касательная сила $R_{\tau X_T}^{\text{грз}}$ в проекции на ось X_T МПСК по всем m грунтозацепам, находящимся в зоне контакта колеса с опорным основанием:

$$R_{\tau X_T}^{\text{грз}} = \sum_{j=1}^m R_{tj}^{\text{грз}} \cdot \cos \beta_j, \quad m = \frac{L_1 + L_2}{2\pi r_k} \cdot n_{\text{грз}}.$$

Тогда выражение для определения продольной реакции R_{KX_T} колеса с опорным основанием в проекции на ось X_T МПСК:

$$R_{KX_T} = R_{\tau} \cos \alpha_{\text{эКВ}} - R_r \sin \alpha_{\text{эКВ}} - R_{\text{лоб}} + R_{\tau X_T}^{\text{грз}}.$$

Учет сцепных свойств грунтового основания в горизонтальном направлении при действии вертикальной нагрузки

Величина горизонтальной реакции R_{KX_T} может быть ограничена двумя факторами [18]: скольжением колеса по поверхности уплотненного грунта и сдвигом массы грунта в сторону действия горизонтальной реакции. И если сцепные свойства учитываются коэффициентом μ_s , то сдвиг грунта можно оценить путем сравнения действующих касательных напряжений τ с максимально допустимыми напряжениями τ_{max} .

Максимальное касательное напряжение в пятне контакта вычисляют с использованием выражения Кулона:

$$\tau_{\text{max}} = p_{0z} \cdot \text{tg } \varphi_0 + c_0 \cdot 10^6,$$

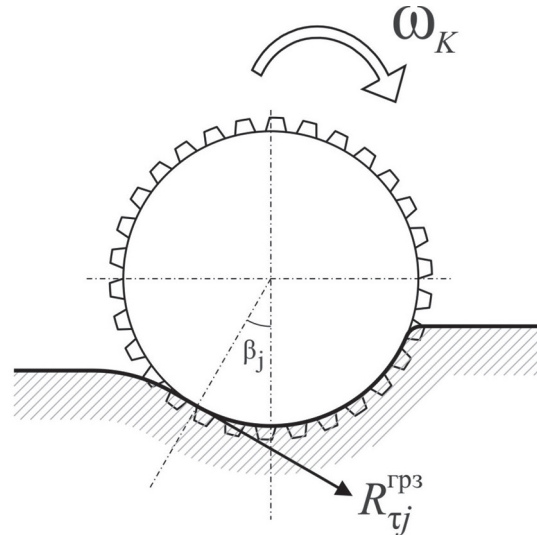


Рис. 5. Расчетная схема для определения касательных сил $R_{tj}^{\text{грз}}$ в зонах выступов и впадин грунтозацепов

где c_0 – коэффициент связанности (сцепления) грунта, МПа.

Действующее касательное напряжение τ поделим по формуле [17]:

$$\tau = p_{0z} \text{tg } \varphi_0 \cdot \left[1 - \exp \left(-\frac{|e_x|}{0,1 e_{xm}} \right) \right] + c_0 10^6 \cdot \exp \left[-\frac{(|e_x| - e_{xm})^2}{0,05 e_{xm}} \cdot \text{tg } \varphi_0 \right].$$

Окончательно выражение для R_{X_T} примет вид:

$$R_{KX_T} = k_{\tau} \left(R_{\tau} \cos \alpha_{\text{эКВ}} - R_r \sin \alpha_{\text{эКВ}} - R_{\text{лоб}} + R_{\tau X_T}^{\text{грз}} \right),$$

$$\text{где } k_{\tau} = \begin{cases} 1, & \text{если } \tau \leq \tau_{\text{max}} \\ \frac{\tau_{\text{max}}}{\tau}, & \text{если } \tau > \tau_{\text{max}} \end{cases}.$$

Учет влияния состояния грунта на его физические и механические характеристики

Большое влияние на характеристики грунта оказывает его влажность [18]. Целесообразным, подтвержденным практикой является способ учета влияния влажности, основанный на применении математических выражений, полученных в работе [18] в результате статистической обработки большого числа экспериментальных данных. По ним можно определить механические инварианты грунта, зная его гранулометрический состав и физическое состояние.

Для угла внутреннего трения в грунте:

$$\varphi_0 = 45 \cdot \left(\sqrt[4]{\frac{44}{W_T}} \right) - 40 \cdot \left[1 - \left(\frac{\rho}{\rho_c} \right) \right] - 0,1W_0 \cdot \sqrt{\frac{W_T}{44}}.$$

Для коэффициента связанности грунта:

$$c_0 = 60 \cdot W_T \cdot \left(\frac{\rho}{W_0} \right) - 5 \cdot W_0 \cdot W_T,$$

где ρ – плотность грунта в текущем состоянии; ρ_c – плотность сухого грунта; W_0 – относительная влажность грунта; W_T – влажность предела текучести.

Выводы

Разработана математическая модель криволинейного качения эластичного колеса по неровному деформируемому опорному основанию, учитывающая деформацию пятна контакта в каждой конечной элементарной площадке и изменение направления радиальной и тангенциальной реакций.

Литература

1. Котляренко В.И. Основные направления повышения проходимости колесных машин. М.: Изд-во МГИУ, 2008. 284 с.
2. Шухман С.Б., Плиев И.А., Маляревич В.Э. Пути повышения экологических свойств многоосных полноприводных автомобилей, эксплуатирующихся в районах Крайнего Севера // Автомобильная промышленность, 2008, № 10. С. 15–17.
3. Wong J.Y. Theory of Ground Vehicles. New York: Wiley IEEE, 2001. 560 p.
4. Прядкин В.И. Оценка воздействия высокоэластичной шины на поверхность качения // Лесное хозяйство. 2011. № 5. С. 42–43.
5. Пирковский Ю.В., Шухман С.Б. Теория движения полноприводного автомобиля (прикладные вопросы оптимизации конструкции шасси): учеб. пособие для вузов. М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2001; Элит-2000, 2001. 230 с.
6. Агейкин Я.С., Вольская Н.С., Чичекин И.В. Проходимость автомобилей. М.: МГИУ, 2010. 275 с.
7. Бабийчук А.Э., Агейкин А.С., Вольская Н.С. Методика определения потерь мощности на качение колесного движителя с учетом типа трансмиссии и давления воздуха в шинах машины // Журнал автомобильных инженеров, 2013, № 3. С. 24–27.
8. Лепешкин А.В., Петров С.Е. Математическая модель взаимодействия эластичного колеса с деформируемой опорной поверхностью при установившемся прямолинейном качении // Материалы 77-й Международной научно-технической кон-

- ференции ААИ «Автомобиле- и тракторостроение в России: приоритеты развития и подготовка кадров». М.: МГТУ «МАМИ», 2012. С. 141–149.
9. Shoop S., Kestler K., Haehnel R. Finite element modeling of tires on snow // Tire Science and Technology. 2006. Vol. 34. No 1. pp. 2–37.
 10. Botero J., Gobbi M., Mastinu G. A new mathematical model of the traction force in pneumatic tire snow chain systems // Associazione Italiana Per L'Analisi Delle Sollecitazioni / Dipartimento di Meccanica, Politecnico di Milano. 2005. 10p. www.aiasonline.org/AIAS2005/Articoli/art084.pdf.
 11. Белкин А.Е., Нарская Н.Л. Конечно-элементный анализ контакта автомобильной шины с опорной поверхностью на основе оболочечной модели // Вестник МГТУ. Серия Машиностроение. 2004. № 3. С.14–28.
 12. Одинцов О.А. Разработка метода решения нелинейных контактных задач стационарного качения автомобильной шины. Дисс. ... канд. техн. наук. М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2008.
 13. Курдюк В.А., Вольская Н.С., Русаков О.А. Моделирование системы «кузов – подвеска – колесо – грунт» с использованием метода конечных элементов // Известия МГТУ «МАМИ», № 1(27), 2016. С. 9–15.
 14. Жилейкин М.М., Падалкин Б.В. Математическая модель качения эластичного колеса по неровностям недеформируемого основания // Известия ВУЗов. Машиностроение. 2016. № 3. С. 24–29.
 15. Афанасьев Б.А. и др. Проектирование полноприводных колесных машин: Учебник для вузов; В 3 т. Под ред. А.А. Полунгяна. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2008. Т. 1. 496 с.
 16. Эллис Д.Р. Управляемость автомобиля. Пер. с англ. М.: Машиностроение, 1975. 216 с.
 17. Ларин В.В. Теория движения полноприводных колесных машин: учебник. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2010. 391 с.
 18. Вольская Н.С. Оценка проходимости колесных машин при движении по неровной грунтовой поверхности: Монография. М.: МГИУ, 2007. 215 с.

References

1. Kotlyarenko V.I. *Osnovnye napravleniya povysheniya prohodimosti kolesnyh mashin* [The main directions of increasing the passing ability of wheeled vehicles]. Moscow: Izd-vo MGIU Publ., 2008. 284 p.
2. SHuhman SB., Pliev I.A., Malyarevich V.EH. Ways to improve the environmental properties of multi-axle all-wheel drive vehicles operating in the Far North. *Avtomobil'naya promyshlennost'*, 2008. No 10, pp. 15–17 (in Russ.).

3. Wong J.Y. Theory of Ground Vehicles. New York: Wiley IEEE, 2001. 560 p.
4. Pryadkin V.I. Evaluation of the effect of a highly elastic tire on the rolling surface. *Lesnoe hozyajstvo*. 2011. No 5, pp. 42–43 (in Russ.).
5. Pirkovskij YU.V., SHuhman S.B. *Teoriya dvizheniya polnoprivodnogo avtomobilya (prikladnye voprosy optimizacii konstrukcii shassi): ucheb.posobie dlya vuzov* [Theory of motion of a four-wheel drive vehicle (applied questions of optimizing the chassis design): textbook for universities]. Moscow: YUNITI-DANA Publ., 2001; EHLit-2000, 2001. 230 p.
6. Agejkin YA.S., Vol'skaya N.S., CHichekin I.V. *Prohodimost' avtomobilej* [Passing ability of automobiles]. Moscow: MGIU Publ., 2010. 275 p.
7. Babijchuk A.EH., Agejkin A.S., Vol'skaya N.S. Method for determining the power loss for rolling a wheeled propulsor, which takes into account the type of transmission and the air pressure in the tires of the machine. *ZHurnal avtomobil'nyh inzhenerov*, 2013. No 3, pp. 24–27 (in Russ.).
8. Lepeshkin A.V., Petrov S.E. A mathematical model of the interaction of an elastic wheel with a deformable bearing surface under rectilinear rolling. *Materialy 77-j Mezhdunarodnoj nauchno-tehnicheskoy konferencii AAI «Avtomobile- i traktorostroenie v Rossii: priority razvitiya i podgotovka kadrov»* [Materials of the 77th International Scientific and Technical Conference of the Association of Automotive Engineers “Automobile and Tractor Construction in Russia: Development Priorities and Training of Professionals”]. Moscow: MG TU «MAMI», 2012, pp. 141–149 (in Russ.).
9. Shoop S., Kestler K., Haehnel R. Finite element modeling of tires on snow. *Tire Science and Technology*. 2006. Vol. 34. No 1. pp. 2–37.
10. Botero J., Gobbi M., Mastinu G. A new mathematical model of the traction force in pneumatic tire snow chain systems // Associazione Italiana Per L'Analisi Delle Sollecitazioni / Dipartimento di Meccanica, Politecnico di Mila-no. 2005. 10p. www.aiasonline.org/AIAS2005/Articoli/art084.pdf.
11. Belkin A.E., Narskaya N.L. Finite element analysis of the contact of a automotive tire with a supporting surface based on a shell model. *Vestnik MG TU. Seriya Mashinostroenie*. 2004. No 3, pp.14–28 (in Russ.).
12. Odincov O.A. *Razrabotka metoda resheniya nelinejnyh kontaktnyh zadach stacionarnogo kacheniya avtomobil'noj shiny. Diss. ... kand. tekhn. nauk* [Development of a method for solving nonlinear contact problems of stationary rolling of an automobile tire: Dissertation for Degree of Candidate of Technical Sciences]. Moscow: MG TU im. N.EH. Bauman, 2008.
13. Kurdyuk V.A., Vol'skaya N.S., Rusakov O.A. Simulation of the “body-suspension-wheel-ground” system using the finite element method. *Izvestiya MG TU «MAMI»*, 2016. No 1(27), pp. 9–15 (in Russ.).
14. ZHilejkin M.M., Padalkin B.V. Mathematical model of rolling of an elastic wheel on unevenness of an undeformable base. *Izvestiya VUZov. Mashinostroenie*. 2016. No 3, pp. 24–29 (in Russ.).
15. Afanas'ev B.A. i dr. *Proektirovanie polnoprivodnyh kolesnyh mashin: Uchebnik dlya vuzov* [Design of all-wheel drive vehicles: Textbook for universities]; V 3 t. Pod red. A.A. Polungyana. Moscow: Izd-vo MG TU im. N.EH. Bauman Publ., 2008. Vol. 1. 496 p.
16. EHllis D.R. *Upravlyaemost' avtomobilya* [Vehicle handling]. Per. s angl. Moscow: Mashinostroenie Publ., 1975. 216 p.
17. Larin V.V. *Teoriya dvizheniya polnoprivodnyh kolesnyh mashin: uchebnik* [Theory of motion of all-wheel drive vehicles: a textbook]. Moscow: Izd-vo MG TU im. N.EH. Bauman Publ., 2010. 391 p.
18. Vol'skaya N.S. *Ocenka prohodimosti kolesnyh mashin pri dvizhenii po nerovnoj gruntovoj poverhnosti. Monografiya* [Evaluation of the patency of wheeled vehicles when driving on uneven ground surface: Monograph]. Moscow: MGIU Publ., 2007. 215 p.

QUASI-FINITE ELEMENT MODEL OF ROLLING ELASTIC WHEELS ON UNEVEN DEFORMABLE SUBSTRUCTURE IN NONLINEAR MOTION OF A WHEELED VEHICLE

Dr.Eng. **N.S. Volskaja**, Dr.Eng. **M.M. Zhileykin**, Ph.D. **A.J. Zakharov**, **M.V. Panshin**
Bauman MSTU, Moscow, Russia
zakharov-al@mail.ru

One of the main directions of economic development of Russia was and should remain the accelerated development of the regions of the North and North-East, occupying more than 60% of the country. Further development of these areas requires new approaches and new technologies to solve transport and technological problems in the movement of goods and people in conditions where the roadway is off-road. At the same time, the movement of transport and technological machines is not only difficult, but in some cases completely excluded. The existing all-terrain vehicle equipment, made according to the old traditional schemes and commercially produced by the industry, does not meet the requirements that determine the efficiency and environmental friendliness of the engines of machines in complex natural and climatic conditions of operation. In this situation, the problem of forecasting the permeability of wheeled vehicles (KM) on the support surface with weak bearing properties is relevant. One of the main methods to predict permeability is a simulation of the motion of wheeled vehicles in different operating conditions, which are based on mathematical models of interaction between elastic tires with deformable irregularities of the support base. Currently in the theoretical study of the interaction of propellers with the ground formed two main directions: analytical method involving a mathematical description of the process under study and the finite element method based on computer simulation. The aim of this study is to develop a mathematical model of rolling elastic wheels on deformable rough reference base, taking into account the deformation of the contact patch at each end of the elementary playground. The mathematical model combines a mathematical description of the physical processes of interaction between elastic tires with uneven deformable substrates and finite element approach, based on consideration of processes in each end unit site of contact.

Keywords: rolling of elastic wheels; irregularities of deformed support base; elementary area of the contact patch; prediction of patency of wheeled vehicles.