

# ИССЛЕДОВАНИЕ МОДЕЛИ «РЕАЛЬНОГО ВРЕМЕНИ» ПЛОСКОГО КРИВОЛИНЕЙНОГО ДВИЖЕНИЯ АВТОМОБИЛЯ С КОЛЕСНОЙ ФОРМУЛОЙ 6X6

Бузунов Н.В.  
МГТУ им. Н.Э. Баумана  
kolian.buzunov@mail.ru

Основной темой данного исследования является верификация математической модели движения транспортного средства, функционирование которой осуществляется в режиме реального времени. Предметом исследования является модель, описывающая плоское криволинейное движение автомобиля с колесной формулой 6х6. Корректность работы указанной модели определяется на основе способов и критериев, применяемых в настоящее время в зарубежных и отечественных исследованиях. В качестве параметров оценки работы модели выступают кинематические линейные и угловые характеристики плоского движения автомобиля. Критерием оценки является величина относительной погрешности не более 10% при сравнении в одинаковые моменты времени параметров исследуемой модели с параметрами «эталонной» модели, корректность функционирования которой подтверждена результатами экспериментов на реальном объекте. Исследование проводится в несколько этапов при различных режимах движения автомобиля и различных параметрах моделирования. Продолжительность тестовых заездов составляет 30 с. По окончании каждого заезда осуществляется сравнение полученных результатов с данными «эталонной» модели, определение относительной погрешности моделирования и ее сравнение с установленным критерием корректности. По результатам исследования установлено, что рассматриваемая модель реального времени удовлетворяет заданному критерию верификации при шаге реализации не более 0,001 с. При увеличении шага реализации наблюдаются значительные отклонения параметров исследуемой модели от результатов «эталонной» модели, в данном случае модель реального времени может быть использована для решения ограниченного круга задач. Уменьшение шага моделирования способствует приближению поведения исследуемого объекта к «эталонному», однако в условиях функционирования в режиме реального времени данный подход требует значительного увеличения вычислительных мощностей.

**Ключевые слова:** моделирование в режиме реального времени; верификация математической модели; криволинейное движения автомобиля.

## Введение

При создании имитационной модели принимается компромиссное решение между выделенными на использование вычислительными ресурсами и требуемой точностью решения задачи. Степень упрощения модели зависит от целей исследования, а ее адекватность необходимо подтверждать путем сравнения с данными, полученными эмпирическим путем, или с результатами верифицированных моделей.

Одним из основных направлений в исследовании колесной и гусеничной техники является имитационное моделирование в режиме реального времени. Модели реального времени активно используются ведущими мировыми производителями автомобилей для решения вопросов, связанных с разработкой электронных систем управления транспортными средствами [1].

## Цель исследования

Целью данной работы является верификация математической модели реального времени криволинейного движения автомобиля с колесной формулой 6х6.

## Материалы, методы и результаты исследования

По результатам анализа данных, представленных в [1–8], можно сделать вывод, что верификация имитационных математических моделей может быть выполнена:

- 1) путем сравнения результатов моделирования с экспериментальными данными (результатами, полученными по итогам заездов опытного образца или по итогам работ на соответствующем стендовом оборудовании);
- 2) путем сравнения данных разрабатываемой модели с результатами моделирования,

адекватность которых уже подтверждена в ходе реальных заездов.

В исследованиях [1, 6, 8] авторы отмечают, что относительные погрешности разрабатываемых ими моделей могут достигать 17...33 %, однако представленные результаты достаточны для целей исследований и модели могут быть использованы в дальнейшем. Моделирование в режиме реального времени необходимо, прежде всего, для обеспечения возможности отладки программного обеспечения различных бортовых систем управления транспортного средства вне объекта. Для решения подобных задач шаг реализации модели выбирается не более 1 мс [4].

В текущем исследовании выбран вариант (2) проверки корректности работы Real-time модели транспортного средств. В качестве «эталонной» модели применена модель криволинейного движения автомобиля, представленная в работе [9]. Указанная модель была разработана на кафедре «Колесные машины» МГТУ им. Н.Э. Баумана и верифицирована на объекте ЗЭТ 6х6, реализация осуществляется в среде Matlab с применением пакета расширений Simulink (далее – Matlab-модель). Различия между результатами моделирования и данными, полученными в ходе тестовых заездов, не превышали 10 %.

В исследуемой модели реального времени движение автомобиля как твердого тела рассматривается в горизонтальной плоскости на ровной недеформируемой опорной поверхности и складывается из поступательного движения центра масс и вращательного движения вокруг центра масс (рис. 1).

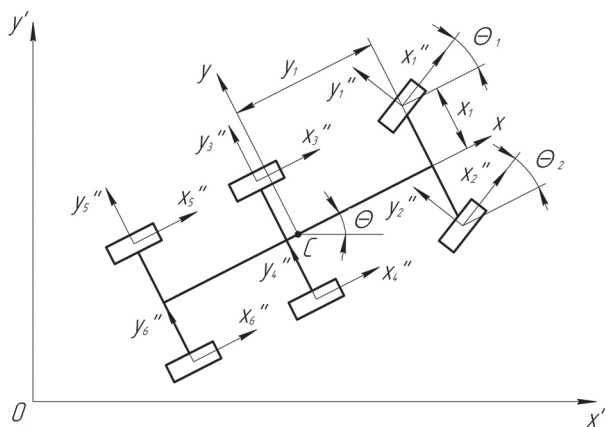


Рис. 1. Системы координат, использующиеся при моделировании криволинейного движения автомобиля

Рассмотрим систему уравнений, описывающую данное движение, которая позволяет рассчитывать текущие ускорения по значениям сил и моментов, действующих на автомобиль:

$$\begin{cases} a_x = \frac{dV_x}{dt} - \omega_z \cdot V_y = \frac{1}{m} \cdot \left( P_{wx} + \sum_{i=1}^6 R_{xi} \right); \\ a_y = \frac{dV_y}{dt} + \omega_z \cdot V_x = \frac{1}{m} \cdot \left( P_{wy} + \sum_{i=1}^6 R_{yi} \right); \\ J_z \cdot \frac{d\omega_z}{dt} = \sum_{i=1}^6 M_{nki} + \sum_{i=1}^6 M(\vec{R}_i); \\ V_{x'} = \frac{dx'}{dt} = V_x \cdot \cos \theta - V_y \cdot \sin \theta; \\ V_{y'} = \frac{dy'}{dt} = V_x \cdot \sin \theta + V_y \cdot \cos \theta; \\ \omega_z = \frac{d\theta}{dt}, \end{cases}$$

где  $m$  – масса автомобиля;  $J_z$  – момент инерции автомобиля относительно оси  $z$ ;  $\vec{V}$  – вектор скорости центра масс автомобиля;  $\vec{a}$  – вектор ускорения центра масс автомобиля (абсолютная производная от вектора скорости центра масс автомобиля);  $\frac{d\vec{V}}{dt}$  – относительная производная от вектора скорости центра масс автомобиля;  $\vec{\omega}$  – вектор угловой скорости поворота автомобиля;  $\theta$  – угол поворота автомобиля относительно оси  $x'$ ;  $x'$ ,  $y'$  – координаты центра масс автомобиля в неподвижной системе координат;  $x$  –  $y$  – подвижная система координат, связанная с автомобилем;  $x_i''$ ,  $y_i''$  – система координат, связанная с  $i$ -ым колесом автомобиля;  $\vec{R}_i$  – вектор силы взаимодействия с грунтом, действующей на  $i$ -ое колесо;  $\vec{P}_w$  – вектор силы сопротивления воздуха;  $M_{nki}$  – момент сопротивления повороту  $i$ -го колеса.

В табл. 1 представлены исходные данные и параметры модели.

Реализация верифицируемой математической модели реального времени криволинейного движения автомобиля осуществляется при помощи неявного метода с использованием производных высших порядков с переменным шагом решения [10]. Применение формул на основе производных высших порядков (до второго порядка) позволяет получить более точный результат без увеличения числа шагов. В работе [11] подтверждено, что данный вычисленный подход позволяет выполнять моделирование в режиме реального времени.

Таблица 1

## Исходные данные и параметры модели

Масса автомобиля, кг	24500
Длина, м	5,9
Колея, м	2,1
Высота центра масс, м	1,66
Максимальная скорость, км/ч	110
Радиус качения колеса, м	0,615
Коэффициент сцепления по оси $X$ , $\mu_{ax}$	0,6
Коэффициент сцепления по оси $Y$ , $\mu_{ay}$	0,6
Коэффициент, определяющий вид $\phi(s)$ диаграммы	0,005
Начальная координата по оси $X$ , м	0
Начальная координата по оси $Y$ , м	0
Начальный угол поворота, рад	0
Начальная линейная скорость центра масс $V_{-x}$ , м/с	2
Начальная линейная скорость центра масс $V_{-y}$ , м/с	0
Начальная угловая скорость, рад/с	0
Угол поворота сошки рулевого механизма (const), град.	5
Минимальный радиус поворота при разгоне, м	77,3
Минимальный радиус поворота при торможении, м	42,3

Исследование верифицируемой модели реального времени криволинейного движения автомобиля осуществлялось в два этапа. На первом этапе автомобиль движется с ускорением, на втором – с замедлением. Моделирование выполнялось при различных значениях максимального шага решения (0,001 с; 0,003 с; 0,005 с). Продолжительность каждо-

го заезда составляла 30 с. По окончании заездов производится сравнение полученных результатов (линейных и угловых параметров модели) с верифицированными данными Matlab-модели.

На рис. 2 представлено семейство линейных скоростей  $V_{-x}$  центра масс автомобиля для различных значений максимального шага мо-

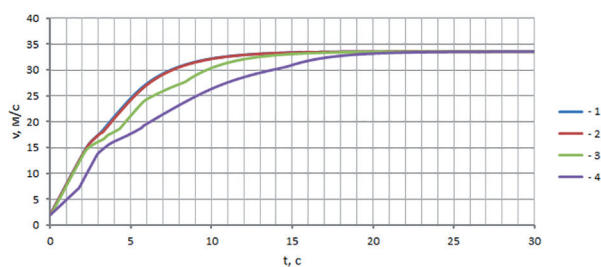


Рис. 2. Временные зависимости линейной скорости  $V_{-x}$  центра масс автомобиля:

- 1 – зависимость, полученная при решении верифицированной Matlab-модели; 2 – зависимость, полученная при решении исследуемой модели реального времени с шагом реализации не более 0,001 с; 3 – зависимость, полученная при решении исследуемой модели реального времени с шагом реализации не более 0,003 с; 4 – зависимость, полученная при решении исследуемой модели реального времени с шагом реализации не более 0,005 с

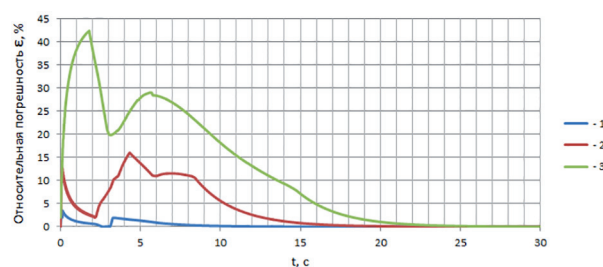


Рис. 3. Временные зависимости относительных погрешностей  $\varepsilon$  для скоростей  $V_{-x}$  центра масс исследуемой модели при различных параметрах моделирования:

- 1 – относительная погрешность линейной скорости для шага реализации модели не более 0,001 с; 2 – относительная погрешность линейной скорости для шага реализации модели не более 0,003 с; 3 – относительная погрешность линейной скорости для шага реализации модели не более 0,005 с

Таблица 2

Максимальные значения относительных погрешностей моделирования  
криволинейного движения автомобиля с ускорением

Параметр модели	Погрешность, <i>тах</i> (шаг реализации не более 0,001 с)	Погрешность, <i>тах</i> (шаг реализации не более 0,003 с)	Погрешность, <i>тах</i> (шаг реализации не более 0,005 с)
Ускорение центра масс, $a_x$	8,5 %	59 %	92,5 %
Ускорение центра масс, $a_y$	9,2 %	51 %	95 %
Угловое ускорение, $\varepsilon$	5 %	15 %	19 %
Скорость центра масс, $v_x$	4 %	16 %	42 %
Скорость центра масс, $v_y$	5 %	23 %	90 %
Угловая скорость, $\omega$	6 %	45 %	57 %
X-координата центра масс	0,45 %	16 %	41 %
Y-координата центра масс	9,5 %	55 %	85 %
Угол поворота, $\Theta$	3 %	19 %	54 %

делирования, а также скорость  $V_x$  центра масс верифицированной Matlab-модели.

На рис. 3 отражены погрешности результатов моделирования для различных максимальных шагов, а в табл. 2 приведены максимальные значения погрешностей всех исследуемых параметров движения.

На рис. 4 представлено семейство зависимостей угловых скоростей  $\omega$  для различных значений максимального шага моделирования по окончании второго этапа моделирования, а также угловая скорость верифицированной Matlab-модели. На рис. 5 отражены погрешности результатов моделирования для различных

максимальных шагах. В табл. 3 приведены максимальные значения погрешностей исследуемых параметров движения.

На рис. 6 представлены траектории центра масс корпуса автомобиля, построенные по итогам заездов с замедлением «эталонного» и исследуемого объектов при различных максимальных значениях шага моделирования. Следует отметить, что при увеличении шага моделирования автомобиль начинает двигаться с «запаздыванием» по отношению к верифицированной модели, однако траектории по большей части совпадают при наложении, за исключением конечного положения корпуса автомобиля.

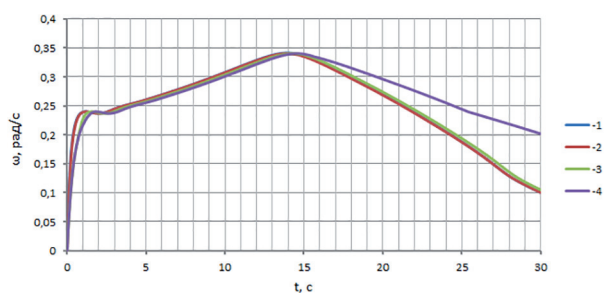


Рис. 4. Временные зависимости угловых скоростей  $\omega$  поворота автомобиля вокруг вертикальной оси:

1 – зависимость, полученная при решении верифицированной Matlab-модели; 2 – зависимость, полученная при решении исследуемой модели реального времени с шагом реализации не более 0,001 с; 3 – зависимость, полученная при решении исследуемой модели реального времени с шагом реализации не более 0,003 с; 4 – зависимость, полученная при решении исследуемой модели реального времени с шагом реализации не более 0,003 с

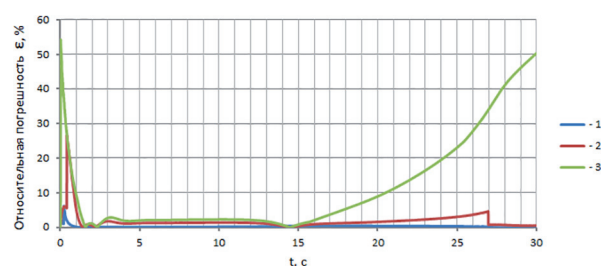


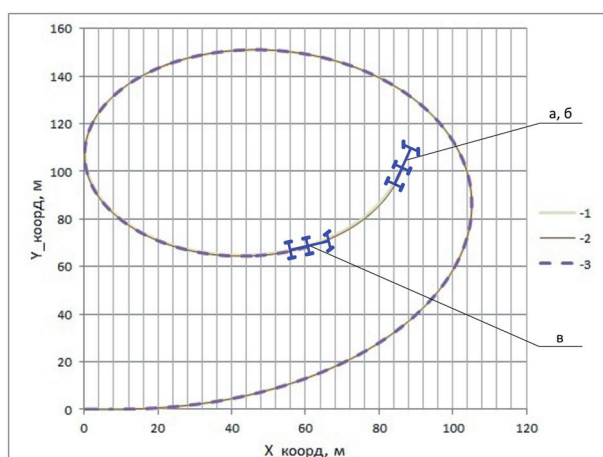
Рис. 5. Временные зависимости относительных погрешностей  $\varepsilon$  для угловых скоростей  $\omega$  исследуемой модели реального времени при различных параметрах моделирования:

1 – относительная погрешность угловой скорости для шага реализации модели не более 0,001 с; 2 – относительная погрешность угловой скорости для шага реализации модели не более 0,003 с; 3 – относительная погрешность угловой скорости для шага реализации модели не более 0,005 с

Таблица 3

**Максимальные значения относительной погрешностей моделирования  
криволинейного движения автомобиля с замедлением**

Параметры модели	Погрешность, <i>max</i> (шаг реализации не более 0,001 с)	Погрешность, <i>max</i> (шаг реализации не более 0,003 с)	Погрешность, <i>max</i> (шаг реализации не более 0,005 с)
Ускорение центра масс, $a_x$	0,4 %	3 %	4 %
Ускорение центра масс, $a_y$	1,5 %	25 %	44 %
Угловое ускорение, $\epsilon$	2,5 %	15 %	20 %
Скорость центра масс, $v_x$	0,65 %	5 %	40 %
Скорость центра масс, $v_y$	3 %	15 %	53 %
Угловая скорость, $\omega$	5 %	26,5 %	50 %
X-координата центра масс	9,5 %	35 %	72 %
Y-координата центра масс	1 %	30 %	51 %
Угол поворота, $\Theta$	2 %	31 %	54 %



**Рис. 6. Траектории движения автомобиля  
при различных параметрах моделирования:**

- 1 – траектория движения «эталонной» модели;  
2 – траектория движения при шаге реализации модели не более 0,001 с; 3 – траектория движения при шаге реализации не более 0,005 с;  
а – положение корпуса автомобиля по окончании реализации «эталонной» модели; б – положение корпуса автомобиля по окончании моделирования с шагом реализации не более 0,001 с;  
в – положение корпуса автомобиля по окончании моделирования с шагом реализации не более 0,005 с

### Выводы

Проведенные вычислительные эксперименты показали, что адекватность работы имитационной математической модели реального времени в значительной степени зависит от выбранного ограничения сверху шага решения. На основе приведенных в табл. 2 и 3 данных следует вывод, что рассматриваемая

модель может быть использована в качестве имитатора автомобиля при шагах решения не более 0,001 с. При больших шагах применение модели реального времени в качестве виртуального образца объекта представляется возможным для более узкого круга исследуемых вопросов. Подобные выводы не противоречат результатам отечественных и зарубежных исследований, представленных в [1–8].

Дальнейшее уменьшение шага решения (до 100...10 мкс) способствует приближению работы имитационных математических моделей к поведению реального объекта. Однако в условиях выполнения требования по функционированию в режиме реального времени данная тенденция может быть реализована только при соответствующем увеличении вычислительных мощностей.

### Литература

1. Drogies S., Bauer M. Modeling Road Vehicle Dynamics with Modelica // Modelica Workshop 2000 Proceedings. 2000. № 1. P. 161–168.
2. Михайлов В.В., Жук И.В., Вербицкий А.В., Солодка М.Г. Верификация математической модели для расчета нагрузок в контакте колес автомобиля с неровной поверхностью дороги // Механика машин, механизмов и материалов. 2011. № 2(15). С. 18–23.
3. Кончак В.С. Моделирование плавности хода грузовых многоосных автомобилей / В.С. Кончак, В.И. Петько, С.В. Харитончик, А.Н. Колесникович, С.П. Лазакович, С.В. Хитриков, Ю.И. Николаев // Известия МГТУ «МАМИ». 2009. № 2(8). С. 46–52.



4. Choi G.J., Yoo Y.M., Lees K.P., Yoon Y.S. A real-time multibody vehicle dynamic analysis method using suspension composite joints // International Journal of Vehicle Design. 2000. № 24. P. 259–273.
5. Gyoojae, C. Efficient solving methods exploiting sparsity of matrix in real-time multibody dynamic simulation with relative coordinate formulation / C. Gyoojae, Y. Yungmyun, I. Jongsoon // Journal of Mechanical Science and Technology. 2001. № 15. P. 1090–1096.
6. Ahmad F., Mazlan S.A., Zamzuri H. Modelling and Validation of the vehicle longitudinal model // International Journal of Automotive and Mechanical Engineering (IJAME). 2014. № 10. P. 2042–2056.
7. Sung-Soo K., Jeong W. Subsystem synthesis method with approximate function approach for a real-time multibody vehicle model // Multibody System Dynamics. 2007. № 17. P. 141–156.
8. Weidong P., Papelis Y.E. Real-time dynamic simulation of vehicles with electronic stability control: Modeling and validation // International Journal of Vehicle Systems Modelling and Testing. 2005. № 1. P. 143–167.
9. Горелов В.А., Котиев Г.О., Бекетов А.А. Математическая модель движения вездеходного транспортного средства // Журнал автомобильных инженеров. 2008. № 1. С. 50–54.
10. Котиев Г.О. Метод прогнозирования нагруженности элементов системы поддрессирования транспортных гусеничных машин: дис. ... канд. техн. наук. М., 1993. 132 с.
11. Бузунов Н.В., Котиев Г.О., Мирошниченко А.В. Совершенство методов разработки бортовых информационно-управляющих систем колесных и гусеничных машин // Журнал автомобильных инженеров. 2015. № 4. С. 11–15.
1. Drogies S., Bauer M. Modeling Road Vehicle Dynamics with Modelica. Modelica Workshop 2000 Proceedings. 2000. No 1. pp. 161–168.
2. Mikhaylov V.V., Zhuk I.V., Verbitskiy A.V., Solodkaya M.G. Verification of the mathematical model for calculating loads in wheel contact at uneven road. *Mekhanika mashin, mekhanizmov i materialov*. 2011. No 2(15). pp. 18–23 (In Russ.).
3. Konchak V.S., Pet'ko V.I., Kharitonchik S.V., Kolesnikov A.N., Lazakov S.P., Khitrikov S.V., Nikolaev Yu.I. Simulation of running smoothness of multi-axle. *Izvestiya MGTU «MAMI»*. 2009. No 2(8). pp. 46–52 (In Russ.).
4. Choi G.J., Yoo Y.M., Lees K.P., Yoon Y.S. A real-time multibody vehicle dynamic analysis method using suspension composite joints. International Journal of Vehicle Design. 2000. No 24. pp. 259–273.
5. Gyoojae C. Efficient solving methods exploiting sparsity of matrix in real-time multibody dynamic simulation with relative coordinate formulation. C. Gyoojae, Y. Yungmyun, I. Jongsoon. Journal of Mechanical Science and Technology. 2001. No 15. pp. 1090–1096.
6. Ahmad F., Mazlan S.A., Zamzuri H. Modelling and Validation of the vehicle longitudinal model. International Journal of Automotive and Mechanical Engineering (IJAME). 2014. No 10. pp. 2042–2056.
7. Sung-Soo K., Jeong W. Subsystem synthesis method with approximate function approach for a real-time multibody vehicle model. Multibody System Dynamics. 2007. No 17. pp. 141–156.
8. Weidong P., Papelis Y.E. Real-time dynamic simulation of vehicles with electronic stability control: Modeling and validation. International Journal of Vehicle Systems Modelling and Testing. 2005. No 1. pp. 143–167.
9. Gorelov V.A., Kotiev G.O., Beketov A.A. Mathematical model of motion of cross-country vehicle. *Zhurnal avtomobil'nykh inzhenerov*. 2008. No 1. pp. 50–54 (In Russ.).
10. Kotiev G.O. *Metod prognozirovaniya nagruzhenosti elementov sistemy podressorivaniya transportnykh gusenichnykh mashin. Dis. ... kand. tekhn. nauk* [Forecasting method for loading of suspension elements transport tracked vehicles]. Moscow., 1993. 132 p.
11. Buzunov N.V., Kotiev G.O., Miroshnichenko A.V. Perfection of methods of development of onboard information and control systems of wheeled and tracked vehicles. *Zhurnal avtomobil'nykh inzhenerov*. 2015. No 4. pp. 11–15 (In Russ.).

## References

## THE STUDY OF “REAL-TIME” SIMULATION OF PLANAR CURVILINEAR MOTION OF SIX-WHEEL DRIVE VEHICLE

**N.V. Buzunov**

Bauman Moscow State Technical University  
kolian.buzunov@mail.ru

*The main focus of this research is to verify the mathematical model of the vehicle motion, which operation is carried out in real time. The subject of this study is the model, which describes planar curvilinear motion of six-wheel drive vehicle. Correct operation of this model is based on the methods and criteria currently used in the foreign and domestic research. The estimating parameters for the model are the linear and angular kinematic characteristics of planar motion of the vehicle. The assessment criterion is the value of relative error no more than 10% when comparing at the same time the parameters of the model with the parameters of the reference model, which correctness of operation is confirmed by the results of experiments on the real object. Research is carried out in several stages at different driving modes and various parameters of the simulation. The duration of the test “races” is 30 sec. At the end of each race the comparison of the results with the data of “reference” model is made and determination of relative error of simulation and its comparison with the established criterion of correctness are done. According to the study was found out that the mentioned real-time verification of the model satisfies a predetermined criterion of verification when using step of no more than 0,001 sec. By increasing the steps of realization there are significant deviations of the model parameters on the results of “reference” model, in this case, the real-time model can be used to address a limited range of purposes. Reducing simulation step facilitates approximation to the behavior of the test object to the “reference” but in real-time operation this approach requires a significant increase in computing power.*

**Keywords:** real-time simulation, verification of the mathematical model, curvilinear movement of vehicle car.