

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ МАНИПУЛЯЦИОННОЙ СИСТЕМЫ МОБИЛЬНОЙ ТРАНСПОРТНО-ТЕХНОЛОГИЧЕСКОЙ МАШИНЫ С УЧЕТОМ УПРУГОСТИ ЗВЕНЬЕВ

д.т.н. Ковальский В.Ф.¹, к.т.н. Лагереv И.А.²

¹Московский государственный университет путей сообщения Императора Николая II

²Брянский государственный университет имени академика И.Г. Петровского
lagerev-bgu@yandex.ru

Приведены подходы к моделированию динамики манипуляторов мобильных транспортно-технологических машин с учетом упругой податливости звеньев. Уравнения движения звеньев манипулятора записываются с помощью метода множителей Лагранжа. В качестве главных координат для каждого звена приняты четыре параметра Родрига-Гамильтона, координаты положения звена как абсолютно твердого тела и упругие перемещения. Уравнения учитывают влияние внешних и внутренних упругих и квадратичных сил. Внутренние упругие силы вычисляются на основе матрицы жесткости, формируемой при расчете манипулятора методом конечных элементов. Для задания шарнирных соединений вводится необходимое количество уравнений связи. Рассмотрены способы создания широко распространенных в кинематических схемах манипуляторов цилиндрических и призматических шарниров с помощью набора ограничений, предполагающих взаимную перпендикулярность векторов, принадлежащих шарнирно-сочлененным звеньям. С использованием разработанной модели выполнен расчет динамики крана-манипулятора машины АСТ-4-А. Установлено, что учет упругости звеньев позволяет выявить колебательный характер изменения кинематических и силовых факторов процесса и, таким образом, повысить адекватность моделирования работы манипуляционной системы в процессе эксплуатации машины. Упругость звеньев обуславливает их колебания с частотой, соизмеримой с первой низшей собственной частотой колебаний самой металлоконструкции манипуляционной системы, что свидетельствует о желательности ее проверки на отсутствие резонанса и при необходимости разработки конструктивных мер по повышению динамической надежности манипуляционной системы. Показано, что для расчета манипуляторов ряда машин требуется учет динамики шасси.

Ключевые слова: манипуляционная система, упругие звенья; транспортно-технологическая машина; динамика; моделирование.

Введение

Манипуляционные системы нашли широкое применение в качестве исполнительных механизмов транспортно-технологических машин и комплексов. Области преимущественного использования манипуляторов включают промышленное производство, энергетику, металлургию, строительство, газо- и нефтедобычу, геологоразведку, магистральный транспорт нефти и газа, автомобильные, железнодорожные и морские перевозки, лесную промышленность, сельское хозяйство, пищевую промышленность, промышленность строительных материалов, сферу обслуживания [1].

В связи со сложившейся геополитической обстановкой в стране взят курс на импортозамещение. Однако импортозамещение должно

в первую очередь основываться не на введении административных запретов на ввоз в страну импортной техники, а на естественном отказе потребителей от иностранного товара в пользу отечественного. Такое развитие ситуации возможно только при выпуске российскими машиностроительными предприятиями современных конкурентоспособных манипуляторов, обладающих высокими потребительскими свойствами, высокой надежностью, низкой стоимостью эксплуатации.

Цель исследования

Целью исследования является развитие методик динамико-прочностного моделирования манипуляционных систем мобильных транспортно-технологических машин.

Математическое моделирование манипуляционных систем

Наиболее распространенным допущением при моделировании является представление элементов стрелы манипулятора как абсолютно твердых тел [2–4]. Такой подход оправдан для манипуляторов мобильных машин, которые не имеют высокоточной системы управления и не отличаются жесткими требованиями к точности позиционирования [5]. Он также позволяет снизить трудоемкость решения задачи [6].

Однако в ряде случаев, например, для расчета живучести или проектирования систем управления, необходимо исследовать характер упругих динамических колебаний в системе. Это требует учета упругости звеньев. В статье рассматривается алгоритм численного анализа динамики с учетом упругости звеньев стрелы манипуляционной системы транспортно-технологической машины.

Манипулятор может быть представлен как совокупность произвольно ориентированных в пространстве упругих тел. Положение системы координат $Ox_i y_i z_i$, связанной с i -м звеном, определяется вектором p_{zi}^G . (рис. 1). Система координат звена располагается на одном из его торцов.

Положение второго торца определяется вектором p_{zi} :

$$p_{zi} = p_{0zi} + p_{fzi},$$

где p_{0zi} – вектор перемещения звена как абсолютно твердого тела, p_{fzi} – вектор перемещения, связанный с упругой деформацией звена.

В глобальной системе координат $Oxyz$ положение второго торца звена определяется соотношением

$$p_{1zi}^G = p_{0zi}^G + R_{zi}^G (p_{0zi} + p_{fzi}),$$

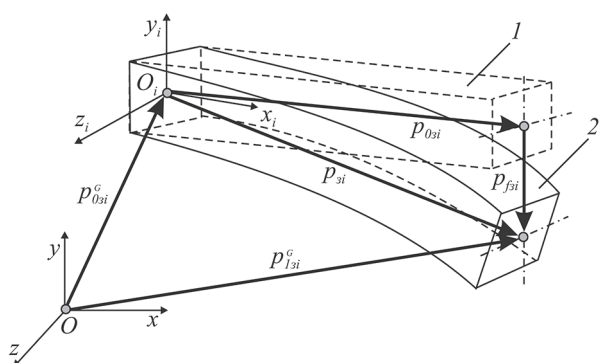


Рис. 1. Система координат упругого звена и параметры его деформации: 1 – исходное состояние звена; 2 – деформированное состояние

где R_{zi}^G – матрица поворота локальной системы координат звена по отношению к глобальной системе координат.

Матрица поворота зависит от параметров Родрига-Гамильтона ($\theta_{E0i}, \theta_{E1i}, \theta_{E2i}, \theta_{E3i}$) следующим образом:

$$R_{zi}^G = 2 \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - \theta_{E2i}^2 - \theta_{E3i}^2 & \theta_{E1i} \cdot \theta_{E2i} + \theta_{E0i} \cdot \theta_{E3i} & \theta_{E1i} \cdot \theta_{E3i} + \theta_{E0i} \cdot \theta_{E2i} \\ \theta_{E1i} \cdot \theta_{E2i} + \theta_{E0i} \cdot \theta_{E3i} & \frac{1}{2} - \theta_{E1i}^2 - \theta_{E3i}^2 & \theta_{E2i} \cdot \theta_{E3i} + \theta_{E0i} \cdot \theta_{E1i} \\ \theta_{E1i} \cdot \theta_{E3i} + \theta_{E0i} \cdot \theta_{E2i} & \theta_{E2i} \cdot \theta_{E3i} + \theta_{E0i} \cdot \theta_{E1i} & \frac{1}{2} - \theta_{E1i}^2 - \theta_{E2i}^2 \end{bmatrix}.$$

Первый параметр Родрига-Гамильтона (коэффициент пропорциональности) вычисляется следующим образом:

$$\theta_{E0i} = \cos(\varphi / 2).$$

Тогда другие параметры можно найти из соотношений:

$$\theta_{Eji} = \sin(\varphi / 2) \cdot \cos \gamma_j \quad \text{или} \quad \theta_{Eji} = \sin(\varphi / 2) \cdot \nu_j,$$

где $j = 1...3$, φ – угол поворота относительно оси Эйлера, γ_j – углы ориентации оси Эйлера в глобальной системе координат, ν_j – единичный вектор, направленный по оси Эйлера [7].

Вектор упругой деформации звена вычисляется как суперпозиция форм упругих колебаний звена:

$$p_{fzi} = \Phi_{zi} \cdot q_{fi},$$

где Φ_{zi} – матрица форм колебаний, q_{fi} – вектор упругих координат [8].

Таким образом, главными координатами исследуемой системы являются: $p_{zi}^G, \theta_{E0i}, \theta_{E1i}, \theta_{E2i}, \theta_{E3i}, q_{fi}$ [8].

Скорость i -го звена манипуляционной системы:

$$\dot{p}_{1zi}^G = \dot{p}_{0zi}^G - R_{zi}^G \cdot (\tilde{p}_{0zi} + \tilde{F}_{zi} q_{fi}) \cdot \omega_{zi} + R_{zi}^G \cdot F_{zi} \cdot \dot{q}_{fi},$$

где \dot{p}_{0zi}^G – вектор скорости локальной системы координат относительно глобальной, ω_{zi} – вектор локальных угловых скоростей, \dot{q}_{fi} – вектор скоростей деформации звена [8].

Ускорение i -го звена манипуляционной системы

$$\ddot{p}_{1zi}^G = \ddot{p}_{0zi}^G + R_{zi}^G \cdot \tilde{\omega}_{zi} \cdot \tilde{\omega}_{zi} \cdot p_{zi} + R_{zi}^G \cdot \tilde{\omega}_{zi} \cdot p_{zi} + R_{zi}^G \cdot \tilde{\omega}_{zi} \cdot p_{zi} + 2 \cdot R_{zi}^G \cdot \tilde{\omega}_{zi} \cdot \dot{p}_{zi} + R_{zi}^G \cdot \ddot{p}_{zi},$$

где $\tilde{\omega}_{zi}$ – кососимметрическая часть тензора угловых скоростей звена в локальной системе координат, \ddot{p}_{0zi}^G – вектор ускорения локальной системы координат относительно глобальной, $\tilde{\omega}_{zi}$ – вектор тангенциального ускорения, \dot{p}_{zi} – вектор скорости второго конца звена в локальной системе координат, \ddot{p}_{zi} – ускорение деформации звена [8].

Уравнения движения исследуемой системы можно записать с использованием принципа виртуальных работ:

$$\delta W_i = \int_{V_i} \rho_i \cdot \delta p_{1zi}^{G T} \cdot \ddot{p}_{1zi}^G \cdot dV_i,$$

где δp_{1zi}^G – виртуальное перемещение вектора положения i -го звена, ρ_i – плотность материала, V_i – объем звена.

Виртуальное перемещение вектора положения i -го звена в главных координатах выглядит следующим образом:

$$\delta p_{1zi}^G = \begin{bmatrix} \delta p_{1zi}^{G T} & \delta \theta_i^T & \delta q_i^T \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I \\ -\tilde{p}_{zi}^T \cdot R_{zi}^T \\ \Phi_{zi}^T \cdot R_{zi}^T \end{bmatrix},$$

где q_i – обобщенные координаты, I – единичная матрица размером 3×3 , $\delta \theta_i$ – виртуальный поворот.

Окончательно получаем:

$$\delta W_i = \delta q_i \cdot [M_{zi} \cdot \ddot{q}_i + Q_{zi}],$$

где M_{zi} – матрица масс; Q_{zi} – вектор сил, зависящих от квадрата скоростей.

Виртуальная работа внешних сил

$$\delta W_{ei} = \int_{V_i} \rho_i \cdot \delta p_{1zi}^{G T} \cdot F_{zij} \cdot dV_i,$$

где F_{zij} – внешняя сосредоточенная сила (момент) или равнодействующая распределенной силы (момента), приложенная к i -му звену.

Внутренние силовые факторы, связанные с упругостью звеньев манипулятора, вычисляются с использованием матрицы жесткости K_{zi} , которая вычисляется из условия:

$$\delta W_{si} = \delta q_{fi} \cdot K_{zi} \cdot \delta q_{fi}.$$

Матрица упругости K_{zi} для манипулятора может быть вычислена с использованием метода конечных элементов [8]. В расчетах ис-

пользовались матрицы жесткости кранов-манипуляторов, полученные в ходе исследований [9-11].

Полная виртуальная работа с учетом инерционных, внутренних и внешних силовых факторов выглядит следующим образом:

$$\delta q_i \cdot [M_{zi} \cdot \ddot{q}_i + Q_{vzi} + Q_{fzi} - Q_{ezi}],$$

где Q_{fzi} – вектор упругих сил [8].

Из последнего соотношения вытекают уравнения Ньютона-Эйлера для несочлененных и незакрепленных объектов с учетом упругости звеньев [8]:

$$\begin{bmatrix} \int_{V_i} \rho_i IdV_i & -\int_{V_i} \rho_i \tilde{p}_{zi} R_{zi} dV_i & \int_{V_i} \rho_i \Phi_{zi} R_{zi} dV_i \\ -\tilde{p}_{zi} R_{zi} & \int_{V_i} \rho_i dV_i \tilde{p}_{zi}^T \tilde{p}_{zi} & -\int_{V_i} \rho_i \tilde{p}_{zi}^T \Phi_{zi} dV_i \\ \int_{V_i} \rho_i \Phi_{zi} R_{zi} dV_i & -\int_{V_i} \rho_i \tilde{p}_{zi}^T \Phi_{zi} dV_i & \int_{V_i} \rho_i \Phi_{zi}^T \Phi_{zi} dV_i \end{bmatrix} \cdot$$

$$\begin{bmatrix} \ddot{p}_{1zi}^G \\ \dot{\omega}_{zi} \\ \ddot{q}_{fi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_{V_i} \rho_i \sum_j F_{zij} dV_i \\ \int_{V_i} \rho_i \sum_j \tilde{p}_{zij}^T R_{zij}^T F_{zij} dV_i \\ \int_{V_i} \rho_i \sum_j \Phi_{zij}^T R_{zij}^T F_{zij} dV_i \end{bmatrix} -$$

$$\begin{bmatrix} \int_{V_i} \rho_i (R_{zi} \omega_{zi} \omega_{zi} p_{zi} + 2R_{zi} \Phi_{zi} \dot{q}_{fi}) dV_i \\ \int_{V_i} \rho_i (-\tilde{p}_{zi}^T \tilde{\omega}_{zi} \tilde{\omega}_{zi} p_{zi} - 2\tilde{p}_{zi}^T \tilde{\omega}_{zi} \Phi_{zi} \dot{q}_{fi}) dV_i \\ \int_{V_i} \rho_i (\Phi_{zi}^T \tilde{\omega}_{zi} \tilde{\omega}_{zi} p_{zi} + 2\Phi_{zi}^T \tilde{\omega}_{zi} \Phi_{zi} \dot{q}_{fi}) dV_i \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ K_{zi} q_{fi} \end{bmatrix}.$$

Уравнения движения с учетом ограничений (сочленений и закреплений) выражаются с помощью метода множителей Лагранжа:

$$M_{zi} \cdot \ddot{q}_i + C_q^T \cdot \lambda = Q_{ezi} - Q_{vzi} - Q_{fzi},$$

где C_q – матрица уравнений связи, λ – множители Лагранжа [6; 8].

Для учета всех уравнений связи необходимо записать соответствующее количество уравнений вида $\dot{C}(q, t) = 0$.

Указанные выше уравнения записаны в общем виде. Для их применения к расчету манипуляционных систем необходимо добавить уравнения связи, учитывающие шарнирное сочленение отдельных упругих звеньев. Для задания шарнира используются ограничения

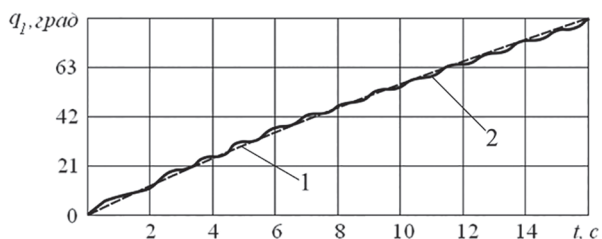


Рис. 2. График изменения углового положения звена:
1 – модель с жесткими звеньями [3, 6];
2 – модель с упругими звеньями

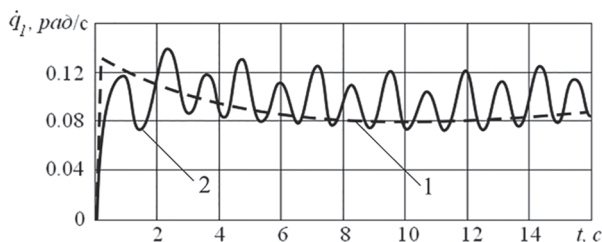


Рис. 3. График изменения скорости движения рукояти: 1 – модель с жесткими звеньями [3, 6];
2 – модель с упругими звеньями

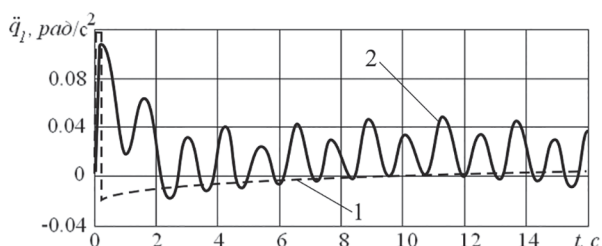


Рис. 4. График изменения ускорения движения рукояти: 1 – модель с жесткими звеньями [3, 6];
2 – модель с упругими звеньями

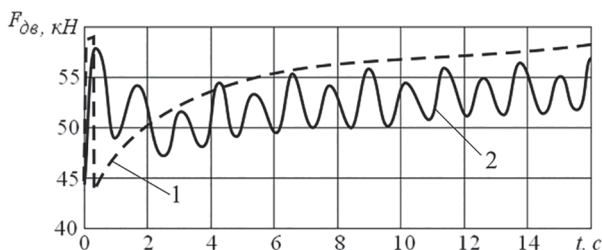


Рис. 5. График преодолеваемого гидроцилиндром усилия: 1 – модель с жесткими звеньями [3, 6];
2 – модель с упругими звеньями

двух типов. Ограничение первого типа подразумевает сохранение в одной плоскости перпендикулярности заданных векторов v_i и v_j , принадлежащих двум связанным звеньям, при свободном перемещении во всех других плоскостях. Ограничение второго типа подразумевает перпендикулярность заданного вектора первого звена v_i и вектора, связывающего начало первого вектора с произвольной точкой второго звена

d_j . В общем виде условие перпендикулярности записывается следующим образом:

$$C_{ij} = v_i v_j \equiv 0 \text{ или } C_{ij} = v_i d_j \equiv 0.$$

Для задания цилиндрического шарнира применяются два ограничения первого типа. Для задания призматического шарнира добавляется еще одно ограничение первого типа. Если необходимо учесть нелинейную жесткость, то между двумя звеньями вводится дополнительное безинерционное звено. Один конец звена жестко связывается с концом предыдущего звена с помощью трех ограничений первого и трех ограничений второго типа. Другой конец дополнительного звена связывается с началом предыдущего звена с помощью цилиндрического или призматического шарнира.

На рис. 2, 3 и 4 приведены результаты моделирования движения последнего звена (рукояти) трехзвенного гидравлического манипулятора мобильной транспортно-технологической машины АСТ-4-А.

На основании анализа результатов исследования, представленных на рис. 2–5 можно отметить следующее.

Колебания конструктивных элементов металлоконструкции манипуляционной системы, вызванные упругостью звеньев, носят многочастотный характер. Тем не менее, эти колебания происходят относительно линии, характеризующей решение динамических уравнений для системы с абсолютно твердыми телами [3, 6].

В произвольный момент времени поворота рукояти амплитуда колебательного процесса отклонения углового положения звена q_1 от решения для модели с жесткими звеньями не превышает $\pm 3...4$ град. При этом размахи колебаний скорости поворота рукояти \dot{q}_1 и преодолеваемого гидроцилиндром усилия $F_{дв}$ достаточно стабильны во времени и достигают $\sim 0,04...0,06$ рад/с и $\sim 5...7$ МПа соответственно, а максимальные отклонения колебательного процесса этих же параметров от соответствующих решений для модели с жесткими звеньями доходят до $+0,04$ рад/с (т.е. превышают до 1,5 раз установившееся значение угловой скорости рукояти \dot{q}_1) и до -7 МПа (т.е. снижаются относительно установившегося значения усилия гидроцилиндра $F_{дв}$ на 12%).

Упругость звеньев обуславливает колебательный характер графика изменения во времени ускорения углового положения рукояти манипуляционной системы \ddot{q}_1 даже на этапе

установившегося движения звена, когда решение для модели с жесткими звеньями дает значение $\ddot{q}_1 \approx 0$. Размах колебаний величины ускорения \ddot{q}_1 при этом достигает $\sim 0,05$ рад/с², т.е. составляет примерно 40% от величины максимального ускорения, наблюдающегося на стадии разгона звена из неподвижного состояния. Наличие переменного во времени ускорения является источником действия на металлоконструкцию манипуляционной системы дополнительных переменных по величине инерционных нагрузок, которые вносят дополнительный вклад в формирование динамического напряженного состояния звеньев.

Частота колебаний рукояти манипулятора при поворотном движении составляет приблизительно 0,8 Гц. Это значение сопоставимо с первой низшей собственной частотой металлоконструкции манипуляционной системы мобильной машины (1,58 Гц).

Скорость отработки движений звеньями гидравлического манипулятора машины АСТ-4-А достаточно низка (полный поворот звена происходит за 30–40 с), поэтому отсутствуют интенсивные колебания звеньев (рис. 2). С увеличением скорости следует ожидать большее влияние учета упругости звеньев манипуляционной системы на рассмотренные в п.п. 1–4 кинематические и силовые факторы.

Длительность переходного процесса при начале движения звена увеличивается с 0,1...0,2 до 2,0...2,5 с. При этом на 3...5 % снижается величина динамических усилий в системе. Во время переходного процесса ускорения, скорости и усилия имеют не одно, а два пиковых колебания. При этом максимальное значение параметра может достигаться на втором периоде, например, для скорости поворота рукояти (рис. 3).

Следует отметить, что разработанная модель не учитывает влияние на манипулятор базового шасси мобильной транспортно-технологической машины. Необходимость его учета можно пояснить на примере упрощенных моделей (рис. 6).

На рис. 6 были приняты следующие обозначения: приведенные массы манипулятора с грузом m_k , базовой машины m_m и неподдресоренных элементов подвески m_n , с каждой из которых связаны перемещения x_k , x_m , x_n соответственно. Массы связаны между собой упруго-диссипативными элементами со следующими параметрами: c_k – приведенная жесткость манипуляционной установки, a_k – вязкость манипуляционной установки, c_n – приведенная жесткость подвески,

a_n – вязкость манипуляционной установки. На систему действует вес груза Q и стохастическая неровность опорной поверхности $\xi(t)$.

Сравнительные динамические расчеты выполнены на примере машины АСТ-4-А со следующими параметрами: $m_k = 950$ кг, $m_m = 19000$ кг, $m_n = 600$ кг, $c_k = 81,4$ кН/м, $a_k = 10$ кНс²/м, $c_n = 11908$ кН/м, $a_n = 30$ кНс²/м. Ненулевые начальные условия: $x_k(0) = 0,1$ м.

Уравнения движения модели, учитывающей взаимное влияние манипулятора и шасси (рис. 6,а) выглядят следующим образом:

$$\begin{cases} m_k \ddot{x}_k + c_k(x_k - x_m) + a_k(\dot{x}_k - \dot{x}_m) = 0; \\ m_m \ddot{x}_m + c_n(x_m - x_n + \xi(t)) + a_n(\dot{x}_m - \dot{x}_n) - \\ - [c_k(x_k - x_m) + a_k(\dot{x}_k - \dot{x}_m)] = 0; \\ m_n \ddot{x}_n - [c_n(x_m - x_n + \xi(t)) + a_n(\dot{x}_m - \dot{x}_n)] = 0. \end{cases}$$

Уравнение движения модели без учета взаимного влияния манипулятора и шасси (рис. 6,б) выглядят следующим образом:

$$m_k \ddot{x}_k + c_k x_k + a_k \dot{x}_k = 0.$$

Результаты расчета с использованием данных моделей показаны на рис. 7.

Видно, что составляющие, связанные с начальными условиями, гасятся за счет трения в системе в течение 0,5...1,0 с. Но неровность

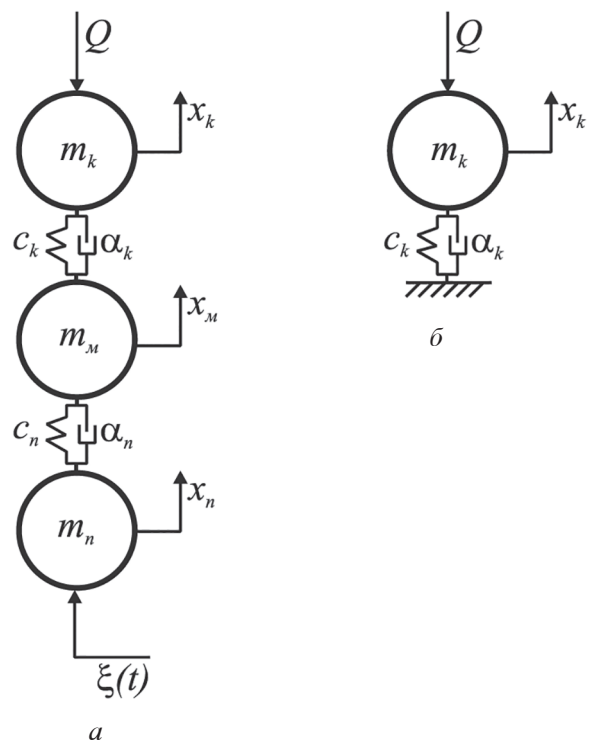


Рис. 6. Упрощенные модели к вопросу о необходимости учета динамики шасси: а – с учетом динамики шасси; б – без учета

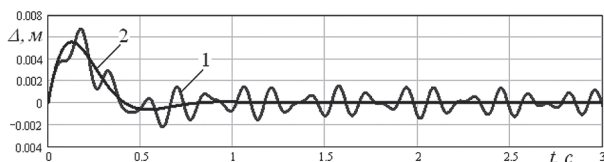


Рис. 7. Результаты расчета перемещения конца стрелы манипулятора Δ : 1 – с учетом влияния шасси; 2 – без учета влияния шасси

пути в модели, учитывающей влияние шасси, продолжает далее оказывать воздействие на манипулятор. Детальному исследованию процессов взаимодействия манипулятора и базового шасси мобильной транспортно-технологической машины будут посвящены дальнейшие исследования.

Выводы

Учет упругости звеньев, выполняемый при проведении динамико-прочностного анализа манипуляционной системы мобильной транспортно-технологической машины, позволяет выявить колебательный характер изменения кинематических и силовых факторов процесса и таким образом повысить адекватность моделирования работы манипуляционной системы в процессе эксплуатации машины.

Размах колебаний кинематических и силовых факторов, определяющих динамику и динамическую прочность конструктивных элементов металлоконструкции манипуляционной системы, а также величина их возможного отклонения от решения, полученного для модели с абсолютно жесткими звеньями, оказываются достаточно существенными и свидетельствуют о желательности проведения уточненных расчетов с учетом упругости звеньев.

Упругость звеньев обуславливает наличие переменных виброускорений даже на этапе их установившегося движения, что вызывает появление переменных во времени инерционных нагрузок на металлоконструкцию и необходимость проведения уточненного расчета напряженного состояния звеньев с учетом действия этих дополнительных нагрузок.

Упругость звеньев обуславливает их колебания с частотой, соизмеримой с первой низшей собственной частотой колебаний самой металлоконструкции манипуляционной системы, что свидетельствует о желательности ее проверки на отсутствие резонанса и при необходимости разработки конструктивных мер по повышению динамической надежности манипуляционной системы.

Исследование выполнено при финансовой поддержке гранта Президента РФ для государственной поддержки молодых ученых-кандидатов наук № МК-92.2014.8.

Литература

1. Новоселов В. Время перемен. Российский рынок гидроманипуляторов // Строительная техника и технологии. 2013. № 4. С. 98–110.
2. Featherstone R. Rigid Body Dynamics Algorithms. N.Y.: Springer, 2008. 272 p.
3. Лагерев А.В., Лагерев И.А., Мильто А.А. Универсальная методика динамического анализа гидравлических кранов-манипуляторов // Вестник Брянского государственного технического университета. 2013. № 3. С. 24–31.
4. Лагерев А.В., Лагерев И.А., Мильто А.А. Универсальная методика определения напряжений в стержневых элементах конструкций гидравлических кранов-манипуляторов в задачах динамики // Вестник Брянского государственного университета. 2013. № 4. С. 21–26.
5. Бурдаков С.Ф., Дяченко В.А., Тимофеев А.Н. Проектирование манипуляторов промышленных роботов и роботизированных комплексов. М.: Высшая школа, 1986. 264 с.
6. Лагерев А.В., Мильто А.А., Лагерев И.А. Динамико-прочностной анализ гидравлических крано-манипуляторных установок мобильных машин. Брянск: РИО БГУ, 2015. 186 с.
7. Nikravesh P.E., Chung I.S. Application of Euler Parameters to the Dynamic Analysis of Three-Dimensional Constrained Mechanical Systems // Journal of Mechanical Design. 1982. № 104. P. 785–791.
8. Korkealaakso P., Mikkola A., Eantalainen T., Rouvinen A. Description of Joint Constraints in the Floating Frame of Reference Formulation // Proc. IMechE. 2008. Vol. 223. Part K. P. 133–144.
9. Лагерев И.А. Моделирование напряженно-деформированного состояния крана-манипулятора машины для сварки трубопроводов // Известия высших учебных заведений. Машиностроение. 2011. № 4. С. 29–36.
10. Лагерев А.В., Лагерев И.А., Мильто А.А. Исследование динамики и прочности гидравлических крано-манипуляторных установок на подвижном шасси // Научно-технический вестник Брянского государственного университета. 2015. № 1. С. 43–48.
11. Вершинский А.В., Лагерев И.А., Шубин А.Н., Лагерев А.В. Численный анализ металлических конструкций подъемно-транспортных машин. Брянск: БГУ, 2014. 186 с.

References

1. Novoselov V. Time for a change. Russian market of hydraulic manipulators. *Stroitel'naya tekhnika i tekhnologii*. 2013. No 4. pp. 98–110 (In Russ.).
2. Featherstone R. Rigid Body Dynamics Algorithms. N.Y.: Springer, 2008. 272 p.
3. Lagerev A.V., Lagerev I.A., Mil'to A.A. The universal method of dynamic analysis of hydraulic cranes-manipulators. *Vestnik Bryanskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta*. 2013. No 3. pp. 24–31 (In Russ.).
4. Lagerev A.V., Lagerev I.A., Mil'to A.A. The universal method of determining stresses in the rod elements of hydraulic cranes-manipulators in dynamic problems. *Vestnik Bryanskogo gosudarstvennogo universiteta*. 2013. No 4. pp. 21–26 (In Russ.).
5. Burdakov S.F., Dyachenko V.A., Timofeev A.N. *Proektirovanie manipulyatorov promyshlennykh robotov i robotizirovannykh kompleksov* [Design of manipulators of industrial robots and robotic systems]. Moscow. Vysshaya shkola Publ., 1986. 264 p.
6. Lagerev A.V., Mil'to A.A., Lagerev I.A. *Dinamiko-prochnostnoy analiz gidravlicheskikh kranomanipulyatornykh ustanovok mobil'nykh mashin* [Dynamic-strength analysis of hydraulic cranes-manipulators of mobile machines]. Bryansk: RIO BGU Publ., 2015. 186 p.
7. Nikravesh P.E., Chung I.S. Application of Euler Parameters to the Dynamic Analysis of Three-Dimensional Constrained Mechanical Systems. *Journal of Mechanical Design*. 1982. № 104. pp. 785–791.
8. Korkealaakso P., Mikkola A., Eantalainen T., Rouvinen A. Description of Joint Constraints in the Floating Frame of Reference Formulation. *Proc. IMechE*. 2008. Vol. 223. Part K. pp. 133–144.
9. Lagerev I.A. Simulation of stress-strain state of crane-manipulator of machine for welding pipelines. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy*. Mashinostroenie Publ.. 2011. No 4. pp. 29–36 (In Russ.).
10. Lagerev A.V., Lagerev I.A., Mil'to A.A. Research of dynamics and durability of hydraulic crane-manipulator systems on a mobile chassis. *Nauchno-tekhnicheskiy vestnik Bryanskogo gosudarstvennogo universiteta*. 2015. No 1. pp. 43–48 (In Russ.).
11. Vershinskiy A.V., Lagerev I.A., Shubin A.N., Lagerev A.V. *Chislennyy analiz metallicheskih konstruksiy pod'emno-transportnykh mashin* [Numerical analysis of metal structures of handling machinery]. Bryansk. BGU Publ., 2014. 186 p.

MATHEMATICAL MODELING OF THE DYNAMICS OF MANIPULATION SYSTEM FOR MOBILE TRANSPORT AND TECHNOLOGICAL MACHINE WITH REFERENCE TO THE ELASTICITY OF ELEMENTS

Dr. Eng. **V.F. Kovalskiy**, Ph.D. **I.A. Lagerev**
Moscow State University of Railway Engineering n. a. Emperor Nicholas II
Bryansk State University n. a. I.G. Petrovskiy
lagerev-bgu@yandex.ru

The approaches to modeling the dynamics of mobile manipulators of transport and technological machines with reference to the elastic compliance of elements are shown. The equations of motion of the manipulator units are recorded using the method of Lagrange multipliers. As the main origin for each element were taken four Rodrigues-Hamilton parameters, coordinates of the element position as absolutely rigid body and elastic movements. The equations take into account the impact of external and internal elastic and quadratic forces. Internal elastic forces are calculated on the basis of the stiffness matrix, which formation is made through calculation of the manipulator by finite element method. To set the joint couplings the required number of constraint equations is built. The methods of creating of widespread kinematic schemes of manipulators of cylindrical and prismatic joints using set of constraints involving mutual perpendicular vectors, which belong to articulated elements. Using the developed model the dynamics of articulated manipulator crane ACT-4-A was calculated. It was found that the inclusion of elements elasticity reveals oscillatory behavior of the kinematic and power factors of the process and, thus, increase the adequacy of modeling of manipulation system operation during machine use. Elastic elements causes their oscillations with a frequency, which is commensurable with the first lower natural frequency of metal manipulation system itself, that indicates the desirability of its test for the absence of resonance and, if necessary, the development of positive measures to improve the dynamic reliability of the manipulation system. It has been shown that to calculate manipulators for some machines the chassis dynamics should be taken into account.

Keywords: manipulation system, elastic elements, transport and technological machine, dynamics, modeling.