

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ БОКОВОГО УВОДА ТРАКТОРА

Носков Н.К., д.т.н. Позин Б.М., д.т.н. Трояновская И.П.
Южно-Уральский государственный университет (НИУ), Челябинск, Россия
tripav@rambler.ru

Вопросы курсовой устойчивости движения сельскохозяйственного тракторного агрегата приобретают наибольшую актуальность при пахоте, так как на плуге (в силу геометрии его рабочих поверхностей) возникает дополнительный разворачивающий момент, который может уводить трактор в сторону от прямолинейного движения. Оператору приходится часто подправлять движение машины, что способствует быстрой утомляемости и, как следствие, снижению производительности работ. Разработка математической модели движения трактора под действием внешней внецентренной нагрузки на крюке позволит определить предельное значение сдвигающей силы. Увод трактора под действием внешних сил (без участия со стороны водителя) представляет собой пассивный поворот, которому в настоящее время в теории криволинейного движения гусеничного трактора уделено недостаточно внимания, так как теория поворота направлена, как правило, на исследования активного движения (при управляющем воздействии водителя). Увод представляет собой совокупность управляемого прямолинейного движения и неуправляемого сдвига под действием боковой составляющей силы на крюке. Учитывая невысокие рабочие скорости движения трактора можно составить квазистатическую модель криволинейного движения при уводе, которая состоит из: дифференциальных уравнений движения и условий равновесия внешних сил при предельном страгивании. В результате решения системы представленных уравнений получены траектории движения трактора при различной нагрузке на крюке. Модель позволяет: исследовать траекторию движения на различных грунтовых фонах; найти оптимальные соотношения веса трактора и сил сопротивления; изучить влияние параметров рабочего органа (точки крепления плуга и угла наклона лемешной поверхности) на характеристики движения.

Ключевые слова: пассивный поворот, увод трактора, страгивание, внецентренная нагрузка, предельная сдвигающая сила, нагрузка на крюке.

Введение

Пахота – это наиболее энергетически затратная операция. На плуге возникают поперечные составляющие усилия сопротивления, которые часто приводят к отклонению трактора от прямолинейного движения траектории. Такое явление (отклонения трактора под действием внешних сил) получило название увода [1] или пассивного поворота [2].

Теоретические исследования увода могут позволить определить причину и наметить дальнейшие пути его устранения. В настоящее время наиболее распространенным методом теоретического исследования является математическое моделирование, так как оно позволяет решить проблему уже на стадии проектирования трактора.

Целью работы является разработка математической модели увода трактора под действием внешней внецентренной нагрузки на крюке.

Поскольку траектория увода, как правило, представляет собой некую криволинейную траекторию [3], то математическая модель должна описывать криволинейное движение. Проблема заключается в отсутствии готовых моделей, описывающих поворот машины без управляющего воздействия водителя. В настоящее

время вся теория поворота направлена, как правило, на исследования активного поворота. Однако пассивный увод имеет не менее важное практическое значение, особенно для тракторов сельскохозяйственного назначения [4–7].

Методика исследования

Для решения задачи представим увод как совокупность активного прямолинейного движения под управлением водителя и пассивный вращательный сдвиг машины под действием внешнего усилия на плуге [8, 9].

Модель управляемого движения представляет собой дифференциальные уравнения, позволяющие построить траекторию.

Пассивный сдвиг (задача страгивания) – это начало (или конец) вращательного движения по условиям предельного трения [8]. В основу исследований задачи сдвига положим математическую теорию трения Ф.А. Опейко [10].

Математическая модель

При составлении математической модели рассмотрим гусеничную модификацию сельскохозяйственного трактора, как наиболее часто используемую при операции вспашки.

Особенностью движения сельскохозяйственного трактора является малая, почти постоянная рабочая скорость при пахоте. Это делает правомерным принятие допущения об отсутствии обоих видов ускорений:

- касательное ускорение $a_t = 0$, так как скорость принимаем постоянной $V = 0$;
- нормальное ускорение $a_n = 0$, так как скорость мала, а радиус кривизны траектории очень большой.

Тогда уравнения движения центра масс трактора в декартовой системе координат, записанные на основе криволинейного интеграла первого рода имеют вид [11]:

$$X_c = X_0 + \int_s \cos \alpha \, dS \quad \text{и} \quad Y_c = Y_0 + \int_s \sin \alpha \, dS, \quad (1)$$

где $X_0 = 0, Y_0 = 0$ – начальные координаты криволинейной траектории; α – угол касательной к кривой в точке с осью X (рис. 1); ds – дифференциал дуги кривой в точке.

Запишем дугу S через радиус кривизны ρ и угол касательной α соотношением $dS = \rho \, d\alpha$. Учитывая, что радиус кривизны $\rho(\tau)$ и угол $\alpha(\tau)$ являются переменными функциями времени $t = \int_0^t \frac{V}{\phi} \, d\tau$, уравнения траектории приобретают вид:

$$X_c = \int_0^T V \cos \left(\int_0^t \frac{V}{\phi} \, d\tau \right) dt \quad \text{и} \quad Y_c = \int_0^T V \sin \left(\int_0^t \frac{V}{\phi} \, d\tau \right) dt, \quad (2)$$

где t, T – текущее время и время всего процесса вспашки.

Таким образом, величина увода (бокового отклонения от прямолинейного движения) Y_c полностью определяется радиусом кривизны траектории ρ , который в свою очередь зависит от внешнего сдвигающего воздействия со стороны плуга P . Поскольку криволинейное движение

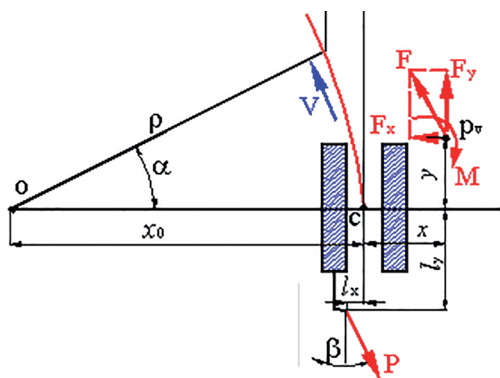


Рис. 1. Схема увода гусеничного трактора

трактора происходит на малых скоростях, то система внешних сил представляет уравновешенную систему сил. Условия равновесия произвольной плоской системы сил имеют вид [12]:

$$\left. \begin{aligned} X : P \sin - F_x &= 0; \\ Y : -P \cos + F_y &= 0; \\ M_c : l_y P \sin + l_x P \cos + x F_y + y F_x - M &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

где P – внешняя крюковая нагрузка на плуг; β – угол между крюковой нагрузкой и продольной осью трактора (определяется конфигурацией плуга); l_x, l_y – плечи составляющих крюковой силы P относительно центра масс; x, y – неизвестные координаты центра скольжения гусениц относительно центра масс; F_x, F_y – проекции результирующей реакции со стороны грунта на трактор; M – результирующий момент трения в контакте гусениц с грунтом (момент сопротивления повороту).

Анализ уравнений равновесия (3) показывает, что сдвиг (следовательно и увод) наступает только в случае, когда сила P достигает предельного значения реакций со стороны грунта (F_x, F_y, M), которые в свою очередь ограничены трением сцепления. Следовательно, для каждой точки приложения и направления сдвигающей силы существует только одно ее предельное значение, после которого имеет место сдвиг и увод. Факт начала движения только при конкретном значении сдвигающей силы, подтвержден экспериментально [13].

Согласно теории трения [10] силовые факторы в контакте с грунтом (F_x, F_y, M) тоже являются функциями неизвестных координат центра скольжения (x, y). В случае приведения всех элементарных сил со стороны грунта к центру скольжения C (рис. 2) силовые факторы реакций (F_x, F_y, M) имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} F_x &= q \iint_{\eta \xi} \phi \frac{y - \tau}{\sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}} \, d\xi \, d\eta; \\ F_y &= q \iint_{\eta \xi} \phi \frac{x - \tau}{\sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}} \, d\xi \, d\eta; \\ M &= q \iint_{\eta \xi} \phi \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2} \, d\xi \, d\eta, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

где q – нормальное давление гусеницы с грунтом; ϕ – коэффициент трения-сцепления гусеницы с грунтом; ξ, η – текущие координаты точек контакта гусениц с грунтом. В связи с незначительной по сравнению с длиной, шири-

ной гусеницы, последней можно пренебречь, что позволит заменить двумерные интегралы (4) заменить одномерными погрешностью не более 2 % [14].

Введение переменного коэффициента трения-сцепления φ позволит учесть деформативные свойства грунта. В теории активного поворота гусеничных машин для описания переменного коэффициента φ используют зависимость, представленную на рис. 2 [15].

Особенностью увода являются малые боковые смещения S точек гусеницы (на порядок меньше, чем при активном повороте). Следовательно, боковая деформация грунта находится в упругой области грунта, что позволяет воспользоваться прямолинейной зависимостью:

$$\varphi = \varphi_{\max} \frac{\delta}{\delta_{\max}}, \quad (5)$$

где $\varphi_{\max} 0,8 \dots 0,95$ – максимальное значение коэффициента сцепления гусеничного движителя с определенным типом грунта; $\delta_{\max} 0,5$ – значение буксования, когда коэффициент сцепления достигает своего максимального значения; $\delta = \frac{x}{x + \rho}$ – текущее значение буксования в точке гусеницы, зависит от радиуса кривизны ρ .

Пренебрегая шириной гусеницы и учитывая упругость грунта, посредством переменного коэффициента трения-сцепления (5), двойные интегралы силовых факторов (4) упрощаются до одномерных:

$$\left. \begin{aligned} F_x &= q \int_{-L/2}^{L/2} \frac{\varphi_{\max}}{\delta_{\max}} \frac{(x + \rho)(y - \tau)}{\sqrt{\left(x - \frac{B}{2}\right)^2 + (y - \eta)^2}} d\eta; \\ F_y &= q \int_{-L/2}^{L/2} \frac{\varphi_{\max}}{\delta_{\max}} \frac{(x + \rho)\left(x - \frac{B}{2}\right)}{\sqrt{\left(x - \frac{B}{2}\right)^2 + (y - \eta)^2}} d\eta; \\ M &= q \int_{-L/2}^{L/2} \frac{\varphi_{\max}}{\delta_{\max}} (x + \rho) \sqrt{\left(x - \frac{B}{2}\right)^2 + (y - \eta)^2} d\eta, \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

где L, B – база и колея трактора соответственно.

Таким образом, силовые факторы, возникающие в контакте гусеницы с грунтом, являются функциями неизвестного радиуса кривизны траектории ρ , значение которого вычисляется путем решения системы уравнений равновесия внешних сил (3). Далее по законам движения

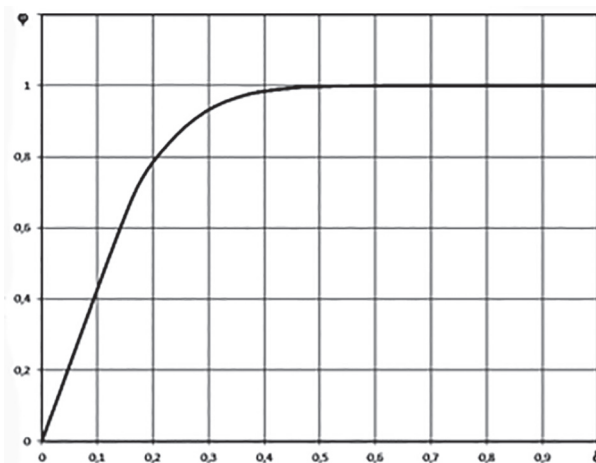


Рис. 2. Зависимость коэффициента сцепления φ от буксования δ

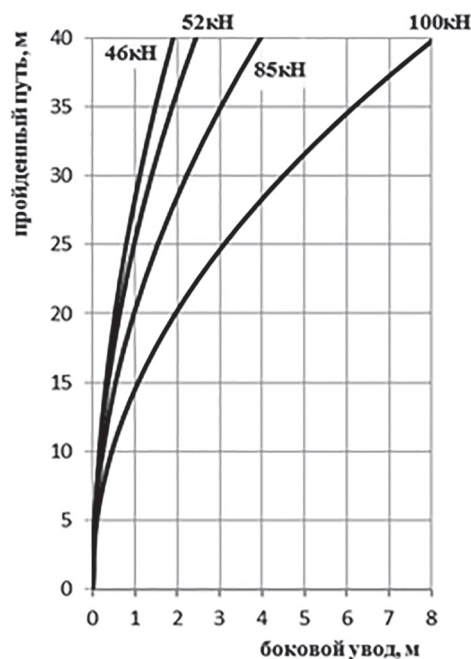


Рис. 3. Траектории движения трактора Т10 с различной крюковой нагрузкой

(2) строится траектория трактора во времени $X(t), Y(t)$.

На основе предложенной математической модели был проведен численный эксперимент на примере гусеничного трактора. Для примера были проведены расчеты траектории движения трактора с различной крюковой нагрузкой. Результаты представлены на рис. 3.

Выводы

В результате проведенных исследований разработана математическая модель увода тракторного агрегата при пахоте. Модель представляет собой квазистатическую модель

криволинейного движения при уводе и состоит из двух систем уравнений:

- закона криволинейного движения (2);
- равновесия внешних сил (3) с учетом интегральных функций реакций грунта (6).

Модель позволяет исследовать:

- траектории движения на различных типах грунта;
- оценить влияние значения внецентренной крюковой нагрузки на траекторию движения;
- изучить влияние параметров рабочего органа (точки крепления плуга и угла наклона лемешной поверхности) на характеристики движения;
- найти оптимальные соотношения веса трактора и сил сопротивления.

Литература

1. Трояновская И.П. Модель увода гусеничного трактора при пахоте // Техника в сельском хозяйстве. 2014. № 3. С. 29–31.
2. Позин Б.М., Трояновская И.П., Апанасик В.Г. Задачи пассивного поворота гусеничной машины (постановка, модель движения) // Вестник Южно-Уральского государственного университета, серия Машиностроение. 2007. Вып. 10. № 25(97). С. 70–74.
3. Трояновская И.П. Исследование увода гусеничного пахотного трактора // Механизация та електрифікація сільськогосподарства, Україна: Глеваха. 2014. Т. 2. Вип. 99. С. 161–168.
4. Егоров Л.И. Исследование некоторых вопросов управляемости гусеничных лесосечных машин: автореф. дисс. ... канд. техн. наук. Москва. 1972. 25 с.
5. Реймер В.В. Обоснование методики повышения эффективности эксплуатации колесных тракторов класса 1,4 при работе на наклонной опорной поверхности: автореф. дисс.... канд. техн. наук. Оренбург. 2012. 24 с.
6. Рославцев А.В. Разработка методов и средств исследования движения машинно-тракторных агрегатов: автореф. дисс. ... докт. техн. наук. Москва. 1996. 64 с.
7. Тарасова С.В. Обоснование способа курсовой стабилизации колесного трактора при выполнении сельскохозяйственных операций на наклонной опорной поверхности: автореф. дисс.... канд. техн. наук. Оренбург. 2015. 24 с.
8. Апанасик В.Г., Позин Б.М., Трояновская И.П. Задача страгивания в теории поворота транспортных и тяговых машин // Механика и процессы управления моторно-трансмиссионных систем транспортных машин: сборник научных трудов Всероссийской научно-технической конференции Уральского отделения Российской Академии Наук, Институт машиноведения, Курган: КГУ. 2003. С. 156–159.
9. Апанасик В.Г., Позин Б.М., Трояновская И.П. Пассивный поворот гусеничной машины (задача страгивания) // Достижение науки – агропромышленному производству: материалы XLIII Международной научно-технической конференции, Челябинск: ЧГАУ. 2004. Ч. 2. С. 204–208.
10. Опейко Ф.А. Колесный и гусеничный ход. Минск: Акад. с.-х. наук БССР. 1960. 228 с.
11. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 2. М.: Физматгиз, 1959. 807 с.
12. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. М.: Высшая школа. 1986. 416 с.
13. Апанасик В.Г., Бурматов В.А., Костюченко В.И. и др. Экспериментальные исследования пассивного поворота гусеничной машины при страгивании // Достижение науки агропромышленному производству: материалы XLIII Международной научно-технической конференции, Челябинск: ЧГАУ. 2004. Ч. 2. С. 201–204.
14. Позин Б.М. Совершенствование параметров промышленных гусеничных тракторов: дисс. ... докт. техн. наук, Москва. 1991. 62 с.
15. Кацыгин В.В. Основы теории выбора оптимальных параметров сельскохозяйственных машин и орудий // Вопросы сельскохозяйственной механики. Т. 13. Минск. 1964. С. 5–147.

References

1. Troyanovskaya I.P. Model of crawler tractor drift during plowing. *Tekhnika v sel'skom khozyaystve*. 2014. No 3, pp. 29–31 (in Russ.).
2. Pozin B.M., Troyanovskaya I.P., Apanasik V.G. Tasks of passive rotation of a tracked vehicle (setting, motion model). *Vestnik Yuzhno-Ural'skogo gosudarstvennogo universiteta, seriya Mashinostroenie* [Bulletin of South Ural State University, Mechanical engineering series]. 2007. Vyp.10. No 25(97), pp. 70–74 (in Russ.).
3. Troyanovskaya I.P. Research of crawler tractor drift. *Mekhanizatsiya ta elektrifikatsiya sil's'kogo gospodarstva*, Ukraine: Glevakha. 2014. Vol. 2. Vip. 99, pp. 161–168 (in Russ.).
4. Egorov L.I. *Issledovanie nekotorykh voprosov upravlyaemosti gusenichnykh lesosechnykh mashin*. Avtoref. diss. ... kand. tekhn. nauk [Investigation of some questions of caterpillar harvesting machines control. Abstract. Dissertation for Candidate of Technical Sciences degree]. Moscow, 1972. 25 p.
5. Reymer V.V. *Obosnovanie metodiki povysheniya effektivnosti ekspluatatsii kolesnykh traktorov klassa 1,4 pri rabote na naklonnoy opornoy pov-erkhnosti*. Avtoref. diss.... kand. tekhn. nauk [The substantiation of a technique of increase of efficiency of operation of class 1,4 wheel tractors at work on the inclined support surface. Abstract. Disserta-

- tion for Candidate of Technical Sciences degree]. Orenburg, 2012. 24 p.
6. Roslavtsev A.V. *Razrabotka metodov i sredstv issledovaniya dvizheniya mashinno-traktornykh agregatov*. Avtoref. diss. ... dokt. tekhn. nauk [Development of methods and means for investigating the movement of machine-tractor units. Abstract. Dissertation for Candidate of Technical Sciences degree]. Moscow, 1996. 64 p.
 7. Tarasova S.V. *Obosnovanie sposoba kursovoy stabilizatsii kolesnogo traktora pri vypolnenii sel'skokhozyaystvennykh operatsiy na naklonnoy opornoy poverkhnosti*. Avtoref. diss.... kand. tekhn. nauk [Justification of the method of course stabilization of the wheeled tractor when performing agricultural operations on an inclined support surface. Abstract. Dissertation for Candidate of Technical Sciences degree]. Orenburg, 2015. 24 p.
 8. Apanasik V.G., Pozin B.M., Troyanovskaya I.P. The problem of starting in the theory of turning of transport and traction machines. *Mekhanika i protsessy upravleniya motornotransmissionnykh sistem transportnykh mashin. Sbornik nauchnykh trudov Vserossiyskoy nauchno-tekhnicheskoy konferentsii Ural'skogo otdeleniya Rossiyskoy Akademii Nauk, Institut mashinovedeniya* [Mechanics and control processes of motor-transmission systems of transport vehicles: a collection of scientific papers of the All-Russian Scientific and Technical Conference of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, the Institute of Engineering Science], Kurgan: KGU Publ. 2003, pp. 156–159 (in Russ.).
 9. Apanasik V.G., Pozin B.M., Troyanovskaya I.P. Passive rotation of a tracked vehicle (task of starting). *Dostizhenie nauki – agropromyshlennomu proizvodstvu. Materialy XLIII Mezhdunarodnoy nauchno-tekhnicheskoy konferentsii* [Achievement of science for agro-industrial production: materials of the XLIII International Scientific and Technical Conference], Chelyabinsk: ChGAU Publ. 2004. Ch. 2, pp. 204–208 (in Russ.).
 10. Opeyko F.A. *Kolesnyy i gusenichnyy khod* [Wheel and caterpillar drive]. Minsk: *Akad. s.-kh. nauk BSSR Publ.*, 1960. 228 p.
 11. Fikhtengol'ts G.M. *Kurs differentsial'nogo i integral'nogo ischisleniya* [Course of differential and integral calculus]. Vol. 2. Moscow: Fiz-matgiz Publ., 1959. 807 p.
 12. Targ S.M. *Kratkiy kurs teoreticheskoy mekhaniki* [Short course of theoretical mechanics]. Moscow: Vysshaya shkola Publ., 1986. 416p.
 13. Apanasik V.G., Burmatov V.A., Kostyuchenko V.I. i dr. Experimental studies of the passive turn of a tracked vehicle when starting. *Dostizhenie nauki – agropromyshlennomu proizvodstvu. Materialy XLIII Mezhdunarodnoy nauchno-tekhnicheskoy konferentsii* [Achievement of science for agro-industrial production: materials of the XLIII International Scientific and Technical Conference], Chelyabinsk: ChGAU Publ. 2004. Ch. 2, pp. 201–204 (in Russ.).
 14. Pozin B.M. *Sovershenstvovanie parametrov promyshlennykh gusenichnykh traktorov*. Diss. ... dokt. tekhn. nauk [Improvement of the parameters of industrial caterpillar tractors. Dissertation for Candidate of Technical Sciences degree], Moscow, 1991. 62 p.
 15. Katsygin V.V. *Osnovy teorii vybora optimal'nykh parametrov sel'skokhozyaystvennykh mashin i orudiy* [Fundamentals of the theory of choosing the optimal parameters of agricultural machinery and tools]. *Voprosy sel'skokhozyaystvennoy mekhaniki*. Vol. 13, Minsk, 1964, pp. 5–147 (in Russ.).

MATHEMATICAL MODEL OF THE LATERAL TRACTION OF THE TRACTOR

N.K. Noskov, Dr. Eng. **B.M. Pozin**, Dr. Eng. **I.P. Troyanovskaya**
 South Ural State University (national research university), Chelyabinsk, Russia
 tripav@rambler.ru

The issues of the course stability of the movement of the agricultural tractor aggregate acquire the greatest urgency in the plowing, since an additional unfolding moment arises on the plow (due to the geometry of its working surfaces), which can lead the tractor aside from rectilinear movement. The operator often has to correct the movement of the machine, which contributes to rapid fatigue and, as a result, a decrease in productivity. The development of a mathematical model of the tractor's motion under the influence of an external eccentric load on the hook will allow to determine the limiting value of the shearing force. The drift of the tractor under the influence of external forces (without participation from the side of the driver) is a passive turn, which currently lacks sufficient attention in the theory of the curvilinear movement of the caterpillar tractor, since the theory of rotation is usually aimed at examining the active movement (under the driving influence of the driver). The drift is a set of controlled rectilinear motion and uncontrolled shear under the action of the lateral component of force on the hook. Considering the low operating speeds of the tractor, it is possible to compile a quasistatic model of curvilinear motion in the drift, which consists of: differential equations of motion and equilibrium conditions of external forces with limiting friction. As a result of solving the system of presented equations, trajectories of the tractor's motion are obtained under different load on the hook. The model allows: to study the trajectory of motion on various ground backgrounds; find the optimal ratio of the weight of the tractor and the forces of resistance; to study the influence of the parameters of the working element (the attachment point of the plow and the angle of inclination of the plow surface) on the characteristics of motion.

Keywords: passive turning, tractor drift, traction, eccentric load, ultimate shearing force, hook load.