

Контактная задача для кольцевого упругого покрытия цилиндрической полости в твердом теле

д.т.н. проф. Божкова Л.В., к.т.н. доц. Норицина Г.И., к.т.н. проф. Рябов В.Г.
 Университет машиностроения

Аннотация. Предложен аналитический метод решения контактной задачи для упругого покрытия цилиндрического отверстия в твердом теле при его взаимодействии с твердым цилиндром. Закон изменения контактных давлений представлен в виде некоторого бесконечного ряда, содержащего бесконечное число неизвестных констант. В результате найдены зависимости между результирующей нагрузкой, действующей на твердый цилиндр, и величиной зоны контакта, а также закон распределения контактных давлений.

Ключевые слова: контактная задача, упругое покрытие, контактные давления, бесконечный ряд, отверстие.

Рассмотрим задачу о контактном взаимодействии твердого цилиндра радиуса r_0 с упругим кольцевым слоем, покрывающим цилиндрическое отверстие радиуса r_1 в твердом теле (рисунок 1).

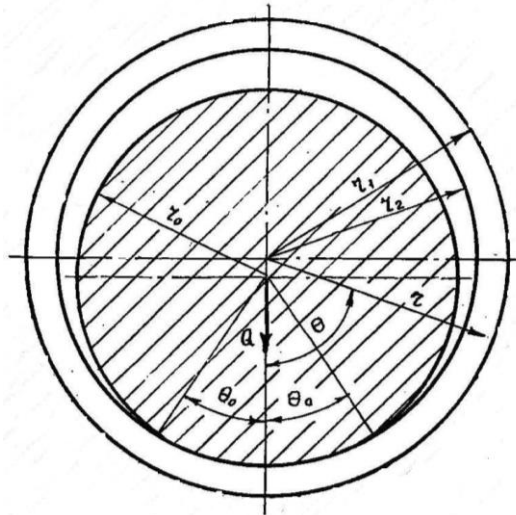


Рисунок 1. Схема контактного взаимодействия твердого цилиндра с упругим кольцевым слоем, покрывающим цилиндрическое отверстие в твердом теле

В результате деформации упругого слоя произойдет соприкосновение твердого цилиндра и кольцевого слоя по некоторой его части, определяемой углом θ_0 . Угол θ_0 является неизвестной величиной.

Предполагая справедливыми условия плоской деформации и пренебрегая силами трения в зоне контакта цилиндра и упругого слоя, установим зависимость величины зоны контакта от действующей на твердый цилиндр нагрузки Q . Найдем величину максимального радиального перемещения δ точки первоначального контакта упругого слоя с твердым цилиндром, а также закон распределения контактных давлений $p(\theta)$.

Практически важным является случай, когда радиус твердого цилиндра (r_0) и внутренний радиус упругого слоя (r_2) мало отличаются один от другого. При этом геометрическое условие контакта можно представить в виде:

$$W(r_2, \theta) = -r_2 + \left[(\Delta + \delta) \cos \theta + \sqrt{r_0^2 + (\Delta + \delta) \sin^2 \theta} \right], \quad |\theta| < \theta_0, \quad (1)$$

где: $W(r_2, \theta)$ – радиальные перемещения точек внутреннего контура упругого слоя в зоне контакта;

$\Delta = r_2 - r_0$ – эксцентриситет контактирующей пары.

Учитывая малость величины $\frac{\Delta + \delta}{r_0}$, геометрическое условие контакта можно представить следующим образом:

$$W(r_2, \theta) = -\Delta + (\Delta + \delta) \cos \theta, \quad |\theta| < \theta_0. \quad (2)$$

При переходе к безразмерным параметрам будем иметь:

$$\bar{W}(1, \theta) = \bar{\delta} \cos \theta - \bar{\Delta}(1 - \cos \theta), \quad |\theta| < \theta_0. \quad (3)$$

где: $\bar{W}(1, \theta) = \frac{W(r_2, \theta)}{r_2}$, $\bar{\delta} = \frac{\delta}{r_2}$, $\bar{\Delta} = \frac{\Delta}{r_2}$.

Закон изменения радиальных контактных давлений $\rho(\theta)$ представим в безразмерном виде с помощью некоторого бесконечного ряда:

$$\bar{p}(\theta) = \begin{cases} \sum_{m=0}^{\infty} p_m \cos\left(m \pi \frac{\theta}{\theta_0}\right), & |\theta| < \theta_0, \\ 0, & |\theta| > \theta_0, \end{cases} \quad (4)$$

где: $\bar{p}(\theta) = \frac{p(\theta)}{E}$ – безразмерная величина,

E – модуль упругости упругого слоя,

$p_m (m = 0, 1, 2, \dots)$ – безразмерные неизвестные константы.

Разложим функцию $\bar{p}(\theta)$ в ряд Фурье на промежутке $-\pi \leq \theta \leq \pi$:

$$\bar{p}(\theta) = \frac{\bar{A}_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{A}_n \cos n\theta, \quad (5)$$

коэффициенты которого являются также безразмерными величинами и определяются по формулам:

$$\bar{A}_n = \frac{2 \sin n\theta_0}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^{m+1} p_m \frac{n}{(\tilde{m}^2 - n^2)}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (6)$$

где: $\tilde{m} = \frac{m\pi}{\theta_0}$.

При действии на упругий кольцевой слой радиальной симметричной нагрузки $\bar{p}(\theta)$ радиальные перемещения точек внутреннего контура слоя $\bar{W}(1, 0)$ в соответствии с результатами [1] с учетом (5) и (6) можно представить в виде:

$$\bar{W}(1, \theta) = \frac{2}{\pi} \left\{ p_0 \alpha_0 \theta_0 + \sum_{m=0}^{\infty} \left[(-1)^{m+1} p_m \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n \sin n\theta_0 \cos n\theta}{\tilde{m}^2 - n^2} \right] \right\}, \quad (7)$$

где: $\alpha_0 = \frac{1}{2} \frac{(A^2 - B^2)(\rho_1 - \rho_1^{-1})}{(A+B)\rho_1^{-1} + (A+B)\rho_1}$, $\rho_1 = \frac{r_1}{r_2}$,

$A = (1 - \nu^2)$, $B = \nu(1 + \nu)$, ν – коэффициент Пуассона, $\beta_n = n \cdot \alpha_n (n = 1, 2, \dots)$,

$$\alpha_n = \frac{[(A-B)(3A-B)\rho_1^2 - (A+B)] [-\rho_1^2(A-3B) - (A+B)\rho_1^{-2} + 2(A-B)]}{8A[(3A-B)\rho_1^2 + (A+B)\rho_1^{-2}] + \frac{(A-B)(A-3B)(\rho_1^2 - 1)}{8A} - \left[\frac{(A-B)}{4A} - A \right] \ln \rho_1, \quad (8)$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{2(1-n^2)} + \left\{ b_n^* \left[4A(1-n)(A+B) - \frac{4A[(3A-B)\rho_1^{n+1} + (A+B)\rho_1^{-n-1}]}{(\rho_1^{n-1} - \rho_1^{-n-1})} \right] + 2(A+B) - \frac{4A\rho_1^{-1}}{\rho_1^{-1} - \rho_1} \right\}, \quad (n = 2, 3, \dots),$$

$$b_n^* = \frac{n(A+B)\rho_1^{-2} + (B-3A)\rho_1^{-2n} - (A+B)(1+n)}{(A+B)^2[2(1-n^2) + n^2(\rho_1^{-2} + \rho_1^2)] + (A+B)(3A-B)(\rho_1^{2n} - \rho_1^{-2n}) - 8A(B-A)\rho_1^2}.$$

Естественно, что функции (3) и (7) должны совпадать в зоне контакта. Приравнявая правые части (3) и (7), получим:

$$\frac{2}{\pi} \left\{ p_0 \alpha_0 \theta_0 + \sum_{m=0}^{\infty} \left[(-1)^{m+1} p_m \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n \sin n\theta_0 \cos n\theta}{\tilde{m}^2 - n^2} \right] \right\} = \bar{\delta} \cos \theta - \bar{\Delta}(1 - \cos \theta), \quad [\theta] < \theta_0. \quad (9)$$

Безразмерный параметр $\bar{\delta}$, характеризующий радиальное перемещение первоначальной точки контакта упругого слоя с жестким цилиндром, определим в результате подстановки значения $|\theta| < \theta_0$ в (9):

$$\bar{\delta} = \frac{2}{\pi} \left\{ p_0 \alpha_0 \theta_0 + \sum_{m=0}^{\infty} \left[(-1)^{m+1} p_m \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n \sin n\theta_0}{\tilde{m}^2 - n^2} \right] \right\}. \quad (10)$$

На основании (9) и (10) получим следующее функциональное уравнение:

$$\sum_{m=0}^{\infty} p_m \varphi_m(\theta) = -\pi \bar{\Delta}(1 - \cos \theta), \quad (11)$$

где:

$$\varphi(\theta) = 2\alpha_0 \theta_0 (1 - \cos \theta) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n}{n^2} [\sin n(\theta_0 - \theta) + \sin n(\theta_0 + \theta) - 2 \sin n\theta_0 \cos \theta], \quad (12)$$

$$\varphi_m(\theta) = (-1)^{m+1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n}{\tilde{m}^2 - n^2} [\sin n(\theta_0 - \theta) + \sin n(\theta_0 + \theta) - 2 \sin n\theta_0 \cos \theta], \quad (13)$$

$(m = 1, 2, \dots)$.

Таким образом, задача свелась к определению неизвестных безразмерных констант $p_m (m = 0, 1, 2, \dots)$, входящих в функциональное уравнение (11).

Безразмерные постоянные $p_m (m = 0, 1, 2, \dots)$ можно определить двумя способами.

Первый способ предусматривает разложение функции по заданной системе функций с помощью бесконечных систем линейных алгебраических уравнений. В результате, задача сводится к решению следующей бесконечной системы линейных алгебраических уравнений:

$$\sum_{m=0}^{\infty} p_m c_{k,m} = b_k, \quad (k = 0, 1, 2, \dots), \quad (14)$$

$$c_{k,m} = \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \varphi_m(\theta) \cos \frac{k\pi\theta}{\theta_0} d\theta, \quad b_0 = -2\pi \bar{\Delta}(\theta_0 - \sin \theta_0),$$

где:

$$b_k = 2(-1)^{k+1} \pi \bar{\Delta} \frac{\theta_0^2 \sin \theta_0}{k^2 \pi^2 - \theta_0^2}, \quad (k = 1, 2, \dots).$$

В основе второго метода решения функционального уравнения (11) лежит построение ортогональной системы функций $\Phi_m(\theta) (m = 0, 1, \dots)$ по заданной системе функций $\varphi_m(\theta) (m = 0, 1, \dots)$.

Ортогональная система функций может быть построена на основании следующего соотношения:

$$\Phi_m(\theta) = \sum_{i=0}^m \frac{T_{i,m}^{-1}}{T_{m,m}^{-1}} \varphi_i(\theta),$$

где: $T_{i,m}^{-1}$ – элемент некоторой обратной матрицы.

$$\text{При этом: } T_{ij} = \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \varphi_i(\theta) \varphi_j(\theta) d\theta, \quad \begin{matrix} i = 0, 1, 2, \dots, m, \\ j = 0, 1, 2, \dots, m. \end{matrix}$$

В результате неизвестные постоянные $p_m (m = 0, 1, 2, \dots)$ определяются по формуле:

$$p_m = \sum_{i=m}^{\infty} D_i \frac{T_{mi}^{-1}}{T_{ii}^{-1}}, \quad (m = 0, 1, 2, \dots), \quad (15)$$

$$\text{где: } D_i = -\pi \bar{\Delta} \frac{\int_{-\theta_0}^{\theta_0} (1 - \cos \theta) \Phi_i(\theta) d\theta}{\int_{-\theta_0}^{\theta_0} \Phi_i^2(\theta) d\theta}.$$

Соотношение (4) и найденные безразмерные постоянные $P_m (m = 0, 1, 2, \dots)$ позволяют найти закон распределения контактных давлений при заданной величине зоны контакта, характеризующейся углом θ_0 .

Для определения угла θ_0 необходимо записать условие статического равновесия:

$$Q = \int_{-\theta_0}^{\theta_0} p(\theta) \cos \theta r_2 d\theta. \quad (16)$$

В результате подстановки (4) в соотношение (16) и последующего интегрирования будем иметь:

$$\bar{Q} = 2 \sin \theta_0 \left[p_0 + \theta_0^2 \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+1} p_m \frac{1}{m^2 \pi^2 - \theta_0^2} \right], \quad (17)$$

$$\text{где: } \bar{Q} = \frac{Q}{r_2 E}.$$

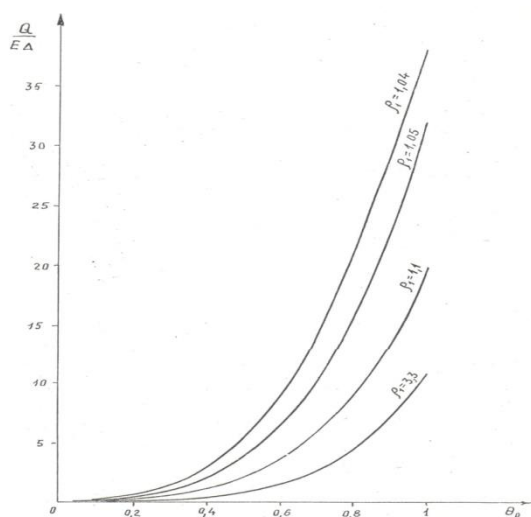


Рисунок 2. График зависимости между результирующей нагрузкой θ и величиной зоны контакта

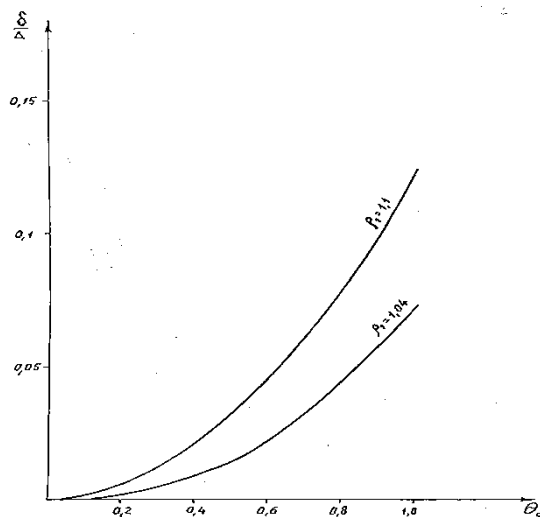


Рисунок 3. График зависимости между параметром δ и углом θ_0

На основании соотношений (17) и (10) построены графики зависимостей соответствен-

но между результирующей нагрузкой Q и углом θ_0 (рисунок 2), а также между параметром δ и углом θ_0 (рисунок 3).

Таким образом, общая схема решения контактной задачи для кольцевого упругого покрытия цилиндрической полости в твердом теле следующая:

- по заданным упругим характеристикам упругого слоя с помощью (8) вычисляем коэффициенты A и B ;
- по заданным радиусам кольцевого слоя r_1 и r_2 находим безразмерный параметр $\rho_1 = \frac{r_1}{r_2}$;
- на основании (8) вычисляем последовательность чисел $\alpha_n (n = 0, 1, 2, \dots)$ и $\beta_n (n = 1, 2, \dots)$;
- задавая последовательно различные значения угла θ_0 , определяем соответствующие им константы $p_m (m = 0, 1, 2, \dots)$ путем решения бесконечной системы линейных алгебраических уравнений (4), либо по формулам (15);
- на основании соотношения (17) и (10) строим соответственно графики зависимостей результирующей нагрузки Q и параметра δ от угла θ_0 ;
- с помощью построенных графиков (при заданной результирующей нагрузке Q) определяем угол θ_0 (то есть величину зоны контакта) и, следовательно, параметр δ ;
- для найденного значения угла θ_0 вычисляем константы $p_m (m = 0, 1, 2, \dots)$ одним из описанных выше способов;
- определив угол θ_0 и константы $p_m (m = 0, 1, 2, \dots)$, находим на основании (4) закон распределения контактных давлений.

Литература

1. Божкова Л.В., Рябов В.Г., Норицина Г.И. Плоская задача теории упругости для кольцевого слоя при несимметричной радиальной и касательной нагрузках // Сборка в машиностроении, приборостроении. 2006. № 2, С. 11-16.