Эндохронная теория неупругости, моделирующая микроразрушение и затвердевание материала

к.ф.-м.н. доц. Иванов Б.Ф., д.ф.-м.н. проф. Кадашевич Ю.И., д.ф.-м-н. доц. Помыткин С.П.
Санкт-Петербургский государственный технологический университет растительных полимеров,
Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения
8(812) 7868660, math.spbgturp@yandex.ru, 8(812) 7084372, kaf54@guap.ru

Аннотация. Предлагаются тензорно-параметрические варианты эндохронной теории неупругости, учитывающие микронапряжения, микроразрушение и затвердевание материала. Приведены решения для определяющих соотношений при одноосном нагружении. Установлена взаимосвязь между некоторыми вариантами теорий. Проанализировано влияние параметра эндохронности и параметра упрочнения материала на форму одноосных кривых «напряжение~деформация». Приведены результаты некоторых численных экспериментов, включая схему с разгрузками разупрочняющегося материала.

Ключевые слова: *неупругость, эндохронная теория, определяющие соотношения, микронапряжения, микроразрушения, разупрочнение, затвердевание.*

Вариант 1

В 1957 году Вильям Прагер [1, 2] в рамках концепции течения ввел понятие затвердеваемости, понимая под этим термином способность материала не воспринимать изменение деформации при росте напряжений. Автор [2] ввел понятие выпуклой поверхности затвердевания в девятимерном пространстве деформаций и разделил напряжение на две составляющие: упругое напряжение и напряжение затвердевания. Фактически Прагер сформулировал и закон затвердевания [1] в форме:

$$\sigma_{ij}^0 = \upsilon \frac{\partial h}{\partial \varepsilon_{ij}}, \ \sigma_{ij}^0 + \sigma_{ij}^e = \sigma_{ij}, \ \upsilon > 0, \tag{1}$$

где: ε_{ij} – девиатор тензора полных деформаций, σ_{ij}^e, σ_{ij}^0 – девиаторы тензоров упругих напряжений и напряжений затвердевания, $h(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}) = 0$ – поверхность затвердевания.

Если остановиться на простейшем варианте, когда поверхность затвердевания в пространстве деформаций имеет вид:

$$h(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}) \equiv \sqrt{(\varepsilon_{ij} - \frac{1}{k}\cdot\sigma_{ij}^0):(\varepsilon_{ij} - \frac{1}{2}\cdot\sigma_{ij}^0)} - \varepsilon_0 = 0, \tag{2}$$

то определяющие соотношения такой теории запишутся следующим образом:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_0 \frac{d\,\sigma_{ij}^0}{d\,\eta} + \frac{\sigma_{ij}^0}{k}, \ \sigma_{ij}^0 = \sigma_{ij} - 2G\,\varepsilon_{ij}, \ d\eta = \sqrt{d\sigma_{ij}^0 : d\sigma_{ij}^0}. \tag{3}$$

Здесь G – модуль сдвига, k – константа материала, ε_0 – деформационный предел затвердевания.

По схеме построения эндохронных вариантов теории, отвечающих любой теории течения [3], можно получить определяющие соотношения эндохронного типа, отвечающие идеям Прагера [1, 2]:

$$\varepsilon_{ij} + 2G\,\varepsilon_0\,\alpha_1 \frac{d\varepsilon_{ij}}{dR} = \varepsilon_0 \frac{dR_{ij}}{dR} + \frac{R_{ij}}{k + 2G\,\alpha_1}, \tag{4}$$

$$R_{ij} = \sigma_{ij} - 2G\,(1-\alpha_1)\ \varepsilon_{ij}, \ dR = \sqrt{dR_{ij} : dR_{ij}}, \ 0 \le \alpha_1 \le 1. \tag{5}$$

Здесь, дополнительно принято, что α_1 – параметр эндохронности, R_{ij} – девиатор вспомогательного параметрического тензора.

Очевидно, что при $\alpha_1 = 0$ соотношения (4), (5) переходят в уравнения (3). Общее решение уравнений (4), (5) при активном одноосном нагружении и постоянных материальных параметрах модели определяется формулами:

$$\varepsilon = \frac{1}{k + 2G\,\alpha_1}\left[R + \varepsilon_0\, k \cdot \left(1 - \exp(-R/(2G\varepsilon_0\,\alpha_1))\right)\right], \tag{6}$$

$$\sigma = R + 2G(1 - \alpha_1)\varepsilon\,. \tag{7}$$

Кроме того, в (4), (5) учтено, что в одномерном случае $\left.\dfrac{d\sigma}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = 2G$, а кривая $\sigma \sim \varepsilon$ одноосного нагружения выходит на асимптоту:

$$\varepsilon = \frac{\sigma + k\,\varepsilon_0}{2G + k}$$

при любых значениях параметра эндохронности α_1.

Интересный вариант получается из соотношений (4), (5) если положить $\alpha_1 = 1$. Тогда:

$$\varepsilon_{ij} + 2G\,\varepsilon_0\,\frac{d\varepsilon_{ij}}{d\sigma_i} = \varepsilon_0\,\frac{d\sigma_{ij}}{d\sigma_i} + \frac{\sigma_{ij}}{k + 2G}\,,\; d\sigma_i = \sqrt{d\sigma_{ij} : d\sigma_{ij}}\,. \tag{8}$$

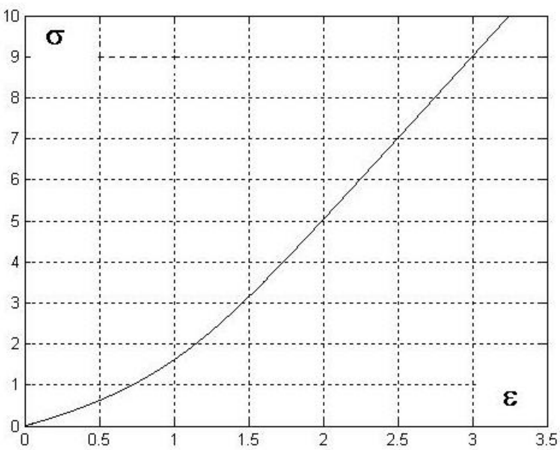

Рисунок 1. Зависимость $\sigma \sim \varepsilon$ при одноосном нагружении (по уравнениям (8))

Кривая деформирования при интегрировании этих уравнений в случае одноосного нагружения и постоянных материальных параметрах модели ($2G = 1,\; \varepsilon_0 = 1,\; k = 3$) приведена на рисунке 1. Очевидны выпуклость кривой вниз и выход её на асимптоту.

Вариант 2

В рамках концепции течения статистическая теория неупругости, учитывающая микронапряжения и микроразрушения, была опубликована в 1982 году [4]. Ее определяющие соотношения имели вид:

$$\varepsilon_{ij} = \rho\,\frac{d\sigma_{ij}^f}{d\mu} + \frac{\sigma_{ij}^f}{m}\,,\; d\mu = \sqrt{d\sigma_{ij}^f : d\sigma_{ij}^f}\,, \tag{9}$$

$$\sigma_{ij} = 2G_1\,\varepsilon_{ij} - \sigma_{ij}^f\,,\; \sigma_{ij} = \tau\,\frac{d\varepsilon_{ij}^p}{d\lambda} + k_1\,\varepsilon_{ij}^p\,,\; d\lambda = \sqrt{d\varepsilon_{ij}^p : d\varepsilon_{ij}^p}\,,$$

где: σ_{ij}, ε_{ij}, σ_{ij}^f – девиаторы локальных тензоров напряжений, деформаций и микроразрушений, τ – предел текучести материала, ρ – локальный предел разрушения, G_1 – модуль сдвига, k_1 – коэффициент упрочнения, m – постоянный параметр.

При этом предполагалось, что:

$$\sigma_{ij} = 2G_2\, \varepsilon_{ij}^{e}\ ,\ \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^{e} + \varepsilon_{ij}^{p} + \varepsilon_{ij}^{o}. \tag{10}$$

Здесь ε_{ij}^{p} – девиатор локального тензора пластических деформаций, G_2 – параметр материала, а под ε_{ij}^{o} понимаются деформации, отвечающие значению ρ, при котором произошел разрыв упругих связей. При достижении девиатором тензора микроразрушений σ_{ij}^{f} величины $2G_1\,\varepsilon_{ij}$ происходит локальный разрыв упругих связей и $\sigma_{ij} = 0$.

Этой теории отвечает одномерная модель, представленная на рисунке 2.

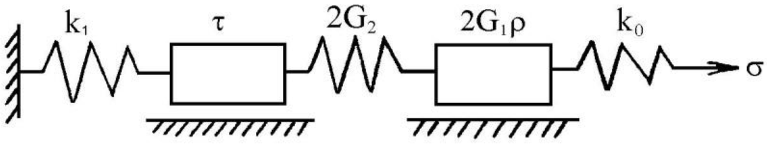

Рисунок 2. Одномерная модель, учитывающая микронапряжения и микроразрушения

Для этой модели и уравнений (9) – (10) имеем:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{k_0},\ k_0 = 2G_1,\ \text{если}\ \varepsilon \le \rho \tag{11a}$$

$$k_0 = 2G_1 - m + \frac{m\rho}{\varepsilon} \le \rho,\ \text{если}\ \varepsilon \ge \rho, \tag{11b}$$

$$\left\langle \varepsilon_{ij} \right\rangle = \varepsilon_{ij},\ \left\langle \varepsilon_{ij}^{p} \right\rangle = \int_0^\infty \varepsilon_{ij}^{p}\, d\Phi(\rho),\ \left\langle \sigma_{ij} \right\rangle = \int_0^\infty \sigma_{ij}\, d\Phi(\rho), \tag{12}$$

где: $\langle \bullet \rangle$ – знак операции осреднения, а интегральная функция распределения $\Phi(\rho)$ считается известной.

Используя схему перехода к эндохронным вариантам [3], в работе [5] была предложена теория неупругости, учитывающая микроразрушения и основанная на положениях и результатах исследования [4]. Её определяющие соотношения имели следующий вид

$$\varepsilon_{ij} + \alpha_2\, \rho_2\, \frac{d\varepsilon_{ij}}{dR} = \frac{1}{2G} \cdot \left(\rho_2\, \frac{dR_{ij}}{dR} + \frac{(g+1)\, R_{ij}}{g+\alpha_2} \right), \tag{13}$$

$$R_{ij} = 2G\, \varepsilon_{ij} - (1-\alpha_2)\, \sigma_{ij},\ 0 \le \alpha_1 \le 1. \tag{14}$$

где: g – аналог коэффициента упрочнения материала, α_2 – параметр эндохронности, ρ_2 – аналог деформационного предела микроразрушения ρ из (9).

Вариант 3

Подставим сейчас ε_{ij} из (14) в (13). Тогда получим, что:

$$\sigma_{ij} + \alpha_2\, \rho_2\, \frac{d\sigma_{ij}}{dR} = \rho_2 \frac{dR_{ij}}{dR} + \frac{R_{ij}}{g+\alpha_2}. \tag{15}$$

Если потребовать, чтобы при $\alpha_2 = 0$ решение (15) совпадало с решением (4) при $\alpha_1 = 0$ для активного одноосного нагружения, тогда нетрудно показать, что:

$$g + 1 = \frac{2G}{2G+k},\ \varepsilon_0 = \frac{\rho_2}{2G}. \tag{16}$$

Общее решение уравнений (13), (14) при одноосном нагружении и постоянных параметрах модели может быть получено в виде:

$$\sigma = \frac{1}{\alpha_2 + g}\ \left[R + \rho_2\ g \cdot \left(1 - \exp(-R/(\alpha_2\, \rho_2))\right)\right], \tag{17a}$$

$$\varepsilon = \frac{1}{2G}\left[\, R + \left(1-\alpha_2\right)\sigma \right]. \tag{17b}$$

Если $\alpha_2 = 1$, то одноосное решение (17) видоизменяется до соотношения:

$$\sigma = \frac{1}{1+g}\left[\, 2G\,\varepsilon + \rho_2\, g \cdot \left(1 - \exp(-(2G\,\varepsilon)/\rho_2) \right) \right]. \tag{18}$$

Отметим, что форма решения (6) при $\alpha_1 = \infty$ такова что:

$$\sigma = (2G + k)\,\varepsilon - k\,\varepsilon_0 \cdot \left(1 - \exp(-\varepsilon/(2G\,\varepsilon_0)) \right). \tag{19}$$

Сравнивая (18) и (19) и, имея ввиду условия (16), можно увидеть, что решения оказались одинаковыми. Таким образом, решение системы (13), (14) при условии $\alpha_2 = 1$ равносильно решению системы (4), (5) при условии $\alpha_1 = \infty$, и наоборот, решение системы (13), (14) при условии $\alpha_2 = \infty$ равносильно решению системы (4), (5) при условии $\alpha_1 = 1$. Это позволяет, в дальнейшем, не пользоваться двумя формами задания параметрического тензора R_{ij} (5) и (14), а ограничиться одной формой, разрешая параметру α меняться в пределах от 0 до ∞, а не только в пределах $0 \le \alpha \le 1$.

Кроме того, можно заметить, что значения параметра g определяют три зоны развития деформаций при активном одноосном монотонном нагружении:

- если $g > 0$, то реализуется зона пластического течения с упрочнением - восходящая диаграмма $\sigma \sim \varepsilon$ с выпуклостью вверх;
- если $g < 0$ и $g < -1$, то после пластического течения происходит микроразрушение и разупрочнение материала - выпуклая вверх кривая $\sigma \sim \varepsilon$ с возрастанием и последующим убыванием вплоть до нуля – линия вязкого разрушения;
- если $-1 < g < 0$, то происходит затвердевание материала - восходящая диаграмма $\sigma \sim \varepsilon$ с выпуклостью вниз.

Таким образом, на плоскости $\sigma \sim \varepsilon$ при одноосном монотонном нагружении в зависимости от величины параметра g образуются две характерные точки $(\varepsilon_*, 0)$ и $(0, \sigma_*)$, которые можно назвать точками вязкого и хрупкого разрушения.

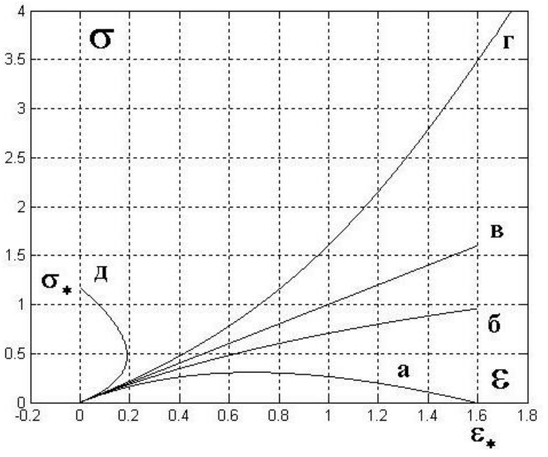

Рисунок 3. Развитие деформаций в зависимости от параметров моделей

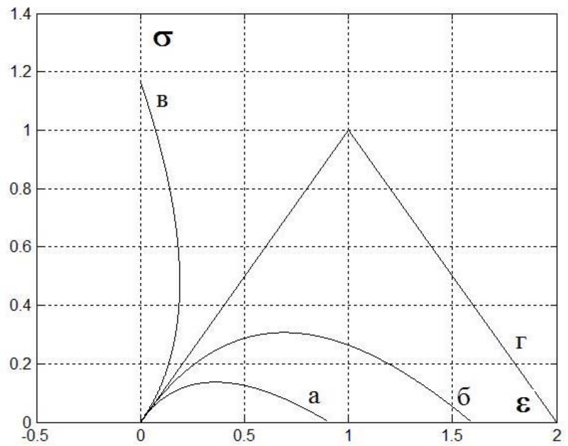

Рисунок 4. Развитие деформаций в зависимости от параметра эндохронности

На рисунке 3 приведены различные кривые развития деформации при одноосном нагружении, вычисленные при следующих значениях параметров моделей $2G = 1$, $\alpha_2 = 1$, $\rho_2 = 1$, $\alpha_1 = 1$, $\varepsilon_0 = 1$: а – кривая течения с разупрочнением и вязким разрушением ($g = -2$); б - кривая течения с упрочнением ($g = 4$); в – линия упругости; г – кривая течения с затвердеванием ($g = -0.75$); д – кривая «полного» затвердевания и хрупкого разрушения ($g = -2$,

$\alpha_2 = 4$).

На рисунке 4 приведены кривые деформирования, отвечающие различным значениям параметра α при фиксированном отрицательном значении параметра g. В расчетах было принято, что $\rho_2 = 1$, $2G = 1$, $g = -4$, $\alpha = 1$ (линия а), $\alpha = 1.5$ (кривая б), $\alpha = 4$ (линия в), $\alpha = 0$ (кривая г).

Отдельно рассмотрим поведение разупрочняющегося материала, когда активное нагружение сменяется разгрузкой, а затем последующим активным нагружением.

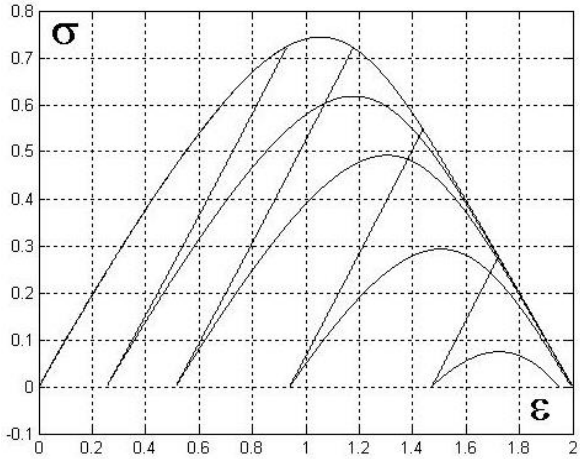

Рисунок 5. Поведение разупрочняющегося материала при нагружении с разгрузками

На рисунке 5 представлены расчеты поведения гипотетического материала по определяющим соотношениям эндохронной теории, учитывающей микроразрушения, по схеме нагрузка-разгрузка-нагрузка в первой четверти при $\alpha = 0.2$, $2G = 1$, $\rho_2 = 1$, $g + \alpha = -1.8$. Качественно результаты расчётов по теории близки к опытным данным, полученным Борстом и Паминым в экспериментах на бетонах и грунтах [6].

Замечание

Соотношения для девиаторов в (4), (5) и (13), (14) можно дополнить уравнениями, учитывающими шаровые составляющие тензоров, в форме [7]

$$\beta(R_{ii}) = \frac{dR_{ii}}{dR}, \; R_{ii} = \varepsilon_{ii} - \frac{k_2}{K}\sigma_{ii}.$$

Здесь R_{ii} – первый инвариант параметрического тензора R_{ij}, ε_{ii} – первый инвариант тензора деформаций (мера разрыхления материала), σ_{ii} – первый инвариант тензора напряжений, K – объемный модуль материала, константа k_2 и функция материала β определяются на основе анализа экспериментальных данных.

Эти формулы обобщают предложения, используемые исследователями школы В.В. Новожилова в критерии прочности Новожилова-Рыбакиной [8].

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 14-01-00202).

Литература

1. Прагер В. Об идеально затвердевающих материалах // Механика: сборник переводов. 1958. № 3 (49). С. 99-103.
2. Прагер В. Упругие тела ограниченной сжимаемости // Механика: сборник переводов. 1958. № 6 (52). С. 97-101.
3. Кадашевич Ю.И., Помыткин С.П. О взаимосвязи теории пластичности, учитывающей микронапряжения, с эндохронной теорией пластичности // Известия РАН. Механика твердого тела. 1997. № 4. С. 99-105.

4. Кадашевич Ю.И. Теория пластичности и ползучести, учитывающая микроразрушение // Доклады АН СССР. 1982. Т.266. № 6. С. 1341-1344.
5. Кадашевич Ю.И., Пейсахов А.М., Помыткин С.П. Эндохронная теории непругости, учитывающая микроразрушения // Микромеханизмы пластичности, разрушения и сопутствующие явления: материалы IV международной школы-конференции (Тамбов, 24-30 июня 2007). Тамбов, 2007. С. 280-283.
6. Pamin, R.de Borst. Numerical simulation of localization phenomena using gradient plasticity and finite elements // Heron. 1995. Vol. 40. № 1. P. 71-92.
7. Кадашевич Ю.И., Помыткин С.П. О построении критерия прочности при сложном нагружении // Актуальные проблемы прочности: материалы 46-й международной конференции (Витебск, 15-17 октября, 2007). Витебск, 2007. Ч. 1. С. 68-74.
8. Рыбакина О.Г. О работах В.В. Новожилова в области феноменологического описания первой стадии разрушения (накопления повреждений) // Труды ЦНИИ имени академика А.Н. Крылова. 2010. Вып. 53. 1 (337). С. 127-133.