

Относительное движение связанных космических аппаратов в полярных координатах

проф. Иванов В.А., проф. Ручинский В.С, к.т.н. Ручинская Е.В.
МАТИ-РГТУ им. К.Э. Циолковского

2svr@mail.ru

Аннотация. Данная работа посвящена разработке математических моделей движения связанных космических объектов. Проведено исследование траекторий относительного движения связанных космических аппаратов в полярных координатах.

Ключевые слова: связанные космических аппараты, тросовые системы, центр масс, визирная и орбитальная системы координат, орбитальный полет, ближнее наведение, управление сближением.

Введение

Проведенные эксперименты подтвердили возможность использования связанных космических аппаратов для решения научных, народнохозяйственных и специальных задач. Рассмотрению конкретных направлений практического использования тросовых систем посвящено достаточно много работ [1, 4 – 16].

Постановка задачи

Из методов управления сближением на участке ближнего наведения космических аппаратов (КА) наибольшего внимания заслуживает метод наведения при постоянной угловой скорости линии визирования.

Метод постоянной угловой скорости линии визирования оказывается достаточно универсальным. За счет определенного выбора угловой скорости линии визирования можно осуществить реализацию сближения КА с жестким и мягким контактом, а также сближение с пролетом мимо определенного космического аппарата на заданном расстоянии с последующим удалением.

Учитывая указанные обстоятельства, в дальнейшем при решении задачи сближения КА с использованием тросовой системы на участке ближнего наведения будем рассматривать применение метода постоянной угловой скорости линии визирования.

Данная работа является продолжением исследования, изложенного в статье [15].

Анализ траекторий относительного движения в полярных координатах

Относительное движение объектов в неподвижной визирной системе координат $C\xi_n\eta_n\zeta_n$ может характеризоваться изменением полярных координат D и φ (рисунок 1 в статье [15]).

Воспользовавшись выражением $\Omega = \frac{d\varphi}{dt}$ перепишем уравнение относительного движения при постоянной угловой скорости линии визирования (3) [15]:

$$\left(\frac{dD}{dt}\right)^2 - D^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = C.$$

Это дифференциальное уравнение легко привести к следующему виду:

$$\frac{dD}{d\varphi} = \pm\sqrt{D^2 + A}, \quad \text{где } A = \frac{C}{\Omega^2}. \quad (1)$$

Выражение для константы A может быть записано через начальные значения парамет-

ров относительного движения:

$$A = D_0^2 \left[\left(\frac{D_0}{\Delta_0} \right)^2 - 2 \right]. \quad (2)$$

Таким образом, относительное движение объектов при $\Omega = const$ в полярных координатах определяется нелинейным дифференциальным уравнением первого порядка второй степени. Рассмотрение этого уравнения, а также соотношений (3) показывает, что траектория относительного движения полностью определяется начальными значениями D_0 , Δ_0 и не зависит от относительной скорости. При одних и тех же значениях D_0 , Δ_0 и разных $V_{отн_0}$ движение будет происходить по одной и той же траектории, но с разными скоростями.

Проинтегрировав выражение (1), получим уравнение траектории относительного движения в полярных координатах.

В случаях сближения ($\frac{dD}{d\varphi} < 0$):

$$D = \frac{1}{2} \left(\frac{D_0 + \sqrt{D_0^2 + A}}{e^{(\varphi - \varphi_0)}} - \frac{A e^{(\varphi - \varphi_0)}}{D_0 + \sqrt{D_0^2 + A}} \right), \quad \varphi = \varphi_0 + \ln \frac{D_0 + \sqrt{D_0^2 + A}}{D + \sqrt{D^2 + A}}. \quad (3)$$

В случае удаления ($\frac{dD}{d\varphi} \geq 0$):

$$D = \frac{1}{2} \left[\left(D_0 + \sqrt{D_0^2 + A} \right) e^{(\varphi - \varphi_0)} - \frac{A}{\left(D_0 + \sqrt{D_0^2 + A} \right) e^{(\varphi - \varphi_0)}} \right], \quad \varphi = \varphi_0 + \ln \frac{D + \sqrt{D^2 + A}}{D_0 + \sqrt{D_0^2 + A}}. \quad (4)$$

При $A \geq 0$ имеют место траектории сближения и удаления первой группы, а при $A < 0$ – траектории второй группы.

В случае необходимости по величине производной $\frac{dD}{d\varphi}$ легко определяется значение

$$\text{скорости сближения или удаления } \dot{D} = \Omega \frac{dD}{d\varphi}. \quad (5)$$

Поэтому из (1) также непосредственно следует, что относительное движение при $\Omega = const$ характеризуется непрерывным уменьшением скорости сближения или непрерывным увеличением скорости удаления объектов. Сближение при $A = 0$ в пределе заканчивается мягкой встречей.

Перейдем к рассмотрению относительного движения при постоянной угловой скорости линии визирования в координатах \tilde{D} и φ . Преобразуем уравнение (1), введя безразмерную относительную дальность \tilde{D} .

$$\frac{d\tilde{D}}{d\varphi} = \pm \sqrt{\tilde{D}^2 + D_{\Delta_0}^2 - 2}. \quad (6)$$

Запишем уравнение траектории в полярных координатах \tilde{D} и φ , используя в качестве параметра величину D_{Δ_0} .

В случае сближения ($\frac{dD}{d\varphi} < 0$):

$$\tilde{D} = \frac{1}{2} \left(\frac{1 + \sqrt{D_{\Delta_0}^2 - 1}}{e^{(\varphi - \varphi_0)}} - \frac{(D_{\Delta_0}^2 - 2) e^{(\varphi - \varphi_0)}}{1 + \sqrt{D_{\Delta_0}^2 - 1}} \right), \quad \varphi = \varphi_0 + \ln \frac{1 + \sqrt{D_{\Delta_0}^2 - 1}}{\tilde{D} + \sqrt{\tilde{D}^2 + D_{\Delta_0}^2 - 2}}. \quad (7)$$

В случае удаления ($\frac{d\tilde{D}}{d\varphi} \geq 0$):

$$\tilde{D} = \frac{1}{2} \left[\left(1 + \sqrt{D_{\Delta_0}^2 - 1} \right) e^{(\varphi - \varphi_0)} - \frac{\tilde{D}_{\Delta_0}^2 - 2}{\left(1 + \sqrt{\tilde{D}_{\Delta_0}^2 - 1} \right) e^{(\varphi - \varphi_0)}} \right], \quad \varphi = \varphi_0 + \ln \frac{\tilde{D} + \sqrt{\tilde{D}^2 + D_{\Delta_0}^2 - 2}}{1 + \sqrt{D_{\Delta_0}^2 - 1}}. \quad (8)$$

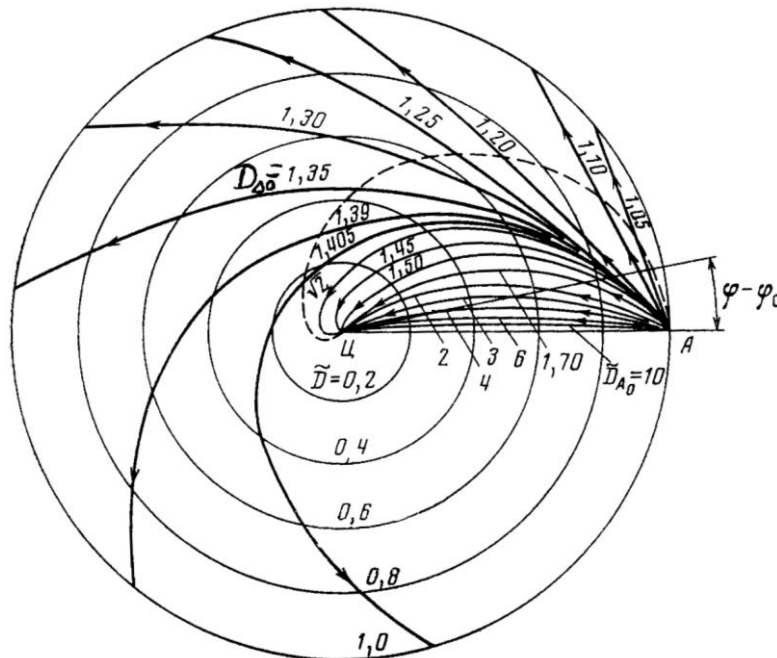


Рисунок 1. Траектории относительного движения при сближении, оканчивающемся встречей ($D_{\Delta_0} \geq \sqrt{2}$) или пролетом мимо цели (точка Ц) с последующим удалением ($D_{\Delta_0} < \sqrt{2}$)

На рисунке 1 изображены траектории относительного движения при сближении, оканчивающемся встречей ($D_{\Delta_0} \geq \sqrt{2}$) или пролетом мимо цели (точка Ц) с последующим удалением ($D_{\Delta_0} < \sqrt{2}$). Траектории построены для безразмерных относительных дальностей \tilde{D} . Пунктирная линия представляет собой геометрическое место точек минимального расстояния до цели для пролетных траекторий.

Используя зависимость (5), после несложных преобразований можно получить выражение для безразмерной скорости изменения относительной дальности \tilde{D} :

$$\tilde{D} = \frac{d\tilde{D}}{d\varphi}. \quad (9)$$

Следовательно, для анализа изменений \tilde{D} можно воспользоваться зависимостью (6).

Для анализа относительного движения при $\Omega = \text{const}$ существенное значение имеет определение угла облета цели при сближении до встречи φ_B или до пролета на минимальном расстоянии φ_{Π} . Под углом облета будем понимать угол поворота линии визирования от момента начала движения при $\Omega = \text{const}$ до одного из двух указанных конечных положений. Выражения для углов облета φ_B и φ_{Π} могут быть получены из (7) постановкой $\tilde{D} = 0$ и $\tilde{D} = \tilde{D}_{\Pi}$.

$$\varphi_B = \ln \frac{1 + \sqrt{D_{\Delta_0}^2 - 1}}{\sqrt{D_{\Delta_0}^2 - 2}}, \quad \varphi_{\Pi} = \ln \frac{1 + \sqrt{D_{\Delta_0}^2 - 1}}{\sqrt{2 - D_{\Delta_0}^2}}. \quad (10)$$

Продифференцируем зависимости для φ_B и φ_{Π} по параметру D_{Δ_0} :

$$\frac{d\varphi_B}{dD_{\Delta_0}} = -\frac{D_{\Delta_0}}{(D_{\Delta_0}^2 - 2)\sqrt{D_{\Delta_0}^2 - 1}}, \quad \frac{d\varphi_{\Pi}}{dD_{\Delta_0}} = \frac{D_{\Delta_0}}{(2 - D_{\Delta_0}^2)\sqrt{D_{\Delta_0}^2 - 1}}.$$

При сближении, оканчивающемся встречей $D_{\Delta_0} \geq \sqrt{2}$, а при сближении с пролетом $D_{\Delta_0} < \sqrt{2}$. Следовательно, $\frac{d\varphi_B}{dD_{\Delta_0}} < 0$, $\frac{d\varphi_{\Pi}}{dD_{\Delta_0}} > 0$.

Выводы

Анализ приведенных зависимостей и рассмотрение графиков на рисунке 2, показывает, что при увеличении параметра D_{Δ_0} от 1 до $\sqrt{2}$ и при уменьшении его от ∞ до $\sqrt{2}$ угол облета цели возрастает от 0 до ∞ . Однако значение угла облета может быть более 180° только при значениях D_{Δ_0} в интервале от 1,40 до 1,42. Поэтому для реализации полного облета цели на 360° необходимо осуществлять наведение при значениях D_{Δ_0} весьма близких к $\sqrt{2}$.

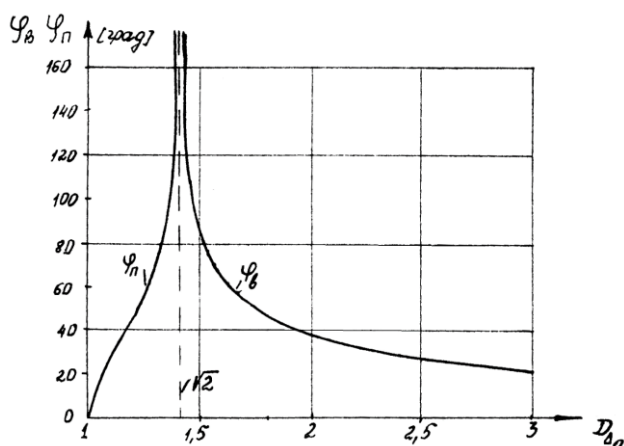


Рисунок 2. При увеличении параметра D_{Δ_0} от 1 до $\sqrt{2}$ и при уменьшении его от $+\infty$ до $\sqrt{2}$ угол облета цели возрастает от 0 до $+\infty$

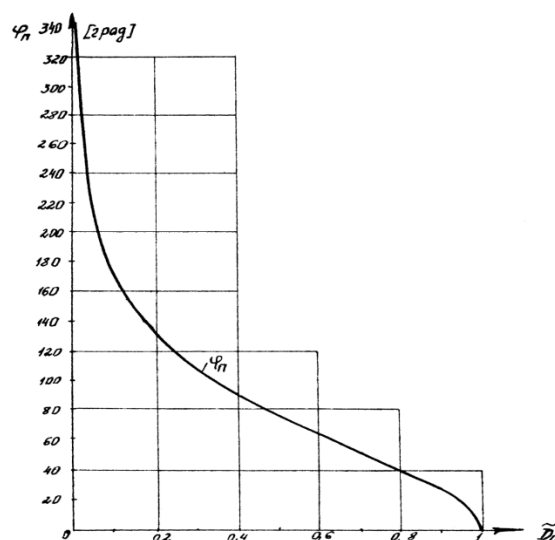


Рисунок 3. Зависимость угла φ_{Π} от \tilde{D}_{Π}

Запишем выражения для требуемых значений параметра D_{Δ_0} , необходимых для обеспечения заданных конечных величин углов φ_B и φ_{Π} :

$$D_{\Delta_0} = \frac{\sqrt{2(e^{4\varphi_B} + 1)}}{e^{2\varphi_B} - 1}, \quad D_{\Delta_0} = \frac{\sqrt{2(e^{4\varphi_{\Pi}} + 1)}}{e^{2\varphi_{\Pi}} + 1}. \quad (11)$$

Используя зависимости (1) и (12) из статьи [15], можно получить соотношение, связывающее угол облета φ_{Π} и безразмерную дальность пролета \tilde{D}_{Π} .

$$\varphi_{\Pi} = \ln \frac{1 + \sqrt{1 - \tilde{D}_{\Pi}^2}}{\tilde{D}_{\Pi}}. \quad (12)$$

Видно, что при уменьшении безразмерного пролета \tilde{D}_H угол облета возрастает и в пределе $\varphi_H \rightarrow \infty$ при $\tilde{D}_H \rightarrow 0$. Графически зависимость угла φ_H от \tilde{D}_H представлена на рисунке 3.

Остановимся более подробно на рассмотрении траектории относительного движения при $D_{\Delta_0} = \sqrt{2}$. Уравнение этой траектории в полярных координатах оказывается весьма простым. Траектория сближения ($\frac{dD}{d\varphi} < 0$):

$$\tilde{D} = e^{-(\varphi - \varphi_0)}, \quad D = D_0 e^{-(\varphi - \varphi_0)}. \quad (13)$$

Траектория удаления ($\frac{d\tilde{D}}{d\varphi} \geq 0$):

$$\tilde{D} = e^{(\varphi - \varphi_0)}, \quad D = D_0 e^{(\varphi - \varphi_0)}. \quad (14)$$

Анализ выражений (13) и (14) показывает, что при $D_{\Delta_0} = \sqrt{2}$ траектория относительного движения в случае сближения представляет собой закручивающуюся логарифмическую спираль, а в случае удаления от цели – развертывающуюся спираль. Следовательно, для $\dot{D} < 0$ при $\varphi \rightarrow \infty$ относительная дальность неограниченно убывает, а для $\dot{D} > 0$ неограниченно возрастает. Из (6) следует, что в случае относительного движения при $D_{\Delta_0} = \sqrt{2}$ $\frac{d\tilde{D}}{d\varphi} = \pm \tilde{D}$.

Относительное движение при $D_{\Delta_0} = \sqrt{2}$ характеризуется тем, что в процессе сближения и удаления линия визирования совершает бесконечное число оборотов вокруг центра масс цели. Расстояние между витками траектории (логарифмической спирали) при сближении убывает, а при удалении возрастают по закону геометрической прогрессии. Известно также, что для логарифмической спирали $D = a^\mu$ угол μ , составляемый касательной в произвольной точке логарифмической спирали с радиус-вектором точки касания зависит лишь от параметра a и для каждой спирали является величиной постоянной. Для траектории относительного движения $\operatorname{tg} \mu = \frac{1}{\ln e} = 1$ при $D_{\Delta_0} = \sqrt{2}$. Следовательно, угол $\mu = 45^\circ$. Это полностью совпадает с ранее полученными результатами, согласно которым относительное движение в рассматриваемом случае определяется соотношением $D = a^\mu$.

В весьма простой форме могут быть записаны выражения для определения текущего значения радиуса кривизны траектории ρ и длины дуги между двумя точками траектории S :

$$\rho = \sqrt{2} D, \quad S = \sqrt{2} |D_1 - D_2|. \quad (15)$$

Тогда длина дуги траектории от некоторой текущей точки (определяемой относительной дальностью D) до центра масс цели характеризуется выражением:

$$S_H = \sqrt{2} D. \quad (16)$$

Следовательно, длина дуги траектории S_H оказывается равной текущему значению радиуса кривизны траектории.

Литература

1. Полет космических аппаратов. Примеры и задачи // Ю.Ф. Авдеев, А.И. Беляков, А.В. Брыков и др. – М.: Машиностроение, 1990. – 272 с.
2. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. – М.: Физматгиз, 1959. 916 с.
3. Андронов А.А., Леонтович Е.А., Гордон И.И., Майер А.Г. Теория бифуркаций динамиче-

- ских систем на плоскости. – М.: Наука, 1967. – 488 с.
4. Белецкий В.В., Левин Е.М. Динамика космических тросовых систем. – М.: Наука, 1990. – 336 с.
 5. Иванов В.А., Ситарский Ю.С. Динамика полета системы гибко связанных космических объектов. – М.: Машиностроение, 1986. – 248 с.
 6. Иванов В.А., Купреев С.А., Ручинский В.С. Динамика полета и математическое моделирование орбитального функционирования системы связанных космических объектов. – М.: Изд-во «МАТИ» Российского государственного технологического университета им. К.Э. Циолковского, 2008. – 200 с.
 7. Иванов В.А., Купреев С.А., Ручинский В.С. Выведение привязного объекта в расчетную точку встречи с космическим аппаратом, движущимся по эллиптической орбите // Научные труды (Вестник МАТИ). Вып.20(92). – М.: ИЦ «МАТИ», 2013. – С. 110-119.
 8. Иванов В.А., Купреев С.А., Ручинский В.С. Выведение привязного объекта в расчетную точку встречи с космическим аппаратом, движущимся по круговой орбите // Научные труды (Вестник МАТИ). Вып.21(93). – М.: ИЦ «МАТИ», 2013. – С. 86-97.
 9. Лебедев А.А., Соколов В.Б. Встреча на орбите. – М.: Машиностроение, 1969. – 366 с.
 10. Родников А.В. Модели относительного движения орбитальной леерной связи // Тезисы докладов шестого международного аэрокосмического конгресса JCA'09. М., 2009. – С. 268-269.
 11. Иванов В.А., Купреев С.А., Ручинский В.С. Орбитальное функционирование связанных космических объектов. – М.: Изд-во «Инфра-М», 2014. – 320 с.
 12. Ручинская Е.В. Основные зависимости, определяющие относительное движение привязного объекта, наводимого на космический аппарат // Международная молодежная конференция «Гагаринские чтения». Секция № 17 «Механика космического полета». – М.: Изд-во «Инфра-М», 2015. – С. 287–289.
 13. Ручинская Е.В. Анализ траекторий относительного движения в полярных координатах// Международная молодежная конференция «Гагаринские чтения». Секция № 17 «Механика космического полета». – М.: изд-во «Инфра-М», 2015. – С. 289–292.
 14. Иванов В.А., Купреев С.А., Ручинский В.С. Математическое моделирование наведения привязного объекта космической тросовой системы // Научные труды (Вестник МАТИ). Вып. 25(97). – М.: ИЦ «МАТИ», 2015. – С. 37 – 49.
 15. Иванов В.А., Ручинский В.С., Ручинская Е.В. Математическое моделирование ближнего наведения космического аппарата // Известия МГТУ МАМИ, 2015. Вып. №..... - С.
 16. Чабров Г.И. Вращающаяся связка двух КА как средство перевода КА на новые орбиты // Тезисы докладов научно-технической конференции Московского технического университета связи и информатики. М., 1999. – С. 93.