

Формулы для расчета геометрических характеристик плоских фигур, ограниченных кубическими сплайновыми кривыми

доц. Калядин В.И.

Университет машиностроения

8(495)-223-05-23 (1482), vi_kadin@mail.ru

Аннотация. Рассмотрен расчёт геометрических характеристик плоских фигур, контуры которых описаны кубическими сплайновыми кривыми. Получены точные формулы для вычисления площади и статических моментов. Формулы позволяют определять положение центра тяжести фигур и объёмы тел, образованных вращением фигурвокруг оси.

Ключевые слова: кубические сплайновые кривые, сегмент кривой, параметризация, статический момент площади.

В технических приложениях часто требуется представлять плавные обводы плоских сечений деталей гладкими кривыми. Требуемые расчёты геометрических характеристик сечений, таких как площади и различные моменты, обычно выполняют по координатам точек этих кривых. С развитием компьютерной геометрии для описания гладких контуров стали использовать кубические сплайновые кривые. Формы представления этих сплайновых кривых могут различаться, например, это могут быть классические параметрические сплайны [1] или В-сплайны [2] с лонгальным параметром l [1], выражающим длину ломаной, опирающейся на узлы (где $l = l_n$, $n = 1, \dots, N$) сплайна. А возможно будут использованы В-сплайны или фундаментальные сплайны [3] с параметром t , изменяющимся на единицу при переходе через узлы. Однако у всех этих кривых сегменты представляются кубическим параметрическим полиномом. Поэтому расчёты геометрических характеристик сечений, которые ограничены сплайновыми кривыми, естественно ориентировать на параметры сегментов этих кривых. Вывод формул для таких расчётов, позволяющих вычислять площади и статические моменты, представлен далее.

Площадь внутри замкнутого контура C определяется по формуле

$$S = \frac{1}{2} \left| \int_C (x \cdot dy - y \cdot dx) \right|. \quad (1)$$

Заметим, что если обход контура выполнять против хода часовой стрелки, то модульные скобки в формуле можно опустить.

В случае задания контура в виде полигона площадь (площадь многоугольника) вычисляется по x_n, y_n -координатами его вершин:

$$S = \frac{1}{2} \left| \sum_{n=1}^N (x_{n-1}y_n - x_n y_{n-1}) \right|. \quad (2)$$

В случае, когда контур C образован замкнутой сплайновой кривой, ограниченную им площадь S можно точно выразить через параметры этой кривой, суммируя составляющие ΔS_n площади по её сегментам:

$$S = \sum_{n=1}^N \Delta S_n. \quad (3)$$

С целью вычислить составляющие ΔS_n по сегментам рассмотрим для кубической сплайновой кривой $\mathbf{V}(t)$ представление её n -го сегмента $\mathbf{V}_n(t)$

$$\mathbf{V}_n(t) = \mathbf{P}_{n-1} \cdot \varphi(t) + \mathbf{P}_n \cdot \psi(t) + h_n \cdot \mathbf{T}_{n-1} \cdot \xi(t) + h_n \cdot \mathbf{T}_n \cdot \eta(t), \quad t \in [0, 1], \quad (4)$$

$$h_n = l_n - l_{n-1}, \quad L = \sum_{n=1}^N h_n \quad (5)$$

где: $\mathbf{V}_n(t) = [X_n(t) Y_n(t)]^T$ – вектор-функция и составляющие вектора,

$\mathbf{P}_{n-1}, \mathbf{P}_n$ – векторы точек начала и конца сегмента ($\mathbf{P}_n = [x_n \quad y_n]^T$),

h_n – длина звена ломаной в представлении лонгального параметра (иначе $h_n = 1$),

$\mathbf{T}_{n-1}, \mathbf{T}_n$ – векторы касательных в начале и в конце сегмента ($\mathbf{T}_n = d\mathbf{V}/dl = [T_{X_n} \quad T_{Y_n}]^T$),

$\varphi(t), \psi(t), \xi(t), \eta(t)$ – весовые функции:

$$\varphi(t) \equiv \phi_1 = 1 - 3t^2 + 2t^3, \quad (6)$$

$$\psi(t) \equiv \phi_2 = 3t^2 - 2t^3, \quad (7)$$

$$\xi(t) \equiv \phi_3 = t - 2t^2 + 3t^3, \quad (8)$$

$$\eta(t) \equiv \phi_4 = t^2(1-t). \quad (9)$$

Составляющую площади, ограниченную замкнутым контуром, можно вычислить по формуле:

$$\Delta S_i = \frac{1}{2} \cdot \left| \int_{\Delta C} \mathbf{V}_i \times d\mathbf{V}_i \right| = \frac{1}{2} \cdot \left| \int_0^1 \mathbf{V}_i(t) \times d\mathbf{V}_i(t) \right| = \frac{1}{2} \cdot \left| \int_0^1 (X_i(t) \cdot \dot{Y}(t) - \dot{X}(t) \cdot Y(t)) dt \right|. \quad (10)$$

Представим весовые функции и определяющие параметры сплайна в форме векторов:

$$\Phi \equiv [\phi_1 \quad \phi_2 \quad \phi_3 \quad \phi_4]^T = [\varphi(t) \quad \psi(t) \quad \xi(t) \quad \eta(t)]^T, \quad \Pi = [\mathbf{P}_{n-1} \quad \mathbf{P}_n \quad h_n \mathbf{T}_{n-1} \quad h_n \mathbf{T}_n]^T, \quad (11)$$

а сегмент представим в виде внутреннего произведения этих векторов:

$$\mathbf{V}_n(t) = \Phi^T \Pi. \quad (12)$$

Аналогично записываются произведения для проекций:

$$X_n(t) = \Phi^T \mathbf{u}_n = \Phi^T [x_{n-1} \quad x_n \quad h_n \cdot T_{X_{n-1}} \quad h_n \cdot T_{X_n}]^T, \quad (13)$$

$$Y_n(t) = \Phi^T \mathbf{v}_n = \Phi^T [y_{n-1} \quad y_n \quad h_n \cdot T_{Y_{n-1}} \quad h_n \cdot T_{Y_n}]^T, \quad (14)$$

$$\dot{X}_n(t) = \dot{\Phi}^T \mathbf{u}_n = \dot{\Phi}^T [x_{n-1} \quad x_n \quad h_n \cdot T_{X_{n-1}} \quad h_n \cdot T_{X_n}]^T, \quad (15)$$

$$\dot{Y}_n(t) = \dot{\Phi}^T \mathbf{v}_n = \dot{\Phi}^T [y_{n-1} \quad y_n \quad h_n \cdot T_{Y_{n-1}} \quad h_n \cdot T_{Y_n}]^T, \quad (16)$$

где вектор

$$\dot{\Phi} = [\dot{\varphi}(t) \quad \dot{\psi}(t) \quad \dot{\xi}(t) \quad \dot{\eta}(t)]^T \quad (17)$$

содержит (обозначенные точкой) производные от весовых функций по параметру.

Перпишем теперь интеграл (10) с учётом (13)-(16):

$$\Delta S_n = \frac{1}{2} \cdot \left| \int_0^1 (\mathbf{u}_n^T \Phi \dot{\Phi}^T \mathbf{v}_n - \mathbf{u}_n^T \dot{\Phi} \Phi^T \mathbf{v}_n) dt \right| = \frac{1}{2} \cdot \left| \mathbf{u}_n^T \int_0^1 (\Phi \dot{\Phi}^T - \dot{\Phi} \Phi^T) dt \cdot \mathbf{v}_n \right| = \frac{1}{2} \cdot \left| \mathbf{u}_n^T \mathbf{A} \mathbf{v}_n \right|, \quad (18)$$

где элементы (4×4)-матрицы \mathbf{A} представляют собой интегралы:

$$a_{i,j} = \int_0^1 (\phi_i(t) \dot{\phi}_j(t) - \dot{\phi}_i(t) \phi_j(t)) dt, \quad [a_{i,j}] = \mathbf{A}, \quad (19)$$

от разности весовых функций и их производных. После вычисления этих интегралов получаем матрицу:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1/5 & -1/5 \\ -1 & 0 & -1/5 & 1/5 \\ -1/5 & 1/5 & 0 & -1/30 \\ 1/5 & -1/5 & 1/30 & 0 \end{bmatrix}. \quad (20)$$

Суммирование составляющих ΔS_i по всем N участкам замкнутой сплайновой кривой даёт формулу для вычисления площади:

$$S = \sum_{n=1}^N \Delta S_n = \frac{1}{2} \cdot \left| \sum_{n=1}^N \mathbf{u}_n^T \mathbf{A} \mathbf{v}_n \right|, \quad (21)$$

где:

$$\vec{\mathbf{u}}_n^T \equiv [\dots uk \dots]_n \equiv [u1 \ u2 \ u3 \ u4]_n = [x_{n-1} \ x_n \ h_n \cdot T_{X_{n-1}} \ h_n \cdot T_{X_n}], \quad (22)$$

$$\vec{\mathbf{v}}_n^T \equiv [\dots vk \dots]_n \equiv [v1 \ v2 \ v3 \ v4]_n = [y_{n-1} \ y_n \ h_n \cdot T_{Y_{n-1}} \ h_n \cdot T_{Y_n}]. \quad (23)$$

Отметим, что если параметр на сегменте сплайновой кривой меняется от нуля до единицы, то шаг $h_n=1$ в формулах (22), (23) может быть опущен. Имея это в виду и обозначая для краткости производные $h_n \cdot T_{X_n}$, $h_n \cdot T_{Y_n}$ по параметру t соответственно через p_n, q_n :

$$p_{n-1} = h_n \cdot T_{X_{n-1}}, \quad p_n = h_n \cdot T_{X_n}, \quad q_{n-1} = h_n \cdot T_{Y_{n-1}}, \quad q_n = h_n \cdot T_{Y_n}, \quad (24)$$

приведём запись формулы (21) в виде алгебраического (не матричного) выражения:

$$S = \frac{1}{2} \cdot \left[\sum_{n=1}^N \left[(x_{n-1}y_n - x_n y_{n-1}) + \frac{(x_{n-1} - x_n)(q_{n-1} - q_n) - (y_{n-1} - y_n)(p_{n-1} - p_n)}{5} - \frac{p_{n-1}q_n - p_n q_{n-1}}{30} \right] \right]. \quad (25)$$

Заметим также, что в случае нулевых производных, когда сплайновая кривая вырождается в полигон, «работает» только левая верхняя (2×2)-часть матрицы \mathbf{A} в формуле (20) и первое слагаемое в квадратных скобках формулы (25). При этом формулы совпадают с упомянутой выше формулой (2).

Рассмотрим теперь вычисление статического момента площади, например, относительно оси OY . Этот момент определим интегралом:

$$M_Y = \frac{1}{2} \int_C x^2 dy = \frac{1}{2} \int_0^L x(l)^2 y'(l) \cdot dl, \quad (26)$$

предполагая, что контур C обходится против движения часовой стрелки.

Также как в случае площади организуем суммированием по сегментам:

$$M_Y = \sum_{n=1}^N \Delta M_{Y_n}, \quad (27)$$

где:

$$\Delta M_{Y_n} = \frac{1}{2} \int_0^1 x_n(t)^2 \cdot y'_n(t) \cdot dt, \quad (28)$$

Представим формулу с введёнными выше обозначениями:

$$\begin{aligned} \Delta M_{Y_n} &= \frac{1}{2} \int_0^1 \mathbf{u}^T \Phi \Phi^T \mathbf{u} \cdot \dot{\Phi}^T \mathbf{v} \cdot dt = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \mathbf{u}^T \Phi \Phi^T \mathbf{u} \cdot (Y_{n-1} \cdot \varphi(t) + Y_n \cdot \psi(t) + h_n \cdot T_{Y_{n-1}} \cdot \xi(t) + h_n \cdot T_{Y_n} \cdot \eta(t)) \cdot dt = \\ &= \frac{1}{2} \cdot Y_{n-1} \cdot \mathbf{u}^T \int_0^1 \Phi \Phi^T \varphi(t) dt \cdot \mathbf{u} + \frac{1}{2} \cdot Y_n \cdot \mathbf{u}^T \int_0^1 \Phi \Phi^T \psi(t) dt \cdot \mathbf{u} + \\ &+ \frac{1}{2} \cdot h_n \cdot T_{Y_{n-1}} \cdot \mathbf{u}^T \int_0^1 \Phi \Phi^T \xi(t) dt \cdot \mathbf{u} + \frac{1}{2} \cdot h_n \cdot T_{Y_n} \cdot \mathbf{u}^T \int_0^1 \Phi \Phi^T \eta(t) dt \cdot \mathbf{u} \end{aligned} \quad (29)$$

Обозначив интегралы как:

$$\mathbf{B}_k = \int_0^1 \Phi \Phi^T \phi_k(t) dt = [b_{i,j,k}] = \left[\int_0^1 \phi_i \phi_j \phi_k dt \right], \quad (30)$$

запишем формулу для составляющих статического момента:

$$\Delta M_{Y_n} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^4 vk_n \cdot (\mathbf{u}_n^T \mathbf{B}_k \mathbf{u}_n), \quad (31)$$

а статический момент всего сечения определим формулой:

$$M_Y = \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^4 vk_n \cdot (\mathbf{u}_n^T \mathbf{B}_k \mathbf{u}_n), \quad (32)$$

где симметричные матрицы \mathbf{B}_k имеют вид:

$$\mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & -\frac{5}{84} & \frac{17}{420} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{17} & \frac{420}{84} & \frac{5}{105} \\ -\frac{6}{5} & \frac{3}{17} & -\frac{420}{1} & \frac{84}{1} \\ \frac{84}{17} & \frac{420}{5} & \frac{84}{1} & \frac{105}{-1} \\ 420 & 84 & 105 & 84 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{5}{84} & -\frac{17}{420} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{17} & \frac{420}{84} & \frac{5}{105} \\ \frac{6}{5} & \frac{3}{17} & -\frac{420}{1} & \frac{84}{1} \\ \frac{84}{17} & \frac{420}{5} & \frac{84}{1} & \frac{105}{-1} \\ -420 & 84 & 105 & 84 \end{bmatrix}, \tag{33}$$

$$\mathbf{B}_3 = \begin{bmatrix} \frac{5}{42} & \frac{2}{105} & \frac{1}{168} & \frac{1}{280} \\ \frac{2}{105} & \frac{17}{210} & \frac{1}{168} & \frac{11}{840} \\ -\frac{105}{1} & \frac{210}{1} & \frac{168}{0} & \frac{840}{1} \\ \frac{168}{1} & \frac{168}{11} & \frac{840}{1} & \frac{840}{-1} \\ \frac{280}{1} & \frac{840}{840} & \frac{840}{840} & \frac{420}{420} \end{bmatrix}, \mathbf{B}_4 = \begin{bmatrix} \frac{17}{210} & \frac{2}{105} & \frac{11}{840} & \frac{1}{168} \\ \frac{2}{105} & \frac{5}{42} & \frac{1}{280} & \frac{1}{168} \\ -\frac{105}{11} & \frac{42}{1} & \frac{280}{1} & \frac{168}{1} \\ -\frac{840}{1} & \frac{280}{1} & \frac{420}{1} & \frac{840}{0} \\ \frac{168}{168} & \frac{168}{168} & \frac{840}{840} & \frac{420}{420} \end{bmatrix}.$$

Первые две матрицы связаны соотношением $\mathbf{B}_1 = -\mathbf{B}_2$, а матрицы $\mathbf{B}_3, \mathbf{B}_4$ можно представить как клеточные тремя подматрицами размером (2×2) :

$$\mathbf{B}_3 = \begin{bmatrix} \mathbf{H} & \mathbf{C} \\ \mathbf{C}^T & \mathbf{W} \end{bmatrix}, \mathbf{B}_4 = \begin{bmatrix} \mathbf{H}^{diagT} & (-\mathbf{C}^{diagT})^T \\ -\mathbf{C}^{diagT} & \mathbf{W}^{diagT} \end{bmatrix}, \tag{34}$$

где оператор *diagT* означает перемену местами элементов главной диагонали указанных (2×2) -матриц. Опираясь на это выведем иной вариант формулы для расчёта статического момента:

$$M_Y = \sum_{n=1}^N (\Delta M_{Yn}^{k=1,2} + \Delta M_{Yn}^{k=3,4}) \tag{35}$$

с алгебраическим (не матричным) выражением для вычисления внутренней суммы в (32).

Учитывая равенство $\mathbf{B}_2 = -\mathbf{B}_1$, запишем:

$$\Delta M_{Yn}^{k=1,2} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^2 vk_n \cdot (\mathbf{u}_n^T \mathbf{B}_k \mathbf{u}_n) = \frac{1}{2} (y_n - y_{n-1}) \cdot \mathbf{u}_n^T \mathbf{B}_2 \mathbf{u}_n, \tag{36}$$

где переписанный в обозначениях (24) правый сомножитель равен:

$$\mathbf{u}_n^T \mathbf{B}_2 \mathbf{u}_n = \frac{x_{n-1}^2 + x_{n-1} \cdot x_n + x_n^2}{3} - \frac{17x_{n-1} \cdot p_n + 25(x_n \cdot p_n - x_{n-1} \cdot p_{n-1}) - 17x_n \cdot p_{n-1}}{210} + \frac{p_{n-1}^2}{84} - \frac{2 \cdot p_{n-1} \cdot p_n}{105} + \frac{p_n^2}{84}. \tag{37}$$

Второе (из двух взятых в скобки) слагаемое в (35) представляется в следующем виде:

$$\Delta M_{Yn}^{k=3,4} = \frac{1}{2} \sum_{k=3}^4 vk_n \cdot (\mathbf{u}_n^T \mathbf{B}_k \mathbf{u}_n) = \frac{1}{2} (q_{n-1} \cdot F3 + q_n \cdot F4), \tag{38}$$

где слагаемые в (38) определяются выражениями:

$$q_{n-1} F3 = q_{n-1} \left[\frac{(x_{n-1} - x_n) \cdot (25x_{n-1} + 17x_n)}{105} + \frac{(p_{n-1} - p_n) p_n}{210} + 1 \cdot \frac{(3x_{n-1} + 11x_n) \cdot p_n}{420} \right] + q_{n-1} \frac{5(x_{n-1} - x_n) \cdot p_{n-1}}{420} \tag{39}$$

$$q_n F4 = q_n \left[\frac{(x_n - x_{n-1}) \cdot (25x_n + 17x_{n-1})}{105} + \frac{(p_n - p_{n-1}) p_{n-1}}{210} - 1 \cdot \frac{(3x_n + 11x_{n-1}) \cdot p_{n-1}}{420} \right] + q_n \frac{5(x_{n-1} - x_n) \cdot p_n}{420} \tag{40}$$

В итоге представим (35) как выражение с алгебраическими (а не матричными) операциями:

$$M_Y = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \left[(y_n - y_{n-1}) \cdot \left(\frac{x_{n-1}^2 + x_{n-1}x_n + x_n^2}{3} + f(x_{n-1}, x_n, p_{n-1}, p_n, +1) + f(x_n, x_{n-1}, p_n, p_{n-1}, -1) \right) + \right. \\ \left. + q_{n-1} \cdot f1(x_{n-1}, x_n, p_{n-1}, p_n, +1) + q_n \cdot f1(x_n, x_{n-1}, p_n, p_{n-1}, -1) + \frac{5 \cdot (x_{n-1} - x_n) \cdot (q_{n-1}p_{n-1} + q_n p_n)}{420} \right] \quad (41)$$

где:

$$f(a, b, c, d, \text{sgn}) = \frac{\text{sgn} \cdot (25c - 17d) \cdot a}{210} + \left(\frac{c}{84} - \frac{d}{105} \right) \cdot c \quad (42)$$

$$f1(a, b, c, d, \text{sgn}) = \frac{(a - b) \cdot (25a + 17b)}{210} + \frac{(c - d) + \text{sgn} \cdot (3a + 11b)}{420} \cdot d \quad (43)$$

Покажем, что представленные формулы (32) и (41) – (43) в случае вырождения замкнутой сплайновой кривой в полигон (при нулевых производных) дадут совпадение с формулой:

$$M_Y = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N (y_n - y_{n-1}) \frac{y_{n-1}^2 + y_{n-1}y_n + y_n^2}{3} \quad (44)$$

для статического момента многоугольника. Действительно, используя в (32) и в (41) – (43) только первые две компоненты $(x_{n-1}, x_n), (y_{n-1}, y_n)$ векторов \mathbf{u}, \mathbf{v} и считая нулевыми две последние (связанные с производными) компоненты этих векторов, получаем формулу (44).

Для вычисления статического момента относительно оси OX при сохранении направления обхода контура перед множителем $\frac{1}{2}$ следует указать знак « \leftarrow », а в формуле (32) поменять местами векторы \mathbf{u} и \mathbf{v} :

$$M_X = -\frac{1}{2} \cdot \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^4 uk_n \cdot (\mathbf{v}_n^T \mathbf{B}_k \mathbf{v}_n). \quad (45)$$

В формулах (41)-(43) для вычисления момента M_X , указав знак « \leftarrow » перед множителями $\frac{1}{2}$, следует также поменять местами компоненты x_{n-1} и y_{n-1} , x_n и y_n , а также компоненты p_{n-1} и q_{n-1} , p_n и q_n .

Рассмотрим в качестве примера представление четырьмя сегментами замкнутой кубической параметрической сплайновой кривой окружности радиуса $r = 2$, получаемой в меридиональном сечении тора (рисунок 1), для которого расстояние от оси тора до центра указанной окружности составляет $R = 3$.

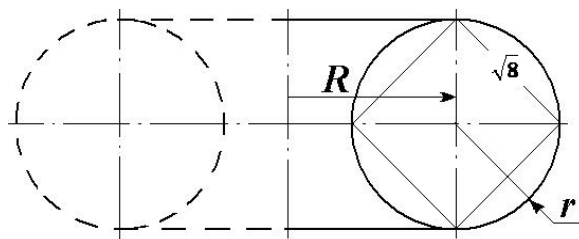


Рисунок 1. Тор с $r=2$ и $R=3$

При лонгальной параметризации длины h_n ($n=1, \dots, 4$) хорд сегментов равны $\sqrt{8}$, то есть $h_n = \sqrt{8}$. Координаты узлов и производные по лонгальному параметру следующие:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{T}_X = \begin{pmatrix} 0 \\ -(4-2\sqrt{2}) \\ 0 \\ 4-2\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{T}_Y = \begin{pmatrix} 4-2\sqrt{2} \\ 0 \\ -(4-2\sqrt{2}) \\ 0 \\ 4-2\sqrt{2} \end{pmatrix}, \mathbf{u}_n = \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ x_n \\ h_n \cdot T_{X_{n-1}} \\ h_n \cdot T_{X_n} \end{pmatrix}, \mathbf{v}_n = \begin{pmatrix} y_{n-1} \\ y_n \\ h_n \cdot T_{Y_{n-1}} \\ h_n \cdot T_{Y_n} \end{pmatrix} \quad (46)$$

Вычисленная по формуле (21) и/или (25) площадь внутри представляемой окружности составит:

$$S = \sum_{n=1}^4 \Delta S_n = \frac{1}{2} \cdot \left| \sum_{n=1}^N \mathbf{u}_n^T \mathbf{A} \mathbf{v}_n \right| = 12.569889 \quad (47)$$

(площадь круга составляет $S=12.56637$).

Вычисленный по формуле (32) и/или формулам (41)-(43) статический момент M_Y представляемой площади круга равен:

$$M_Y = \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=1}^4 \sum_{k=1}^4 v_k \cdot (\mathbf{u}_n^T \mathbf{B}_k \mathbf{u}_n) = 37.709668 \quad (48)$$

(статический момент круга составляет 37.699112).

Можно вычислить объём тора, полученный как тело вращения представляемой окружности:

$$V = 2\pi \cdot M_Y = 236.9368319 \quad (49)$$

(объём изначально заданного тора составляет 236.870506).

Таким образом, в примере выполнен расчёт указанных геометрических характеристик по параметрам кубической сплайновой кривой, заданным всего лишь в четырёх её узлах. Заметим, что при аппроксимации контура полигоном для достижения той же точности потребовалось более 150 узлов (вершин полигона).

Когда определяющий параметр t сплайновой кривой изменяется на сегменте от 0 до 1, в формулах для \mathbf{u}_n и \mathbf{v}_n следует непосредственно задавать производные по этому параметру. Так следует сделать для фундаментального сплайна, а использованным выше производным $d\mathbf{V}/dt = h_n \cdot T_{Yn} = \sqrt{8} \cdot (4 - 2\sqrt{2}) \approx 3.314$ в таком случае будет соответствовать фундаментальный сплайн с параметром натяжения $w = 1 - \sqrt{8} \cdot (2 - \sqrt{2}) \approx -0.657$ и соответственно «степенью гладкости» («tension» в [3]) $s = (1 - w)/2 \approx 0.828$.

Другие примеры применения формул для вычисления площадей и моментов площадей, ограниченных замкнутыми сплайновыми кривыми, можно найти в [4].

Выводы

Представленные здесь (в матричном виде и в виде алгебраического выражения) формулы (21), (25) и (32), (41)-(43) позволяют точно вычислять площади и соответственно статические моменты площадей, ограниченных замкнутыми кубическими сплайновыми кривыми, которые часто используются для описания контуров объектов в технических приложениях. Формулы также могут использоваться для вычисления объёмов тел вращения плоских фигур, описываемых кубическими сплайновыми кривыми.

Литература

1. Завьялов Ю.С., Леус В.А., Скороспелов В.А. Сплайны в инженерной геометрии. М.: Машиностроение, 1982, 304 с.
2. Gordon W., Riesenfeld R. B-spline. Curves and Surfaces. In Computer – Aided Geometric Design, New-York, Academic Press, 1974. P. 95-126.
3. Microsoft Document Explorer, GDI+, DrawClosedCurve-metod, Microsoft Corp. 2008.
4. Калядин В.И. Численные методы: решение задач в Excel на VBA. Часть 1. М.: Университет машиностроения, 2013. 142 с.