Математическая модель древовидного исполнительного механизма шагающего робота с учётом наложенных связей

к.т.н. доц. Ковальчук А.К., к.т.н. доц. Яроц В.В.
МГТУ им. Н.Э. Баумана
8 (499) 263-65-18, aleksandr.alexkov@yandex.ru, vyaroz@yandex.ru

Аннотация. Блочно-матричная модель древовидного исполнительного механизма шагающего робота разработана с учётом внешних наложенных связей. Предложен алгоритм формирования данной математической модели, основанный на использовании матриц (4x4) и теории графов. Показана эффективность его использования для шагающих роботов (на примере двуногого шагающего робота).

Ключевые слова: шагающий робот, математическая модель, исполнительный механизм.

Введение

При движении исполнительный механизм робота контактирует с окружающими предметами. Роботы могут взаимодействовать с опорной поверхностью через неподвижную стойку (манипуляторы, закреплённые на неподвижном основании), через элементы шасси (манипуляторы, установленные на колёсно-гусеничных машинах), через опорные элементы, установленные на определённых звеньях исполнительного механизма (шагающие роботы). Кроме этого, необходимо рассматривать ситуации, когда робот взаимодействует с предметами окружающего пространства, неподвижными относительно этого пространства (например, взаимодействие манипулятора с обрабатываемой деталью при механосборочных операциях). В любом из перечисленных случаев движение исполнительного механизма в окружающем пространстве определяется как динамикой самого исполнительного механизма, так и силами реакций связей, наложенных на исполнительный механизм [1].

Научная новизна данной статьи заключается в использовании предложенного нового подхода для математического описания роботов с древовидными кинематическими структурами, при котором кинематическая структура представляется в виде древовидного направленного графа, описанного в [2]. Использующиеся при этом условные обозначения описаны в [3, 7].

Дифференциальные уравнения движения шагающего робота

Уравнение динамики роботов, имеющих древовидную кинематическую структуру, записывается в виде [3]:

$$A(q)\ddot{q} + B(q,\dot{q}) - C(q)^0 f_{\text{в}} - H(q)^0 n_{в} = \tau, \tag{1}$$

где:

$$\begin{gathered} A(q) = \sigma({}^0z^{\,d})^T\{-\left[\Lambda\left({}^0c_{fD}\right)\right]^T m^{\,d}[D\,{}^0z^d(E-\sigma) + \Lambda^T\left({}^0c_{f_D}\right){}^0z^d\sigma] + \\ +D^T\cdot{}^0J_C^d\cdot D\cdot{}^0z^d\cdot\sigma\} + (E-\sigma)\cdot({}^0z^d)^T\cdot D^T\cdot m^{\,d}\cdot[D\cdot{}^0z^d\cdot(E-\sigma) + \\ +\Lambda^T({}^0c_{f_D})\cdot{}^0z^{\,d}\cdot\sigma]; \end{gathered} \tag{2}$$

$$\begin{gathered} B(q,\dot{q}) = \sigma({}^0z^{\,d})^T\cdot\{-\left[\Lambda\left({}^0c_{f_D}\right)\right]^T m^{\,d}\left[\Lambda^T\left({}^0c_{f_D}\right)\cdot\Lambda^T({}^0z^{\,d}\cdot\sigma\cdot\dot{q}^{\,d})\cdot(D-E) + \right. \\ +\Lambda^T(\Lambda^T\left({}^0c_{f_D}\right)\cdot y\cdot\dot{q}^{\,d}\cdot{}^0z^d\cdot D + \Lambda^T\left({}^0c_{f_D}\right)\cdot((D-E)\cdot y\cdot{}^0z^d\cdot\dot{q})^d) + \\ +2\cdot D\cdot\Lambda^T({}^0z^d(E-\sigma)\cdot\dot{q}^{\,d})\cdot(D-E)] + \\ +D^T\cdot{}^oJ_c^d\cdot D\cdot y\cdot\dot{q}^{\,d}\cdot\Lambda^T({}^0z^{\,d})(D-E) + D^T\cdot\Lambda(D\cdot{}^0z^d\cdot y\cdot\dot{q})^{d}\cdot{}^oJ_c^d\cdot D\}\times \\ \times{}^0z^d\cdot y\cdot\dot{q} + (E-\sigma)({}^0z^{\,d})^T\cdot D^T\cdot m^{\,d}\left[\Lambda^T\left({}^0c_{f_D}\right)\cdot\Lambda^T({}^0z^{\,d}\cdot\sigma\cdot\dot{q}^{\,d})(D-E) + \right. \\ +2\cdot D\cdot\Lambda^T({}^0z^d\cdot(E-\sigma)\cdot\dot{q}^{\,d})(D-E) + \\ +\Lambda^T(\Lambda^T\left({}^0c_{f_D}\right)\cdot y\cdot\dot{q}^{\,d}\cdot{}^0z^d\cdot D + \Lambda^T\left({}^0c_{f_D}\right)((D-E)\cdot y\cdot{}^0z^d\cdot\dot{q})^d)]{}^0z^d\cdot y\cdot\dot{q}; \end{gathered} \tag{3}$$

$$C(q) = y({}^0z^{\,d})^T\cdot[(D^T-E)\Lambda({}^0s^d)D^T + D^T\cdot\Lambda({}^0t^d)] + (E-y)({}^0z^{\,d})^T\cdot D^T; \tag{4}$$

$$H(q) = y({}^0z^{\,d})^T\cdot D^T. \tag{5}$$

здесь: $q = (q_1, q_2, \dots, q_N)^T$ – обобщённые координаты исполнительного механизма, записанные в виде вектора-столбца;

$q^{\,d} = diag(\,q_1, q_2, \dots, q_N\,)$ — обобщённые координаты исполнительного механизма, записанные в виде элементов диагональной матрицы;

$\Lambda(\bar{a}\,)\bar{b} = \bar{a} \times \bar{b} = -\Lambda(\bar{b}\,)\bar{a} = \Lambda^{T}(\bar{b}\,)\bar{a}$ — выражение для векторного произведения;

D — матрица достижимости звеньев исполнительного механизма;

${}^{0}z$ — блочный вектор-столбец, определяющий последовательность осей ${}^{0}\,\bar{z}_{ik}$, связанных систем координат звеньев исполнительного механизма;

y — диагональная матрица, определяющая типы сочленений звеньев исполнительного механизма;

${}^{0}l_{\,D}$ — блочная матрица, объединяющая векторы $\bar{l}_{\,i,j}$, соединяющие начала систем координат $f(j\,), ns(\,j\,)$ с началами основных систем координат звеньев i, в соответствии с взаимной достижимостью звеньев, описываемой матрицей достижимости $D(\,d_{i,j}$ — соответствующие элементы матрицы достижимости):

$${}^{0}\,\boldsymbol{l}_D = \begin{bmatrix} d_{1,1}\cdot{}^{0}\,\bar{l}_1 & \cdots & d_{1,N}\cdot{}^{0}\,\bar{l}_{1,N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{N,1}\cdot{}^{0}\,\bar{l}_{N,1} & \cdots & d_{N,N}\cdot{}^{0}\,\bar{l}_N \end{bmatrix};$$

${}^{0}\boldsymbol{s} = (0\;{}^{0}\bar{s}^{\,T}_{\,2}, \dots, {}^{0}\bar{s}^{\,T}_{\,N}\,)^{T}$ — блочный вектор, объединяющий векторы $\bar{s}_i$, которые соединяют начала систем координат $f(\,f(j\,)\,), ns(f(\,i\,)\,)$ с началами систем координат $f(i\,), ns(\,i\,)$ (первый элемент блочного вектора s нулевой, поскольку для первого звена вектор $\bar{s}_i$ не существует);

${}^{0}\boldsymbol{c} = (\,{}^{0}\bar{c}^{\,T}_{\,1}, \dots, {}^{0}\bar{c}^{\,T}_{\,N}\,)^{T}$ — блочный вектор, определяющий положения центров масс звеньев относительно начал их основных систем координат;

${}^{0}\boldsymbol{c}_{\,f_D}$ — матрица, объединяющая векторы $\bar{c}_{f\,i,j}$, соединяющие начала систем координат звеньев $f(j\,), ns(\,j\,)$ с центрами масс звеньев i, в соответствии со взаимной достижимостью звеньев, описываемой матрицей достижимости $D(\,d_{i,j}$ — соответствующие элементы матрицы достижимости):

$${}^{0}\,\boldsymbol{c}_{f_D} = \begin{bmatrix} d_{1,1}\cdot{}^{0}\,\bar{c}_{f_1} & \cdots & d_{1,N}\cdot{}^{0}\,\bar{c}_{f_{1,N}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{N,1}\cdot{}^{0}\,\bar{c}_{f_{N,1}} & \cdots & d_{N,N}\cdot{}^{0}\,\bar{c}_{f_N} \end{bmatrix} = {}^{0}\boldsymbol{l}_{\,D} + {}^{0}\boldsymbol{c}^{\,d}\cdot D;$$

${}^{0}\bar{\boldsymbol{f}}_{\,в} = \left({}^{0}\bar{f}^{\,T}_{\,в\,1}, \dots, {}^{0}\bar{f}^{\,T}_{\,в\,N}\,\right)^{T}$ — блочная матрица внешних сил, приложенных к звеньям исполнительного механизма со стороны окружающей среды;

${}^{0}\boldsymbol{t} = ({}^{0}\bar{t}^{\,T}_{\,1}, \dots, {}^{0}\bar{t}^{\,T}_{\,N}\,)^{T}$ — блочный вектор, объединяющий векторы $\bar{t}_i$, которые соединяют начала систем координат звеньев $f(i\,), ns(\,i\,)$ с точками, через которые проходят равнодействующие внешних сил, приложенных к звеньям i;

${}^{0}\bar{\boldsymbol{n}}_{\,f} = \left({}^{0}\bar{n}^{\,T}_{\,f\,1}, \dots, {}^{0}\bar{n}^{\,T}_{\,f\,N}\,\right)^{T}$ — блочная матрица моментов, от приведения внешних сил, приложенных к звеньям со стороны окружающей среды, к началам систем координат их звеньев-отцов, определяется в соответствии с выражением ${}^{0}\bar{\boldsymbol{n}}_{\,f} = {}^{0}\bar{\boldsymbol{t}}^{\,d} \times {}^{0}\bar{\boldsymbol{f}}_{\,в}$;

${}^{0}\bar{\boldsymbol{n}}_{\,в} = ({}^{0}\bar{n}^{\,T}_{\,в\,1}, \dots, {}^{0}\bar{n}^{\,T}_{\,в\,N}\,)^{T}$ — блочная матрица внешних моментов, действующих на звенья исполнительного механизма со стороны окружающей среды;

${}^{0}\bar{\boldsymbol{n}}^{\,\prime}_{\,в} = {}^{0}\bar{\boldsymbol{n}}_{\,в} + {}^{0}\bar{\boldsymbol{n}}_{\,f}$ — блочная матрица суммарных внешних моментов, действующих на звенья i относительно начал систем координат $f(i\,), ns(\,i\,)$ их звеньев-отцов;

$\boldsymbol{m} = (m_1, \dots, m_N\,)^{T}$ — матрица масс звеньев;

$\boldsymbol{J}_c = \left(J_{c_1}, \dots, J_{c_N}\right)^{T}$ — блочная матрица тензоров инерции звеньев.

В выражении (1) третье слагаемое $C(q\,)\cdot{}^{0}\boldsymbol{f}_{\,в}$ определяется внешними силами, действующими на звенья исполнительного механизма, и моментами от приведения этих сил к началам соответствующих систем координат их звеньев-отцов.

При наложенных на исполнительный механизм связях в уравнении (1) к внешним силам моментам добавятся силы моменты реакций этих связей. Тогда уравнение (1) запишется в виде [4, 8]:

$$A(q)\ddot{q} + B(q,\dot{q}) - C(q)^0 f_{\text{в}} - C_R(q)^0 R_f - H(q)(^0 n_{\text{в}} + {}^0 R_n) = \tau, \qquad (8)$$

где: ${}^0\boldsymbol{R}_f = ({}^0R_{f\,1}, \dots, {}^0R_{f\,N})^T$ – блочный вектор сил-реакций связей, приложенных к звеньям исполнительного механизма;

${}^0\boldsymbol{R}_n = ({}^0R_{n\,1}, \dots, {}^0R_{n\,N})^T$ – блочный вектор моментов-реакций связей, приложенных к звеньям исполнительного механизма;

N – число звеньев исполнительного механизма;

$C(q) = J_f^T$ – транспонированная якобиева матрица для линейных перемещений точек приложения равнодействующих внешних сил, действующих на звенья исполнительного механизма, определяется в соответствии с выражением:

$$C(q) = y({}^0z^d)^T \cdot [(D^T - E)\Lambda({}^0s^d)D^T + D^T \cdot \Lambda({}^0t^d)] + (E - y)({}^0z^d)^T \cdot D^T. \qquad (9)$$

здесь: $C_R(q) = J_{V_R}^T$ – транспонированная якобиева матрица для линейных перемещений точек приложения реакций связей, определяется в соответствии с выражением:

$$C_R(q) = y({}^0z^d)^T \cdot [(D^T - E)\Lambda({}^0s^d)D^T + D^T \cdot \Lambda({}^0t_R^d)] + (E - y)({}^0z^d)^T \cdot D^T; \qquad (10)$$

$\bar{t}_{R_i}$ – вектор, соединяющий начало системы координат звена $f(i), ns(i)$ с точкой, через которую проходит сила реакции связи, наложенной на звено i;

${}^0\boldsymbol{t} = ({}^0\bar{t}_{R_1}^T, \dots, {}^0\bar{t}_{R_N}^T)^T$ – блочный вектор, объединяющий векторы $\bar{t}_{R_i}$ для всех звеньев исполнительного механизма;

$H(q) = J_\omega^T$ – транспонированная якобиева матрица для угловых перемещений звеньев, которая определяется в соответствии с выражением

$$H(q) = y \cdot ({}^0z^d)^T \cdot D^T. \qquad (11)$$

Введём следующие обозначения:

${}^0\boldsymbol{F}_в = ({}^of_в^T \ {}^on_в^T)^T$ – блочный вектор внешних сил, моментов, приложенных к звеньям исполнительного механизма;

$\boldsymbol{R} = (R_f^T \ R_n^T)^T$ – блочный вектор усилий реакций связей, наложенных на исполнительный механизм;

$L(q) = (C(q)\ H(q))$ – якобиева матрица размерностью $N \times (2N)$, объединяющая матричные коэффициенты внешних сил и внешних моментов, которые действуют на звенья исполнительного механизма;

$L_R(q) = (C_R(q)\ H(q))$ – якобиева матрица размерностью $N \times (2N)$, которая объединяет матричные коэффициенты сил и моментов реакций связей, наложенных на звенья исполнительного механизма.

С учётом введённых коэффициентов, уравнение (8) можем записать в виде:

$$A(q)\ddot{q} + B(q,\dot{q}) - L(q) \cdot {}^0F_{\text{в}} - L_R(q) \cdot {}^0R = \tau. \qquad (12)$$

В процессе движения исполнительного механизма могут изменяться, как количество наложенных связей, так и вид уравнений, описывающих эти связи [5, 6]. Связи можно разделить на кинематические и геометрические. Кинематические связи задаются уравнениями кривых, которые описывают движение характерных точек исполнительного механизма. Геометрические связи определяются зависимостями внешних усилий, приложенных к роботу, как функций координат характерных точек исполнительного механизма и их производных. В общем случае эти функции могут быть существенно нелинейные.

Изложенный выше метод был использован при создании двуногого шагающего робота (ДШР). Была разработана математическая модель исполнительного механизма, оснащённого электрогидравлическими следящими приводами. В данной модели порядок рекурсивных вычислений формируется автоматически по заданной структуре механизма. Это позволяет использовать её для шагающих машин с различными кинематическими схемами. Разработаны программы, управляющие статической и динамической ходьбой робота, стабилизирующие его движение.

На рисунках 1 и 2 показаны задаваемые и отрабатываемые угловые положения корпуса двуногого шагающего робота при его динамической ходьбе по горизонтальной поверхности полученные, соответственно, при эксперименте и математическом моделировании.

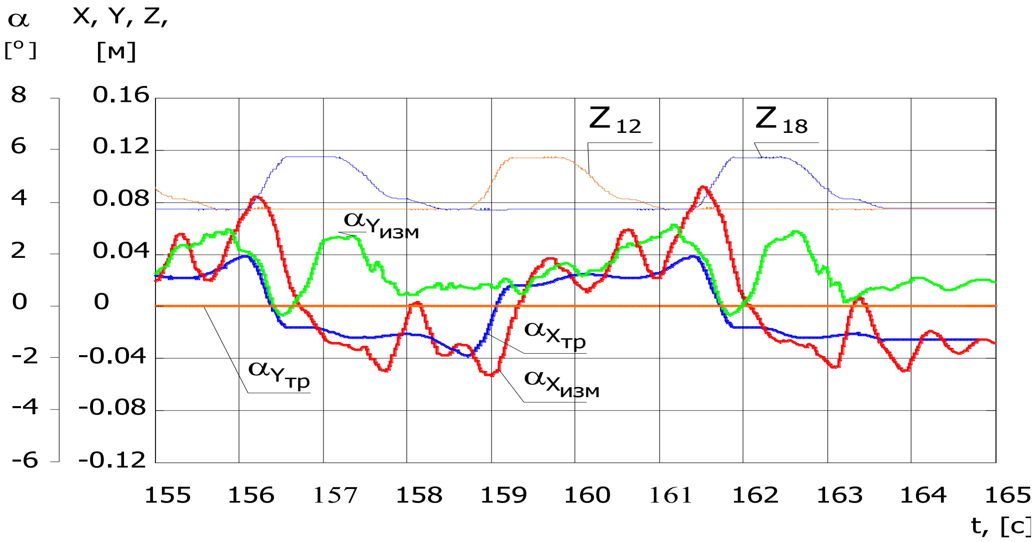

Рисунок 1. Задаваемые и отрабатываемые угловые положения корпуса ДШР при динамической ходьбе (эксперимент)

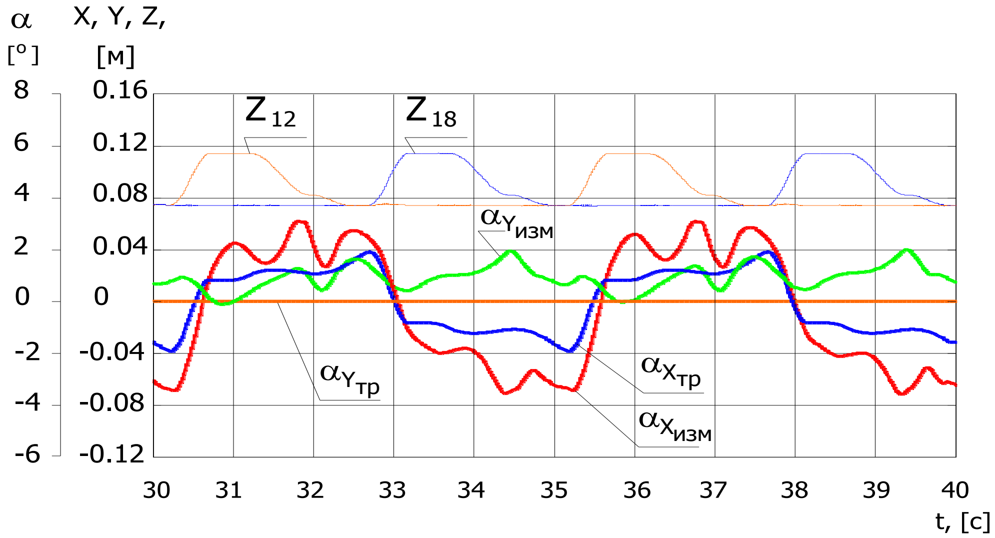

Рисунок 2. Задаваемые и отрабатываемые угловые положения корпуса ДШР при динамической ходьбе (моделирование)

Условные обозначения, приведённые на этих рисунках:

Z_{12}, Z_{18} – программные значения подъема стоп робота,

$\alpha_{xтр}$, $\alpha_{yтр}$ – программные значения углов наклона корпуса вокруг осей *X* и *Y* (*X* – поперечная, *Y* – продольная ось по отношению к направлению движения);

α_{mx}, α_{my} – измеренные значения углов наклона корпуса вокруг осей X и Y.

Выводы

Предложена методика записи математической модели древовидного исполнительного механизма двуногого шагающего робота с учётом внешних наложенных связей, основанная на использовании матриц (4×4) и теории графов. Данная методика позволяет получать уравнения динамики в форме, традиционной для моделей роботов с линейной (разомкнутой) кинематической цепью. Разработанная с применением данной методики математическая модель является эффективным средством для исследования шагающих роботов.

Литература

1. Попов Е.П., Верещагин А.Ф., Зенкевич С.Л. Манипуляционные роботы: динамика и алгоритмы. М.: Наука, 1978. 398 с.
2. Ковальчук А.К., Кулаков Д.Б., Семенов С.Е. Математическое описание кинематики и динамики исполнительных механизмов роботов с древовидной кинематической структурой // Известия вузов. Машиностроение. М.: МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2008. № 11. С. 13-25.
3. Ковальчук А.К., Кулаков Д.Б., Семенов С.Е. Блочно-матричные уравнения движения исполнительных механизмов роботов с древовидной кинематической структурой // Известия вузов. Машиностроение. М.: МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2008. № 12. С. 5-21.
4. Лесков А.Г. Теоретические основы моделирования и анализа динамики манипуляционных роботов, их приложение к задачам проектирования и подготовки операторов / 05.02.05, 05.13.01: дис. д-ра техн. наук. М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2002. 329 с.
5. Зенкевич С.Л., Ющенко А. С. Основы управления манипуляционными роботами: учебник для вузов / 2-е изд., испр. и доп. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004. 478 с.
6. Основы теории исполнительных механизмов шагающих роботов // Ковальчук А.К., Кулаков Б.Б., Кулаков Д.Б., Семенов С.Е., Яроц В.В. М.: Изд-во Рудомино, 2010. 170 с.
7. Моделирование древовидных исполнительных механизмов шагающих роботов с учётом внешних наложенных связей / А.К. Ковальчук, Л.А. Каргинов, Б.Б. Кулаков, Д.Б. Кулаков, С.Е. Семенов, В.В. Яроц, А.А. Верейкин. Свидетельство о гос. регистрации программ для ЭВМ № 2014612547 от 28.02.2014.
8. Программа моделирования древовидных исполнительных механизмов шагающих роботов / А.К. Ковальчук, Л.А. Каргинов, Б.Б. Кулаков, Д.Б. Кулаков, С.Е. Семенов, В.В. Яроц. Свидетельство о гос. регистрации программ для ЭВМ № 2012610398. 10.01.2012.