Расчет скорости стесненного осаждения монодисперсных твердых частиц

д.т.н. проф. Кондратьев А.С., Нья Т.Л.
Университет машиностроения
8 (495) 223-05-23, ask41@mail.ru

Аннотация. На основе анализа известных эмпирических зависимостей и полуэмпирического метода расчета получена обобщенная формула расчета отношения скорости стесненного осаждения к скорости свободного осаждения для монодисперсных частиц произвольной формы

Ключевые слова: скорость свободного и стесненного осаждения, твердые частицы произвольной формы.

Расчет скоростей стесненного и свободного осаждения монодисперсных твердых частиц произвольной формы и величина отношения этих скоростей широко используется в современной научно-технической литературе см., например [1, 2]. Как правило, исходными для последующего анализа являются опытные данные и обобщающие эмпирические зависимости, полученные в работе [3]. Можно отметить, что также как классические результаты, полученные Никурадзе [4] по течению ньютоновской жидкости в гладких и шероховатых трубах, никто не ставит под сомнение или пытается повторить экспериментальные исследования, выполненные и в работе [3]. Опытные данные, приведенные в [3], в основном получены для частиц шарообразной формы диаметром от *0,1* до *6,35 мм* с плотность твердых частиц от *1060* до *11250 кг/м*^{3} в жидкостях различной вязкости (вода, масло, глицерин и их растворы) и объемной долей твердой фазы до *0,55.*

Применительно к осаждению монодисперсных сферических частиц в [3] получена эмпирическая зависимость, связывающая скорости стесненного U_s и свободного U_0 осаждения частиц диаметром d в сосуде диаметром D

$$U_s = U_0 \left(1-\varphi\right)^n , \qquad (1)$$

где показатель степени n зависит от числа Рейнольдса $\mathrm{Re}_0 = U_0 \rho d/\mu$, определенного по скорости свободного осаждения частицы U_0, плотности ρ и вязкости жидкости μ.

Значение параметра n приведено в таблице 1. Приведенные значения показателя степени n не обеспечивают непрерывного изменения на границах областей разбиения по числу Рейнольдса.

Таблица 1.

№	Re_0	n
1	$Re_0 < 0,2$	$4.56+19.5(d/D)$
2	$0,2 < Re_0 < 1$	$\left(4.35+17.5(d/D)\right)\mathrm{Re}_0^{-0.03}$
3	$1 < Re_0 < 200$	$\left(4.45+18(d/D)\right)\mathrm{Re}_0^{-0.1}$
4	$200 < Re_0 < 500$	$4.45\,\mathrm{Re}_0^{-0.1}$
4	$Re_0 > 500$	*2,39*

В работах [5, 6] получены эмпирические зависимости, обеспечивающие непрерывность показателя степени n в зависимости от числа Рейнольдса Re_0. В целом, наименьшее отклонение от значений n, определяемых по таблице 1, имеет место при использовании зависимости полученной в [6]:

$$n = 2.39 + \left(3+25\,d/D\right) \Big/ \left[1.3+\left(0.1+d/D\right)\mathrm{Re}_0\right]. \qquad (2)$$

Для более простого случая, осаждения твердых частиц в неограниченном пространстве, то есть при *(d/D) = 0*, в работе [7] получено аппроксимирующее выражение:

$$\left(4.7-n\right)/\left(n-2.35\right) = 0.175\,\mathrm{Re}_0^{0.75}. \qquad (3)$$

В случае частиц несферической формы в [3], предполагается, что режим обтекания частиц потоком является существенно турбулентным (размер частиц составлял от *5* до *7,9 мм*), и для показателя *n*, при $(d/D)=0$, предлагается единая эмпирическая зависимость:

$$n = 2.7K^{0.16}, \qquad (4)$$

где коэффициент *K* определяется по формуле:

$$K = (\pi/6)(d_v/d_m), \qquad (5)$$

где: d_v – эффективный диаметр сферической частицы, объем которой равен фактическому объему частицы произвольной формы; d_m – эффективный диаметр миделевого сечения сферической частицы, равный по площади фактическому миделевому сечению частицы, движущейся в установившемся положении.

Отметим, что при $d_v = d_m$, то есть в случае сферической частицы, величина *n*, рассчитанная по формуле (5) равна 2,434, что отличается от значения 2,39 приведенного в таблице 1.

Покажем, что отношение U_s/U_0 при $(d/D)=0$ в общем случае монодисперсных частиц произвольной формы может быть определено исходя из достаточно общих представлений об особенностях стесненного и свободного осаждения монодисперсных частиц произвольной формы. Дальнейший анализ основывается на представлениях, развитых в работах [8, 9]. Для частиц произвольной формы, в дополнение к величинам d_v и d_m, вводится эффективный диаметр сферической частицы d_s, поверхность которой равна фактической боковой поверхности частицы. Число Рейнольдса определяется по эквивалентному диаметру частицы:

$$d_e = (2d_s + d_m)/3. \qquad (6)$$

Приведенное соотношение обосновывается тем, что в случае сферической частицы две трети общего гидравлического сопротивления определяется силой трения о поверхность частицы. Одна треть общего гидравлического сопротивления определяется разностью силы давления в лобовой и кормовой областях сферической частицы [4].

Для коэффициента гидравлического сопротивления используется интерполяционная зависимость:

$$C_f = 24/\mathrm{Re} + 53/(32+\mathrm{Re}) + 0.44. \qquad (7)$$

Поскольку в обоих случаях свободного и стесненного движения частиц разность сил тяжести и силы Архимеда одинакова, она приравнивается силам гидродинамического сопротивления, возникающих при этих режимах осаждения [8, 9]. Поэтому, имея в виду получения конечного выражения в виде соотношения (1), можно записать равенство

$$\frac{\pi d_m^2}{8}\rho U\left[\frac{24}{\mathrm{Re}} + \frac{53}{(32+\mathrm{Re})} + 0.44\right] = \frac{\pi d_m^2}{8}\rho U_0\left[\frac{24}{\mathrm{Re}_0} + \frac{53}{(32+\mathrm{Re}_0)} + 0.44\right], \qquad (8)$$

где: Re – число Рейнольдса, определенное по фактической усредненной скорости обтекания частиц *U*, эквивалентному диаметру частицы d_e, и фактической динамической вязкости двухфазной смеси μ.

В работе [4] показано, что фактическая скорость стесненного обтекания частицы и число Рейнольдса при стесненном осаждении определяются выражениями:

$$U = \frac{U_s f}{(1-\varphi)}; \qquad (9)$$

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho U d_e}{\mu \underline{\mu}} = \frac{\rho U_s f d_e}{\mu \underline{\mu}(1-\varphi)} = \frac{U_s f d_e}{\nu \underline{\mu}(1-\varphi)}, \qquad (10)$$

где: *U* – фактическая усредненная скорость обтекания частицы жидкостью; $f = f(\varphi)$ – поправочная функция, учитывающая стесненность потока жидкости в межчастичном пространстве и связанное с этим увеличение скорости обтекания частицы произвольной формы, по отношению к скорости жидкости, натекающей на «лобовую точку» частицы; $\underline{\mu}=\underline{\mu}(\varphi)$ – зависимость относительной динамической вязкости двухфазной смеси от объемной доли частиц твердой фазы φ; множитель (1-φ) определяется из условия, что, в соответствии с условием неразрывности, осевшие частицы увеличивают скорость потока жидкости, относительно осаждающихся частиц.

Выражение (9) отражает тот факт, что фактическая скорость жидкости обтекающей частицу U и наблюдаемая скорость её осаждения U_s различны, поскольку оседание частиц приводит к возникновению встречного потока жидкости.

С целью определения зависимостей для наилучшего согласия с опытными данными, рассмотрим два предельных режима движения осаждающихся частиц.

Положим вначале, что $Re_0 \to \infty$ и $Re \to \infty$, то есть в выражении (9) в обоих выражениях в квадратных скобках остается число 0,44 – значение минимального коэффициента гидравлического сопротивления при больших числах Рейнольдса [4]. Подставляя (9) в (8) получим, что:

$$\frac{U_s}{U_0}=\frac{1-\varphi}{f}. \qquad (11)$$

В работе [8], применительно к распределению частиц в узлах простой кубической решетки, конкретная зависимость $f(\varphi)$ определялась для трех различных условий: локальные значение скоростей усреднялось по поверхности сферы; локальные среднеквадратичные значения скоростей усреднялось по поверхности сферы; средние локальные значения скоростей, определенных по формуле Стокса, усреднялось по поверхности сферы. Сопоставление выражения (1) при $n = 2,39$ и выражения (11) показало, что использование третьего варианта вида функции:

$$f(\varphi)=\mathrm{ar}ctg\left(\alpha/\beta\right)^{1/2}\Big/\left(\alpha\beta\right)^{1/2}, \qquad (12)$$

где: $\alpha=\frac{\pi}{4}\left(\frac{6\varphi}{\pi}\right)^{2/3}$; $\beta=1-\alpha$.

Такой выбор зависимости $f(\varphi)$ обеспечивает достаточно хорошее соответствие между опытными и расчетными величинами отношения U_s/U_0 (таблица 2).

Во втором предельном случае, положим, что $Re_0 \to 0$ и $Re \to 0$. В этом случае в квадратных скобках в (8) сохранятся только первые члены, и с учетом (9) и (10) получим:

$$U_s/U_0=(1-\varphi)/f\underline{\mu}. \qquad (13)$$

В работе [10], на основе проведенного авторами компьютерного анализа движения суспензий, получено выражение для относительной динамической вязкости суспензий в виде кубической зависимости:

$$\underline{\mu}=\mu/\mu_f=1+2\varphi+28.5\varphi^3, \qquad (14)$$

где: μ_f – динамическая вязкость несущей жидкости.

В работах [8, 9] для расчета стесненности потока жидкости в межчастичном пространстве $f(\varphi)$ и относительной динамической вязкости двухфазной смеси $\underline{\mu}(\varphi)$, использовались несколько отличающиеся зависимости:

$$f(\varphi)=\beta^{-1/2}; \qquad (15)$$

$$\mu=\left(1-\frac{\varphi}{0.73}\right)^{-1.525}. \qquad (16)$$

Последняя эмпирическая зависимость получена в работе [11] приводит к минимальным значениям эффективной вязкости, которой, как можно ожидать, обладают суспензии, состоящие из сферических частиц.

В таблице 2 приведены значения отношения U_s/U_0, рассчитанные для двух предельных режимов по формулам (1), (11) ÷ (16).

В работе [12], на основе вариационного принципа минимума интенсивности диссипации энергии при ламинарном режиме обтекания, авторами разработан обобщенный метод расчета относительной скорости стесненного движения сферических твердых и газовых частиц. Как отмечают авторы [12], полученная ими полуэмпирическая зависимость, которая здесь не приводиться ввиду громоздкости получающихся выражений, не обеспечивает наилучшее соответствие с опытными данными. Наибольшую близость к экспериментальным данным [12] по относительной скорости стесненного осаждения дает уравнение

$$U_s/U_0=(1-\varphi)^2\exp\left[-2.5\varphi/(1-39\varphi/64)\right]; \tag{17}$$

которое ранее было получено на основе определения эффективной вязкости в [13].

Таблица 2.

φ	0,01	0,05	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,55	0,6
№ ф-лы	$Re_0\to\infty$ и $Re\to\infty$								
(1) n = 2,39	0,976	0,885	0,777	0,587	0,426	0,295	0,191	0,148	0,112
(11), (12)	0,953	0,844	0,737	0,564	0,422	0,302	0,201	0,157	0,117
	$Re_0\to 0$ и $Re\to 0$								
(1) n = 4,65	0,954	0,788	0,613	0,354	0,190	0,0930	0,0398	0,0244	0,0141
(12), (13), (14)	0,934	0,764	0,600	0,346	0,178	0,0833	0,0361	0,0229	0,0140
(13), (15), (16)	0,942	0,779	0,618	0,376	0,211	0,105	0,0419	0,0239	0,0108
(17)	0,956	0,793	0,621	0,362	0,196	0,0959	0,0414	0,0256	0,0150
(18)	0,955	0,781	0,589	0,320	0,170	0,0900	0,0465	0,0329	0,0229

Авторы работы [12] предложили собственную эмпирическую зависимость:

$$U_s/U_0=(1-\varphi)^2\Big/\left(1+2.5\varphi+12.5\varphi^2\right). \tag{18}$$

Из сравнения данных проведенных в Таблице 2 следует, что при ламинарном режиме обтекания, наиболее близко согласуются с экспериментальными данными, описываемые эмпирической зависимостью (1) при *n = 4,65*, зависимости, рассчитанные по формулам (13), (15), (16) и формуле (17). Зависимости, полученные авторами работы [12], в частности формула (18), имеют большее расхождение с опытными данными, что констатируется авторами. Используемые в настоящем анализе зависимости (11), (13), (15) и (16) не связаны с результатами экспериментальных исследований и их эмпирическим обобщением в виде зависимости (1), которые приведены в [3], а получены на основе более общих представлений, поэтому эти зависимости имеют полуэмпирический характер.

Рассмотрим более общий случай, когда режим обтекания частиц жидкостью является произвольным. Выражение (8), которое применимо при произвольном режиме обтекания, можно преобразовать к виду:

$$U_s/U_0=\frac{(1-\varphi)}{f\mu}\left[(B\times \mathrm{E})/(C\times D)\right], \tag{19}$$

где:

$$A=\left(\frac{U_s}{U_0}\right)\frac{f}{\left[(1-\varphi)\underline{\mu}\right]};B=24(53+\mathrm{Re}_0)+32\,\mathrm{Re}_0+0.44\,\mathrm{Re}_0(53+\mathrm{Re}_0);$$

$$C=24(53+\mathrm{A\,Re}_0)+32A\mathrm{Re}_0+0.44A\mathrm{Re}_0(53+\mathrm{A\,Re}_0);$$

$$D=53+\mathrm{Re}_0;E=53+\mathrm{A\,Re}_0.$$

При заданном значении число Рейнольдса *Re0* величина относительной скорости по формуле (19) определяется итеративным путем.

В таблице 3 приведены расчеты величины относительной скорости стесненного осаждения сферических твердых частиц для различных чисел Рейнольдса Re_0 и различной объемной доли твердой фазы φ. Эти данные представлены в виде соответствующих графических зависимостей, приведенных на рисунках 1.

Таблица 3.

φ	0,01	0,05	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,55	0,6
№ ф-л	$Re_0 = 0.1$								
(1)	0,954	0,788	0,613	0,354	0,190	0,0930	0,0398	0,0244	0,0141
(12), (14), (19)	0,934	0,765	0,601	0,347	0,179	0,0836	0,0363	0,0230	0,0140
(15), (16), (19)	0,941	0,780	0,619	0,377	0,212	0,105	0,0420	0,0232	0,0108
	$Re_0 = 0.5$								
(1)	0,956	0,796	0,626	0,371	0,205	0,103	0,0460	0,0288	0,0171
(12), (14), (19)	0,935	0,767	0,605	0,351	0,181	0,0849	0,0369	0,0234	0,0143
(15), (16), (19)	0,943	0,783	0,623	0,381	0,215	0,107	0,0428	0,0236	0,0110
	$Re_0 = 5$								
(1)	0,963	0,823	0,671	0,429	0,259	0,144	0,0724	0,0486	0,0311
(12), (14), (19)	0,939	0,785	0,631	0,384	0,206	0,0985	0,0432	0,0275	0,0168
(15), (16), (19)	0,947	0,802	0,654	0,417	0,243	0,124	0,0502	0,0278	0,0130
	$Re_0 = 150$								
(1)	0,973	0,871	0,753	0,548	0,382	0,252	0,154	0,116	0,0845
(12), (14), (19)	0,948	0,825	0,702	0,498	0,330	0,201	0,110	0,0765	0,0565
(15), (16), (19)	0,957	0,847	0,734	0,540	0,378	0,242	0,130	0,0837	0,0449
	$Re_0 = 350$								
(1)	0,975	0,881	0,770	0,575	0,413	0,282	0,180	0,138	0,103
(12), (14), (19)	0,950	0,832	0,716	0,522	0,359	0,229	0,132	0,0953	0,0653
(15), (16), (19)	0,959	0,856	0,749	0,566	0,404	0,273	0,159	0,109	0,0647
	$Re_0 = 750$								
(1)	0,976	0,885	0,777	0,587	0,426	0,290	0,191	0,148	0,112
(12), (14), (19)	0,951	0,837	0,725	0,538	0,382	0,253	0,151	0,111	0,0779
(15), (16), (19)	0,960	0,861	0,759	0,585	0,433	0,299	0,182	0,130	0,0825

Из данных приведенных в таблице 3 и графических зависимостей видно, что в области $\varphi \leq 0{,}55$, для которой допустимо использование эмпирической зависимости (1) [3], опытные данные, определяемые по формуле (1) достаточно удовлетворительно согласуются с расчетными значениями, определяемыми по формуле (19). При этом, лучшее соответствие имеет место при использовании зависимостей (15), (16), (19). Полученные зависимости могут использоваться как при ламинарном режиме, так и при турбулентном режимах обтекания частиц жидкостью. Отметим также, что все исходные зависимости или рассчитываются, исходя из предполагаемой упаковки частиц (величина f) или определяются экспериментально (величина μ) в трубчатых или ротационных вискозиметрах, а не по результатам опытов со свободным и стесненным осаждением твердых частиц. На основании этого, полученные выражения для относительной скорости стесненного осаждения является полуэмпирическим. При расчете частиц произвольной формы, расчет ведется по полученным зависимостям с использованием числа Рейнольдса, определенного по эффективному диаметру d_e (6). Представленный метод расчета скоростей стесненного движения твердых частиц может быть использован при проведении инженерных расчетов различных технологических устройств, в которых имеют место рассмотренные процессы.

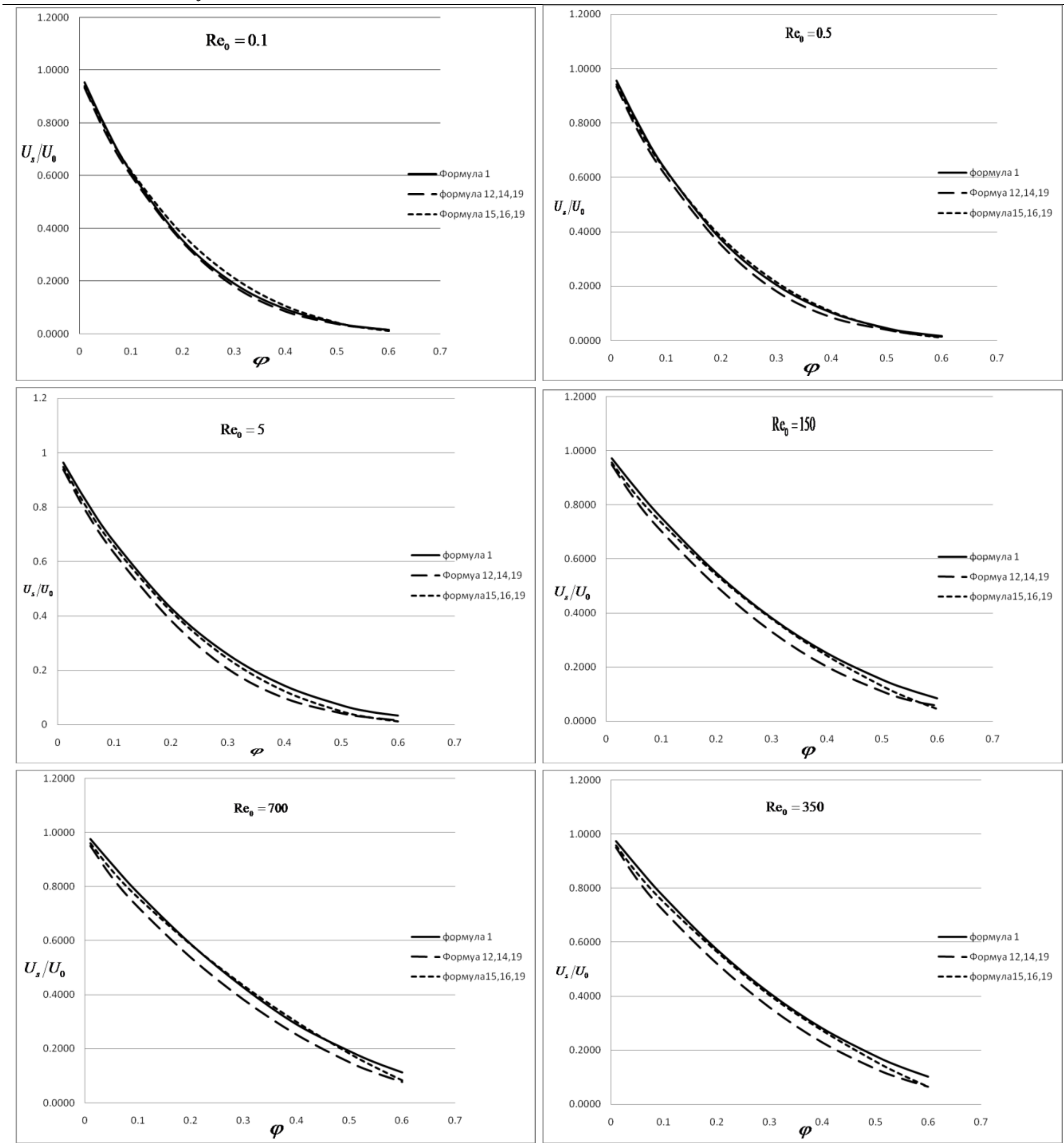

Рисунок 1

Литература

1. Yang J., Renken A. A generalized correlation for equilibrium of forced in liquid-solid fluidized beds // Chem. Engin. Jour. 2003. v. 92. P. 7-14.
2. Baldock T.E., Tomkins M.R., Nielsen P., Hughes M.G. Settling velocity of sediments at high concentration // Coastal Engin. 2013. V. 51. P. 91-100.
3. Richardson J.F., Zaki W.N. Sedimentation and fluidization: Part I // Trans. Instn. Chem. Engrs. 1954.V. 32. P. 35-53.
4. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука. 712 с.
5. Patankar N.A., Joseph D.D., Wang J., Baree R.D., Conway M., Asadi M. Power law correlation for sediment transport in pressure driven channel flows // Inter. Journ. Multuphase Flow. 2002. V. 28. P. 1269-1292.

6. Кондратьев А.С. Эмпирическая формула для скорости стесненного осаждения твердых сферических частиц в цилиндрических сосудах. Сб. Гидравлика и гидравлические машины. Вып. 3. М.: МГОУ. 2011. С. 4 - 6.
7. Rowe P.N. A convenient empirical equation for estimation of the Richardson – Zaki exponent // Chem. Engin. Scien. 1987.v. 43. P. 2795-2796.
8. Кондратьев А.С., Наумова Е.А. К расчету скорости свободного осаждения твердых частиц в ньютоновской жидкости // Теорет. основ. хим. техн. 2003. Т. 37. № 6. С. 646-652.
9. Кондратьев А.С., Наумова Е.А. Расчет скорости стесненного осаждения монодисперсных твердых частиц в ньютоновской жидкости // Теорет. основ. хим. техн. 2004. Т. 38. № 6. С. 624-629.
10. Kuzkin V. A., Krivtsov A. M. , Linkov A.M. Proppant transport in hydraulic fractures: computer simulation of effective properties and movement of the suspension // Proceed. of XLI Intern. Summer School–Conference APM 2013. P. 322 – 337.
11. Жданов В.Г., Старов В.М. Определение эффективной вязкости концентрированных суспензий // Колл. журн. 1998. Т60. № 6. С. 771 – 774.
12. Трушин А.М., Дмитриев Е.А., Носырев М.А., Хусанов А.Е., Калдыбаева Б.М. Обобщенный метод определения скорости ламинарного движения сферических твердых и газовых частиц в жидкостях // Теорет. основ. хим. техн. 2013. Т. 47. № 6. С. 668-671.
13. Hanratty T.J., Bandukwala A. Fluidization and sedimentation of spherical particles // AIChEJ. 1957. V. 3/ 2. P. 293-296.