О моделировании флаттера пластины, составляющей часть поверхности тонкого клина

к.ф.-м.н. доц. Кудрявцев Б.Ю.
Университет машиностроения
8 (495) 223-05-23, vm@mami.ru

Аннотация. Исследуется взаимосвязь параметров натурного и модельного процессов колебаний в потоке газа пластины, составляющей часть поверхности тонкого клина. Установлены критерии подобия процессов и предложены некоторые возможные параметры моделирования.

Ключевые слова: *флаттер, сверхзвуковой поток газа, упругая пластина.*

Среди довольно большого количества публикаций по панельному флаттеру работ, содержащих результаты практических экспериментов довольно мало. Это связано с объективными техническими трудностями. В ряде статей [1, 2, 3], как и в предлагаемой работе, рассмотрен вопрос о сравнении параметров модельного и натурного процессов, что расширяет возможности экспериментирования.

Пусть имеется тонкий клиновидный профиль, обтекаемый без угла атаки газом с большой сверхзвуковой скоростью. Вектор скорости потока направлен по оси тела (перпендикулярно кромке). Начало ортогональной системы координат совместим с кромкой профиля, ось OX направим по вектору скорости, OY – по кромке, OZ – так, чтобы система координат была правой. Будем рассматривать часть поверхности профиля, занимающую в плоскости OXY область $G = \{(x, y), x_0 \le x \le x_0 + l, 0 \le y \le l/s\}$, здесь s – отношение длин ее сторон.

Для описания колебаний пластины будем использовать уравнения Кармана [4]:

$$D\Delta^2 w = hL(w,\Phi) - \rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{2\chi p}{\chi+1}(M^2 tg^2\beta - 1) - \frac{4\chi p tg\beta}{(\chi+1)c_0}(1+2\xi-\xi a)\left(\frac{\partial w}{\partial t} + v\frac{\partial w}{\partial x}\right) -$$
$$- \frac{\chi p tg\beta}{c_0{}^2}\left(1 - \frac{12\xi a}{\chi(\chi+1)}\right)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2v\frac{\partial^2 w}{\partial t\partial x} + v^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right), \qquad (1)$$
$$\frac{1}{E}\Delta^2\Phi = -0.5L(w,w),$$

с соответствующими граничными условиями; для определенности рассмотрим свободно опертые кромки:

$$w\big|_{x=x_0} = \left.\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right|_{x=x_0} = w\big|_{x=x_0+l} = \left.\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right|_{x=x_0+l} = 0,\ w\big|_{y=0} = \left.\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right|_{y=0} = w\big|_{y=l/s} = \left.\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right|_{y=l/s} = 0.$$

Здесь:

$$L(u_1,u_2) = \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}\frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} - 2\frac{\partial^2 u_1}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2 u_2}{\partial x\partial y},\ \xi = \frac{\chi-1}{\chi+1},\ a = 1 + \frac{2}{(\chi-1)M^2 tg^2\beta},$$

Φ – функция напряжений, w – прогибы пластины, D и h – ее цилиндрическая жесткость и толщина, E, ν, ρ – модуль Юнга, коэффициент Пуассона и плотность материала, p и c_0 – давление и скорость звука в невозмущенном потоке, χ – показатель политропы, v – скорость потока газа, α – угол полураствора клина, угол наклона ударной волны β определяется из уравнения $tg\beta = tg\alpha + a\varepsilon tg\beta$.

Обозначим также $M = v/c_0$ – число Маха, $\gamma = 12(1-\nu^2)$, $c = \sqrt{E/\rho}$.

Введем безразмерные величины $(x-x_0)/l, y/l, w/h$, $\Phi/(Eh^2)$ и $t/(l_1{}^2\sqrt{h\rho/D})$, сохранив за ними прежние обозначения. Тогда система (1) перепишется в виде:

$$\Delta^2 w = \gamma L(w,\Phi) - \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{2\chi}{\chi+1}\frac{p}{E}\frac{l^4}{h^4}(M^2 tg^2\beta - 1) -$$
$$-\frac{4\chi tg\beta}{(\chi+1)}(1+2\xi-\xi a)M\sqrt{\gamma}\frac{c}{c_0}\frac{p}{E}\frac{l^2}{h^2}\frac{\partial w}{\partial t} - \frac{4\chi tg\beta}{\chi+1}(1+2\xi-\xi a)M^2\gamma\frac{p}{E}\frac{l^3}{h^3}\frac{\partial w}{\partial x} -$$
$$-\chi tg\beta\left(1-\frac{12\xi a}{\chi(\chi+1)}\right)\frac{c^2}{c_0^2}\frac{p}{E}\frac{l}{h}(x+x_0)\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - 2\chi tg\beta\left(1-\frac{12\xi a}{\chi(\chi+1)}\right)M\sqrt{\gamma}\frac{c}{c_0}\frac{p}{E}\frac{l^2}{h^2}(x+x_0)\frac{\partial^2 w}{\partial t\partial x} - \quad (2)$$
$$-\chi tg\beta\left(1-\frac{12\xi a}{\chi(\chi+1)}\right)M^2\gamma\frac{p}{E}\frac{l^3}{h^3}(x+x_0)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2},$$
$$\Delta^2\Phi = -0.5L(w,w).$$

Представим теперь два процесса – натурный и модельный (т.е. лабораторный или промышленный эксперимент, в котором возможны измерения). Если окажется, что для них все безразмерные коэффициенты и граничные условия в системе (2) совпадут, то это будет означать, что с математической точки зрения процессы колебаний пластины станут тождественными, а с физической, – что в соответствующие моменты времени в соответствующих точках модели и натуры все безразмерные характеристики также будут идентичными. Такие процессы будем называть подобными. Для этих процессов появляется возможность варьирования параметров при проведении экспериментов [1, 2, 3].

Введем обозначения:

$$k = \frac{l_м}{l_н},\ m = \frac{h_м}{h_н},$$

и примем условия:

$$\alpha_м = \alpha_н,\ \chi_м = \chi_н, M_м = M_н, \beta_м = \beta_н,\ \gamma_м = \gamma_н, \frac{(x_0)_м}{(x_0)_у} = k.$$

Здесь и далее нижние индексы «*н*» и «*м*» будут обозначать принадлежность к натурному и модельному процессам соответственно. Равенство коэффициентов в уравнениях (2) приводит к условиям:

1. $\frac{p_м}{p_н}\frac{E_н}{E_м}\frac{(c_м)^2}{(c_н)^2}\frac{(c_0{}^2)_н}{(c_0^2)_м} = \frac{m}{k}$,
2. $\frac{p_м}{p_н}\frac{E_н}{E_м}\frac{c_м}{c_н}\frac{(c_0)_н}{(c_0)_м} = \frac{m^2}{k^2}$,
3. $\frac{p_м}{p_н}\frac{E_н}{E_м} = \frac{m^3}{k^3}$,
4. $\frac{p_м}{p_н}\frac{E_н}{E_м} = \frac{m^4}{k^4}$,

граничные условия не добавляют новых требований. Очевидно, все четыре равенства могут выполняться только при $m=k$, то есть при полном геометрическом подобии. Как видим, более точная постановка задачи ограничивает возможности моделирования. Поэтому для описания колебаний пластины целесообразно воспользоваться линейным уравнением (при определенном выборе параметров, как будет показано ниже, упрощения не будут оказывать заметного влияния на результат). Оно будет иметь вид [5]:

$$\Delta^2 w = -\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{4\chi tg\beta}{(\chi+1)}(1+2\xi-\xi a)M\sqrt{\gamma}\frac{c}{c_0}\frac{p}{E}\frac{l^2}{h^2}\frac{\partial w}{\partial t} -$$

$$
-\frac{4\chi tg\beta}{\chi+1}(1+2\xi-\xi a)M^2\gamma\frac{p}{E}\frac{l^3}{h^3}\frac{\partial w}{\partial x}-\chi tg\beta\left(1-\frac{12\xi a}{\chi(\chi+1)}\right)\frac{c^2}{c_0^2}\frac{p}{E}\frac{l}{h}(x+x_0)\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}-
$$

$$
-2\chi tg\beta\left(1-\frac{12\xi a}{\chi(\chi+1)}\right)M\sqrt{\gamma}\frac{c}{c_0}\frac{p}{E}\frac{l^2}{h^2}(x+x_0)\frac{\partial^2 w}{\partial t\partial x}-\chi tg\beta\left(1-\frac{12\xi a}{\chi(\chi+1)}\right)M^2\gamma\frac{p}{E}\frac{l^3}{h^3}(x+x_0)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}
$$

с теми же граничными условиями.

Для тождественности натурного и модельного процессов достаточно будет выполнения уже первых трех вышеуказанных условий, которые, в свою очередь, будут равносильны следующим:

$$
\frac{p_м}{p_н}\frac{E_н}{E_м}=\frac{m^3}{k^3},\ \frac{c_м}{c_н}\frac{(c_0)_н}{(c_0)_м}=\frac{k}{m} \tag{3}
$$

Рассмотрим некоторые возможные варианты процессов, предполагающие выполнение этих условий.

1. Как и выше, при полном геометрическом подобии пластин (m=k) и сохранении остальных параметров равенства (3) , очевидно, будут выполняться.
2. Сохраним параметры потока $p_м=p_н,(c_0)_м=(c_0)_н,\chi_м=\chi_н$ и примем $k=1(l_м=l_н)$. Тогда при выполнении требований:

$$
\frac{E_м}{E_н}=\left(\frac{\rho_м}{\rho_н}\right)^3, m=\sqrt[3]{\frac{E_н}{E_м}},
$$

равенства (3) также будут иметь место.

В качестве примера возьмем шарнирно опертую пластину, приняв следующие значения параметров:

$$
\alpha=\pi/18, x_0=2м, l=0{,}5м, s=2,\ \nu=0{,}3,\ p=10^5 па, \chi=1{,}4, c_0=330 м/с.
$$

Прогиб пластины представим в виде:

$$
w=\exp(\omega t)\left(c_1\sin\pi x+c_2\sin 2\pi x+c_3\sin 3\pi x+c_4\sin 4\pi x\right)\sin\pi ys,
$$

$$
c_1,c_2,c_3,c_4\in R,\omega\in C.
$$

Таблица 1

Материал (мод./нат.)	$\rho, кг/м^3$	E, па	h, м	m	M_1	M_2
Сталь (мод.)	7800	$1{,}9\cdot 10^{11}$	0,0025	-	10,6	11
Цинковый сплав (нат.)	6100	$0{,}9\cdot 10^{11}$	0,0032	0,78	10,6	11
Магниевый сплав (мод.)	1500	$0{,}45\cdot 10^{11}$	0,0038	-	10,5	10,8
Алюминиевый сплав (нат.)	2250	$1{,}6\cdot 10^{11}$	0,0025	1,53	10,5	10,8

Применив метод Бубнова-Галеркина, будем иметь систему уравнений с неизвестными c_1,c_2,c_3,c_4. Приравняв ее определитель к нулю, находим критическое число Маха M_1 как наименьшее M, при котором комплексная частота ω переходит в правую полуплоскость. Результаты вычислений содержатся в таблице 1. Для сравнения приведены критические значения M_2, полученные при нелинейной постановке задачи (2) аналогично тому, как это было сделано в [4]. В обоих случаях значения не только M_1, но и M_2 для модельного и натурного процессов оказались идентичными.

3. Сохраним все параметры потока, кроме давления и опять возьмем $k=1\,(l_м=l_н)$. Тогда равенства (3) будут выполняться при следующих условиях:

$$
\frac{E_м}{E_н}=\left(\frac{\rho_м}{\rho_н}\right)^3\left(\frac{p_н}{p_м}\right)^2, m=\sqrt[3]{\frac{E_н}{E_м}\frac{p_м}{p_н}}.
$$

В качестве примера возьмем пластину при тех же значениях параметров [6, 7], кроме указанных в таблице 2, в которой приведены результаты вычислений M_1 и M_2.

Таблица 2

Материал (мод./нат.)	ρ, $кг/м^3$	$E, па$	$h, м$	m	$p, па$	M_1	M_2
Сталь (мод.)	7850	$2{,}3 \cdot 10^{11}$	0,0025	-	10^5	10,7	11,2
Титановый сплав (нат.)	4600	$1{,}12 \cdot 10^{11}$	0,00275	0,91	$0{,}65 \cdot 10^5$	10,7	11,1
Дюралюминий (нат.)	2800	$0{,}74 \cdot 10^{11}$	0,0026	0,95	$0{,}38 \cdot 10^5$	10,7	11,1

Величина M_1 во всех случаях, как и следовало ожидать, оказалась одной и той же, а M_2 для модельного процесса немного отличалась. Это может быть обусловлено как различием математических моделей процесса, так и погрешностью приближенных методов решения задачи. При выбранных параметрах для всех рассмотренных примеров разница между M_1 и M_2 была несущественной и составляла порядка 3 – 5 процентов.

Выводы

Установлены критерии подобия процессов колебания упругой пластины в сверхзвуковом потоке газа и предложены некоторые возможные варианты моделирования. Результаты работы могут оказаться полезными при организации экспериментальных исследований по панельному флаттеру.

Литература

1. Кийко И.А., Показеев В.В., Кийко С.И. Подобие и моделирование процесса колебаний пластины в сверхзвуковом потоке газа // Проблемы машиностроения и автоматизации. 2011. № 4. С. 109-111.
2. Показеев В.В., Кийко С.И. Параметры подобия и моделирования процессов колебаний пластины в сверхзвуковом потоке газа // Вестн. МГУ. Сер. 1: Мат. Мех. 2012. № 5. С. 39-45.
3. Показеев В.В., Кийко С.И. , Кудрявцев Б.Ю. О моделировании процесса колебаний пластины в сверхзвуковом потоке газа // Изв. МГТУ МАМИ, 2013, № 1(15), т.3, с. 101-104.
4. Кийко И.А., Кудрявцев Б.Ю. Флаттер прямоугольной панели, составляющей часть поверхности тонкого клина // Вестн. МГУ. Сер. 1: Мат. Мех. 2011. № 2. С. 59-62.
5. Кийко И.А. Постановка задачи о флаттере оболочки вращения и пологой оболочки, обтекаемых потоком газа с большой сверхзвуковой скоростью // ПММ, 1999, т. 63, в. 2, с. 305-312.
6. Фридляндер И.Н., Жирнов А.Д., Каськов В.С. и др. Разработка и применение Be-Al сплавов в авиакосмической технике // Все материалы. Энциклопедический справочник. 2007. № 7. С. 10-15.
7. Центральный металлический портал РФ. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://metallicheckiy-portal.ru/ (дата обращения: 16.06.2014). Стиль «Список_литер_» используется для списка используемой литературы и перечислений с номером. Не допускается автоматическая простановка номеров!