Построение многопараметрической функции Ляпунова для одной нелинейной системы

к.ф-м.н., доц. Огурцов А.И.
МГТУ «СТАНКИН»
(499) 457-41-47, kuredut@gmail.com

Аннотация. Для системы имеющей две нелинейности, одна из которых – мультипликативная, построена функция Ляпунова, содержащая 5 варьируемых параметров. Указываются возможности применения этой функции для нахождения области асимптотической устойчивости нулевого решения и оптимизации переходного процесса.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения, устойчивость, функции Ляпунова.

В теории автоматического управления наряду с известными системами дифференциальных уравнений Лурье рассматриваются также системы более общего вида, в которых нелинейные члены представляют собой произведения функций. Примеры реальных физических и биологических систем, для которых указанные системы являются математическими моделями, встречаются в работах зарубежных авторов.

В настоящей работе изучается система дифференциальных уравнений четвертого порядка смешанного типа и ставится задача о нахождении эффективного достаточного критерия асимптотической устойчивости ее нулевого решения. Задача решается путем нестандартного построения многопараметрической функции Ляпунова. В идейном отношении эта работа связана с работами [1] и [2].

Итак, рассматривается система:

$$\frac{dx}{dt} = y,\ \frac{dy}{dt} = az - n_1 y,\ \frac{dz}{dt} = u - \varphi(x)y,\ \frac{du}{dt} = -n_2 u - f(x), \qquad (1)$$

в которой правые части определены в некоторой ограниченной, замкнутой, выпуклой области D фазового пространства, содержащей начало координат; a, n_1, n_2 – положительные постоянные, $\varphi(x)$ непрерывная, а $f(x)$ непрерывно дифференцируемая функции.

Предполагается, что $f(0) = 0,\ \varphi(x) > 0,\ \dfrac{f(x)}{x} > c_1 > 0$ при $x \neq o,\ c_1 = const$ и выполняются условия существования и единственности решений системы (1).

К системе вида (1) приводятся, например, уравнения возмущенного движения некоторых сервомеханизмов.

Нулевое решение системы (1) соответствует невозмущенному движению изучаемой физической системы, величины x, y, z, u являются отклонениями от невозмущенного движения. При этом x и z приведены к безразмерной форме, время t размерное, все остальные переменные имеют соответственные размерности.

Введем в рассмотрение функцию Ляпунова следующей структуры

$$\begin{aligned} 2V = {} & 2_{11}x^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{14}xu + a_{22}y^2 + 2a_{23}yz + 2a_{24}yu + a_{33}z^2 + 2a_{34}zu + \\ & a_{44}u^2 + 2b_1\int_0^x f(x)dx - 2b_2 f(x)y + b_3 g^2(x) + 2b_4\int_0^x g(x)dx + 2b_5 g(x)z + 2b_6 g(x)u + \\ & 2b_7\int_0^x \varphi(x)xdx. \end{aligned} \qquad (2)$$

Здесь $g(x)=\int\limits_0^x \varphi(x)dx,\ \dfrac{g(x)}{x}>c_2>0,\ c_2=const,\quad x\neq 0,\ a_{ij}\left(i,j=\overline{1,4}\right), b_k\left(k=\overline{1,7}\right)$,– постоянные.

Вычисляем производную функции V по времени в силу системы (1):

$$\dot{V}=\frac{\partial V}{\partial x}y+\frac{\partial V}{\partial y}(az-n_1y)+\frac{\partial V}{dz}\left(u-\varphi(x)y\right)+\frac{\partial V}{\partial u}\left(-n_2u-f(x)\right).$$

В полученном выражении приравниваем к нулю слагаемые, содержащие произведения xu, $f(x)y,\ \varphi(x)yz,\ \varphi(x)yu,\ \varphi(x)g(x)y,\ g(x)u$.

Из этих равенств мы получаем следующие соотношения между коэффициентами функции (1):

$$a_{13}=a_{14}n_2,\ a_{33}=b_5,\ a_{34}=b_6,\ b_3=b_5,\ b_5=b_6n_2. \qquad (3)$$

Кроме того мы полагаем $a_{33}=a_{34}n_2$, после чего:

$$b_5=a_{34}n_2,\ b_6=a_{34},\ b_3=a_{34}n_2. \qquad (4)$$

Далее введем четыре вспомогательных параметра $\beta>0,\ \gamma>0,\ 0<\mu<1,\ \sigma>1$ согласно соотношениям:

$$a_{23}=-a_{14}+(1-\mu)a_{24}a_1,\quad a_{24}=-\frac{\sigma n_2}{a}a_{34},\ \ a_{22}a=-\beta n_1a_{23},\ b_2=\frac{\gamma}{a}a_{34}, \qquad (5)$$

где: $a_1=n_1+n_2$.

Допустимые границы изменений параметров β,γ,μ и σ будут определены в дальнейшем.

После этого производная $\dot{V}$ может быть представлена следующим образом:

$$\begin{aligned}\dot{V}=&\frac{1}{2}\left[\alpha_1f(x)-\alpha_2y+\alpha_3z+\alpha_4u\right]-\left[a_{34}\frac{g(x)}{x}-\frac{1}{2}\alpha_1^2\frac{f(x)}{x}+a_{14}\right]f(x)x+\\&+\left[a_{12}-a_{22}n_1+\frac{1}{2}\alpha_2^2-a_{23}\phi(x)-b_2f'(x)\right]y^2+\left(a_{23}a+\frac{1}{2}\alpha_3^2\right)z^2+\left(a_{34}-a_{44}n_2+\frac{1}{2}\alpha_4^2\right)u^2+\\&+\left[b_4\frac{g(x)}{x}-(a_{13}-b_7)\phi(x)\right]xy+\left[a_{12}a-(b_2a-\alpha_1\alpha_3+a_{34})\frac{f(x)}{x}\right]xz,\ x\neq 0.\end{aligned} \qquad (6)$$

Здесь:

$$\begin{gathered}a_2=-\frac{\mu a_1a_{24}\alpha_1}{a_{44}},\quad a_3=-\frac{a_{24}a\,\alpha_1}{a_{44}},\\ \alpha_1\alpha_4=a_{44},\ \ \alpha_2\alpha_3=a_{14}n_2-(1+\beta)a_{23}n_1,\\ \alpha_2\alpha_4=-\mu a_{24}a_1,\quad \alpha_3\alpha_4=-a_{24}a.\end{gathered} \qquad (7)$$

Последнее равенство в (7) обеспечивается за счет параметра β.

Выражение в квадратной скобке во втором слагаемом в (6) имеет структуру левой части неравенства Льенара-Шипара, являющегося условием асимптотической устойчивости линеаризованной системы (1). Поэтому естественно положить:

$$a_{34}=a_1n_1n_2^2a,\quad \alpha_1^2=2aa_1^2,\quad a_{14}=n_1n_2a^2p,. \qquad (8)$$

где: p – параметр, выбором которого мы распорядимся позднее.

После этого мы имеем:

$$\alpha_4^2 = -\frac{a_{44}^2}{\alpha_1^2}, \quad \alpha_1\alpha_2 - \frac{\mu a_1 a_{24}}{n_2}, \;\; \alpha_1\alpha_3 = -\frac{a_{24}a}{n_2}, \;\; b_1 = -b_2 n_1 + a_{24} + \alpha_1\alpha_2. \qquad (9)$$

Далее выберем a_{44} из условия минимума коэффициента при u^2. Мы получаем $a_{44} = \alpha_1^2 n_2$ и, следовательно, коэффициент при u^2 в $\dot{V}$ равен $\left(-aa_1 n_2^3\right)$.

Будем полагать, что существуют такие $\delta_1 > 0$ и $\delta_2 > 0$, что в D выполняются неравенства

$$a_{34}\frac{g(x)}{x} - \frac{1}{2}\alpha_2^2\frac{f(x)}{x} + a_{14} > \delta_1, \quad \frac{f(x)}{x} > \delta_2, \;\; x \neq 0. \qquad (10)$$

Рассмотрим «коэффициент» при xy в $\dot{V}$. Так как конкретная информация о функциях $f(x)$ и $g(x)$ в общих случаях не известна, то исходя из потребности минимизации этого выражения, следует признать, что в одних случаях коэффициент b_7 целесообразно считать положительным, а в других – отрицательным. Несколько подробней об этом будет сказано ниже.

Пока обратимся к «коэффициенту» при xz в $\dot{V}$. В нем:

$$b_2 a - \alpha_1\alpha_3 + a_{34} = \gamma a_{34} - \sigma a_{34} + a_{34} = \left(\gamma - \sigma_1\right)a_{34},$$

где: $\sigma_1 = \sigma - 1, \; \gamma > \sigma_1$.

Положим:

$$a_{12}a = \left(\gamma - \sigma_1\right)M_0 a_{34}, \qquad (11)$$

где:

$$M_0 = \frac{m+M}{2}, \;\; m = \inf_D f(x), \;\; M = \sup_D f(x).$$

Тогда «коэффициент» при xz в $\dot{V}$ запишется как:

$$F_{13} = \left(\gamma - \sigma_1\right)a_{34}\left[M_0 - \frac{f(x)}{x}\right], \;\; x \neq 0 \qquad (12)$$

Аналогичный подход можно применить и к предпоследнему слагаемому в выражении (6). А именно, обозначим:

$$\psi(x) := \frac{g(x)}{\varphi(x)x}, \;\; x \neq 0$$

и положим:

$$\frac{a_{13} - b_1}{b_4} = N_0, \qquad (13)$$

где: $N_0 = \dfrac{n+N}{2}, \;\; n = \inf\limits_D \psi(x), \;\; N = \sup\limits_D \psi(x)$.

Соотношение (13) налагает связь на коэффициенты b_4 и b_7.

«Коэффициент» при xy в $\dot{V}$ можно теперь представить как:

$$F_{12} := b_4\varphi(x)\left[\psi(x) - N_0\right] \qquad (14)$$

Рассмотрим далее «коэффициент» при y^2 в $\dot{V}$. Имея в виду выражения для a_{34} и a_{14} в (8), представим a_{14} в виде:

$$a_{14} + q\,a_{34}\,, \qquad (15)$$

где:

$$q = \frac{ap}{a_1 n_2}. \tag{16}$$

Тогда с учетом (8) и (5) названный «коэффициент» можно представить как:

$$K_1 := \frac{(\gamma\text{-}\sigma_1)M_0}{a}a_{34} + a_{23}\frac{\beta n_1^2}{a} + \frac{\mu^2\sigma^2 a_1 n_1 n_2^2}{4a^2}a_{34} - \alpha_{23}\varphi(x) - \frac{\gamma}{a}\alpha_{34} f^{/}(x), \tag{17}$$

где:

$$a_{23} = -\left(q + \frac{\mu_1 \sigma n_2 a_1}{a}\right)a_{34},\ \mu_1 = 1-\mu.$$

Представим коэффициент при a_{34} во втором слагаемом в (17) следующим образом:

$$\frac{\beta n_1^2}{a} + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\frac{\beta n_1^2}{a},$$

где: $\varepsilon_1 > 0,\ \varepsilon_2 > 0, \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 1.$

Далее, имея в виду получить удобные достаточные условия отрицательности K_1, представим его как сумму трех фрагментов:

$$K_1 = K_{11} + K_{12} + K_{13},$$

где:

$$K_{11} = -\frac{n_1 n_2 a_1 \sigma}{a^2}\left[\varepsilon_1 \beta n_1 \mu_1 - \frac{\mu^2 \sigma n_2}{4}\right]a_{34}, \tag{18}$$

$$K_{12} = -\left[\varepsilon_2 - \frac{\beta n_1^2}{a} - \varphi(x)\right]|a_{23}|, \tag{19}$$

$$K_{13} = -\frac{1}{a}\left[\varepsilon_1 \beta n_1^2 q - (\gamma - \sigma_1)M_0 + \gamma f^{/}(x)\right]. \tag{20}$$

Для отрицательности K_{11} потребуем выполнения неравенства:

$$\sigma < \bar{\sigma}_1,\ \ \bar{\sigma}_1 := \frac{4\varepsilon_1 \beta n_1 \mu_1}{\mu^2 n_2}. \tag{21}$$

Относительно K_{12} мы будем предполагать, что:

$$\varepsilon_2 = \frac{\beta n_1^2}{a} - \sup_D \varphi(x) > c_3 > 0. \tag{22}$$

В дальнейшем будет установлено, что величина βn_1 является возрастающей функцией n_1, поэтому неравенство (22) выполняется при достаточно больших значениях n_1.

То же самое можно сказать об обеспечении неравенства:

$$|K_{13}| > c_4 > 0. \tag{23}$$

Обратимся теперь к коэффициенту при z^2 в $\dot{V}$. Будем его обозначать символом K_2.

Легко проверяется, что:

$$\alpha_3^2 = \frac{\sigma^2 n_1 n_2^2}{2a_1}a_{34},$$

Поэтому:

$$K_2 = a_{23}a + \frac{1}{2}\alpha_3^2 = \left[-(qa + \mu_1 \sigma n_2 a_1) + \frac{\sigma^2 n_1 n_2^2}{4a_1}\right]a_{34}.$$

Очевидно, что для отрицательности K_2 достаточно, чтобы было:

$$\sigma < \bar{\sigma}_2,\ \ \bar{\sigma}_2 := \frac{4a_1^2\mu_1}{n_1 n_2}. \tag{24}$$

Наконец, обозначим:

$$F := \left[a_{34}\frac{g(x)}{x} - \frac{1}{2}\alpha_1^2 \frac{f(x)}{x} + a_{14} \right]\frac{f(x)}{x},\ x \neq 0.$$

Тогда справедливо **утверждение 1**: для определенной отрицательности функции $\dot{V}$ достаточно, чтобы выполнялись неравенства (10), (22), (23) и

$$|K_2|\left(F|K_1| - \frac{1}{4}F_{12}^2 \right) - \frac{1}{4}|K_1|F_{13}^2 > 0, \tag{25}$$

при этом параметры σ и γ выбираются с учетом ограничений (21), (24), $\gamma > \sigma_1$.

Предполагается, что неравенство (25) выполняется в некоторой области $E \subseteq D$.

Обратимся теперь к самой функции V.

Несложно показать, что она может быть приведена к следующему виду:

$$\begin{aligned} 2V &= \frac{a_{34}}{\lambda n_2}\left[\lambda n_2 g(x) + n_2 z + u \right]^2 + \frac{a_{34}}{s}\left[qx - \frac{\sigma n_2}{a} y + \frac{\lambda_1}{\lambda} z + su \right]^2 + \\ &+ a_{34}\frac{r\lambda}{\lambda_1}\left[qx - \frac{q}{r} y + \frac{\lambda_1}{\lambda} z \right]^2 + \frac{a_{34}}{a}\Big\{ M_0\left[n_1(\gamma - \sigma_1) - n_2\sigma_1 \right]x^2 + 2\gamma\left[M_0 - \frac{f(x)}{x} \right]xy + \\ &+ M_0\frac{\gamma^2}{n_2}y^2 \Big\} + a_{34}\left[\frac{\beta n_1}{a}\left(q + \mu_1 a_1 \frac{\sigma n_2}{a} \right) - \frac{\sigma^2 n_2^2}{a^2 s} - \frac{q^2\lambda}{r\lambda_1} - \frac{M_0}{a}\frac{\lambda^2}{n_2} \right]y^2 + \\ &+ 2b_1\int_0^x f(x)dx + 2b_4\int_0^x g(x)dx - \lambda_1 a_{34} n_2 g^2(x) + 2b_7\int_0^x \varphi(x)xdx,\ x \neq 0 \end{aligned} \tag{26}$$

Здесь:

$$s = \frac{2a_1\lambda - n_1}{n_1 n_2 \lambda},\ \ r = \frac{n_2\lambda(2a_1 - n_1)}{2a_1\lambda - n_1} \tag{27}$$

λ является корнем уравнения:

$$\mu_1 a_1 - \frac{1}{s}\frac{\lambda - 1}{\lambda} = 0 \tag{28}$$

и имеет вид:

$$\lambda = \frac{n_1(n_2 - \mu_1 a_1)}{n_1 n_2 - 2\mu_1 a_1}, \tag{29}$$

q принимается равным положительному корню уравнения:

$$\frac{\lambda}{\lambda - 1}q^2 + \frac{\sigma n_2}{as}q - (\sigma - 1)\frac{M_0}{a} = 0; \tag{30}$$

$$b_1 = \frac{a_{34}}{a}\left(-\gamma n_1 + \mu\sigma a_1 - \sigma n_2 \right),\ \lambda_1 = \lambda - 1. \tag{31}$$

Напомним, что q является функцией параметра p (см. (16)), поэтому уравнение (30) удовлетворяется фактически за счет p.

Так как $\lambda > 1$ и мы заинтересованы в том, чтобы было $\lambda_1 < 1$, то налагаем на (29) требование $\lambda < 2$, откуда следуют два неравенства:

$$\mu_1 < \frac{n_1 n_2}{4a_1^2 - n_1 a_1}, \tag{32}$$

$$\frac{\lambda}{\lambda - 1} > 2. \tag{33}$$

Займемся условиями, обеспечивающими определенную положительность функции V.

Рассматривая выражение в фигурных скобках в четвертом слагаемом в (26) как псевдоквадратичную форму переменных x и y, а также принимая во внимание, что:

$$M_0 > \left| M_0 - \frac{f(x)}{x} \right|, \; x \neq 0,$$

мы получаем достаточные условия положительности этого слагаемого:

$$\gamma > \sigma_1, \; n_1 > \frac{\sigma}{\gamma - \sigma_1} n_2 \tag{34}$$

Далее записываем условие положительности коэффициента b_1:

$$\gamma < \frac{\sigma(\mu a_1 - n_2)}{n_1}$$

или, что то же самое,

$$\gamma < \frac{\sigma(n_1 - \mu_1 a_1)}{n_1} \tag{35}$$

Таким образом, для γ мы имеем двойную оценку:

$$\sigma - 1 < \gamma < \frac{\sigma(n_1 - \mu_1 a_1)}{n_1} \tag{36}$$

откуда следует, что σ должно удовлетворять условию:

$$\sigma < \bar{\sigma}_3, \quad \bar{\sigma}_3 := \frac{n_1}{\mu_1 a_1}, \tag{37}$$

Теперь мы обращаемся к вопросу о положительности совокупности трех последних слагаемых в (26). При $b_7 > 0$ мы получаем условие:

$$\int_0^x g(x)\left(b_4 - \lambda_1 a_{34} n_2 \varphi(x)\right) dx > 0, \tag{38}$$

то есть:

$$\varphi(x) < \frac{b_4}{\lambda_1 a_{34} n_2}, \tag{39}$$

а при $b_7 < 0$:

$$\int_0^x \left[g(x)\left(b_4 - \lambda_1 a_{34} n_2 \varphi(x)\right) - |b_7| \varphi(x) x \right] dx > 0. \tag{40}$$

Соображения об оптимальном подборе коэффициентов b_4 и b_7, связанных равенством (13), могут оказаться противоречивыми. В этих случаях следует искать разумный компромисс с учетом других требований.

Обратимся, наконец, к коэффициенту при y^2 в выражении (26). Обозначим его через K_3 и представим как сумму двух фрагментов:

$$K_3 = K_{31} + K_{32},$$

где:

$$K_{31} = \frac{\sigma n_2}{a^2}\left(\beta\mu_1 n_1 a_1 - \frac{\sigma n_2}{s}\right), \tag{41}$$

$$K_{32} = \frac{\beta n_1}{a} q - \frac{q^2\lambda}{r\lambda_1} - M_0 \frac{\gamma^2}{a n_2}. \tag{42}$$

Для положительности K_{31} необходимо и достаточно, чтобы было:

$$\sigma < \bar{\sigma}_4, \;\; \bar{\sigma}_4 := \frac{\beta\mu_1 a_1 s n_1}{n_2} = \frac{\beta n_1}{n_2}\frac{\lambda - 1}{\lambda}. \tag{43}$$

Используя последнее равенство из (7), а также первое из (5), и учитывая (16) и (32), можно показать, что величина βn_1 является возрастающей функцией n_1.

Далее в выражении (42) заменим второе слагаемое, используя уравнение (30). Мы получим:

$$K_{32} = \frac{\beta n_1}{a} q + \frac{1}{r}\left(\frac{\sigma n_2}{as} q - \sigma_1 \frac{M_0}{a}\right) - M_0 \frac{\gamma^2}{a n_2}. \tag{44}$$

Затем воспользуемся оценкой положительного корня уравнения (30) снизу:

$$q > \frac{2s}{n_2}\frac{\lambda - 1}{\lambda}\sigma_1 M_0. \tag{45}$$

Она имеет место при условии, что:

$$\sigma < \bar{\sigma}_5, \;\; \bar{\sigma}_5 := \frac{\dfrac{\lambda}{\lambda - 1} + k^2 \dfrac{M_0}{a}}{2 + k^2 \dfrac{M_0}{a}}, \;\; k = \frac{2as}{n_2}. \tag{46}$$

Мы получим:

$$\begin{aligned} K_{32} &= \frac{\sigma_1 M_0}{a n_2}\left[\left(\beta n_1 + \frac{\sigma n_2}{rs}\right) 2s \frac{\lambda - 1}{\lambda} - \left(\frac{n_2}{r} + \frac{\gamma^2}{\sigma_1}\right)\right] = \\ &= \frac{\sigma_1 M_0}{a n_2}\left[\frac{1}{r}\left(2\beta n_1 rs \frac{\lambda - 1}{\lambda} - n_2\right) + \left(\frac{2\sigma n_2}{r}\frac{\lambda - 1}{\lambda} + \frac{\gamma^2}{\sigma_1}\right)\right]. \end{aligned} \tag{47}$$

Здесь:

$$rs = 1 + \frac{2n_2}{n_1},$$

$\frac{1}{r}$ является возрастающей функцией n_1, $\frac{\lambda - 1}{\lambda} > \frac{1}{3}$, так как $\lambda > \frac{3}{2}$.

Учитывая сказанное, легко понять, что величина K_{32} является положительной при достаточно больших n_1.

Утверждение 2. Если выполняются условия (34), (39)/(40), параметры γ и σ выбираются с учетом ограничений (36), (43), (46), а значения n_1 обеспечивают неравенство $K_{32} > 0$, то функция V является определенно положительной в области D.

Теперь подведем общий итог требований к параметру σ. Он должен удовлетворять неравенствам одинакового смысла (21), (24), (37), (43), (46).

По определению σ > 1. Следовательно, по крайней мере, должно быть $\bar{\sigma}_i > 1,\ (i = \overline{1,5})$. Уточним, при каких условиях выполняются эти неравенства.

Сначала рассмотрим соотношение (24). Очевидно, что $\bar{\sigma}_2 > 1$ при:

$$\mu_1 > \frac{n_1 n_2}{4a_1^2} \tag{48}$$

Далее из (21) имеем:

$$\bar{\sigma}_1 > 1 \text{ при } \varepsilon_1 > \frac{n_2 \mu^2}{4\beta n_1 \mu_1}. \tag{49}$$

Так как $\varepsilon_1 < 1$, то должно быть:

$$\beta n_1 > \frac{n_2 \mu^2}{4\mu_1}. \tag{50}$$

Отношение $\frac{\mu^2}{\mu_1}$ является убывающим по μ_1. Для доказательства выполнимости (50) рассмотрим более сильное неравенство, заменив μ_1 на $\inf \mu_1 = \frac{n_1 n_2}{4a_1^2}$. Мы приходим к вопросу о справедливости неравенства:

$$\beta n_1 > \frac{\left(4a_1^2 - n_1 n_2\right)^2 n_2}{4 n_1 n_2 a_1^2}$$

Легко убедиться в том, что последнее выполняется при достаточно большом n_1.

Рассмотрим теперь оценку $\bar{\sigma}_3$ сверху в соотношении (36). Неравенство $\mu_1 < n_1/a_1$ легко проверяется путем сопоставления его правой части с правой частью (32). Поэтому $\bar{\sigma}_3 > 1$.

Далее $\bar{\sigma}_4 > 1$ при достаточно большом n_1.

И, наконец, $\bar{\sigma}_5 > 1$ следует из $\frac{\lambda}{\lambda - 1} > 2$.

Нам остается установить наименьшую верхнюю грань для σ.

Отметим, что легко проверяется неравенство $\bar{\sigma}_2 < \frac{3}{2}$, если учесть (32), а также неравенство $\bar{\sigma}_5 < \frac{3}{2}$, если учесть, что $\frac{\lambda}{\lambda - 1} > 3$.

В то же время легко убедиться в том, что $\bar{\sigma}_3 > \frac{3}{2}$ и $\bar{\sigma}_4 > \frac{3}{2}$.

Что касается $\bar{\sigma}_1$, то для нее возможны обе указанные оценки ($\bar{\sigma}_1 > \frac{3}{2}$ и $\sigma_1 < \frac{3}{2}$) в зависимости от требований к параметру ε_1. Однако с практической точки зрения более предпочтительным представляется вариант

$$\bar{\sigma}_1 > \frac{3}{2} \text{ при } \varepsilon_1 > \frac{3\mu^2 n_2}{8\beta n_1 \mu_1}$$

Тогда, сопоставляя все отмеченные оценки, мы окончательно получаем, что параметр σ должен выбираться, исходя из соотношения

$$1 < \sigma < \min\{\bar{\sigma}_2, \bar{\sigma}_5\} \tag{51}$$

Утверждение 3. Если в условиях утверждений 1 и 2 место оценок (21), (24), (43) и (46) ввести оценку (51), а все остальные требования оставить без изменения, то нулевое решение системы (1) будет асимптотически устойчивым при начальных отклонениях, принадлежащих области притяжения начала координат ([3], [4]).

Известно, что область притяжения (область асимптотической устойчивости) является открытой, то есть не имеет определенной границы. Поэтому на практике мы можем только указать ее оценку снизу. В общем случае эта задача является сложной, мы отметим только два практически важных случая.

Обозначим символом ∂D границу области D и найдем минимум функции V на этой границе

$$V_m := \min_{\partial D} V .$$

Далее будем рассматривать гиперповерхность $V = V_m$. Она находится внутри ∂D, касается ее и охватывает начало координат. Обозначим символом S область, ограничиваемую гиперповерхность V_m и являющуюся частью области D.

Если область E, в которой $\dot{V} < 0$ охватывает область S или совпадает с ней, то S является оценкой области притяжения.

Если же $E \subset S$, то будем полагать, что внутри E:

$$x_1 \le x \le x_2, \quad x_1 < 0, \quad x_2 > 0 .$$

Построим две гиперплоскости $x = x_1$ и $x = x_2$, а затем найдем:

$$V_{m_1} := \min_{x=x_1} V \quad \text{и} \quad V_{m_2} := \min_{x=x_2} V \quad .$$

Пусть далее:

$$V_{m_o} := \min\{V_{m_1}, V_{m_2}\}$$

Тогда оценкой области притяжения будет область S_0, границей которой является гиперповерхность V_{m_0} .

Заключение

Теперь сделаем несколько замечаний относительно выбора варьируемых параметров μ, γ, σ, ε_1, b_7 в конкретных задачах.

Во-первых, необходимо стремиться обеспечивать максимальную величину области E и соответственно области притяжения.

Далее необходимо иметь в виду, что важным показателем качества переходного процесса с точки зрения времени его протекания является величина [5]

$$\eta = \min \frac{(-\dot{V})}{V} .$$

И, наконец, в некоторых задачах возникает необходимость определенным образом деформировать область притяжения. Это значит, что в таких случаях упомянутые параметры надо выбирать так, чтобы обеспечить оптимизацию какого-нибудь характерного размера этой области.

Конечно, при желании совместить указанные показатели, могут возникнуть противоречия. В таких случаях необходимо искать оптимальный компромисс.

Наличие в функции V нескольких варьируемых параметров делает ее более гибким инструментом для улучшения качества исследуемой системы.

Литература

1. Огурцов А.И. О критериях устойчивости нулевого решения одного нелинейного дифференциального уравнения // Естественные и технические науки, 2010. № 5. С. 48–51.
2. Огурцов А.И. Об условиях устойчивости программного движения одной механической системы // Естественные и технические науки, 2011. № 2. С. 25–29.
3. Справочник по теории автоматического управления / Под ред. А.А. Красовского. – М.: Наука, 1987. – 711 с.
4. Леондес К.Т. Современная теория систем управления. – М.: Наука, 1970. – 511 с.
5. Kalman R.E., Bertram J.E. Control System Analysis and Design Via the «Second Method» of Lyapunov // ASME Journal of Basic Engineering, June 1960. C. 375–392.
6. Холщевникова Н.Н. О представлении некоторых функций в предположении аксиомы Мартина // Математ. заметки, 49-2 (1991). С. 151–154.
7. Уварова Л.А., Федянин В.К. Асимптотические решения для электромагнитной волны в оптически нелинейном цилиндре, ТМФ, 106:1 (1996). С. 84–91.
8. Уварова Л.А., Федянин В.К. Математическая модель теплопереноса в существенно нелинейных сопряженных средах. Матем. моделирование, 2:6 (1990). С. 40–54.
9. Огурцов А.И. О выборе параметра в критерии В.М. Попова устойчивости регулируемых систем // Автоматика и телемеханика, 1968. № 3. С. 165–167.
10. Огурцов А.И. Модель плоского возмущенного движения ползуна с учетом нелинейности подъемной силы смазки // СТИН, 2000. № 7. С. 11–13.