

Поперечное сжатие двухслойной упругой плоскости с круговым отверстием на межслойной границе

к.ф.-м.н. доц. Мазин В.А., к.т.н. доц. Михайлова В.Л., д.т.н. проф. Сухомлинов Л.Г.
 Университет машиностроения
 8(495)223-05-23, доб. 1318

Аннотация. Излагаются результаты по распределению напряжений в поперечно сжатой двухслойной упругой плоскости с круговым отверстием на межслойной границе, полученные с применением вариационно-разностной процедуры численного решения задач плоской теории упругости для прямоугольных областей с отверстиями. Дается оценка влияния упругих постоянных слоев на уровень напряжений вокруг отверстия.

Ключевые слова: поперечное сжатие двухслойной упругой плоскости, круговое отверстие на межслойной границе.

В задачах исследования напряженно-деформированного состояния различным образом нагруженных тел слоистой структуры особый интерес представляют вопросы концентрации напряжений вблизи всевозможных местных расслоений, вырезов, отверстий, жестких включений. В частности, в работах [1 – 5] такие вопросы рассматривались применительно к двухслойным упругим средам. При этом в [1, 2, 3] упомянутые локальные особенности предполагались находящимися на межслойной границе, а в [4, 5] внимание уделено особенностям в виде кругового отверстия, находящегося вблизи межслойной границы. В настоящей статье в качестве объекта исследования принимается двухслойная упругая плоскость, ослабленная круговым отверстием с центром на межслойной границе и сжимаемая в поперечном направлении. Исследование выполняется с использованием вариационно-разностной процедуры численного решения плоской задачи теории упругости для прямоугольной области с отверстиями и включениями [6]. При численном моделировании вместо бесконечно протяженного объекта, каким является плоскость, рассматривается конечная прямоугольная область с размерами, многократно превышающими радиус отверстия.

Итак, рассматриваем прямоугольную область S , составленную из изотропных слоев $S_{(1)}$ и $S_{(2)}$ (рисунок 1). Считаем, что имеющееся в области S круговое отверстие $S_{(3)}$ заполнено материалом включения с пренебрежимо малым значением модуля Юнга (другими словами, при численном моделировании случай кругового отверстия сводим (как и в [6]) к случаю кругового включения пренебрежимо малой жесткости).

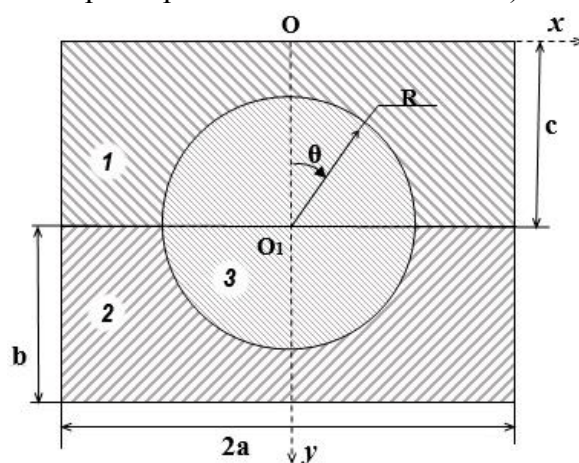


Рисунок 1. Схема двухслойной прямоугольной области с круговым включением

Введем обозначения $E^{(k)}$, $\nu^{(k)}$ ($k = 1, 2, 3$) для модулей Юнга и коэффициентов Пуассона материалов участков $S_{(1)}$, $S_{(2)}$, $S_{(3)}$ области S . Для удобства последующего изложения

перепишем физические соотношения плоской задачи теории упругости [7] с указанием номера k ($k = 1, 2, 3$) участка, к которому эти соотношения относятся. В результате будем иметь:

$$\begin{aligned}\sigma_{xx}^{(k)} &= \lambda_1^{(k)} \varepsilon_{xx}^{(k)} + \lambda_2^{(k)} \varepsilon_{yy}^{(k)}, \\ \sigma_{yy}^{(k)} &= \lambda_2^{(k)} \varepsilon_{xx}^{(k)} + \lambda_1^{(k)} \varepsilon_{yy}^{(k)}, \\ \sigma_{xy}^{(k)} &= 2G^{(k)} \varepsilon_{xy}^{(k)}, \quad (k = 1, 2, 3).\end{aligned}\tag{1}$$

Коэффициенты $G^{(k)}$, $\lambda_1^{(k)}$, $\lambda_2^{(k)}$ линейных зависимостей (1) выражаются через упругие постоянные $E^{(k)}$, $\nu^{(k)}$ согласно следующей схеме:

- 1) $G^{(k)} = 0,5 E^{(k)} / (1 + \nu^{(k)})$;
- 2) в случае плоского напряженного состояния $\lambda_1^{(k)} = E^{(k)} / [1 - (\nu^{(k)})^2]$, $\lambda_2^{(k)} = \nu^{(k)} \lambda_1^{(k)}$;
- 3) в случае плоского деформированного состояния $\lambda_1^{(k)} = 2G^{(k)} + \lambda^{(k)}$, $\lambda_2^{(k)} = \lambda^{(k)}$,
где: $\lambda^{(k)} = \nu^{(k)} E^{(k)} / [(1 + \nu^{(k)})(1 - 2\nu^{(k)})]$.

Считаем далее, что рассматриваемая область S нагружена таким образом, что в каждом из ее слоев $S_{(1)}$ и $S_{(2)}$ на достаточно большом удалении от отверстия $S_{(3)}$ реализуется состояние, близкое к однородной деформации. Оценку напряжений и деформаций, отвечающих таким однородным состояниям слоев $S_{(1)}$ и $S_{(2)}$, выполним, исходя из расчетной модели в виде сплошного (без отверстия) двухслойного пакета, находящегося под действием равномерно распределенного вдоль горизонтальных участков границы давления p в условиях, когда продольные деформации слоев стеснены настолько, что можно принять:

$$\varepsilon_{xx}^{(1)} = \varepsilon_{xx}^{(2)} = 0.\tag{2}$$

В описанных условиях для поперечных напряжений, а также сдвиговых напряжений и деформаций в слоях должно быть:

$$\sigma_{yy}^{(1)} = \sigma_{yy}^{(2)} = -p,\tag{3}$$

$$\sigma_{xy}^{(1)} = \sigma_{xy}^{(2)} = 0, \quad \varepsilon_{xy}^{(1)} = \varepsilon_{xy}^{(2)} = 0.\tag{4}$$

Введем для значений продольных напряжений в первом и втором слое рассматриваемого двухслойного пакета обозначения $q_{(1)}$ и $q_{(2)}$, так что:

$$\sigma_{xx}^{(1)} = q_{(1)}, \quad \sigma_{xx}^{(2)} = q_{(2)}.\tag{5}$$

Считая заданной величину p , с использованием равенств (1), (3), (5), получаем:

$$q_{(1)} = -p \lambda_2^{(1)} / \lambda_1^{(1)}, \quad q_{(2)} = -p \lambda_2^{(2)} / \lambda_1^{(2)},\tag{6}$$

$$\varepsilon_{yy}^{(1)} = -p / \lambda_1^{(1)}, \quad \varepsilon_{yy}^{(2)} = -p / \lambda_1^{(2)}.\tag{7}$$

Настройку программы расчета на интересующий нас случай поперечного сжатия двухслойной плоскости с круговым отверстием осуществляем по схеме, аналогичной изложенной в статье [6] применительно к случаю бесконечной однородной области, ослабленной круговым отверстием. Как и в [6], при численном моделировании вместо (бесконечной) плоскости рассматриваем конечную прямоугольную область с большими по сравнению с радиусом отверстия R размерами, а именно полагаем $a = b = c = 15R$. Исходя из симметрии принятой расчетной схемы относительно оси Oy , моделирование осуществляем для половины указанной прямоугольной области. При этом на участке границы моделируемой половины, лежащем на оси Oy , формулируем условия симметрии $u_x = 0, q_y = 0$; на участке, параллельном

оси Ox , – условия $u_y = 0, q_x = 0$; на участке, лежащем на оси Ox , – условия $q_x = 0, q_y = p$; на участке, параллельном оси Oy , – условия $q_y = 0$,

$$q_x = \begin{cases} q_{(1)}, & \text{при } y < c, \\ q_{(2)}, & \text{при } y > c, \end{cases}$$

где параметры $q_{(1)}$ и $q_{(2)}$ определяются с использованием равенств (6).

При дискретизации рассматриваемой прямоугольной области S с круговым включением $S_{(3)}$ пренебрежимо малой жесткости используем (как и в [6]) сетку прямоугольных элементов с $n = 200$.

В правильности настройки программы на рассматриваемый случай сжатия двухслойной области с круговым отверстием убеждаемся следующим образом. Полагаем сначала (на программном уровне), что включение $S_{(3)}$ отсутствует, и убеждаемся, что при этом численное моделирование (с описанными граничными условиями и схемой дискретизации) приводит к однородной картине напряжений и деформаций в слоях $S_{(1)}$ и $S_{(2)}$ в полном соответствии с тем, что дают равенства (2) – (7). Полагаем далее, что материалы слоев $S_{(1)}$ и $S_{(2)}$ одинаковы, а жесткость включения пренебрежимо мала ($E^{(3)}/E^{(1)} = 0,0001$) и $q_{(1)} = q_{(2)} = 0$. Тем самым приходим к модели, соответствующей случаю ослабленной круговым отверстием однородной упругой плоскости, равномерно сжимаемой вдоль оси Oy . Проводимый этап тестирования показал, что получаемые при этом расчетные результаты по напряжениям на кромке отверстия отклоняются от имеющегося для такого случая аналитического решения [7] не более, чем на 3%.

Обратим теперь внимание на то обстоятельство, что в рассматриваемой расчетной схеме (рисунок 1) межслойная граница пересекает свободный от нагрузок контур отверстия под прямым углом. Оценки, выполненные в работе [8] средствами асимптотического анализа, показывают, что в таком случае вследствие различия в значениях упругих постоянных слоев может иметь место сильная концентрация напряжений в малой окрестности краевой точки межслойной границы (бесконечные напряжения в этой точке). При этом указано, что подобные случаи бесконечных напряжений исключаются, если значения упругих постоянных слоев удовлетворяют условиям:

$$\min(\mu_1, \mu_2) < \mu < \max(\mu_1, \mu_2), \quad (7)$$

$$\text{где: } \mu_1 = \frac{(1 - \nu^{(1)})}{(1 - \nu^{(2)})}, \mu_2 = \frac{\nu^{(1)}}{\nu^{(2)}}, \mu = \frac{E^{(1)}(1 + \nu^{(2)})}{E^{(2)}(1 + \nu^{(1)})}.$$

Учитывая сказанное, численное моделирование с применением настроенной описанным образом программы будем проводить, согласовывая выбираемые значения упругих постоянных с требованиями (7). При этом полагаем, что исследуемая двухслойная среда находится в состоянии плоской деформации.

Результаты выполненных в рамках сформулированной задачи параметрических исследований в виде зависимостей окружных напряжений σ_θ на кромке отверстия от угла θ представлены на рисунках 2 – 5.

Цифрами 1, 2, 3, 4, 5 на рис. 2 отмечены зависимости, относящиеся соответственно к случаям $E^{(1)}/E^{(2)} = 0,23; 0,38; 0,76; 0,99; 1,21$;

цифрами 1, 2, 3, 4 на рис. 3 – зависимости для случаев $E^{(1)}/E^{(2)} = 0,3; 0,55; 0,85; 1,06$;

цифрами 1, 2, 3, 4 на рис. 4 – зависимости для случаев $E^{(1)}/E^{(2)} = 0,41; 0,66; 0,91; 1,16$;

цифрами 1, 2, 3 на рис. 5 – зависимости для случаев $E^{(1)}/E^{(2)} = 0,63; 0,85; 1,12$.

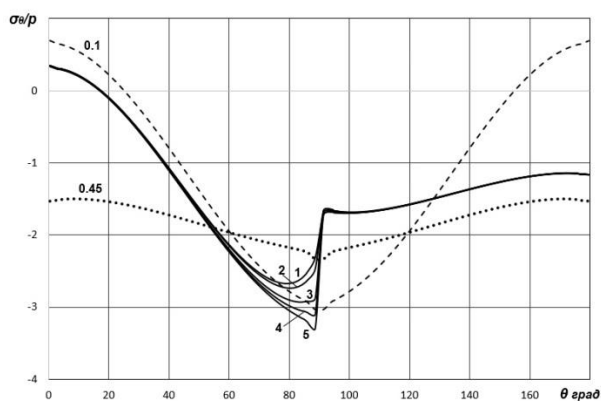


Рисунок 2. Картина распределения напряжений вокруг отверстия в зависимости от модулей Юнга слоев в случае $\nu^{(1)} = 0,1; \nu^{(2)} = 0,45$

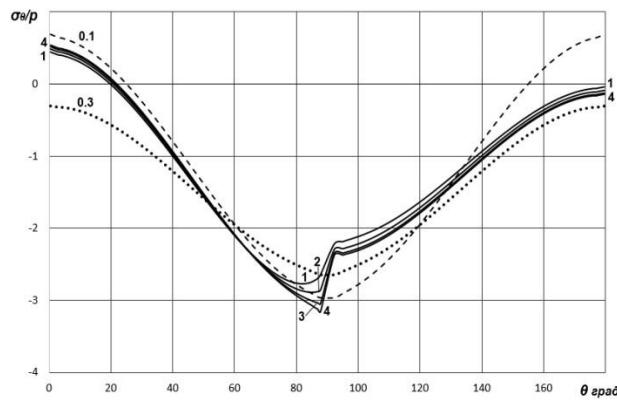


Рисунок 3. Картина распределения напряжений вокруг отверстия в зависимости от модулей Юнга слоев в случае $\nu^{(1)} = 0,1; \nu^{(2)} = 0,3$

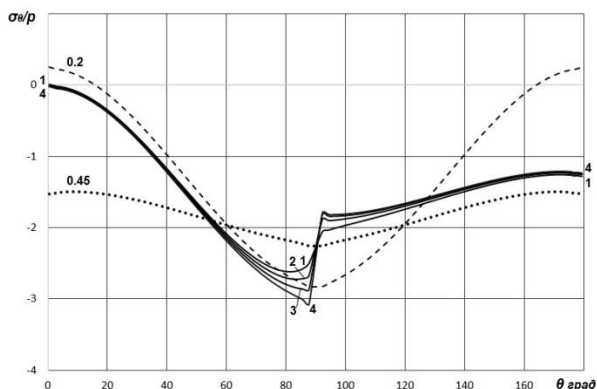


Рисунок 4. Картина распределения напряжений вокруг отверстия в зависимости от модулей Юнга слоев в случае $\nu^{(1)} = 0,2; \nu^{(2)} = 0,45$

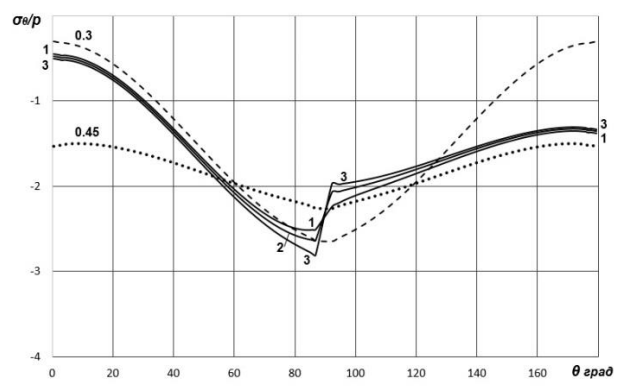


Рисунок 5. Картина распределения напряжений вокруг отверстия в зависимости от модулей Юнга слоев в случае $\nu^{(1)} = 0,3; \nu^{(2)} = 0,45$

На этих же рисунках для сравнения представлены кривые (изображенные точками и пунктиром), отражающие результаты моделирования в предположении, что материалы слоев одинаковы (случай однородной плоскости). Каждая из этих кривых снабжена числовым указателем, представляющим собой принятое при расчете значение коэффициента Пуассона.

Приступая к анализу представленных на рисунках 2 – 5 результатов, обратим внимание на то обстоятельство, что как левые (при $\theta < 60^\circ$), так и правые (при $\theta > 120^\circ$) ветви сплошных кривых на этих рисунках практически сливаются друг с другом. Другими словами, напряжения σ_θ на кромке отверстия при $\theta < 60^\circ$ и $\theta > 120^\circ$ практически не зависят от значений модулей Юнга слоев. В то же время, переходя последовательно от одного из рассматриваемых рисунков к другому, можно наблюдать существенное влияние значений коэффициентов Пуассона слоев на уровень этих напряжений. При анализе данных рисунков следует также обратить внимание на левую ветвь кривой (пунктир), полученной на основе упомянутой выше модели однородной плоскости с принятием значения коэффициента Пуассона первого слоя, и правую ветвь аналогичной кривой (точки), соответствующей значению коэффициента Пуассона второго слоя. Как видно, в целом эти ветви достаточно хорошо отражают характер распределения напряжений вдоль контура отверстия в рассматриваемой двухслойной плоскости. При этом с уменьшением разности между значениями коэффициентов Пуассона слоев точность такого приближенного описания распределения напряжений увеличивается.

ется.

Отмеченные эффекты объясняются следующими факторами. Во-первых, в рассматриваемой постановке задачи напряжения в каждом из слоев на достаточном удалении от отверстия зависят только от значения коэффициента Пуассона соответствующего слоя. Во-вторых, принятая постановка задачи предполагает, что вдоль межслойной границы (за исключением малого ее участка у кромки отверстия) напряженное состояние должно соответствовать условиям симметрии. Поэтому в зонах, достаточно удаленных от этого участка, напряженное состояние в каждом из слоев приближенно оказывается таким, как если бы данный слой являлся полуплоскостью некоторой (аналогичным образом сжимаемой) однородной плоскости.

Дополнительно отметим, что максимальные по модулю напряжения σ_0 в рассматриваемой постановке задачи имеют место вблизи межслойной границы на участке контура отверстия, принадлежащем слою с меньшим значением коэффициента Пуассона. На их величину определенное влияние оказывают и значения модулей Юнга слоев. В частности, из рисунка 2 видно что, при пятикратном уменьшении значения модуля Юнга первого слоя по сравнению со вторым слоем имеет место лишь примерно двадцати процентное уменьшение указанного максимума напряжений. В других из рассмотренных случаев эффект подобного уменьшения значительно слабее. Это указывает на возможность использования модели однородной плоскости (случай одинаковых значений модулей Юнга слоев) при оценке обсуждаемых напряжений.

В качестве общего вывода по изложенной статье отметим, что выполненное с применением вариационно-разностной процедуры численное моделирование позволило дать оценку влияния двухслойной структуры поперечно сжимаемой плоскости на характер распределения напряжений вокруг кругового отверстия, центр которого расположен на межслойной границе. При этом показано, что оценка уровня напряжений на контуре такого отверстия может быть выполнена с использованием схемы ослабленной круговым отверстием однородной плоскости.

Литература

1. Ефимов В.В., Кривой А.Ф., Попов Г.Я. Задачи о концентрации напряжений возле кругового дефекта в составной упругой среде // Изв. РАН. МТТ. 1998. № 2. С. 42-58.
2. Члингарян Г.С. Напряженное состояние составной упругой плоскости с включениями на границе раздела материалов // Изв. НАН Армении. Механика. 2009. Т.62. № 3. С. 52-58.
3. Симонов И.В. Взаимодействие системы ослабленных зон на границе упругих сред в поле растягивающих напряжений // Прикладная математика и механика. 2011. Т. 75. № 1. С. 140-151.
4. Мазин В.А., Михайлова В.Л., Сухомлинов Л.Г. Напряжения вокруг кругового отверстия в двухслойной упругой полуплоскости при продольном растяжении // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2011. № 1. С. 62-68.
5. Мазин В.А., Михайлова В.Л., Сухомлинов Л.Г. Напряжения вокруг кругового отверстия в двухслойной упругой полуплоскости при поперечном сжатии // Известия Тульского государственного университета. Естественные науки. 2011. Вып. 1. С. 119-128.
6. Мазин В.А., Михайлова В.Л., Сухомлинов Л.Г. Вариационно-разностная процедура численного решения плоской задачи теории упругости для прямоугольной области с включениями и отверстиями // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2010. № 2. С. 53 – 62.
7. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. М.: Наука, 1979. 560 с.
8. Чобанян К.С. Напряжения в составных упругих телах. Ереван: Изд-во АН АрмССР, 1987. 338 с.