

Система автоматизированного проектирования роторов ГТД

д.ф.-м.н. Бондарь В.С.¹, Алхимов Д.А.¹, к.т.н. Факеев А.И.¹, д.т.н. Темис Ю.М.²,
Якушев Д.А.², Пестов А.В.³

¹Университет машиностроения, ²МГТУ им. Н.Э. Баумана, ФГУП ЦИАМ им. П.И. Баранова,
³ОАО Авиадвигатель
tm@mami.ru, tejout@ciam.ru

Аннотация. Рассмотрена технология оптимального проектирования конструкции дисков роторов для турбомашин. Рассмотрены особенности организации процесса автоматизированного проектирования ротора ГТД, дано описание автоматизированной системы и средств оптимального проектирования, проведено расчетное исследование оптимальных форм деталей ротора ГТД. Конструктивная оптимизация (оптимизация формы) применена для оптимального проектирования диска компрессора в зависимости от различных факторов нагружения и критериев оптимизации.

Ключевые слова: САПР, оптимальное проектирование, диск компрессора

Введение

При создании современных газотурбинных двигателей (ГТД) широко используют системы и средства автоматизированного проектирования. Процесс разработки новой конструкции является итерационным и многостадийным, и оптимальное проектирование как один из основных этапов автоматизации сокращает его трудоемкость, позволяя найти наилучшую конструкцию, удовлетворяющую технологическим и прочностным ограничениям и обеспечивающую минимум заданной целевой функции [1 – 3]. В настоящее время технологии оптимального проектирования являются основой систем автоматизированного проектирования конструкций, особенно авиационных, к которым предъявляются высокие требования надежности, ресурса, жесткости, минимума массы и т.д.

Технология оптимального проектирования состоит из нескольких последовательных этапов: формирования функции цели, критериев и ограничений; параметризации формы деталей и выбора параметров управления формой; создания расчетной модели; выбора метода оптимизации; решения задачи оптимизации. Функции цели, критерии и ограничения зависят от постановки задачи оптимизации и назначения детали или конструкции. В задачах проектирования конструкции ротора ГТД наиболее часто используют критерии минимума массы, максимума жесткости, минимума зазоров между ротором и корпусом при удовлетворении ограничений по прочности и технологичности. Проектирование формы детали связано с определением функции цели и набора ограничений, накладываемых на параметры проектирования. К ним относят размеры и размещаемость детали, технологичность изготовления и параметры состояния конструкции: масса, напряжения, перемещения и др. Функциональное назначение детали или конструкции определяет выбор функции цели (для авиационных конструкций чаще всего массу), критериев и ограничений, влияние которых на результат оптимизации может быть представлено в виде зависимостей оптимальной массы от различных предельных ограничений.

При автоматизированном процессе проектирования детали представлены в виде параметризованных объектов на основе геометрической формы деталей. Размеры и форма этих объектов связаны с вектором геометрических параметров, управляя которыми можно варьировать модель детали или конструкции. Выбор параметров управления зависит от цели проектирования и ограничений. При предварительных расчетах проводят анализ чувствительности изменения функции цели и ограничений к изменению геометрических параметров модели. На основании этого анализа параметры, которые оказывают большое влияние на функцию цели и ограничения, включают в параметры управления. Количество параметров и подробность параметризации формы детали играют большую роль в процессе решения задачи

оптимизации. Недостаточное количество параметров может привести к неоптимальному значению функции цели или вообще не позволит попасть в область допустимых решений. Следствием излишнего числа параметров может быть появление множества близких локальных оптимумов, в которых значения функции цели близки друг другу.

Сложность и порядок расчетной модели определяют на основании допускаемой точности расчета и располагаемого времени на решение задачи. Как правило, время работы самого программного модуля оптимизации намного меньше времени работы расчетных программ на шаге изменения вектора параметров проектирования. В целях уменьшения временных затрат оптимизацию проводят на упрощенных расчетных моделях (применение более грубой сетки, переход от трехмерной постановки задачи к двухмерной, от двухмерной к одномерной) или применяют упрощенные методы расчета (линейный расчет вместо нелинейного и т.п.). Это позволяет провести анализ большего количества конструктивных решений, получить хорошее начальное приближение для окончательной оптимизации, оценить степень влияния ограничений, исследовать возможность существования нескольких решений в области изменения параметров и т.д.

Выбор метода оптимизации связан с определением параметров управления, размерностью параметрического пространства, гладкостью функций цели и ограничений, постоянным или переменным набором ограничений по итерациям.

Оптимизация по одному режиму работы может оказаться недостаточной, так как различные типы нагрузок могут усиливаться в одной области детали и компенсироваться в другой. В большинстве случаев оптимизация выполняется для одного наиболее тяжелого режима работы двигателя: оптимизация массы или жесткости дисков, проставок, опор, корпусов, лопаток компрессоров и турбин. Однако возможны варианты, когда оптимизация выполняется для наиболее продолжительного режима с целью обеспечения экономичности двигателя: оптимизация выносов лопаток для обеспечения в рабочих условиях заданных аэродинамических форм, оптимизация уплотнительных устройств для обеспечения минимальных зазоров между ротором и статором.

В статье рассмотрены особенности организации процесса автоматизированного проектирования ротора ГТД, дано описание автоматизированной системы и средств оптимального проектирования, проведено расчетное исследование оптимальных форм деталей ротора ГТД.

Проектирование основных деталей ротора компрессора высокого давления (КВД), как правило, осуществляется в разных программных комплексах – конструкцию разрабатывают с использованием САД систем, а расчёты газовых нагрузок, теплового состояния, напряженно-деформированного состояния (НДС) и ресурса в системах САЕ. Такое разделение функций приводит к постоянному обмену информацией и большому количеству итераций для получения оптимальной конструкции, что может занимать значительное время.

Диски роторов, являющиеся ответственными деталями и работающими при высоких температурах и центробежных нагрузках, во многом определяют массу ротора ГТД. Оптимальное проектирование дисков и роторов в большинстве случаев направлено на минимизацию их массы при выполнении прочностных и жесткостных ограничений. Помимо ограничений по прочности в задачу оптимизации включают ограничения на область возможного изменения размеров дисков. Это обусловлено как технологическими ограничениями, порядком сборки ротора, так и необходимостью сужения области изменения допустимых параметров, чтобы обеспечить адекватность измененной формы и непрерывность работы программы оптимизации.

В связи с этим практическое значение приобретает разработка программного модуля для оптимизации ротора КВД, позволяющего проводить оптимизацию массы при заданных ограничениях на НДС, как отдельных дисков в составе ротора, так и всего ротора, при помощи программного комплекса ANSYS в среде NX, применяемой конструкторами.

Описание архитектуры системы

Создан программный модуль OCDS (Optimal Compressor Design System) для проектирования оптимальных роторов компрессоров на заданном режиме работы двигателя. Разработанный с использованием средств языка C# программный модуль представляет собой управляющую программу, обеспечивающую взаимодействие среды проектирования NX и расчетного комплекса ANSYS. На рисунке 1 представлена архитектура системы проектирования оптимального ротора КВД. Система включает в себя следующие модули:

- 1) пользовательский интерфейс, интегрированный в CAD систему;
- 2) управляющий модуль, который является ядром системы;
- 3) различные библиотеки (базы данных), в которых хранятся все необходимые данные для построения модели;
- 4) модуль интеграции с решателем, отвечающий за обмен данными с решателем.



Рисунок 1. Архитектура системы

Все модули написаны на языке C#, что обеспечивает возможность расширять систему, путем добавления новых моделей, определяя их как новые классы в проекте. Модули работают независимо друг от друга, а взаимодействие между ними осуществляется в текстовом формате через файлы или потоки между модулями, что позволяет заменять некоторые модули в зависимости от систем, используемых при проектировании и расчете роторов КВД. Поточное взаимодействие осуществляется через общий для модулей сегмент виртуальной памяти, что позволяет сделать обмен информации между модулями достаточно быстрым и незаметным по времени для конструктора.

В качестве CAD системы использован UG NX. Система UG NX включает в себя библиотеки для разработки дополнительных компонент и инструменты для их интеграции в визуальный интерфейс самой системы, что позволило совместить интерфейс системы проектирования с системой оптимизации и сделать их в едином стиле. Пользовательский интерфейс интегрирован в систему NX в главном меню в виде дополнительного выпадающего списка, каждая ветвь которого отвечает за поэтапное проектирование и позволяет задавать в диалоговом режиме нагрузки, материалы, геометрические параметры КВД, изменение которых сразу отображается на чертеже конструкции в среде NX. Интерфейс системы интуитивно понятен проектировщику и не требует много времени на освоение.

В качестве решателя выбрана система ANSYS, в которой определяют НДС конструкции с помощью метода конечных элементов. Передача информации, построение модели и прочее взаимодействие с решателем осуществляется через командные файлы на языке APDL, которые генерируются автоматически. Расчет напряжений в деталях ротора и их оптимизацию выполняют решатель и модуль оптимизации ANSYS, используя командные файлы в зависимости от настроек модели. После проведения оптимизации управляющая программа генерирует текстовый отчет формата HTML, включающий в себя данные о тепловом состоянии ротора, НДС и коэффициентах запаса, и перестраивает оптимизированный ротор в NX для последующей работы конструктора.

Потоки данных

Система проектирования оптимальной конструкции КВД позволяет задавать в диалоговом режиме геометрические объекты КВД и их параметры: проточная часть, данные о расположении и форме проекций лопаток, их центры масс, диски и соединения между ними; материалы, из которых изготовлены диски и лопатки компрессора, их механические свойства; необходимые данные по выбранному режиму оптимизации (распределение температуры по диску, частота вращения, величины газодинамических нагрузок); параметры оптимизации и ограничения.

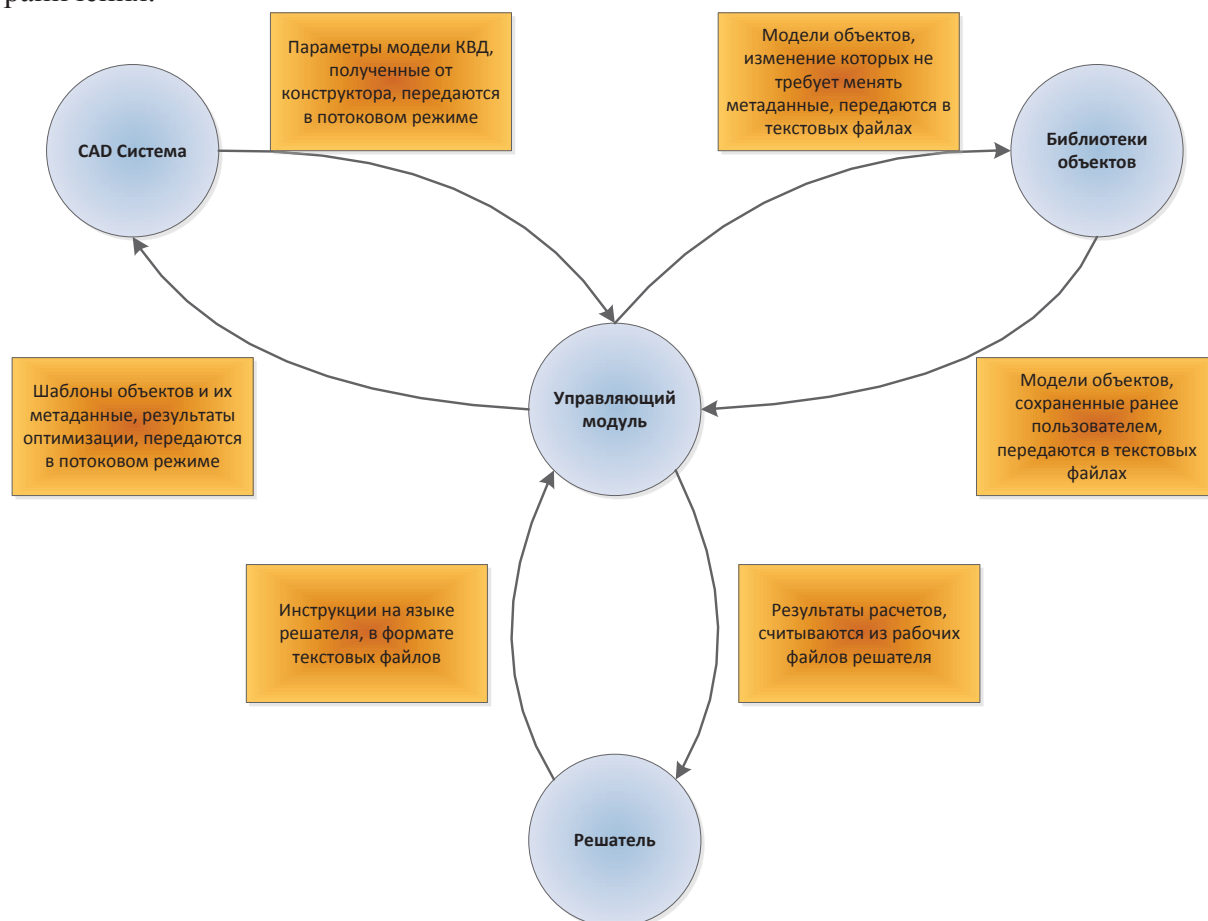


Рисунок 2. Диаграмма потоков данных

Вся исходная информация транслируется из NX в управляющий модуль в потоковом режиме, который, в свою очередь, преобразует ее в систему объектов. В случае вызова процедуры оптимизации осуществляется проверка достаточности данных для их передачи в расчетный модуль и их корректности. Простейшие проверки на корректность параметров, такие как проверка форматов и проверка размерностей, производятся еще при их задании. В случае выполнения всех проверок объекты передаются в модуль интеграции с решателем, иначе конструктор получает оповещение о недостатке данных модели.

Модуль интеграции с решателем интерпретирует поступающую информацию от управляющего модуля во входные файлы в формате языка решателя для начала процедуры оптимизации и осуществляет запуск расчета. По окончании расчета модуль считывает результаты из выходных файлов решателя и интерпретирует их обратно в формат объектов управляющего модуля.

В управляющем модуле строится отчет, включающий в себя данные о тепловом состоянии компрессора, перемещениях, напряжениях, деформациях и информацию о коэффициентах запаса, а значения оптимизированных параметров передает управляющей программе, которая вызывает перестроение оптимизированного КВД в NX.

Построение модели

Пользовательский интерфейс реализован в виде системы диалоговых окон, интегрированных в систему NX UG, доступ к которым осуществляется с помощью древовидной структуры вкладок главного меню. Интерфейс выполняет роли, как препроцессора, так и постпроцессора.

Конструктор создает модель КВД, используя встроенные объекты из библиотеки объектов. КВД разбит на ступени, состоящие из лопаток и диска, соединенных между собой. Иерархия объектов приведена на рисунке 3.

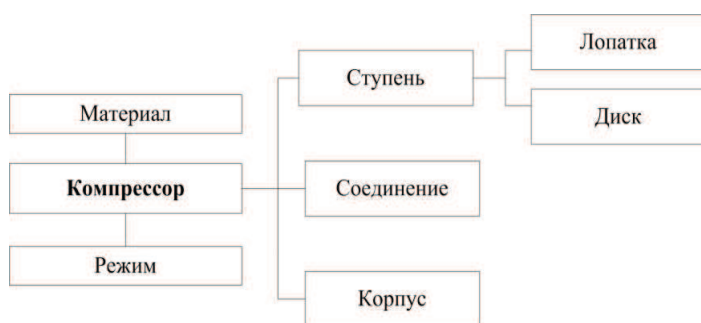


Рисунок 3. Иерархия основных объектов

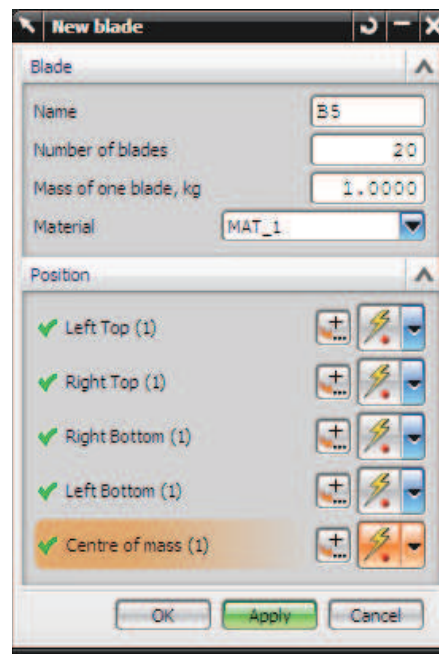


Рисунок 4. Диалог создания лопатки

Геометрическая модель компрессора создается на основе геометрических моделей его составных частей. С целью добавления к модели объектов для каждого из них используется специальное диалоговое окно.

Объект "лопатка" (рисунок 4) – проекция пера лопатки на плоскость построения компрессора. Для лопатки необходимо определить следующий набор параметров: уникальное имя лопатки, количество лопаток, массу пера одной лопатки, выбрать материал из базы материалов. Также необходимо задать четыре крайние точки, являющиеся проекциями крайних точек лопатки на проточную часть и координаты проекции центра масс лопатки на плоскости. Нагрузки, прикладываемые к лопатке, определяются при задании режима работы компрессора, для каждой лопатки отдельно, в настройках ступени.

В библиотеке моделей реализовано несколько шаблонов дисков, для каждого из которых задана параметризованная топология, набор параметров и зависимости между ними. Для создания диска используется диалоговое окно (рис. 5), в котором, в зависимости от выбранного типа (в диалоговом окне показано его схематическое изображение), необходимо задать следующий набор параметров: уникальное имя, материал, указать точки привязки к проточной части, задающие его начальные размеры, левую и правую границы, а также указать при необходимости одну или несколько привязанных к нему лопаток, составляющих ступень КВД. При этом значения остальных параметров, необходимых для построения, вычисляются автоматически, с возможностью их более точной настройки в отдельном режиме. Перестроение дисков на чертеже происходит сразу же, без закрытия диалогового окна, что позволяет сразу увидеть внесенные изменения. Для каждого определяющего параметра реализована возможность исключения его из процесса оптимизации, в противном случае необходимо задать границы возможного изменения параметра в процессе оптимизации.

Для постановки задачи оптимизации ротора КВД создан универсальный шаблон диска, подходящий для широкого класса задач (рисунок 5). В этот шаблон введена параметризация осесимметричной формы диска, включающая 21 параметр, среди которых 6 параметров, определяющих толщину полотна и размеры ступицы диска, изменяются в процессе оптимизации. Оставшиеся 15 параметров предназначены для определения размеров ободной части конструктором в диалоговом режиме. Такая упрощенная схема параметризации формы дисков позволяет быстро получить оптимальный вариант конструкции в диалоговом режиме.

Параметризованная модель диска ротора КВД показана на рисунке 5. Параметры $b1$, $b2$ определяют толщину полотна диска. Параметры $B1$, $h1$, $h2$ определяют размеры ступицы, внутренний радиус которой задан. Параметр $R3$ определяет размеры радиусов перехода от полотна к ступице. Радиусы галтелей и остальные размеры дисков в процессе оптимизации не изменяют. Ими управляет конструктор в диалоговом режиме как начальными параметрами. Следует отметить, что геометрические параметры $R4$, $R5$, $R6$, $R7$, $B2$, α , S , $h3$, $h4$, $h5$ являются параметрами проекта замкового соединения, проектирование которого является отдельной задачей.

Все диски соединены между собой с использованием объектов-шаблонов соединений I из встроенной библиотеки (рисунок 6). В библиотеке предусмотрено несколько шаблонов соединений, для каждого из которых задана их уникальная геометрия, набор параметров и зависимости между ними. Любое соединение между дисками состоит из трех частей, представляющих собой различные способы крепления.

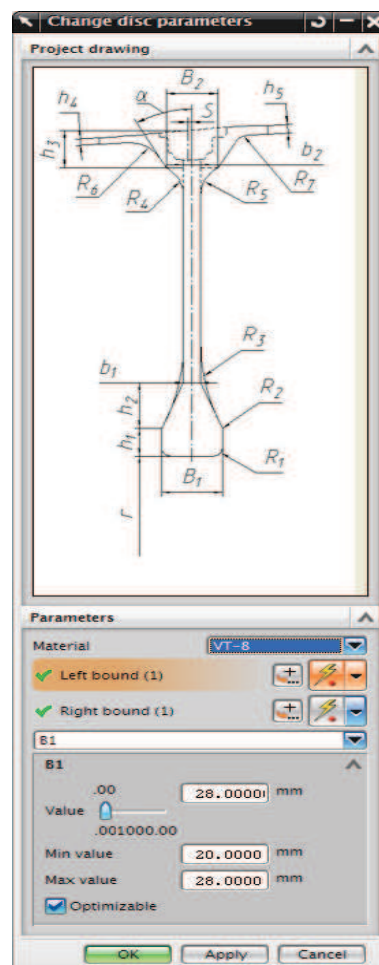


Рисунок 5. Диалог настройки параметров диска

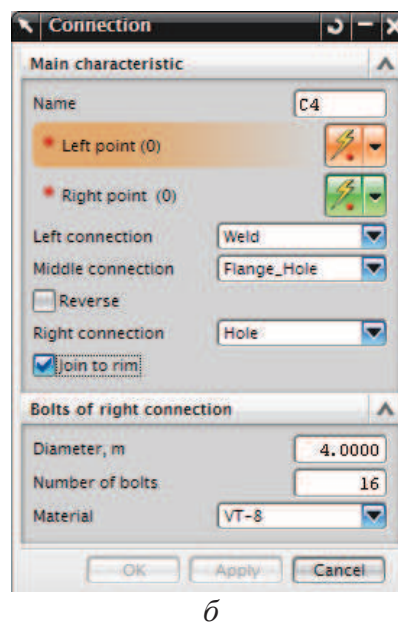
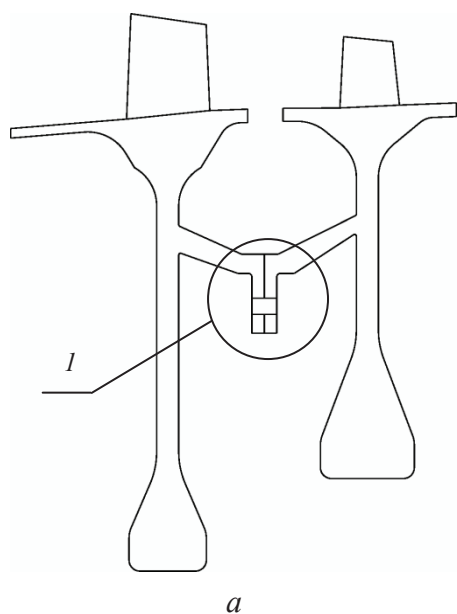


Рисунок 6. Геометрическая модель соединения (а) и диалог его создания (б)

В программе реализованы такие виды соединений, как фланцевое, сварочное и телескопическое. Для каждого способа крепления требуется задать определенный набор параметров. После сборки модели компрессора, конструктор задает режим работы, при котором

будет оптимизироваться конструкция и запускается процесс оптимизации.

В системе предусмотрен набор библиотек объектов. Такие объекты, как материал или режим работы, отличаются только параметрами, а их метаданные остаются неизменными. Поэтому для них реализована возможность добавления моделей в библиотеку напрямую из интерфейса системы. Для добавления в библиотеку таких объектов, как диск или соединение, необходимо определить набор параметров модели объекта и то, как они влияют на геометрию модели. Добавление таких моделей осуществляется путем добавления в систему новых классов. Например, для добавления новой модели диска необходимо определить класс, дочерний к классу “Disc” и определить для него набор необходимых методов и параметров. В методах определяются как особенности построения геометрии модели, так и правила интерпретации объекта для решателя, в том числе и метод построения командного файла решателя.

Процесс оптимизации

При постановке задачи оптимизации диска для заданного режима работы математическая формулировка задачи имеет вид:

$$\begin{cases} mass \rightarrow \min; \\ \sigma(\vec{r}) \leq [\sigma(\vec{r})] \text{ или } k \geq [k]; \\ \vec{u}(\vec{r}_j) \cdot \vec{e}_j \leq [u]_j, \quad j = 1 \dots M; \\ h_i^{\min} \leq h_i \leq h_i^{\max}, \quad i = 1 \dots N_h. \end{cases}$$

где: $mass$ – масса конструкции; N_h – количество параметров; h_i – параметры, в качестве которых приняты размеры, определяющие форму диска; $\sigma(\vec{r})$ – поле эквивалентных напряжений; $[\sigma(\vec{r})]$ – допускаемые напряжения; $[u]_j$ – допускаемые перемещения точек \vec{r}_j вдоль направлений \vec{e}_j ; k и $[k]$ – соответственно, расчетный и допускаемый коэффициенты запаса.

Принято рассматривать коэффициенты запаса по напряжениям k_σ и по несущей способности k_b [4].

Зависимость допускаемых напряжений или местных коэффициентов запаса по напряжениям или по несущей способности от пространственной координаты может быть вызвана неравномерным полем температуры и зависящими от температуры свойствами материала, а также может отражать определенную стратегию обеспечения ресурса проектируемого изделия.

Оптимизацию формы дисков проводят с учётом критерия минимальной массы при обеспечении необходимых запасов прочности: по разрушающим оборотам (несущей способности), по эквивалентному напряжению, осредненному по толщине диска, и по циклической долговечности.

Модуль взаимодействия с ANSYS преобразует поступающую информацию во входные файлы в формате языка APDL для начала процедуры оптимизации. Схема работы модуля представлена на рисунок 7.

Модуль считывает всю необходимую информацию из управляющего модуля: геометрические объекты КВД: проточная часть, данные о расположении и форме проекций лопаток, их центра масс; материалы, из которых изготовлены диски и лопатки компрессора, их механические свойства. Также необходимы данные по выбранному режиму: распределение температуры по дискам, частота вращения, величины газодинамических нагрузок. Для стартовой точки в процедуре оптимизации используются текущие значения геометрических параметров объектов, также считываются границы оптимизированных параметров, список тех параметров, которые участвуют в оптимизации и информация о выбранном методе оптимизации.



Рисунок 7. Схема модуля взаимодействия с ANSYS

Задача оптимизации формы диска рассмотрена в осесимметричной постановке с использованием метода конечных элементов. Использован четырехузловой элемент первого порядка аппроксимации. Для моделирования нагрузок от лопатки использованы элементы, реализующие плоское напряженное состояние, с заданной толщиной. Распределение толщины на лопатке задано таким образом, чтобы учесть центробежные нагрузки от реальной трехмерной лопатки, масса и координаты центра масс которой заданы. Задание нагрузок происходит для режима нагружения, в который входят частота вращения ротора и распределение температуры по диску.

Следующий этап – оптимизация всех дисков независимо друг от друга. На основе исходных данных для каждого оптимизируемого диска создается база данных ANSYS, в которой хранится вся не изменяемая в процессе оптимизации информация, а также создаются файлы для построения параметризованной расчетной модели и для модуля оптимизации.

После оптимизации всех дисков полученные оптимальные параметры передаются в управляющую программу, и на их основе происходит оптимизация дисков в компрессоре с учетом их взаимного влияния. Оптимизация компрессора происходит последовательно от диска к диску. Для оптимизации каждого диска создается база данных ANSYS с неизменяемыми параметрами, куда входят все диски, кроме оптимизируемого, а также все лопатки и все соединения, кроме тех которые примыкают к оптимизируемому диску. Также создаются файлы с параметризованной расчетной моделью и файлы оптимизации. На каждой итерации процедуры оптимизации работа происходит следующим образом:

- загружается база данных с неизменяемой частью компрессора;
- по текущим параметрам происходит построение оптимизируемого диска, а после и при-

мыкающих к нему соединений;

- происходит построение конечно-элементной сетки и приложение всех нагрузок: частота вращения, газодинамические силы; решается тепловая задача для определения поля температур компрессора по имеющимся распределениям температур по дискам;
- рассчитывается НДС конструкции, вычисляется значение целевой функции и наложенных на конструкцию ограничений.

После окончания процедуры оптимизации очередного диска построение неизменяемой части компрессора для оптимизации следующего диска происходит с учетом предыдущих оптимизированных дисков.

Результаты оптимизации

Управляющий модуль, после окончания процесса оптимизации считывает из файлов результатов решателя полученные параметры модели и обновляет по ним конструкцию КВД в CAD системе, после чего чертеж доступен конструктору для дальнейшей работы.

На основе файлов результатов решателя строится отчет, включающий в себя данные о тепловом состоянии компрессора, перемещениях, напряжениях, деформациях и информацию о коэффициентах запаса. Все файлы проекта расчета сохраняются и при необходимости их можно дополнительно исследовать, используя интерфейс решателя.

Для анализа работы разработанного программного комплекса рассмотрена оптимизация дисков перспективного КВД на режиме взлета. Интервал допустимого изменения оптимизируемых параметров составлял 20% от начального значения. Пошаговая сходимости в частном пространстве параметров управления (толщина ступицы B_1 , высота ступицы h_1 и переходной части h_2 на рисунке 5) и сходимости целевой функции (массы конструкции) по итерациям представлены на рисунке 8.

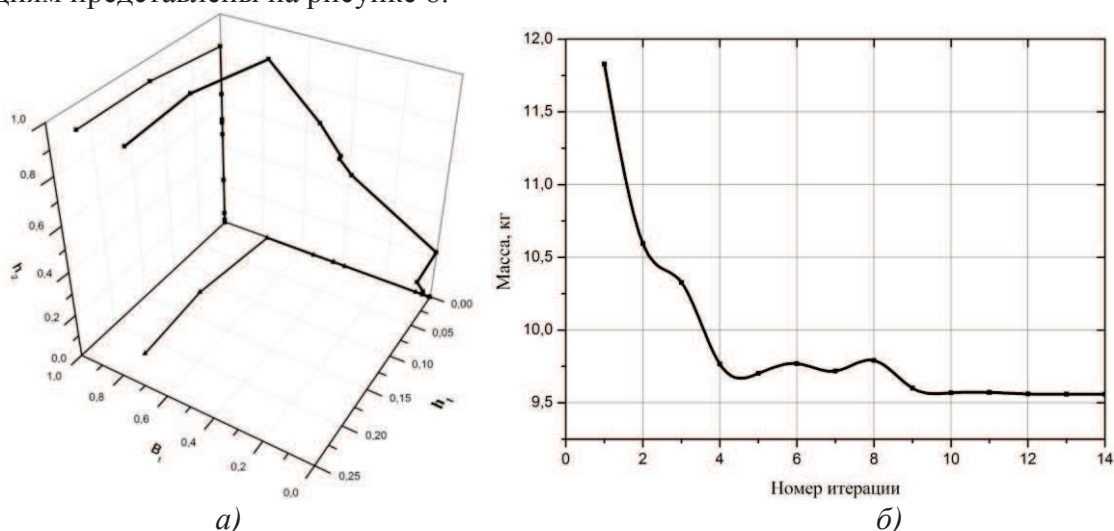


Рисунок 8. Сходимость оптимизации в пространстве параметров управления и целевой функции: а – изменение геометрических параметров ступицы; б – изменение массы диска

На рисунке 9 на примере дисков двух ступеней показано сравнение оптимальной формы дисков КВД (сплошные линии 2) с первоначальной (пунктирные линии 1).

Для проверки влияния точности задания распределения температур по дискам, рассмотрено два варианта оптимизации с различным распределением температур по радиусам дисков. В одном случае распределение температур задавалось в 6 точках, во втором случае линейно только на ободе и ступице. Сравнение результатов оптимизации показало, что точность задания температурного распределения существенно влияет на конструкцию оптимального диска. Масса ступеней оптимального диска во втором случае выросла в среднем на 6%.

На примере оптимизации многоступенчатого компрессора проведен анализ влияния допустимых границ изменения геометрических параметров дисков, а также ограничений по перемещениям на результат оптимизации. Эти допустимые границы могут быть обусловлены технологией изготовления и сборки. На рисунке 10а показаны зависимости коэффициентов запаса по радиусу на третьем диске компрессора, а на рисунке 10б – на четвертом диске. Результаты распределений коэффициентов запаса при нижней границе изменения толщины полотна 5 мм показаны сплошной линией 1, а при нижней границе 3 мм – пунктирной линией 2. При этом ограничение на минимальное значение коэффициента запаса составляло 1,4 [5]. При задании дополнительного ограничения на величину максимально возможных радиальных перемещений обода диска 1,1 мм результаты распределения коэффициентов запаса показаны на графиках штрихпунктирной линией 3.

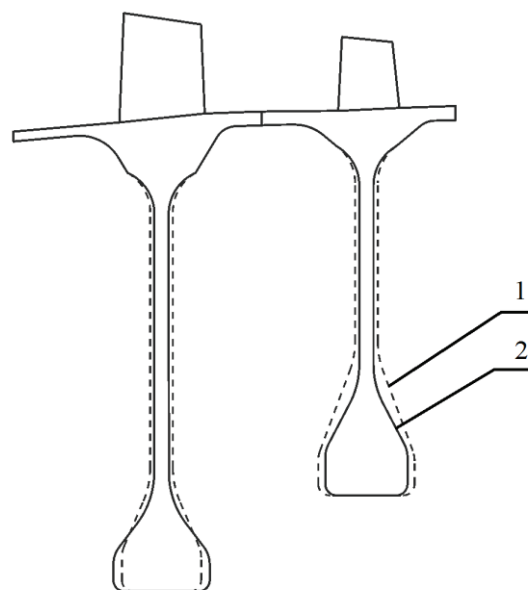


Рисунок 9. Сравнение исходных и оптимальных дисков КВД

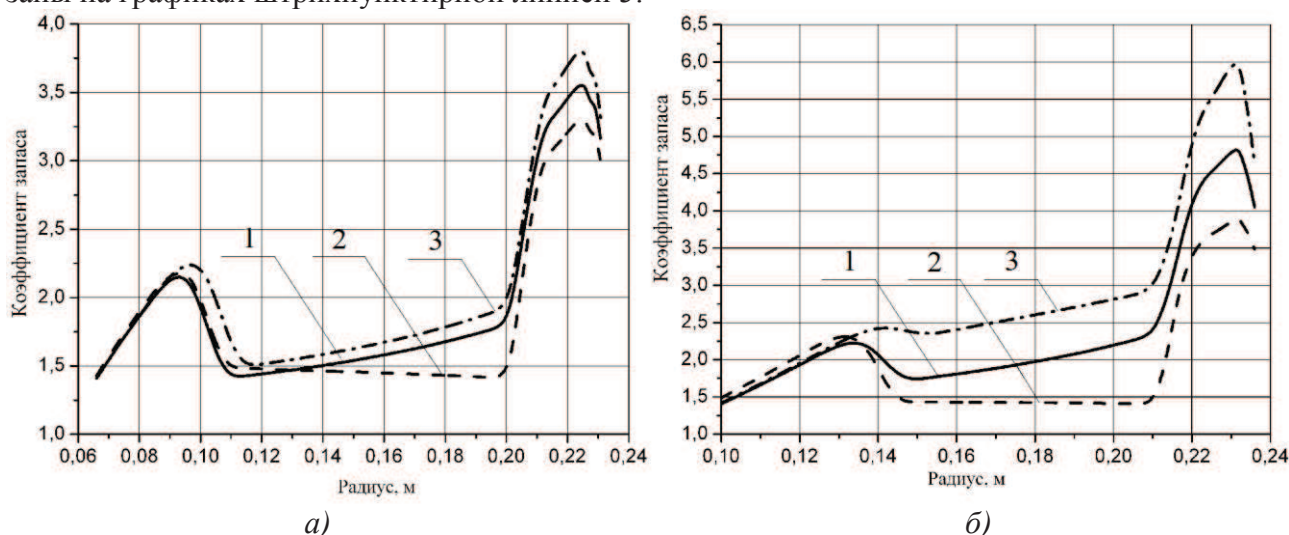


Рисунок 10. Распределение коэффициента запаса по диску 3-ей (а) и 4-ой (б) ступеней: 1 – минимальная толщина полотна 5 мм, 2 – минимальная толщина полотна 3 мм, 3 – ограничение на радиальное перемещение 1,1 мм

Распределения коэффициентов запаса при различных условиях оптимизации показывают, что при задании нижней границы изменения толщины полотна 5 мм значения коэффициента запаса в полотне не выходят на минимум, так толщина полотна становится активным ограничением. При уменьшении границы изменения параметров до 3 мм в указанной зоне коэффициент запаса по напряжениям выходит на допустимое значение. При задании дополнительного ограничения на перемещение коэффициенты запаса по напряжениям не являются определяющими, так как для выполнения данного ограничения на перемещение при сохранении остальных параметров на тех же значениях необходимо увеличить толщину полотна.

Оптимизация дисков в составе ротора позволяет удовлетворить всем ограничениям при минимальной массе конструкции. Разработанный программный модуль сокращает время и повышает эффективность проектирования оптимального ротора КВД, позволяет на ранних стадиях оценивать соответствие конструкции техническому заданию, управлять её ресурсом и массой.

Литература

1. Темис Ю.М., Якушев Д.А. Оптимальное проектирование конструктивных элементов // Машиностроение. Энциклопедия / Ред. совет: К.В. Фролов и др. Самолеты и вертолеты. Т. IV-21. Авиационные двигатели. Кн. 3 / В.А. Скибин, В.И. Солонин, Ю.М. Темис и др.; под ред. В.А. Скибина, Ю.М. Темиса, В.А. Сосунова. – М.: Машиностроение, 2010. – С. 570 – 579.
2. Темис Ю.М., Якушев Д.А. Оптимальное проектирование конструктивных элементов ГТД. Техника воздушного флота, № 1(694). М.: ЦАГИ, 2009. С. 54 – 64.
3. Темис Ю.М., Якушев Д.А. Оптимизация конструкции деталей и узлов ГТД // Вестник СГАУ. № 3 (27), 2011. Проблемы и перспективы развития двигателестроения. – Самара: СГАУ, 2011. – Ч. 1. – С. 183 – 188.
4. Демьянушко И.В., Биргер И.А. Расчет на прочность вращающихся дисков. М.: Машиностроение, 1978. 247 с.
5. Расчет на прочность деталей машин: Справочник / И.А. Биргер, Б.Ф. Шорр, Г.Б. Иосилевич. М.: Машиностроение, 1993. 640 с.