

## **Применение метода волновых динамических податливостей к расчёту колебаний многодисковых роторов**

д.т.н. проф. Шорр Б.Ф., Бортников А.Д.

ФГУП «Центральный институт авиационного моторостроения им. П.И. Баранова»,  
8(495) 362-42-79, adb@ciam.ru

*Аннотация.* Рассматривается проблема расчёта резонансных колебаний многодисковых роторных конструкций на основе метода волновых динамических податливостей. Используемый подход позволяет выделять из большого многообразия собственных форм колебаний ротора наиболее важные для практики формы, которые могут возбуждаться действующей на колеса нагрузкой от пульсаций или окружной неравномерности потока, а также получать ясную картину взаимодействия колес от заданного возбуждения. Показано применение метода к расчёту резонансных колебаний реального двухдискового ротора.

*Ключевые слова:* двухдисковый ротор, связанные колебаний, метод волновых динамических податливостей

### **Введение**

Современные программные пакеты конечно-элементного анализа позволяют получать большое число собственных частот и форм колебаний таких сложных конструкций как многодисковые ротора. Однако для обеспечения динамической прочности деталей ротора имеет значение определение не всех теоретически возможных для заданного частотного диапазона собственных частот и форм колебаний, а только тех, которые могут провоцироваться имеющимися в машине источниками возбуждения и вызывать резонансные колебания [1].

Для вращающихся рабочих колёс такими источниками в первую очередь являются распределённые по окружности проточной части неравномерности потока газодинамического или конструкционного происхождения, основной период которых определяется частотой вращения ротора, а частоты возбуждения – кратными к частоте вращения гармониками. По отношению к вращающемуся колесу такие возбудители имеют вид бегущих волн. Поэтому наиболее эффективным методом выявления резонансных режимов рабочих колёс в составе многодисковых роторов является расчёт форм колебаний, вызываемых гармонически распределёнными по окружности колёс бегущими нагрузками, которые воздействуют на ротор с частотами, кратными частоте вращения [2].

Ниже показан подход к расчёту колебаний многодискового ротора по методу волновых динамических податливостей (ВДП) или жесткостей (ВДЖ) с приложением к анализу колебаний ротора авиационного двигателя реальной конструкции.

### **1. Основные соотношения метода динамических податливостей**

Каждая ступень многодискового ротора с однородными рабочими лопатками представляет собой поворотную-симметричную систему, порядок симметрии которой равен числу лопаток. Такие системы называют циклически симметричными, динамические характеристики этих систем изучались в работах [3–5]. Учёт поворотной симметрии позволяет получать собственные частоты и формы колебаний всей конструкции, исходя из поведения одного сектора, что существенно уменьшает размерность расчётной модели.

Но ротор с различным числом рабочих лопаток на разных ступенях уже не является поворотной-симметричной системой. Метод ВДП делает возможным учёт поворотной симметрии отдельных рабочих колёс при их общей динамической связанности.

Деформации рабочих колес рассматриваются в цилиндрической системе координат  $(x, r, \varphi)$ , где:  $x$  – направление по оси колеса,  $r$  – по радиусу,  $\varphi$  – по углу поворота относительно оси колеса.

При статических деформациях перемещение любой точки колеса с координатами

$x, r, \varphi$  представляется вектором  $\vec{y}(x, r, \varphi)$  с составляющими по указанным координатам  $y_x, y_r, y_\varphi$ . Любая из составляющих вектора перемещений, например,  $y_x$  может быть представлена в виде периодической по координате  $\varphi$  функции  $y_x(r, x, \varphi)$  с периодом  $2\pi$  и разложена в ряд Фурье,  $m$ -ый член которого ( $m = 0, 1, 2, \dots$ ) имеет вид:

$$y_m(x, r, \varphi) = Y_m(x, r) \cos[m\varphi - \alpha_m(x, r)], \quad (1)$$

где в обозначениях  $(y_x)_m$  и  $(Y_x)_m$  опущен нижний индекс  $x$ .

В таком же виде может быть представлена любая из составляющих вектора внешней сосредоточенной силы  $f(f_x, f_r, f_\varphi)$ , приложенной к той же точке конструкции, например,

$$f_m(x, r, \varphi) = F_m(x, r) \cos[m\varphi - \beta_m(x, r)]. \quad (2)$$

При гармонических колебаниях под перемещениями  $Y_m(x, r, \varphi)$  и силами  $F_m(x, r, \varphi)$  в данной точке тела следует понимать их амплитуды. Начальные фазы  $\alpha_m(x, r, \varphi)$  и  $\beta_m(x, r, \varphi)$  могут быть различными. В случае, когда фазы или совпадают, или отличаются на  $180^\circ$ , их можно считать одинаковыми, допуская, что амплитуды перемещения и силы в данной точке имеют одинаковые или разные знаки.

В случае установившихся гармонических колебаний с частотой  $\omega$ :

$$y(t) = Y \cos(\omega t - \alpha_y) \text{ и } f(t) = F \cos(\omega t - \alpha_f). \quad (2a)$$

Фазы по времени  $\alpha_y$  и  $\alpha_f$  для перемещений и сил меняются в зависимости от отношения частоты возбуждения к собственным частотам колебаний механической системы.

Из теории колебаний поворотных симметричных систем следует, что их резонансные режимы возникают в условиях, когда частота вынуждающей силы  $\omega_k$ , распределённой по окружности колеса по гармоническому закону с числом волн  $k$ , совпадает с одной из собственных частот  $\omega_m$  колеса при том же числе волн по окружности, т.е. при:

$$\omega_k = \omega_m \text{ и } k = m. \quad (3)$$

Именно при таких условиях в лопатках и дисках рабочих колес осевых турбомашин возбуждаются резонансные колебания с повышенным уровнем переменных напряжений.

В многодисковых роторах с разным числом рабочих лопаток по ступеням условия (3) для всего ротора не могут точно удовлетворяться. Поэтому опасные резонансы колёс следует искать не из условий (3) для изолированных колёс, а при частотах  $\omega_k$  и числах волн по окружности  $m$ , вызываемых заданными гармониками окружной неравномерности нагрузки. Такая нагрузка может быть вызвана неравномерным потоком газа на входе в компрессор или турбину, а также кинематическим возбуждением от дисбаланса роторов (при  $k = 1$ ). Возбуждение колебаний нагрузкой, равномерно распределённой по окружности колеса (при  $k = 0$ ), может быть вызвано пульсациями давления в потоке газа. В этих случаях в указанных выше рядах Фурье остается по одному члену.

Предполагается, что рабочие колёса соседних ступеней связаны между собой общей поверхностью, которая в первоначальном виде является плоскостью  $x = \text{const}$ , конечные элементы которой образуют один или несколько кольцевых рядов. Согласно уравнению (1), компоненты амплитуд перемещения узлов такого ряда на постоянном радиусе  $r$  представляются для формы колебаний данной ступени  $I$  с числом узловых диаметров  $m$  функцией:

$$y_m^I(r, \varphi) = Y_m^I(r) \cos(m\varphi - \alpha_m). \quad (4)$$

Аналогично, для компонентов амплитуд силы, действующей на указанную группу узлов ступени  $I$  со стороны соседней ступени  $II$ , имеем при  $\beta_m = \alpha_m$  выражение:

$$f_m^I(r, \varphi) = F_m^I(r) \cos(m\varphi - \alpha_m). \quad (5)$$

Разделив обе части уравнения (5) на (4), получим:

$$\frac{f_m^I}{y_m^I} = \frac{F_m^I}{Y_m^I} = C_m^I. \quad (6)$$

Характеристику  $C_m^I$ , зависящую от частоты и формы колебаний колеса  $I$ , называют динамической волновой жёсткостью колеса  $I$  на радиусе  $r$  в плоскости раздела соседних ступеней  $I$  и  $II$  по направлению соответствующих компонентов перемещения и силы. Обратную величину  $A_m^I = 1/C_m^I$  называют динамической волновой податливостью.

Поступив точно также для соседней ступени  $II$ , найдем для той же плоскости  $x = \text{const}$ :

$$\frac{f_m^{II}}{y_m^{II}} = \frac{F_m^{II}}{Y_m^{II}} = C_m^{II}. \quad (7)$$

Условие совместной деформации соседних ступеней по всем точкам в плоскости их раздела на радиусе  $r$  имеет вид:

$$Y_m^I = Y_m^{II}, \quad (8)$$

а условием равновесия соответствующих узлов будет:

$$F_m^I + F_m^{II} = 0, \quad (9)$$

где направления перемещений и сил относятся к одной и той же системе координат.

Из уравнений (6)-(9) следует:

$$(C_m^I + C_m^{II})Y_m^I = 0. \quad (10a)$$

Если при совместных колебаниях колёс поверхность их раздела на радиусе  $r$  не является неподвижной, т.е.  $Y_m^I \neq 0$ , то условие динамического взаимодействия колёс соседних ступеней  $I$  и  $II$  на радиусе  $r$  по соответствующим направлениям компонентов перемещения и силы примет вид:

$$C_m^I + C_m^{II} = 0. \quad (10b)$$

При использовании волновых податливостей из уравнений (6)-(9) следует:

$$(A_m^I + A_m^{II})F_m^I = 0. \quad (11a)$$

Если между ступенями есть механическая связь и  $F_m^I \neq 0$ , из уравнения (11a) следует:

$$A_m^I + A_m^{II} = 0. \quad (11b)$$

Применительно к ротору, который содержит  $n$  ступеней, должна, как минимум, удовлетворяться система  $n-1$  уравнений типа (10) или (11), относящихся к одной осевой компоненте векторов перемещений и сил на одном радиусе. При связи колёс через тонкостенную цилиндрическую проставку учёт одного ряда узлов может быть достаточным. Для повышения полноты моделирования взаимодействия соседних колёс, связанных более массивными проставками, полезно учитывать узлы на двух и более радиусах, а при выраженной конусности междисковой проставки – также радиальные компоненты перемещений и сил.

Условия (8)-(11) могут быть использованы при расчётах как собственных частот колебаний, так и вынужденных колебаний многодискового ротора. В последнем случае расчёты могут проводиться как при силовом возбуждении (от заданных сил), так и при кинематическом возбуждении (от заданных перемещений).

Расчёт резонансных колебаний многодискового ротора с  $q$  рядами рабочих колёс, вызываемых распределённой по окружности колёс гармонической нагрузкой с числом волн  $k$ , проводится в следующем порядке.

1. С использованием условий поворотной симметрии формируется конечно-элементная модель каждой ступени, включающая рабочие лопатки, дисковую часть (обод, полотно, ступицу) и элементы ротора, обеспечивающие крепление его на двигателе и соединение

ступеней между собой. Между ступенями на соединяющих их плоскостях  $x = \text{const}$  выделяются узлы, расположенные на одном или нескольких  $p$  радиусах, которые могут быть разными для разных плоскостей  $x = \text{const}$ . При положительном направлении  $x$  вдоль ротора, параметрам, относящимся к правым поверхностям дисков, присваивается индекс (+), к левым – (-). Устанавливаются компоненты сил и перемещений, по которым обеспечивается взаимосвязь ступеней, причем осевая связь по координате  $x$  является обязательной.

2. При расчёте собственных частот на выбранных радиусах к внутренним узлам между ступенями прикладываются принятые для расчёта компоненты вектора сил  $\vec{F}_1^+ = 1$  и  $\vec{F}_q^- = 1$ , соответствующие заданному числу волн  $k$ . На каждую волну должно приходиться не менее 6 узлов.

При внешнем силовом возбуждении указанные компоненты вектора сил прикладываются также к узлам крайних ступеней 1 и  $q$ . При кинематическом возбуждении задаются компоненты вектора перемещений в узлах на выбранных радиусах.

3. По результатам расчёта собственных частот колебаний отдельных ступеней, как для систем с поворотной симметрией, определяется диапазон частот  $\omega_{\min} \div \omega_{\max}$ , в котором находятся частоты их колебаний с числом узловых диаметров  $m = k$ , и устанавливается вероятный диапазон частот колебаний многодискового ротора  $\omega$  при заданном числе волн  $k$ :

$$\mu^- \omega_{\min} \leq \omega \leq \mu^+ \omega_{\max}. \quad (12)$$

По имеющемуся опыту расчётов достаточно принимать  $\mu^- = 0.9$  и  $\mu^+ = 1.2$ , но по результатам последующего расчёта эти пределы могут быть расширены.

4. Определяют амплитудно-частотную характеристику (АЧХ) каждой ступени как поворотной-симметричной системы при возбуждении от каждого из указанного выше компонента вектора силы (или перемещения) путём перебора частот возбуждения  $\omega$  в принятом диапазоне частот по формуле (12) с шагом  $\Delta\omega \approx (0.02 \div 0.005)\omega_c$  (где  $\omega_c$  – первая собственная частота колеса при принятом числе  $m$ ). Расчёт проводится с учётом минимального демпфирования, необходимым для обеспечения устойчивости счёта.
5. По результатам расчёта по пункту г) для каждой ступени определяются зависимости компонентов перемещений (или сил) в расчетных узлах и амплитуд их волн  $Y$  (или  $F$ ) от частоты возбуждения  $\omega$ .

Волновые динамические характеристики  $n$ -ой ступени для левой и правой сторон могут быть представлены в виде матричных соотношений:

- при силовом возбуждении:

$$\begin{bmatrix} Y_n^- \\ Y_n^+ \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} A_n^+ & A_n^- \\ A_n^+ & A_n^\pm \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} F_n^- \\ F_n^+ \end{bmatrix}; \quad (13a)$$

- при кинематическом возбуждении:

$$\begin{bmatrix} F_n^- \\ F_n^+ \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} C_n^+ & C_n^- \\ C_n^+ & C_n^\pm \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} Y_n^- \\ Y_n^+ \end{bmatrix}, \quad (13b)$$

где коэффициенты динамической податливости и динамической жёсткости являются функциями частоты возбуждения.

Порядок матриц определяется произведением  $\nu \cdot p$ , где  $\nu$  – число учитываемых компонентов в каждом узле (от 1 до 3),  $p$  – число расчётных радиусов.

- е) Записав условия динамического взаимодействия соседних ступеней (8)–(11) в виде соотношений:

$$Y_n^+ = Y_{n+1}^-, \quad (14a)$$

$$F_n^+ + F_{n+1}^- = 0, \quad (14б)$$

придем к системе матричных однородных уравнений, которая для каждой частоты возбуждения  $\omega$  будет линейной, что позволяет построить зависимость ее детерминанта  $D$  от частоты  $\omega$ .

Резонансной частоте колебаний ротора при числе узловых диаметров  $m = k$  будет соответствовать нулевое значение детерминанта  $D$ .

## 2. Собственные частоты ротора реальной конструкции

Применение метода волновых динамических податливостей показано на примере расчёта резонансных частот двухступенчатого ротора реальной конструкции, конечно-элементная модель которого показана на рисунке 1. Ротор состоит из двух рабочих ступеней компрессора с числом лопаток  $z_1=34$  и  $z_2=47$ . Диски связаны между собой по ободам проставкой с небольшим углом конусности. Граничным условием для ротора принято отсутствие перемещений по всем степеням свободы узлов в нижних частях ступиц обоих дисков.

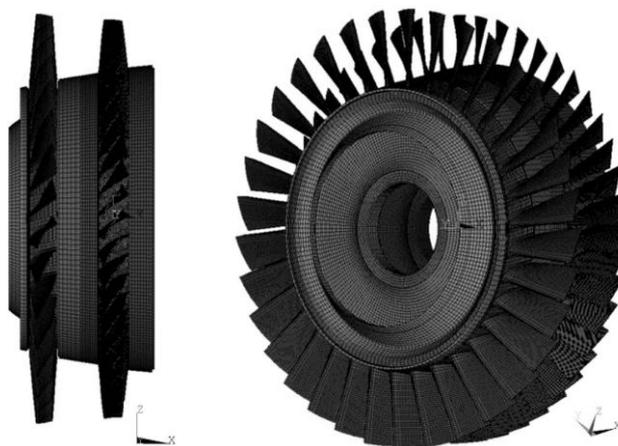


Рисунок 1. Полная конечно-элементная модель двухступенчатого ротора

### 2.1 Прямое моделирование

*Расчёт собственных частот двухдискового ротора как единой системы*

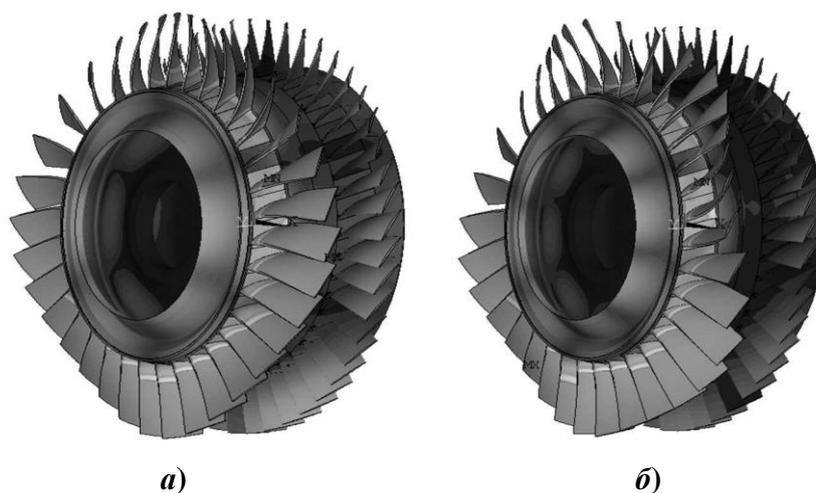


Рисунок 2. Две близкие по частоте формы колебаний:  $a - f = 328,25$  Гц;  $b - f = 328,66$  Гц

При расчёте собственных частот и форм колебаний двухдискового ротора как единой системы было выявлено в частотном диапазоне 200-400 Гц около 50 значений частот, часть которых была парными. Но и многие непарные частоты различались крайне незначительно. Классифицировать формы колебаний, особенно по числу узловых диаметров, достаточно

сложно (рисунок 2).

Полученные собственные частоты в промежутке 200-400 Гц нанесены далее на диаграмму на рисунке 5 ромбами. Ниже эти частоты будут условно называться «точными».

#### *Расчёт собственных частот отдельных колёс как поворотных симметричных систем*

Расчёт динамических характеристик отдельных колёс проводился с учётом поворотной симметрии. В качестве граничных условий было принято отсутствие перемещений по всем степеням свободы узлов в нижней части ступицы дисков.

Полученные значения собственных частот для первых двух форм колебаний  $f_1$  и  $f_2$  с двумя узловыми диаметрами ( $m = 2$ ) представлены на рисунке 5 квадратными (для колеса I) и треугольными (для колеса II) метками.

Более низкое значение частоты  $f_1$  для колеса II ступени, лопатки которого имеют меньшую длину, указывают на то, что эта форма колебаний связана, в основном, с деформациями дисков, в то время как более высокая частота  $f_2$  связана с деформациями лопаток.

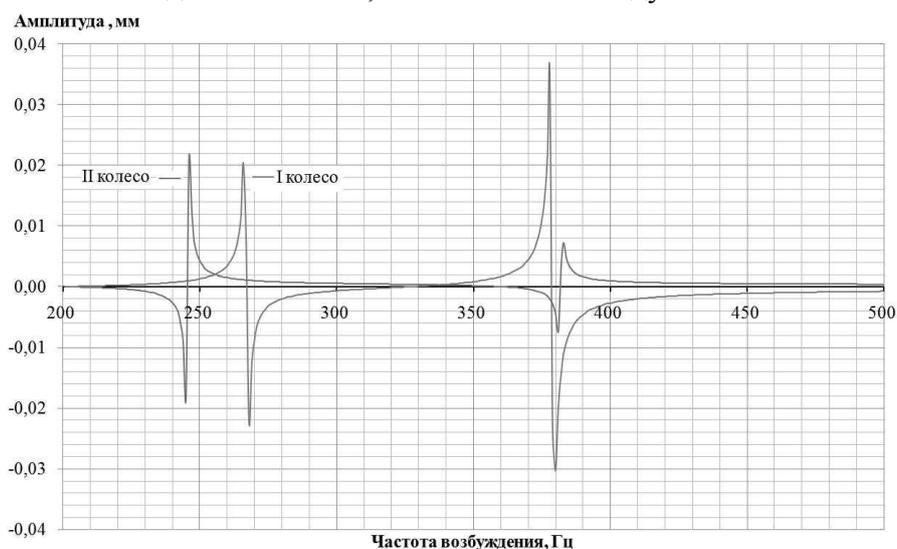
### 2.2 Расчёт связанных колебаний ступеней по методу волновых динамических податливостей

В использованном для расчётов программном пакете ANSYS силы и перемещения при вынужденных колебаниях считаются комплексными величинами  $Y = \text{Re } Y + i \text{Im } Y$ . Решения могут быть представлены через действительные и мнимые составляющие, которые являются алгебраическими величинами, или через положительные амплитуды  $Y_a = \sqrt{(\text{Re } Y)^2 + (\text{Im } Y)^2}$  и фазовые углы  $\alpha$ . Величина  $Y$  при этом фактически является динамической податливостью. В указанных выше соотношениях динамические податливости удобно вычислять по их действительной составляющей, которая на собственной частоте колебаний обращается в нуль.

На рисунке 3 показаны зависимости действительных частей волновых амплитуд перемещений колёс I и II, а на рисунке 4 – их разность при вынужденных колебаниях, вызываемых нагрузкой  $m = k = 2$ , от частоты возбуждения. Волновая амплитуда сил взаимодействия дисков по ободам принята равной  $F = 1$  Н.

На рисунке 3 обращение в нуль действительных частей волновых амплитуд перемещений колёс в области частот около  $f = 335$  Гц соответствует собственным частотам колёс в отсутствии перемещений узлов между дисками.

Частоты  $f = 267$  и  $379$  Гц для колеса I и  $f = 246$  и  $382$  Гц для колеса II соответствуют собственным частотам отдельных колёс, не связанных между собой.



**Рисунок 3. Действительные части амплитуд перемещений колёс I и II при  $k = 2$**

Из пересечения кривой на рисунке 4 с осью абсцисс по условию (14а) следует, что при связанных колебаниях дисков резонансные частоты в диапазоне от 200 до 500 Гц при приня-

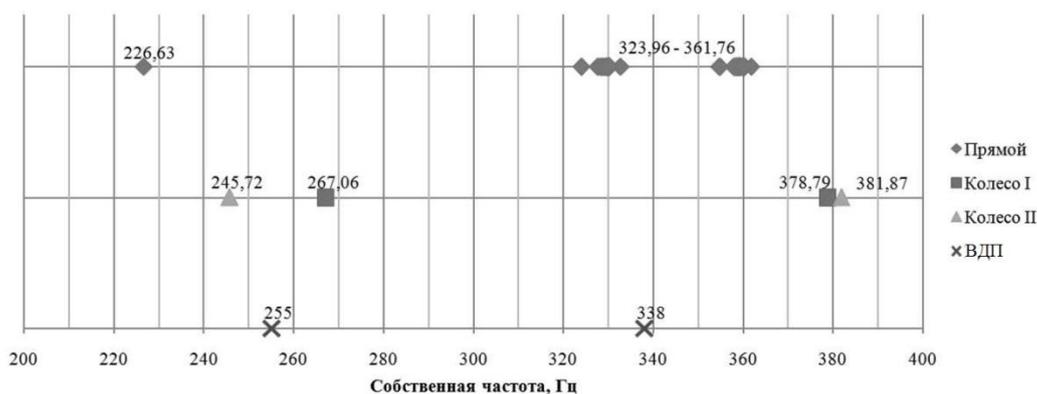
той расчётной модели ротора имеют значения:  $f = 255$  и  $338$  Гц, а пересечения практически вертикальных участков кривой с осью абсцисс не удовлетворяют условию  $F_m^I \neq 0$ .



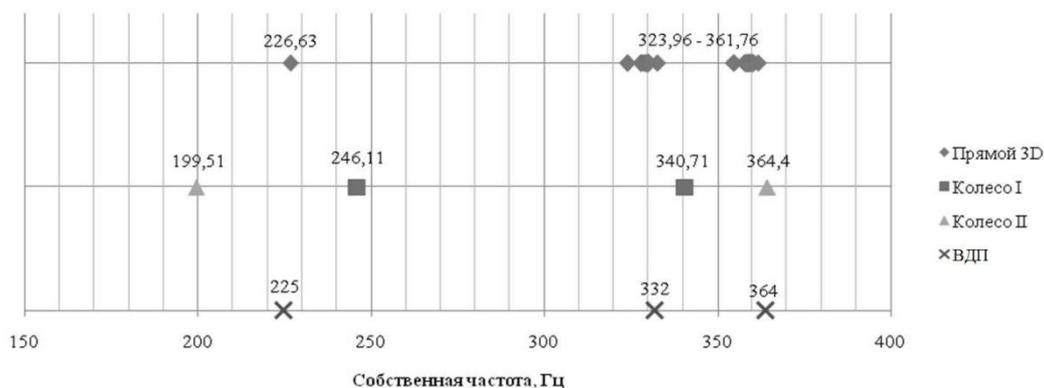
**Рисунок 4. Разность действительных частей амплитуд перемещений колёс I и II при  $k = 2$**

### 2.3 Сопоставление результатов расчётов разными методами

На рисунке 5 дано сопоставление результатов расчёта частот по методу ВДП с прямыми расчётами частот ротора и отдельных колёс.



**Рисунок 5. Сопоставление результатов расчёта частот по ВДП с прямыми расчётами ротора и отдельных колёс при  $m = 2$**



**Рисунок 6. Сопоставление результатов расчёта частот по ВДП с прямыми расчётами ротора и отдельных колёс при  $m = 0$**

«Точная» частота  $f = 226,63$  Гц относится к осесимметричной форме колебаний ротора и резонанс с ней, естественно, не может быть вызван нагрузкой с числом узловых диаметров  $m = 2$ . Наиболее информативная частота  $f = 338$  Гц, полученная по методу ВДП, очень близ-

ка к плотной группе «точных» частот  $f = 324...330$  Гц. Из сопоставления частоты  $f = 255$  Гц с частотами отдельных колёс, полученными при их заделке по нижней части ступицы, следует, что она не связана с динамикой всего ротора.

На рисунке 6 приведено сопоставление результатов расчёта первых трёх частот по методу ВДП с прямыми расчётами рассматриваемого ротора и его отдельных колёс для осесимметричных форм колебаний  $m = 0$ .

Из рисунка 6 следует, что значения всех трёх частот связанных колебаний дисков при  $m = 0$ , рассчитанные по методу ВДП, практически совпадают с данными прямого расчёта частот ротора.

### Заключение

Приведены основные соотношения метода волновых динамических податливостей (ВДП) применительно к расчёту резонансных колебаний многодисковых роторов. Используемый подход позволяет выделять из большого многообразия собственных форм колебаний ротора, описываемых его конечно-элементной 3D моделью, наиболее важные для практики формы, которые могут возбуждаться действующей на колеса нагрузкой от пульсаций или окружной неравномерности потока.

Метод опирается на расчёты вынужденных колебаний каждого из колёс ротора как поворотной-симметричной системы с использованием опций, имеющихся в коммерческих пакетах КЭ анализа, что существенно облегчает расчёты.

Сопоставление результатов расчёта частот собственных частот колебаний реального двухдискового ротора с данными прямого конечно-элементного 3D расчёта показало их хорошее совпадение при соответствующем моделировании жёсткости связи между колёсами.

Метод ВДП целесообразно использовать также для анализа результатов, получаемых прямыми расчётами собственных частот колебаний многодисковых роторов.

### Литература

1. Биргер И.А., Шорр Б.Ф., Иосилевич Г.Б. Расчёт на прочность деталей машин: 4-е изд., М., Машиностроение. – 1993. – 640 с.
2. Шорр Б.Ф., Бортников А.Д. Расчёт частот и форм колебаний многодискового ротора, вызываемых окружной неравномерностью потока // Справочник. Инженерный журнал. №5. – Москва – 2013. – с. 25-27.
3. Динамика авиационных газотурбинных двигателей / под ред. д.т.н., проф. И.А. Биргера и д.т.н., проф. Б.Ф. Шорра. – М., Машиностроение. – 1981. – 232 с.
4. Ермаков А.И., Иванов В.П., Фролов В.А. Расчёт собственных частот облопаченного диска с закрученными лопатками методом волновых динамических жесткостей. – Куйбышев. – 1980. – 15 с. – Деп. в ВИНТИ 07.05.1981, № 2010-81.
5. Иванов В.П. Колебания рабочих колёс турбомашин. – М.: Машиностроение. – 1983. – 224 с.
6. Басов К.А. ANSYS: справочник пользователя. М.: ДМК Пресс. – 2005. – 640 с.