Критерии длительной прочности сжимаемой упруго-вязкой стареющей среды

к.ф.-м.н. с.н.с. Арутюнян А.Р., д.ф.-м.н. проф. Арутюнян Р.А.
Санкт-Петербургский государственный университет
8 (812) 5266591, Robert.Arutyunyan@paloma.spbu.ru

Аннотация. Рассматривается проблема поврежденности и длительной прочности полимерных и композиционных материалов с вязко-хрупкими механическими характеристиками. Используется модифицированное уравнение Максвелла, записанное в шкале эффективного времени и уравнение наследственной вязкоупругости Больцмана-Вольтерра. Параметр сплошности (поврежденности) определяется величиной относительного изменения плотности, являющегося интегральной мерой накопления структурных микродефектов в процессе длительного нагружения. Формулируется кинетическое уравнение для параметра сплошности и анализируются взаимосвязанные системы уравнений ползучести и поврежденности. Получены аналитические соотношения для деформации ползучести, параметра сплошности и критерии длительной прочности. Построены соответствующие теоретические кривые.

Ключевые слова: *вязко-упругая среда Максвелла, наследственная среда Больцмана-Вольтерра, поврежденность, старение, длительная прочность.*

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 14-01-00823, 15-01-03159).

Введение

Большинство полимеров (реактопластов, полистиролов, полиакрилатов, поливинилхлоридов и др.) и композитов на основе полимерной матрицы разрушаются при малых величинах остаточной деформации. При длительном воздействии механических напряжений и умеренных температур происходят взаимосвязанные процессы деформирования и поврежденности, которые определяются деструктивными эффектами, состоящими из термической и механической стадий. В случае композиционных материалов из хрупких компонент поврежденность определяется следующими деградационными процессами: потерей сплошности зоны контакта «волокно-матрица», разрушение волокон в дефектных объемах, образование трещин или пустот в матрице и др. Эти процессы сопровождаются химическими реакциями, которые усиливают изменения структуры и свойств рассматриваемых материалов в результате длительного температурно-силового воздействия.

В механике рассеянного повреждения и хрупкого разрушения рассматривается концепция сплошности (Качанов [1]) и поврежденности (Работнов [2]). Следуя Качанову, введем параметр сплошности ψ ($1 \geq \psi \geq 0$), который в работе определяется относительным изменением объема (разрыхлением, по терминологии Новожилова [3]) или плотности $\psi = \rho / \rho_0$ (ρ_0 – начальная, ρ – текущая плотность) [4]. Таким образом, параметр сплошности является интегральной мерой накопления структурных микродефектов в процессе длительного нагружения. В мировой научной литературе имеются многочисленные экспериментальные исследования по изучению эволюции параметра ψ в процессе ползучести для металлов и композитов [5-11]. В начальном состоянии $t = 0$, $\rho = \rho_0$, $\psi = 1$. В момент разрушения $t = t_f$, $\rho = 0$, $\psi = 0$.

Так как реальные материалы имеют случайную структуру, поэтому параметр сплошности является статистическим показателем, который может быть задан с помощью некоторого кинетического уравнения. В общем виде эти уравнения базируются на двух гипотезах [12, 13]. Согласно первой гипотезе, хрупкое разрушение протекает со скоростью, зависящей только от напряжения $\sigma(t)$:

$$\frac{d\psi}{dt} = -f\left[\sigma(t)\right]. \tag{1}$$

Согласно второй гипотезе, и в соответствии с представлениями статистической физики, скорость хрупкого разрушения зависит от напряжения и величины накопленной поврежденности:

$$\frac{d\psi}{dt} = -f\left[\sigma(t), \psi\right]. \tag{2}$$

В уравнениях (1)-(2) $\sigma(t)$ – напряжение, зависящее от времени. В случае ползучести, при условии $\sigma(t) = \sigma_0 = \mathrm{const}$, $1 \geq \psi \geq 0$, $0 \leq t \leq t_f$ из решения уравнений (1), (2) следуют критерии длительной прочности:

$$t_f = -1/f(\sigma_0), \tag{3}$$

$$t_f = -\int_t^0 \frac{d\psi}{f(\sigma_0, \psi)}. \tag{4}$$

При формулировке критерия длительной прочности в виде соотношений (3), (4) принимается условие постоянства напряжения в условиях ползучести. В связи с этим следует отметить, что опыты на ползучесть выполняются при постоянной величине, приложенной к образцу нагрузки P. Сбрасывая время от времени нагрузку, можно добиться выполнения условия постоянства напряжения. Однако практическая реализация этого условия не совсем выполнима, так как изменение поперечного сечения образца из-за образования пор и трещин препятствует точной оценке величины истинного напряжения.

Поврежденность и длительная прочность для стареющей среды Максвелла

Рассмотрим задачу о растяжении образца из упруго-вязкого стареющего материала под воздействием постоянной нагрузки P. В качестве реологического уравнения воспользуемся модифицированным уравнением Максвелла, записанным в шкале эффективного времени [4]:

$$\begin{gathered}\frac{d\varepsilon}{d\omega} = \frac{1}{E}\frac{d\sigma}{d\omega} + \frac{\sigma}{\eta}, \\ d\omega = f_1(\omega, \varepsilon, T, t)dt + f_2(\omega, \varepsilon, T, t)d\varepsilon,\end{gathered} \tag{5}$$

где: ε – деформация, T – температура, t – время, E – модуль упругости, η – коэффициент вязкости.

Параметр ω рассматривается как эффективное время, с помощью которого возможно описание процессов деформационного старения, а также старения после закалки. Согласно уравнению (5), при мгновенных, активных нагружениях этот параметр соответствует деформационному времени ε. В состоянии разгрузки и стабилизации параметр ω описывает кинетику химических процессов старения и сводится к обычному времени t. При расчетах по формуле (5) параметр эффективного времени задается в виде соотношения [14]:

$$d\omega = a \cdot e^{kt} \cdot dt + b \cdot d\varepsilon, \tag{6}$$

где: a, b, k – постоянные.

Для определения длительной прочности дополнительно к уравнениям (5)-(6) рассматривается соотношение для параметра сплошности, которое выбирается в виде степенной зависимости [15]:

$$\frac{d\psi}{dt} = -\mathrm{A}\sigma^{\mathrm{n}} = -\mathrm{A}\sigma_0^n \psi^n e^{n\varepsilon}, \tag{7}$$

где: A, n – постоянные.

Уравнение (7) выражено в истинных напряжениях (с учетом закона сохранения массы $\rho_0 l_0 F_0 = \rho l F$ имеем $\sigma = P/F = \sigma_0 F_0/F = \sigma_0 \psi e^{\varepsilon}$, $\sigma_0 = P/F_0$, $\varepsilon = \ln(l/l_0)$, l_0, F_0 – начальные и l, F – текущие длина и площадь поперечного сечения образца, σ – истинное, σ_0 – условное напряжение.

Аналитические решения взаимосвязанных уравнений (5), (6), (7) возможны при некоторых разумных предположениях. Принимая условия $t=0$, $\varepsilon=0$, $\sigma=\sigma_0=\text{const}$, решение уравнения (5) с учетом (6) записывается в виде:

$$\varepsilon=\frac{\sigma}{E}\left[1+\frac{a(e^{kt}-1)}{k\tau\left(1-\frac{\sigma b}{E\tau}\right)}\right], \tag{8}$$

где: $\tau=\eta/E$ – время релаксации.

Внося соотношение (8) в уравнение (7) и решая его при начальном условии $t=0$, $\psi=1$, получим:

$$\psi=\left\{1+\frac{A\sigma_0^{n+1}an(1-n)}{E^2\tau\left(1-\frac{\sigma_0 b}{E\tau}\right)}\left[e^{\frac{n\sigma_0}{E}}-e^{kt}e^{\frac{n\sigma_0}{E}}\left[1+\frac{a}{E\tau k\left(1-\frac{\sigma_0 b}{E\tau}\right)}\left(e^{kt}-1\right)\right]\right]\right\}^{\frac{1}{1-n}}. \tag{9}$$

Кривая изменения параметра сплошности ψ согласно формуле (9) представлена на рисунке 1.

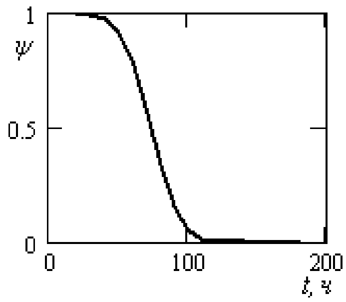

Рисунок 1. Кривая изменения параметра сплошности ψ согласно формуле (9)

Принимая условие разрушения $t=t_f$, $\psi=\psi_*$ (ψ_* – величина сплошности при разрушении) из (9) получим уравнение, которое сводится к следующему:

$$kt_f+A_1e^{kt_f}+B=0, \tag{10}$$

где: $A_1=\dfrac{n\sigma_0 a}{E^2\tau k\left(1-\frac{\sigma_0 b}{E\tau}\right)}$, $B=\dfrac{n\sigma_0}{E}-\dfrac{n\sigma_0 a}{E^2\tau k\left(1-\frac{\sigma_0 b}{E\tau}\right)}-\ln\left(e^{\frac{n\sigma_0}{E}}-\dfrac{(\psi_*^{1-n}-1)E^2\tau\left(1-\frac{\sigma_0 b}{E\tau}\right)}{(1-n)A\sigma_0^{n+1}an}\right)$.

Решение уравнения (10) имеет вид:

$$t_f=-\frac{W(A_1e^{-B})-B}{k}, \tag{11}$$

где: W – функция Ламберта, которая может быть определена в следующем виде:

$$W_0(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-n)^{n-1}}{n!}x^n.$$

Взяв в данном разложении только первые два члена ряда, получим решение уравнения (10) в виде:

$$t_f = -\frac{A_1 e^{-B} - (A_1 e^{-B})^2 - B}{k}. \qquad (12)$$

При расчетах по формулам (9) и (12) были приняты следующие значения коэффициентов: $E = 2000$ МПа, $a = 0,8\,[\text{ч}]^{-1}$, $b = 3$, $\tau = 35\,[\text{ч}]$, $n = 2$, $k = 0,1\,[\text{ч}]^{-1}$, $A = 0,1\,[\text{МПа}]^{-2}$, $\sigma_0 = 80$ МПа, $\psi_* = 0,1$.

На рисунке 2 показана теоретическая кривая длительной прочности согласно критерию (12).

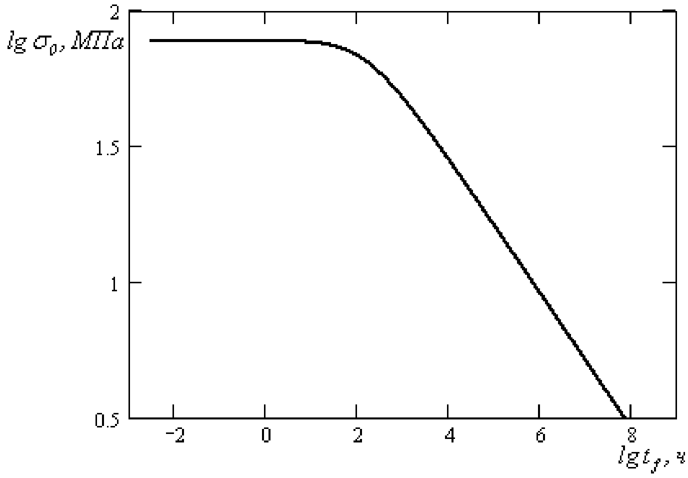

Рисунок 2. Кривая длительной прочности согласно критерию (12)

Характер экспериментальных кривых длительной прочности для различных полимеров (винипласта, пластиката ПБ-2, АВС-пластика) [13] соответствует показанным на рисунке 2 теоретическим кривым.

Поврежденность и разрушение наследственной упруго-вязкой среды Больцмана-Вольтерра

При решении задачи о ползучести и длительной прочности растянутого образца из упруго-вязкого материала под воздействием постоянной нагрузки P воспользуемся уравнением наследственной вязкоупругости Больцмана-Вольтерра:

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{E} + \frac{1}{E}\int_0^t R(t-\tau)\sigma(\tau)d\tau, \qquad (13)$$

где: $R(t-\tau)$ – некоторая убывающая функция аргумента $(t-\tau)$ (ядро ползучести).

Далее рассмотрим наиболее простую формулу ядра ползучести в виде модифицированного соотношения Больцмана:

$$R(t-\tau) = \frac{c}{t-\tau+\tau_0}, \qquad (14)$$

где: c, τ_0 – постоянные.

Как будет показано далее, при таком выборе ядра ползучести удается получить аналитическое решение уравнения сплошности (7) и сформулировать соответствующий критерий длительной прочности.

В случае ползучести, когда $\sigma = \sigma_0 = \text{const}$, из решения уравнения (13) с учетом (14) и начального условия $t = 0$, $\varepsilon = 0$ имеем соотношение для деформации ползучести [16]:

$$\varepsilon = \sigma_0\left(\frac{1}{\text{E}} + c\ln\left(\frac{t+\tau_0}{\tau_0}\right)\right). \qquad (15)$$

Внося (15) в уравнение для параметра сплошности (7) и решая это уравнение при начальном условии $t = 0$, $\psi = 1$, получим:

$$\psi = \left[1 - (1-n) A \sigma_0^n e^{\frac{n\sigma_0}{E}} \frac{\tau_0}{n\sigma_0 c + 1} \left(1 - \left(\frac{t + \tau_0}{\tau_0} \right)^{n\sigma_0 c + 1} \right) \right]^{\frac{1}{1-n}}. \qquad (16)$$

На рисунке 3 представлена кривая изменения параметра сплошности ψ согласно формуле (16).

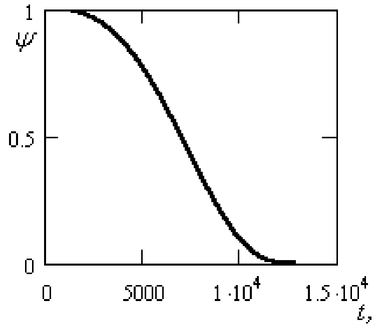

Рисунок 3. Кривая изменения параметра сплошности ψ согласно формуле (16)

Принимая условие разрушения $t = t_f$, $\rho = 0$, $\psi = 0$, из (16) получим критерий длительной прочности:

$$t_f = \tau_0 \left[\left(1 - \frac{n\sigma_0 c + 1}{(1-n) A \sigma_0^n \tau_0 e^{\frac{n\sigma_0}{E}}} \right)^{\frac{1}{n\sigma_0 c + 1}} - 1 \right]. \qquad (17)$$

Кривая длительной прочности согласно формуле (17) представлена на рисунке 4.

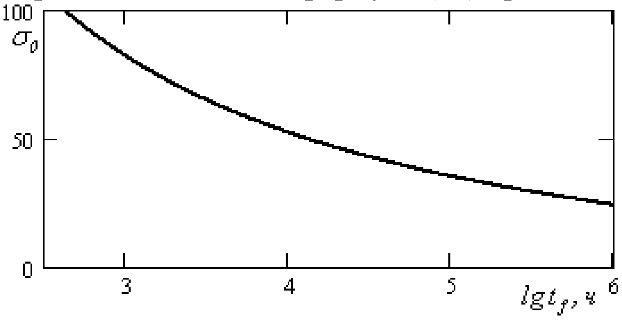

Рисунок 4. Кривая длительной прочности согласно критерию (17)

При расчетах по формулам (16) и (17) были приняты следующие значения коэффициентов: $\sigma_0 = 50$ МПа, $E = 4000$ МПа, $\tau_0 = 2$ ч, $n = 0,7$, $C = 5 \cdot 10^{-2}$ [МПа]$^{-1}$, $A = 1 \cdot 10^{-11}$ [МПа]$^{-0,7}$.

Выводы

1. Рассмотрена взаимосвязанная система уравнений Максвелла и параметра сплошности. Уравнение Максвелла записано в шкале эффективного времени и описывает кривые ползучести для стареющей среды. В результате решения предложенных уравнений получены соотношения для деформации ползучести, параметра сплошности и критерий длительной прочности.
2. Уравнение наследственной упруго-вязкой среды Больцмана-Вольтерра применяется для описания деформации ползучести и длительной прочности сжимаемой упруго-вязкой среды. С учетом этого уравнения получено аналитическое решение для параметра сплошности и сформулирован критерий длительной прочности.
3. По полученным решениям построены теоретические кривые для параметра сплошности и сформулированы критерии длительной прочности. Показано, что характер теоретических

кривых находится в качественном согласии с соответствующими экспериментальными кривыми.

Литература

1. Качанов Л.М. О времени разрушения в условиях ползучести // Изв. АН СССР. ОТН. 1958. № 8. С. 26-31.
2. Работнов Ю.Н. О механизме длительного разрушения // Вопросы прочности материалов и конструкций. М.: Изд-во АН СССР. 1959. С. 5-7.
3. Новожилов В.В. О пластическом разрыхлении // Прикладная математика и механика. 1965. № 4. С. 681-689.
4. Арутюнян Р.А. Проблема деформационного старения и длительного разрушения в механике материалов. СПб.: Изд-во СПбГУ. 2004. 252с.
5. Boethner R.C, Robertson W.D. A study of the growth of voids in copper during the creep process by measurement of the accompanying change in density // Trans. of the Metallurg. Society of AIME. 1961. vol. 221. № 3. P. 613-622.
6. Beghi C., Geel C., Piatti G. Density measurements after tensile and creep tests on pure and slightly oxidised aluminium // J. Mat. Sci. 1970. vol. 5. № 4. P. 331-334.
7. Brathe L. Macroscopic measurements of creep damage in metals // Scand. J. Metal. 1978. vol. 7. № 5. P. 199-203.
8. Woodford D.A. Density changes during creep in nickel // Metal science journal. 1969. vol. 3. № 11. P. 234-240.
9. Куманин В.И., Ковалева Л.А., Алексеева С.В. Долговечность металла в условиях ползучести. М.: Металлургия. 1988. 223с.
10. Bowring P., Davies P.W., Wilshire B. The strain dependence of density changes during creep // Metal science journal. 1968. vol. 2. № 9. P. 168-171.
11. Кузнецов Г.Б., Ковров В.Н. Учет эффектов разрыхления высоконаполненного полимера в уравнениях наследственной вязкоупругости // Известия РАН. Механика твердого тела. 1994. № 4. С. 110-115.
12. Havard R.N. The extension and rupture of cellulose acetate and celluloid // Trans. Farad. Soc. 1942. vol. 38. P. 394-400.
13. Бокшицкий М.Н. Длительная прочность полимеров. М.: Химия. 1978. 310с.
14. Arutyunyan R.A. Deformation aging of polymer materials // Proceedings of XXXIl Summer School-Conference “Advanced problems in mechanics 2003”. June 22-July 2, 2003. Repino, St.-Petersburg. St.-Petersburg: IPME RAS. 2003. P. 17-21.
15. Арутюнян Р.А. Высокотемпературное охрупчивание и длительная прочность металлических материалов // Механика твердого тела. 2015. №2. С. 96-104.
16. Работнов Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука. 1966. 752с.