

Аннотация. Рассмотрена методика расчета течения газа в вентиляционном (вторичном) тракте газотурбинного двигателя с использованием теории графов. Предложена модификация одномерных моделей типовых элементов, учитывающая наклон линий тока. Введен новый типовой элемент – «переходный канал». Проведена верификация моделей расчета гидравлической сети на основе двухмерного и трехмерного моделирования в коммерческом программном комплексе.

Ключевые слова: гидравлическая сеть, вторичные течения, коэффициент теплоотдачи, радиальный зазор

Введение

Современный уровень развития программного обеспечения позволяет исследовать динамическое состояние деталей и узлов двигателя на основе решения связанных задач газовой динамики, теплообмена и прочности [1, 2]. Важным аспектом при этом является выбор уровня математических моделей для обеспечения баланса между быстродействием модели и точностью получаемых результатов.

В авиационных газотурбинных двигателях (ГТД) основным является течение газа в газодинамическом тракте через ступени вентилятора, компрессора и турбины. Это течение моделируется на основе максимально подробных трехмерных моделей, что позволяет определить наилучшие профили ступеней, обеспечить заданные уровни степени повышения давления, исследовать пристеночные течения и способы управления ими и т.д. Помимо этого в газогенераторе организуют тракт вторичных течений (вентиляционный тракт) – относительно холодный воздух отбирается от различных ступеней компрессора и подается через систему каналов и полостей в обход камеры сгорания в турбину высокого давления для охлаждения рабочих и направляющих лопаток, дисков и корпуса. Охлаждение лопаток и дисков позволяет обеспечить показатели ресурса и надежности, а охлаждение корпуса – обеспечить требуемый уровень радиального зазора в основном тракте.

Вентиляционный тракт является очень протяженным, содержит большое число каналов, полостей, точек слияния и разделения потока, поэтому расчет течения газа в такой системе обычно проводится на основе одномерной модели гидравлической сети [3]. Для повышения точности расчетов в областях сложной формы могут быть использованы двухмерные модели течения. В статье рассмотрены вопросы совершенствования методики расчета течения газа в тракте охлаждения современного ГТД. Результаты расчета (давление, температура и коэффициент теплоотдачи газа) являются граничными условиями в задаче определения теплового и напряженно-деформированного состояния деталей.

Расчет вторичных течений

Расчет вторичных течений в тракте охлаждения выполняется на основе построения эквивалентной гидравлической сети и применения теории графов [3]. Основная идея заключается в представлении тракта в виде последовательного набора типовых гидравлических элементов: кольцевой канал, радиальный канал, радиальная полость, типовое сопротивление (резкое изменение проходного сечения или поворот потока), лабиринтное, щеточное или любое другое уплотнение и т.д. Инженер-расчетчик должен определить наилучшую разбивку тракта по элементам с целью обеспечить хорошее согласование между реальной картиной течения и ее модельным представлением.

Вторичный тракт представляется в виде взвешенного графа, веса ветвей которого соответствуют величине потери полного давления на ветви [3, 4]. Для каждой ветви $i-j$ справедливо уравнение, выражающее падение полного давления на ней:

$$P_i^* - P_j^* = C_{i-j} G_{i-j}^2 + \Delta P_{i-j}^*, \quad (1)$$

где: P_i^*, P_j^* – полные давления на концах ветви; ΔP_{i-j}^* – слагаемое, определяющее падение полного давления от центробежных сил и подвода тепла; G_{i-j} – расход газа; $C_{i-j} = \xi_{i-j} / (2\rho_{i-j} F_{i-j}^2)$ – приведенный коэффициент гидравлического сопротивления; ξ_{i-j} – коэффициент гидравлического сопротивления [5]; ρ_{i-j} – средняя плотность газа на ветви; F_{i-j} – средняя площадь проходного сечения.

Пример фрагмента сети вторичных потоков в виде графа показан на рисунке 1: точки – внутренние узлы; точки, обведенные кругами, – граничные узлы; отрезки – ветви графа (типовые элементы).

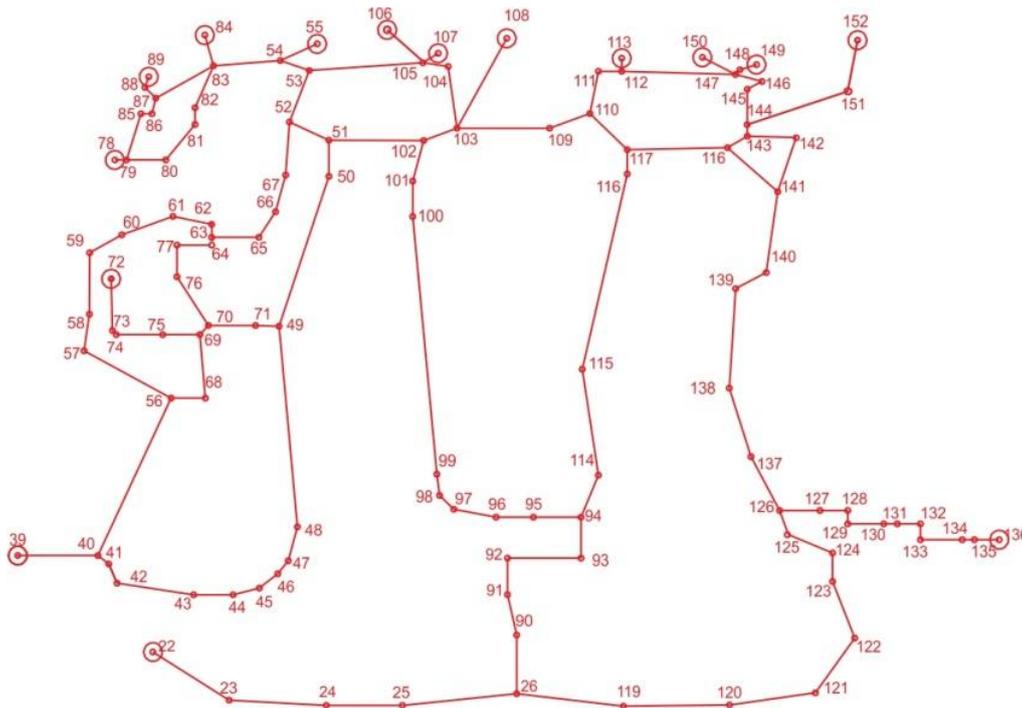


Рисунок 1. Фрагмент гидравлической сети в виде графа

В общем виде граф содержит t внутренних узлов, n граничных узлов, v ветвей и s контуров. Причем $v = n + t + s - 1$.

Граничными условиями являются значения полного давления газа в граничных узлах графа. Неизвестными величинами являются расходы на ветвях и давления во внутренних узлах. При составлении системы уравнений для нахождения неизвестных величин используется теория графов и законы Кирхгофа.

Первый закон Кирхгофа (сумма расходов в каждом внутреннем узле равна нулю) позволяет записать t уравнений. Учет второго закона Кирхгофа (сумма падений полного давления при обходе контура равна нулю) добавляет еще s уравнений, которые записываются через расходы на основе соотношения (1). Кроме того, между парами граничных узлов выбираются кратчайшие пути, и записывается $n-1$ уравнение, связывающее падение давления между узлами, выраженное через расходы. Таким образом, получается нелинейная система из v уравнений относительно расходов, численное решение которой позволяет определить расходы на ветвях, а затем найти давление газа во всех внутренних узлах через соотношения (1). Слагаемые ΔP_{i-j}^* при первом расчете принимаются равными нулю, а массив коэффициентов C_{i-j} оценивается по эмпирическим зависимостям для каждого типа ветви [5].

Гидравлическое сопротивление ξ_{i-j} типовых элементов зависит от скорости течения,

температуры потока и т.д., а слагаемые ΔP_{i-j}^* в соотношении (1) являются неопределенными. Для уточнения их значений используются одномерные дифференциальные модели течения газа в типовых элементах. На основе этих моделей уточняются значения гидравлических сопротивлений на каждом элементе, определяются значения ΔP_{i-j}^* и вычисляются температура и коэффициент теплоотдачи газа на омываемых поверхностях деталей.

Из расчета графа в одномерные модели передаются расходы и полные давления на входе в каждый элемент. После расчета одномерных моделей вычисляются новые корректирующие значения приведенного коэффициента гидравлического сопротивления C_{i-j} и величины падения полного давления ΔP_{i-j}^* . Далее процедура расчета повторяется до установления параметров. Итерации выполняются пока полные давления газа во внутренних узлах, полученные из расчета графа, не совпадут с заданной точностью с давлениями, полученными из одномерных моделей течения. Схема итерационного взаимодействия представлена на рисунке 2.

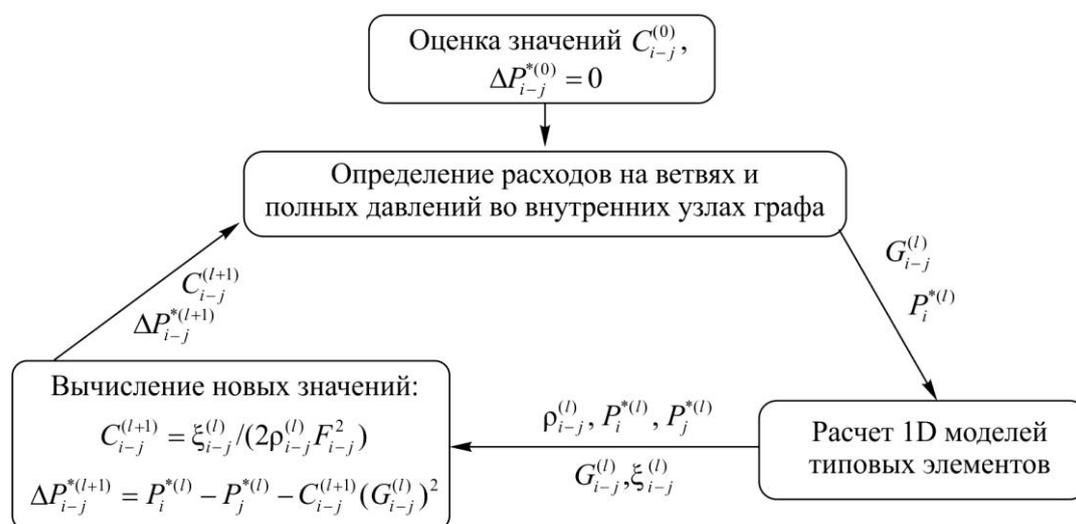


Рисунок 2. Схема расчета гидравлической сети (l – номер текущей итерации)

Одномерные модели течения газа в типовых элементах

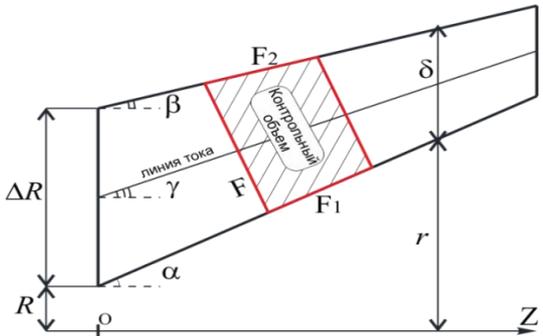
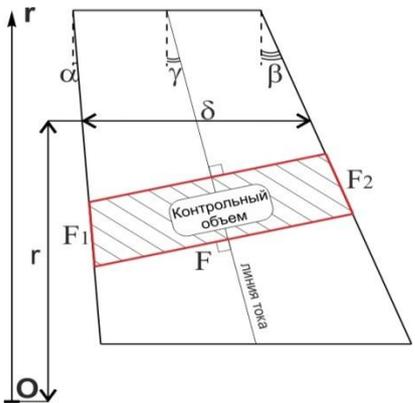
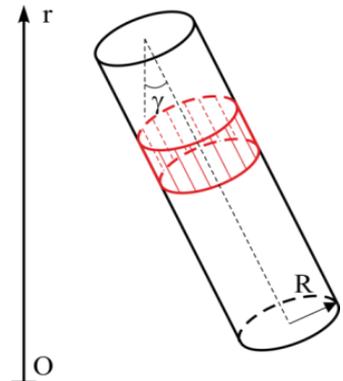
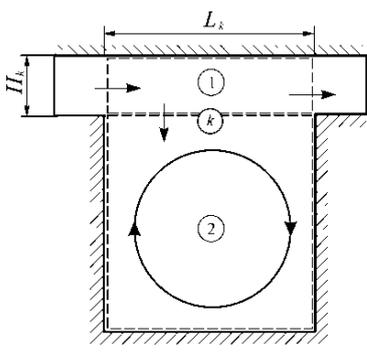
Для расчета гидравлической сети разработаны одномерные модели течения газа в типовых элементах, в которых учтены зависимости теплоемкости c_p от температуры и давления, теплопроводности λ от температуры [6] и динамической вязкости μ от температуры по формуле Сазерленда [7].

Системы уравнений, описывающие течение газа в типовых элементах, приведены в таблице 1. Уравнения записаны в стационарной постановке с учетом закрутки потока. При выводе уравнений учтен наклон каналов относительно осей двигателя.

В таблице 1 использованы следующие обозначения: V_z, V_ϕ, V_r – осевая, окружная и радиальная компонента скорости; P, T и ρ – давление, температура и плотность газа; e – полная внутренняя энергия; F – площадь сечения контрольного объема; F_1 и F_2 – удельные площади боковых поверхностей контрольного объема; $\tau_{z1}, \tau_{z2}, \tau_{\phi1}, \tau_{\phi2}$ – напряжения трения в осевом и окружном направлениях; τ_r – напряжение трения в радиальном направлении; ω – угловая скорость; W – работа сил трения на стенках; Q – подвод тепла за счет теплообмена; μ_k – коэффициент расхода, определяемый по уравнению Чаплыгина [8, 9].

Подробные выражения для коэффициентов систем уравнений типовых элементов приведены в Приложении.

Системы уравнений типовых элементов

Тип элемента, схема расчетной области	Основные уравнения
<p>Кольцевой канал</p> 	$\frac{d(\rho V_z F)}{dz} = 0,$ $\rho \frac{V_z}{\cos \gamma} F \frac{dV_z}{dz} = -\tau_{z1} F_1 - \tau_{z2} F_2 - F \frac{dP}{dz},$ $\rho \frac{V_z}{\cos \gamma} F \frac{dV_\phi}{dz} = -\tau_{\phi 1} F_1 - \tau_{\phi 2} F_2,$ $\rho \frac{V_z}{\cos \gamma} F \frac{de}{dz} = -W - Q - \frac{1}{\cos \gamma} \frac{d(FV_z P)}{dz}$
<p>Радиальная полость</p> 	$\frac{d(\rho V_r F)}{dz} = 0,$ $F \rho \left(\frac{V_r}{\cos \gamma} \frac{dV_r}{dr} - \frac{V_\phi^2}{r} \right) = -\tau_r (F_1 + F_2) - F \frac{dP}{dz},$ $F \rho \frac{V_r}{\cos \gamma} \left(\frac{dV_\phi}{dr} + \frac{V_\phi}{r} \right) = -\tau_{\phi 1} F_1 - \tau_{\phi 2} F_2,$ $\rho \frac{V_r}{\cos \gamma} F \frac{de}{dr} = -W - Q - \frac{1}{\cos \gamma} \frac{d(FV_r P)}{dr}$
<p>Радиальный канал</p> 	$\frac{d(\rho V_r F)}{dr} = 0,$ $\frac{dV_\phi}{dr} = \omega,$ $\rho \frac{V_r}{\cos \gamma} \frac{dV_r}{dr} - \rho \frac{V_\phi^2}{r \cos \gamma} = -\frac{2\tau_r}{R} + r\omega^2 - \frac{dP}{dr},$ $\rho \frac{V_r}{\cos \gamma} F \frac{de}{dr} = -W - Q + \frac{F\omega^2 V_r r \rho}{\cos \gamma} - \frac{1}{\cos \gamma} \frac{d(FV_r P)}{dr}$
<p>Лабиринтное уплотнение</p> 	$\mu_{k+1} H_{k+1} \sqrt{T(P_k^2 - P_{k+1}^2)} = \mu_k H_k \sqrt{T(P_{k-1}^2 - P_k^2)},$ $\mu_k = \pi / (\pi + 2 - 5\zeta_k + 2\zeta_k^2),$ $\zeta_k = -1 + P_{k-1} / P_k^{\frac{2}{7}}$

Верификация модели

Для проведения поверочных расчетов одномерных типовых элементов использован коммерческий программный комплекс. Для каждого осесимметричного типового элемента построена двухмерная поверочная модель, а для «радиального канала» – трехмерная модель. Показано, что погрешности определения основных газодинамических параметров в одномерном приближении не превышают 10...15%.

Также проведены верификационные расчеты на примере типовой междисковой полости турбины авиационного двигателя (см. рисунок 3).

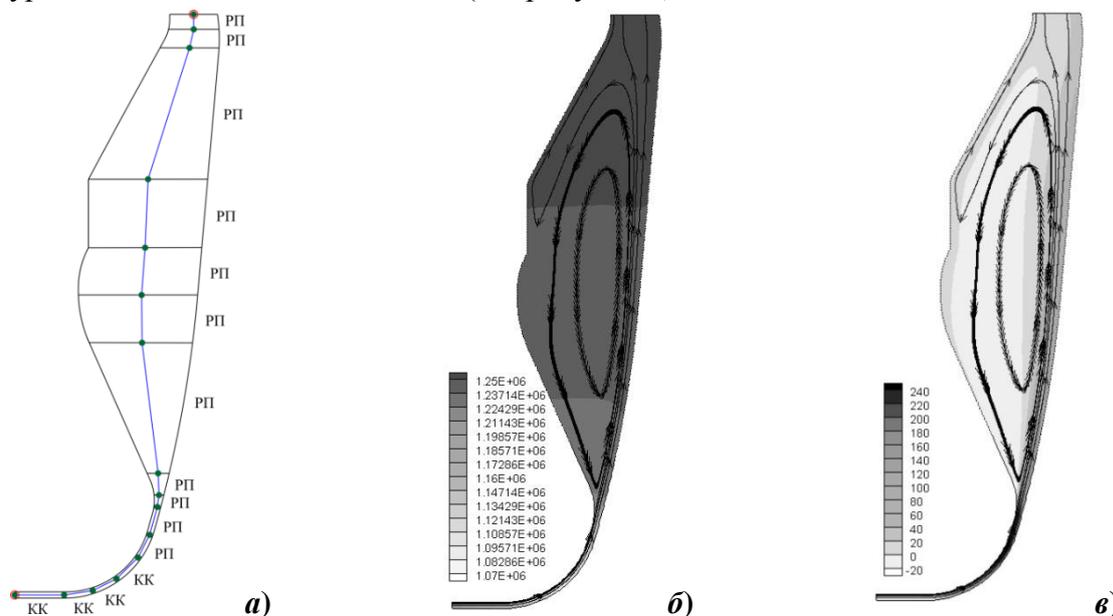


Рисунок 3. Верификационный расчет междисковой полости: а – эквивалентная гидравлическая сеть; б – статическое давление, Па; в – радиальная скорость, м/с

Двухмерная расчетная модель состояла из 53855 ячеек со сгущением к стенкам, что обеспечило $Y^+ = 0,6$ и разрешение пограничного слоя для более качественного учета теплообмена и трения. В качестве граничных условий на входе задано полное давление, полная температура и компонента закрутки; на выходе задано статическое давление. Также учтено вращение стенок и постоянная температура на стенках (см. таблицу 2).

В таблицах 2 и 3 использованы следующие обозначения: $P_{вх}^*$, $P_{вых}^*$ – полное давление газа на входе и выходе; $P_{вых}$ – статическое давление газа на выходе; $T_{вх}^*$, $T_{вых}^*$ – полная температура газа на входе и выходе; T_w – температура стенок; $V_{\phi}^{вых}$, $V_r^{вых}$ – окружная и радиальная компонента скорости газа на выходе; ω – угловая скорость стенок; G – расход.

Таблица 2

Граничные условия для двухмерной задачи

$P_{вх}^*$, кПа	$T_{вх}^*$, К	$P_{вых}$, кПа	T_w , К	ω , рад/с
1438	600	1260	750	1500

Расчетная область была разбита на 15 типовых элементов: четыре кольцевых канала и одиннадцать радиальных полостей (рисунок 3,а). В качестве граничных условий для одномерной гидравлической сети на входе заданы: полное давление, полная температура и значение окружной компоненты скорости (закрутки); на выходе задано статическое давление.

Результаты расчетов показывают, что одномерные модели дают удовлетворительное совпадение по расходу 2,7% относительно базового двухмерного расчета (таблица 3). Од-

нако значения окружной компоненты скорости существенно разнятся, что приводит к различию полных давлений на выходе. Это связано с тем, что в междисковой области образуется вихрь, который не учитывается в одномерной модели (рисунок 3,б-в).

Таблица 3

Сравнение одномерной и двумерной моделей

Модели	$P_{\text{вых}}^*$, кПа	$T_{\text{вых}}^*$, К	$V_{\phi}^{\text{вых}}$, м/с	$V_r^{\text{вых}}$, м/с	G , кг/с
Двухмерная	1286,9	672	83,8	18,7	1,61
Одномерная (гидравлическая сеть)	1264,5	643	33,9	14,1	1,60

Переходный канал

Во вторичном тракте существуют места с плавным переходом от осевого к радиальному течению (рисунок 3). Обычно дискретизация таких мест осуществляется типовыми элементами «кольцевой канал» и «радиальная полость», причем точность расчета зависит от количества используемых типовых элементов и от места перехода от одного типа элементов к другому. Для расчета такого рода переходных каналов разработан специальный элемент (таблица 4). В отличие от элементов «кольцевой канал» и «радиальная полость», где интегрирование идет вдоль осевой координаты, здесь интегрирование проводится по углу θ .

В таблице 4 использованы следующие обозначения: V_{θ} – скорость газа вдоль линии тока; τ_{θ} – напряжение трения в направлении линии тока; m – масса контрольного объема.

Таблица 4

Система уравнений «переходного канала»

Тип элемента, схема расчетной области	Основные уравнения
<p>Переходный канал</p>	$\frac{d(\rho V_{\theta} F)}{d\theta} = 0,$ $\rho V_{\theta} F \frac{dV_{\theta} \cos \theta}{d\theta} = -(F_1 + F_2) \tau_{\theta} \cos \theta - \frac{d(PF \cos \theta)}{d\theta} +$ $+ PF \sin \theta (F_1 - F_2) - \frac{2V_{\theta}^2 m \sin \theta}{R_1 + R_2},$ $\rho V_{\theta} F \frac{dV_{\phi}}{d\theta} = -\tau_{\phi 1} F_1 - \tau_{\phi 2} F_2 - \frac{m V_{\theta} V_{\phi} \sin \theta}{r_0 - \cos \theta (R_1 + R_2) / 2},$ $\rho V_{\theta} F \frac{de}{d\theta} = -W - Q - \frac{d(FV_{\theta} P)}{d\theta}$

Заключение

Разработаны одномерные модели типовых элементов, учитывающие наклон линии тока к оси интегрирования. Проведена верификация моделей расчета течения в вентиляционном тракте. Погрешности определения основных газодинамических параметров в одномерном приближении не превышают 10...15% по сравнению с поверочными двухмерными и трехмерными моделями. Предложен новый типовой элемент «переходный канал» для участков сети с плавным изменением направления линий тока от осевой к радиальной ориентации.

Приложение

В приложении приведены выражения для коэффициентов систем уравнений описывающих течение газа в типовых элементах (таблица 1 и таблица 4).

При выводе уравнений предполагалось, что течение реализуется вдоль центральной линии типового элемента. Угол наклона центральной линии для «кольцевого канала» и «радиальной полости» определяется соотношением:

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{2}.$$

Для вычисления коэффициента теплоотдачи $\alpha_w = \lambda \operatorname{Nu} / d_r$ используются эмпирические зависимости для числа Нуссельта (d_r – гидравлический диаметр типового элемента).

Для кольцевого, радиального и переходного канала [3]:

$$\operatorname{Nu} = 0,021\varepsilon_r \operatorname{Pr}^{0,43} \operatorname{Re}^{0,8},$$

где: ε_r – коэффициент, учитывающий интенсификацию теплообмена на начальном участке:

$$\varepsilon_r = 1 + \left[\operatorname{lg}\left(\frac{0,02l}{d_r}\right) \right] [0,0189(\operatorname{lg} \operatorname{Re})^3 - 0,342(\operatorname{lg} \operatorname{Re})^2 + 2,11 \cdot \operatorname{lg} \operatorname{Re} - 4,53].$$

Для радиальной полости в случае вращающейся поверхности [4, 11]:

$$\operatorname{Nu} = 0,0196 |1 - \chi|^{0,2} \operatorname{Re}^{0,8} \operatorname{Km};$$

$$\operatorname{Re} = \frac{(V_\varphi - \omega r)\delta\rho}{\mu}; \operatorname{Km} = 1,75(1 + \operatorname{Kp}^2)(0,165 + 0,65\chi)^{0,2} \operatorname{Kp}^{0,2} |1 - \chi|^{0,4};$$

$$\operatorname{Kp} = 115 \left(\frac{1}{\chi} + 8 \right) \left(\frac{1800}{\chi} + 1580 \right)^{-1}; \chi = \frac{V_\varphi}{\omega r}.$$

В случае неподвижной стенки [12]:

$$\operatorname{Nu} = 0,037 \operatorname{Re}^{\frac{4}{5}} \operatorname{Pr}^{\frac{1}{3}}; \operatorname{Pr} = \frac{\mu c_p}{\lambda}; \operatorname{Re} = \frac{2\delta\rho\sqrt{(V_r / \cos\gamma)^2 + V_\varphi^2}}{\mu}.$$

Кольцевой канал

$$e = c_p T + (V_z / \cos\gamma)^2 / 2 + V_\varphi^2 / 2;$$

$$W = F_1 \tau_{\varphi 1} |V_\varphi - r\omega_1| + F_2 \tau_{\varphi 2} |V_\varphi - (r + \delta)\omega_2|; Q = F_1 \alpha_{w1} (T - T_{w1}) + F_2 \alpha_{w2} (T - T_{w2});$$

$$F = \frac{B\delta(2r + A\delta)}{2}; F_1 = N(2r + M\delta); F_2 = C(2r + D\delta);$$

$$r = R + z \cdot \operatorname{tg}\alpha; \delta = \Delta R + z(\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha),$$

где: δ – зазор в канале; r – переменный радиус нижней стенки; R – начальный радиус нижней стенки; ΔR – начальный радиальный зазор; T_{w1}, T_{w2} – температуры стенок; A, B, C, D, N и M – геометрические коэффициенты, учитывающие наклон канала:

$$A = 1 + \frac{\cos(\gamma + \beta)}{4 \cos(\gamma - \beta)} - \frac{\cos(\gamma + \alpha)}{4 \cos(\gamma - \alpha)}; B = \frac{\cos\alpha}{\cos(\gamma - \alpha)} + \frac{\cos\beta}{\cos(\gamma - \beta)}; D = 2 - \frac{\sin\gamma \sin\beta}{\cos(\gamma - \beta)};$$

$$C = \frac{1}{\cos\beta} - \frac{\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha}{2} \frac{\sin\gamma}{\cos(\gamma - \beta)}; N = \frac{1}{\cos\alpha} + \frac{\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha}{2} \frac{\sin\gamma}{\cos(\gamma - \alpha)}; M = \frac{\sin\gamma \cdot \sin\alpha}{\cos(\gamma - \alpha)}.$$

Напряжения трения определяются соотношениями:

$$\tau_{z1} = \frac{f_1}{4} \rho \frac{V_z \sqrt{(V_z / \cos\gamma)^2 + V_\varphi^2}}{2 \cos\gamma}; \tau_{\varphi 1} = \frac{f_1}{4} \rho \frac{(V_\varphi - r\omega_1) \sqrt{(V_z / \cos\gamma)^2 + V_\varphi^2}}{2};$$

$$\tau_{z2} = \frac{f_2}{4} \rho \frac{V_z \sqrt{(V_z / \cos \gamma)^2 + V_\phi^2}}{2 \cos \gamma}; \quad \tau_{\phi 2} = \frac{f_2}{4} \rho \frac{(V_\phi - (r + \delta)\omega_2) \sqrt{(V_z / \cos \gamma)^2 + V_\phi^2}}{2},$$

где: f – коэффициент трения [5, 6]:

$$f_1 = 1,5 \cdot \frac{0,3164}{\text{Re}_1^{0,25}}; \quad \text{Re}_1 = \frac{2\delta\rho\sqrt{(V_\phi - r\omega)^2 + (V_z / \cos \gamma)^2}}{\mu};$$

$$f_2 = 1,5 \cdot \frac{0,3164}{\text{Re}_2^{0,25}}; \quad \text{Re}_2 = \frac{2\delta\rho\sqrt{(V_\phi - (r + \delta)\omega)^2 + (V_z / \cos \gamma)^2}}{\mu}.$$

Радиальная полость

$$e = c_p T + (V_r / \cos \gamma)^2 / 2 + V_\phi^2 / 2;$$

$$W = F_1 \tau_{\phi 1} |V_\phi - r\omega_1| + F_2 \tau_{\phi 2} |V_\phi - r\omega_2|; \quad Q = F_1 \alpha_w (T - T_{w1}) + F_2 \alpha_w (T - T_{w2});$$

$$F = B\delta(r + A \frac{\delta}{4}); \quad F_1 = N(2r + M\delta); \quad F_2 = C(2r + D\delta),$$

где: δ – зазор между дисками, зависящий от радиуса r ; T_{w1}, T_{w2} – температуры стенок.

Геометрические коэффициенты:

$$A = \frac{\cos \beta \cdot \sin \gamma}{\cos(\gamma - \beta)} - \frac{\cos \alpha \cdot \sin \gamma}{\cos(\gamma - \alpha)}; \quad B = \frac{\cos \alpha}{\cos(\gamma - \alpha)} + \frac{\cos \beta}{\cos(\gamma - \beta)}; \quad D = \frac{\sin \gamma \cdot \cos \beta}{\cos(\gamma - \beta)};$$

$$C = \frac{1}{\cos \beta} - \frac{\text{tg} \beta - \text{tg} \alpha}{2} \frac{\sin \gamma}{\cos(\gamma - \beta)}; \quad N = \frac{1}{\cos \alpha} + \frac{\text{tg} \beta - \text{tg} \alpha}{2} \frac{\sin \gamma}{\cos(\gamma - \alpha)}; \quad M = -\frac{\sin \gamma \cdot \cos \alpha}{\cos(\gamma - \alpha)}.$$

Для вычисления напряжения трения в радиальном и окружном направлениях используются следующие соотношения [7]:

$$\tau_r = \frac{f_r}{4} \frac{1}{\cos^2 \gamma} \frac{\rho V_r^2}{2}; \quad f_r = \frac{0,3164}{\text{Re}_r^{0,25}}; \quad \text{Re}_r = \frac{1}{\cos \gamma} \frac{V_r \rho \delta}{\mu};$$

$$\tau_{\phi 1} = \frac{f_\phi}{4} \frac{\rho (V_\phi - \omega_1 r)^2}{2}; \quad \tau_{\phi 2} = \frac{f_\phi}{4} \frac{\rho (V_\phi - \omega_2 r)^2}{2}; \quad f_\phi = \frac{0,0535}{\text{Re}_\phi^{0,2}}; \quad \text{Re}_\phi = \frac{V_\phi \rho r}{\mu}.$$

Радиальный канал

$$e = c_p T + (V_r / \cos \gamma)^2 / 2 + V_\phi^2 / 2; \quad W = 2\pi r \tau V_r; \quad Q = 2\pi R \alpha_w (T - T_w);$$

$$\tau = \frac{f_r}{4} \frac{\rho V_r^2}{2}; \quad \text{Re} = \frac{2R\rho\sqrt{V_r^2 + V_\phi^2}}{\mu}; \quad f_r = \frac{0,3164}{\text{Re}^{0,25}},$$

где: f_r – коэффициент трения [5]; T_w – температура стенки.

Переходный канал

$$e = c_p T + (V_\theta^2 + V_\phi^2) / 2;$$

$$W = \tau_{\phi 1} (V_\phi - r_1 \omega_1) F_1 + \tau_{\phi 2} (V_\phi - r_2 \omega_2) F_2; \quad Q = \alpha_w (T - T_{w1}) F_1 - \alpha_w (T - T_{w2}) F_2,$$

где: $F = \pi(R_2 - R_1)(2r_0 - (R_1 + R_2) \cos \theta)$ – эффективная площадь через которую осуществляется течение газа; $F_1 = 2\pi(r_0 - R_1 \cos \theta)R_1$, $F_2 = 2\pi(r_0 - R_2 \cos \theta)R_2$ – эффективные площади поверхностей, ограничивающие контрольный объем со стороны твердого тела.

Для учета ускорений действующих на контрольный объем необходимо определить его массу:

$$m = \pi[(R_1(r_0 - R_1 \cos \theta)^2 - R_2(r_0 - R_2 \cos \theta)^2) \cos \theta + 1/3(R_2 - R_1)(3r_0^2 \cos \theta - 3r_0(R_1 + R_2) \cos(2\theta) + (R_1^2 + R_1 R_2 + R_2^2)(1 - 3 \sin^2 \theta) \cos \theta)] \cdot \rho.$$

Столь сложная зависимость обусловлена тем, что контрольный объем ограничен двумя кривыми второго порядка.

Напряжения трения определяются следующими соотношениями:

$$\tau_\theta = \frac{f}{4} \rho \frac{V_\theta \sqrt{V_\theta^2 + V_\varphi^2}}{2}; \quad \tau_{u1} = \frac{f}{4} \rho \frac{(V_\varphi - r_1 \omega_1) \sqrt{V_\theta^2 + V_\varphi^2}}{2}; \quad \tau_{u2} = \frac{f}{4} \rho \frac{(V_\varphi - r_2 \omega_2) \sqrt{V_\theta^2 + V_\varphi^2}}{2},$$

где f – коэффициент трения [5, 7]:

$$f = 1,5 \cdot \frac{0,3164}{\text{Re}^{0,25}}; \quad \text{Re} = \frac{2(R_2 - R_1) \rho \sqrt{V_\varphi^2 + V_\theta^2}}{\mu}.$$

Литература

1. Темис Ю.М., Селиванов А.В. Термомеханическая модель двигателя // Машиностроение. Энциклопедия / Самолеты и вертолеты. Т. IV-21. Авиационные двигатели. Кн. 3 / Под ред. В.А. Скибина, Ю.М. Темиса, В.А. Сосунова. М.: Машиностроение, 2010. С. 524–528.
2. Sjunnesson A., Fridolf P., Marquina F., Spingmann M. The VITAL Projects Approach for Reducing Weight of Turbofan Engine Structures // ISABE 2009-1170. 10 p.
3. Слитенко А.Ф., Копелев С.З. Конструкция и расчет систем охлаждения ГТД. Харьков: изд-во «Основа» при Харьковском гос. университете, 1994. 239 с.
4. Костеж В.К., Харьковский С.В. Расчетное определение параметров среды в разветвленной системе воздухоподвода турбины и граничных условий теплообмена на поверхности диска // Труды ЦИАМ № 1269. С. 116–128.
5. Идельчик И.Е. Справочник по гидравлическим сопротивлениям. М.: Гос. Энерг. Издат. 1960.
6. Варгафтик Н.Б. Справочник по теплофизическим свойствам газов и жидкостей. М: Гос. Издат. Физ.-Мат. Лит-ры, 1963.
7. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. Пер. с нем. М.: Наука, 1974. 711 с.
8. Childs D.W. Turbomachinery Rotordynamics: phenomena, modeling, and analysis // John Wiley & Sons Inc.
9. Childs D.W., Scharrer J. An Iwatsubo-Based Solution for Labyrinth Seals: Comparison to Experimental Results // ASME Journal of Engineering for Gas Turbines and Power, 1986, pp. 325–331.
10. Tan Q., Ren J., Jiang H. Prediction of Flow Features in Rotating Cavities with Axial Throughflow by RANS and LES // Proc. of ASME Turbo Expo 2009: Power for Land, Sea and Air, 8-12 June 2009, Orlando, Florida, USA / GT2009-59428. 9 p.
11. Дорфман Л.А. Гидродинамическое сопротивление и теплоотдача вращающихся тел. М.: Физматгиз, 1960. 260 с.
12. Уонг Х. Основные формулы и данные по теплообмену для инженеров. М.: Атомиздат, 1979.