Элементы нелинейной механики сплошной среды в современной теории

д. ф.-м. н. проф. Бровко Г.Л.
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова
glb@mech.math.msu.su

Аннотация. Обсуждаются теоретические продвижения в области современной нелинейной механики сплошной среды: элементы математического аппарата, развитие основ общей теории механических тензорных процессов и их отображений, включая обобщение понятий объективных производных и интегралов, понятий тензорных мер напряжений и конечных деформаций, новые подходы в теории сопротивления тел деформированию.

Ключевые слова: *механика деформируемых тел, математические основы, объективные тензоры, конечные деформации, объективные производные, тензорные меры напряжений и деформаций, общие принципы теории определяющих соотношений сопротивления тел деформированию.*

Введение

Современные исследования в механике деформируемых тел все большее внимание уделяют теоретическим и прикладным задачам, описываемым нелинейными (алгебраическими, функциональными) соотношениями. К их числу относятся геометрически нелинейные соотношения, лежащие в основе описания конечных деформаций тел, а также физически нелинейные соотношения, в первую очередь, определяющие соотношения свойств сопротивления деформированию, выражающие сложные связи характеристик движений и взаимодействий тел (деформаций и напряжений в частицах тел).

В отечественной науке ведущая роль в исследованиях нелинейной механики сплошной среды принадлежит выдающимся ученым-механикам А.А. Ильюшину и В.В. Новожилову. Их трудами заложены основы современных исследований в механике деформируемого твердого тела.

В настоящей работе кратко представлены теоретические результаты исследований в современной нелинейной механике деформируемых сред, касающиеся общих представлений механических тензорных процессов, их отображений и связей между ними, обобщенных понятий тензорных мер напряжений и конечных деформаций, определяющих соотношений свойств сопротивления тел деформированию.

1. Механические тензорные процессы и их отображения

Современная общая теория механических тензорных процессов основывается на новых математических подходах, новых понятиях объективных тензоров и связывающих их независимых от системы отсчета отображений, в том числе объективных производных и интегралов.

1.1. Элементы математического аппарата

В современной отечественной и зарубежной научной литературе по механике деформируемых сред проявляется уверенная тенденция к новому стилю изложения. Этому стилю свойственны, с одной стороны, детальная аксиоматика и строгая доказательность утверждений, предусматривающие привлечение фундаментального математического аппарата, включая формально-логический, с другой стороны, компактность математических формул, использующих прямые (инвариантные) обозначения векторов, тензоров и дифференциальных операторов, которые требуют определенных усилий для усвоения, однако весьма просты и эффективны: они экономят объем, проясняют механический смысл записи, не затеняя его «лесом» индексов и необходимостью «жонглирования» ими, а при овладении соответствующей техникой позволяют оперативно и без ограничений переключиться на другие, более традиционные способы тензорного представления (матричный, индексный, полиадный).

Теоретические построения механики сплошной среды [1 – 5] основываются на общих подходах и постулатах, получают все более выраженный аксиоматический характер [6 – 14], что воплощает решение известной шестой проблемы Гильберта [15]. Признанные классическими исследования по механике деформируемого твердого тела, в том числе по теории упругости и пластичности [16 – 29], получают новое развитие с привлечением инвариантных тензорных обозначений [30 – 35].

1.2. Объективные тензоры

Понятие объективности тензоров вводится в соответствии с правилами их преобразования при замене системы отсчета. Замена системы отсчета ϕ на «новую» систему отсчета ϕ_* выражается зависимостью «новых» эйлеровых переменных $\boldsymbol{x}_*, t_*$ от «старых» переменных $\boldsymbol{x}, t$:

$$\boldsymbol{x}_* = \boldsymbol{x}_{*0}(t) + \boldsymbol{Q}(t)\cdot(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0), \quad t_* = t + a, \tag{1.1}$$

где: $\boldsymbol{x}_0, a$ – постоянные, а $\boldsymbol{x}_{*0}(t), \boldsymbol{Q}(t)$ – зависящие от времени t параметры замены системы отсчета ($\boldsymbol{Q}(t)$ – ортогональный тензор).

Системы отсчета ϕ и ϕ_*, удовлетворяющие (1.1), называются *родственными*.

Скалярные $\varphi_{(0)}$, векторные $\mathbf{u}_{(0)}$, $\mathbf{u}_{(1)}$ и тензорные второго ранга $\mathbf{L}_{(00)}$, $\mathbf{L}_{(10)}, \mathbf{L}_{(01)}$, $\mathbf{L}_{(11)}$ величины называются *объективными* [36], если при замене системы отсчета они преобразуются по формулам:

$$\begin{gathered}\varphi_{()*} = \varphi_{()},\ \mathbf{u}_{(0)*} = \mathbf{u}_{(0)},\ \mathbf{u}_{(1)*} = \boldsymbol{Q}\cdot\mathbf{u}_{(1)},\\ \mathbf{L}_{(00)*} = \mathbf{L}_{(00)},\ \mathbf{L}_{(10)*} = \boldsymbol{Q}\cdot\mathbf{L}_{(10)},\ \mathbf{L}_{(01)*} = \mathbf{L}_{(01)}\cdot\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}},\ \mathbf{L}_{(11)*} = \boldsymbol{Q}\cdot\mathbf{L}_{(11)}\cdot\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}.\end{gathered} \tag{1.2}$$

Нижние индексы выражают *тип объективности*: пустой индекс $()$ соответствует объективным скалярам, векторы $\mathbf{u}_{(0)}$ и тензоры $\mathbf{L}_{(00)}$ называют материально ориентированными (или правыми, или инвариантными, или типа Ильюшина-Хилла), векторы $\mathbf{u}_{(1)}$ и тензоры $\mathbf{L}_{(11)}$ – пространственно ориентированными (или левыми, или индифферентными, или типа Нолла-Трусделла), остальные – смешанных типов объективности.

Аналогично понятие объективности распространяется на тензоры высших рангов [36, 37]. Векторы, а также тензоры одного ранга и разных типов объективности, выражающие родственные в механическом отношении величины, объединяются между собой в *диаграммы* [36, 37] формулами (*переплетающими отображениями*):

$$\begin{gathered}\mathbf{u}_{(1)} = \boldsymbol{A}_{(10)}\cdot\mathbf{u}_{(0)},\\ \mathbf{L}_{(10)} = \boldsymbol{A}^{(1)}_{(10)}\cdot\mathbf{L}_{(00)},\ \mathbf{L}_{(01)} = \mathbf{L}_{(00)}\cdot\boldsymbol{A}^{(2)\mathrm{T}}_{(10)},\ \mathbf{L}_{(11)} = \boldsymbol{A}^{(1)}_{(10)}\cdot\mathbf{L}_{(00)}\cdot\boldsymbol{A}^{(2)\mathrm{T}}_{(10)}\end{gathered} \tag{1.3}$$

с некоторыми невырожденными (10)- объективными тензорами $\boldsymbol{A}_{(10)}$ и $\boldsymbol{A}^{(1)}_{(10)}, \boldsymbol{A}^{(2)}_{(10)}$ – *переходными тензорами* этих диаграмм. Векторы $\mathbf{u}_{(0)}$, $\mathbf{u}_{(1)}$, а также тензоры $\mathbf{L}_{(00)}$, $\mathbf{L}_{(10)}$, $\mathbf{L}_{(01)}$, $\mathbf{L}_{(11)}$, входящие в диаграммы, называются *простыми аналогами* друг друга.

1.3. Отображения объективных тензоров

1.3.1. Отображения, независимые от системы отсчета

Отображение $\boldsymbol{F}:\boldsymbol{\gamma}\to\boldsymbol{\pi}$ объективных тензоров $\boldsymbol{\gamma}$ в объективные тензоры $\boldsymbol{\pi}$ называется *независимым от системы отсчета* [36–39], если в любых родственных системах отсчета равенства

$$\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{\gamma}), \quad \boldsymbol{\pi}_* = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{\gamma}_*) \tag{1.4}$$

равносильны.

Отображение является независимым от системы отсчета в точности тогда, когда оно инвариантно по отношению к временным сдвигам и удовлетворяет специальному (согласованному с типами объективности тензоров $\boldsymbol{\gamma}$ и $\boldsymbol{\pi}$) свойству обобщенной изотропии [36].

Простыми примерами независимых от системы отсчета отображений объективных векторов могут служить функции вида

$$\mathbf{v}_{(0)} = \boldsymbol{f}_{(00)}(\mathbf{u}_{(0)}),\ \mathbf{v}_{(1)} = \boldsymbol{f}_{(01)}(\mathbf{u}_{(0)}),\ \mathbf{v}_{(0)} = \boldsymbol{f}_{(10)}(\mathbf{u}_{(1)}),\ \mathbf{v}_{(1)} = \boldsymbol{f}_{(11)}(\mathbf{u}_{(1)}), \qquad (1.5)$$

где: $\boldsymbol{f}_{(00)}$ – произвольного вида векторнозначная функция векторного аргумента, $\boldsymbol{f}_{(01)}$ – тождественно нулевая функция, $\boldsymbol{f}_{(10)}$ зависит лишь от модуля $\left|\mathbf{u}_{(1)}\right|$: $\boldsymbol{f}_{(10)}(\mathbf{u}_{(1)}) \equiv \boldsymbol{\varphi}\left(\left|\mathbf{u}_{(1)}\right|\right)$ (здесь $\boldsymbol{\varphi}$ – произвольная векторнозначная функция неотрицательного скалярного аргумента), $\boldsymbol{f}_{(11)}$ – изотропная векторнозначная функция векторного аргумента: $\boldsymbol{f}_{(11)}(\mathbf{u}_{(1)}) \equiv \varphi\left(\left|\mathbf{u}_{(1)}\right|\right)\mathbf{u}_{(1)}$ (здесь φ – произвольная скалярнозначная функция неотрицательного скалярного аргумента).

Примерами независимых от системы отсчета отображений объективных тензоров второго ранга являются функции

$$\begin{gathered}\mathbf{Z}_{(00)} = \boldsymbol{F}_{(00;00)}(\mathbf{U}_{(00)}),\ \mathbf{Z}_{(10)} = \boldsymbol{F}_{(00;10)}(\mathbf{U}_{(00)}),\ \mathbf{Z}_{(11)} = \boldsymbol{F}_{(00;11)}(\mathbf{U}_{(00)}),\ \mathbf{Z}_{(00)} = \boldsymbol{F}_{(10;00)}(\mathbf{U}_{(10)}),\\ \mathbf{Z}_{(10)} = \boldsymbol{F}_{(10;10)}(\mathbf{U}_{(10)}),\ \mathbf{Z}_{(11)} = \boldsymbol{F}_{(10;11)}(\mathbf{U}_{(10)}),\ \mathbf{Z}_{(00)} = \boldsymbol{F}_{(11;00)}(\mathbf{U}_{(11)}),\ \mathbf{Z}_{(11)} = \boldsymbol{F}_{(11;11)}(\mathbf{U}_{(11)}),\end{gathered} \qquad (1.6)$$

где: $\boldsymbol{F}_{(00;00)}$ – произвольного вида тензорнозначная функция тензорного аргумента, $\boldsymbol{F}_{(00;10)}$ – тождественно нулевая функция, $\boldsymbol{F}_{(00;11)}(\mathbf{U}_{(00)}) \equiv \mathit{\Phi}(\mathbf{U}_{(00)})\mathbf{I}$ ($\mathit{\Phi}$ – произвольная скалярнозначная функция тензорного аргумента, $\mathbf{I}$ – единичный тензор второго ранга), $\boldsymbol{F}_{(10;00)}(\mathbf{U}_{(10)}) \equiv \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{U}_{(10)}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{U}_{(10)})$ ($\boldsymbol{\Phi}$ – произвольная тензорнозначная функция неотрицательно определенного симметричного тензорного аргумента $\mathbf{U}_{(10)}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{U}_{(10)}$), $\boldsymbol{F}_{(10;10)}(\mathbf{U}_{(10)}) \equiv \mathbf{Q}_{\mathbf{U}} \cdot \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{U}_{(10)}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{U}_{(10)})$ ($\mathbf{Q}_{\mathbf{U}}$ – ортогональная часть полярного разложения тензора $\mathbf{U}_{(10)}$, $\boldsymbol{\Phi}$ – тензорнозначная функция неотрицательно определенного симметричного аргумента $\mathbf{U}_{(10)}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{U}_{(10)}$, инвариантная относительно неоднозначности тензора $\mathbf{Q}_{\mathbf{U}}$ в полярном разложении), $\boldsymbol{F}_{(10;11)}(\mathbf{U}_{(10)}) \equiv \mathbf{Q}_{\mathbf{U}} \cdot \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{U}_{(10)}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{U}_{(10)}) \cdot \mathbf{Q}_{\mathbf{U}}^{\mathrm{T}}$ ($\mathbf{Q}_{\mathbf{U}}$ – ортогональная часть полярного разложения тензора $\mathbf{U}_{(10)}$, $\boldsymbol{\Phi}$ – тензорнозначная функция неотрицательно определенного симметричного аргумента $\mathbf{U}_{(10)}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{U}_{(10)}$, инвариантная относительно неоднозначности тензора $\mathbf{Q}_{\mathbf{U}}$ в полярном разложении), $\boldsymbol{F}_{(11;00)}(\mathbf{U}_{(11)}) \equiv \boldsymbol{\Phi}(\mathrm{Inv}(\mathbf{U}_{(11)}))$ ($\boldsymbol{\Phi}$ – произвольная тензорнозначная функция от совокупности $\mathrm{Inv}(\mathbf{U}_{(11)})$ скалярных инвариантов тензора $\mathbf{U}_{(11)}$), $\boldsymbol{F}_{(11;11)}$ – изотропная тензорнозначная функция тензорного аргумента, имеющая для симметричного тензорного аргумента $\mathbf{U}_{(11)}$ (над трехмерным пространством) вид: $\boldsymbol{F}_{(11;11)}(\mathbf{U}_{(11)}) \equiv F_0\mathbf{I} + F_1\mathbf{U}_{(11)} + F_2\mathbf{U}_{(11)}^2$ (F_0, F_1, F_2 – скалярнозначные функции совокупности скалярных инвариантов $\mathrm{Inv}(\mathbf{U}_{(11)})$ тензора $\mathbf{U}_{(11)}$).

Заметим, что первая, четвертая, пятая и шестая формулы (1.6) выражают соответственно различные общие формы определяющих соотношений произвольного упругого тела [7-9,11-14,30,34-36,39]:

$$\mathbf{\Sigma} = \boldsymbol{F}(\mathbf{E}),\ \mathbf{\Sigma} = \boldsymbol{F}(\mathbf{X}),\ \mathbf{\Pi} = \mathbf{Q} \cdot \boldsymbol{F}(\mathbf{X}),\ \mathbf{S} = \mathbf{Q} \cdot \boldsymbol{F}(\mathbf{X}) \cdot \mathbf{Q}^{\mathrm{T}}, \qquad (1.7)$$

где: $\mathbf{S}$ – тензор истинных напряжений Коши, $\mathbf{\Sigma} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{A}^{-1\mathrm{T}}$ – тензор условных напряжений Ильюшина («энергетический»), $\mathbf{\Pi} = J\mathbf{S} \cdot \mathbf{A}^{-1\mathrm{T}}$ – тензор условных напряжений Пиолы-Кирхгофа первого рода, $\mathbf{Q}$ и $\mathbf{X}$ – мультипликативные составляющие правого полярного разложения $\mathbf{A} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{X}$ аффинора деформации $\mathbf{A}$, тензор $\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{A}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{A} - \mathbf{I})$ – тензор деформаций Грина.

1.3.2. Пакеты кондукторов

Переплетающие отображения вида (1.3), связывающие простые аналоги диаграмм объективных тензоров одного ранга (и разных типов) позволяют любое (нелинейное) отображение объективных тензоров различных рангов и типов представить в терминах тензоров тех же рангов, но всевозможных других типов объективности, а именно, в виде отображений их простых аналогов. Исходное (нелинейное) отображение называют *индуктором*, а порожденные им отображения аналогов – его *кондукторами*. Все множество таких кондукторов (вместе с индуктором) составляет *пакет кондукторов*, или *отображение диаграмм*.

Свойства пакета определяются индуктором. В частности, все кондукторы пакета независимы от системы отсчета лишь вместе с индуктором.

Как показывают примеры (1.5), (1.6), свойство независимости от системы отсчета накладывает, вообще говоря, существенные ограничения на математический вид отображений (вплоть до тривиального вида, как во втором соотношении (1.5) и во втором соотношении (1.6)). Лишь первые отображения в (1.5), (1.6) – отображения *типа Ильюшина* – не имеют ограничений по математическому виду.

Поэтому выбор отображений типа Ильюшина в качестве индукторов порождает кондукторы наиболее общего вида.

1.3.3. Объективные производные и интегралы

Для характеристики скоростей изменения векторов и тензоров во времени используют объективные производные – кондукторы пакета отображений, порожденного индуктором типа Ильюшина в виде материальной производной по времени от материально ориентированных векторов и тензоров.

Объективные производные определяются [36–39] как кондукторы (составляющие подпакет отображений с совпадающими диаграммами аргументов и образов), переводящие объективные тензоры в объективные тензоры того же ранга и типа. Для скаляров, векторов и тензоров второго ранга они имеют вид (верхней точкой обозначена материальная производная, тензоры $\boldsymbol{A}_{(10)}$ и $\boldsymbol{A}_{(10)}^{(1)}$, $\boldsymbol{A}_{(10)}^{(2)}$ – переходные тензоры диаграмм из (1.3)):

$$
\begin{aligned}
&D_{()}[\varphi_{()}]^t \equiv \dot{\varphi}_{()},\\
&D_{(0)}[\mathbf{u}_{(0)}]^t \equiv \dot{\mathbf{u}}_{(0)},\ D_{(1)}[\mathbf{u}_{(1)}]^t \equiv \boldsymbol{A}_{(10)} \cdot \left(\boldsymbol{A}_{(10)}^{-1} \cdot \mathbf{u}_{(1)}\right)^{\bullet},\\
&D_{(00)}[\mathbf{L}_{(00)}]^t \equiv \dot{\mathbf{L}}_{(00)},\ D_{(10)}[\mathbf{L}_{(10)}]^t \equiv \boldsymbol{A}_{(10)}^{(1)} \cdot \left(\boldsymbol{A}_{(10)}^{(1)-1} \cdot \mathbf{L}_{(10)}\right)^{\bullet},\\
&D_{(01)}[\mathbf{L}_{(01)}]^t \equiv \left(\mathbf{L}_{(01)} \cdot \boldsymbol{A}_{(10)}^{(2)-1\mathrm{T}}\right)^{\bullet} \cdot \boldsymbol{A}_{(10)}^{(2)\mathrm{T}},\\
&D_{(11)}[\mathbf{L}_{(11)}]^t \equiv \boldsymbol{A}_{(10)}^{(1)} \cdot \left(\boldsymbol{A}_{(10)}^{(1)-1} \cdot \mathbf{L}_{(10)} \cdot \boldsymbol{A}_{(10)}^{(2)-1\mathrm{T}}\right)^{\bullet} \cdot \boldsymbol{A}_{(10)}^{(2)\mathrm{T}}.
\end{aligned}
\tag{1.8}
$$

Для векторов и тензоров пространственных и смешанных типов объективности при эйлеровом способе описания может оказаться удобным другой способ записи объективных производных из (1.8):

$$
\begin{aligned}
&D_{(1)}[\mathbf{u}_{(1)}]^t \equiv \dot{\mathbf{u}}_{(1)} - \boldsymbol{D} \cdot \mathbf{u}_{(1)},\\
&D_{(10)}[\mathbf{L}_{(10)}]^t \equiv \dot{\mathbf{L}}_{(10)} - \boldsymbol{D}^{(1)} \cdot \mathbf{L}_{(10)},\\
&D_{(01)}[\mathbf{L}_{(01)}]^t \equiv \dot{\mathbf{L}}_{(01)} - \mathbf{L}_{(01)} \cdot \boldsymbol{D}^{(2)\mathrm{T}},\\
&D_{(11)}[\mathbf{L}_{(11)}]^t \equiv \dot{\mathbf{L}}_{(11)} - \boldsymbol{D}^{(1)} \cdot \mathbf{L}_{(11)} - \mathbf{L}_{(01)} \cdot \boldsymbol{D}^{(2)\mathrm{T}},
\end{aligned}
\tag{1.9}
$$

где введены обозначения:

$$\boldsymbol{D} \equiv \dot{\boldsymbol{A}}_{(10)} \cdot \boldsymbol{A}_{(10)}^{-1}, \quad \boldsymbol{D}^{(1)} \equiv \dot{\boldsymbol{A}}_{(10)}^{(1)} \cdot \boldsymbol{A}_{(10)}^{(1)-1}, \quad \boldsymbol{D}^{(2)} \equiv \dot{\boldsymbol{A}}_{(10)}^{(2)} \cdot \boldsymbol{A}_{(10)}^{(2)-1}. \qquad (1.10)$$

Формулы (1.8), а также (1.9) охватывают все известные и новые понятия объективных производных [40 – 44]. Объективные интегралы строятся как операторы, обратные к объективным производным [36 – 39].

2. Обобщенные тензорные меры напряжений и деформаций

Вопросы обобщения тензорных мер напряжений и деформаций рассматривались в [45 – 51] и других работах. В работах [36, 48, 50] в рамках лагранжева описания к кинематике и взаимодействиям в среде с учетом наименьшей ограничительности связей материально ориентированных тензоров (отображений типа Ильюшина) по сравнению со связями тензоров других типов объективности избрано в качестве основы для введения новых тензорных мер деформаций и напряжений построение их материально ориентированных аналогов.

2.1. Основные аксиомы. Общий лагранжев класс

Обобщение известных свойств существующих понятий тензоров деформаций и напряжений приводит к следующим основным исходным положениям (аксиомам) для построения новых понятий указанных (материально ориентированных) тензорных мер, составляющим основу обобщенной теории тензорных мер деформаций и напряжений в классической механике сплошной среды.

Аксиома 1. Мера деформации есть симметричный тензор второго ранга $\boldsymbol{\varepsilon}$, предыстория которого в любом движении полностью и взаимно однозначно определяет процесс чистой деформации – удлинения и относительные сдвиги любых элементарных материальных волокон (независимо от жесткого движения, сопровождающего деформацию частицы среды).

Аксиома 2. Мера напряжений есть симметричный тензор второго ранга $\boldsymbol{\sigma}$, который полностью и независимо от жестких движений частицы определяет (возможно, с привлечением $\boldsymbol{\varepsilon}$) внутреннее напряженное состояние частицы – величины и относительную ориентацию удельных поверхностных усилий на любых элементарных материальных площадках.

Аксиома 3. В любых движениях меры напряжений $\boldsymbol{\sigma}$ и деформаций $\boldsymbol{\varepsilon}$ энергетически сопряжены (согласованы): удельная элементарная работа внутренних контактных сил равна скалярному произведению тензора напряжений $\boldsymbol{\sigma}$ на полное (материальное) приращение тензора деформаций $d\boldsymbol{\varepsilon}$.

Аксиома 4. В классическом случае малых деформаций (когда относительные удлинения и повороты волокон имеют порядок малости $\Delta << 1$) мера деформации $\boldsymbol{\varepsilon}$, ее материальная производная по времени $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ и мера напряжений $\boldsymbol{\sigma}$ асимптотически (с относительной погрешностью Δ) совпадают с классическими тензорами малых деформаций Коши, скоростей деформаций и напряжений Коши соответственно в любых сложных процессах.

Аксиома 5. Шаровая и девиаторная части меры деформации определяют независимо друг от друга соответственно процессы объемной и сдвиговой (изохорической) частей деформации.

Аксиома 6. Шаровая и девиаторная части меры напряжений определяют (возможно, с привлечением одноименных частей меры деформации) независимо друг от друга соответственно гидростатическую и касательные составляющие напряжений.

Для различных тензорных мер деформаций и напряжений будем иметь в виду выполнение также других условий, включая естественные для многих рассмотрений требования независимости формул их построения от системы отсчета, склерономности и изотропии их связи с известными мерами.

Множество всех тензорных мер, удовлетворяющих аксиомам 1–4 (и, возможно, 5, 6) назовем *общим лагранжевым классом*.

2.2. Полный лагранжев класс

Всем аксиомам удовлетворяют введенные ранее [32, 48, 49] «скоростные» тензорные меры деформаций $\mathbf{E}_{\mathrm{V}}$ и напряжений $\mathbf{\Sigma}_{\mathrm{V}}$:

$$\mathbf{E}_{\mathrm{V}} \equiv \int_{t_0}^{t} \mathbf{X}^{-1} \cdot \dot{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{X}^{-1} d\tau, \quad \mathbf{\Sigma}_{\mathrm{V}} \equiv \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{Q} \equiv \mathbf{X} \cdot \mathbf{\Sigma} \cdot \mathbf{X}, \qquad (2.1)$$

где: $\mathbf{Q}$, $\mathbf{X}$ – компоненты полярного разложения аффинора деформации $\mathbf{A}$, $\mathbf{E}$ – тензор деформаций Грина, $\mathbf{S}$ – тензор напряжений Коши, $\mathbf{\Sigma}$ – тензор напряжений Ильюшина.

Задавая новые тензорные меры деформаций $\boldsymbol{\varepsilon}$ и напряжений $\boldsymbol{\sigma}$ их связями со «скоростными» мерами в виде:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{Rate}_{\varepsilon}\left(\dot{\mathbf{E}}_{\mathrm{V}}\right), \quad \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{Str}_{\varepsilon}\left(\mathbf{\Sigma}_{\mathrm{V}}\right), \qquad (2.2)$$

где: $\mathbf{Rate}_{\varepsilon}$ и $\mathbf{Str}_{\varepsilon}$ – симметричные тензорнозначные функции, склерономно определяемые процессом деформации, приходим к следующему результату [36].

Теорема (об энергетической сопряженности). Если для тензорных мер $\boldsymbol{\varepsilon}$ и $\boldsymbol{\sigma}$ выполнена аксиома 3, то функции $\mathbf{Rate}_{\varepsilon}$ и $\mathbf{Str}_{\varepsilon}$ линейны, т.е.:

$$\mathbf{Rate}_{\varepsilon}\left(\dot{\mathbf{E}}_{\mathrm{V}}\right) \equiv \mathbf{RATE}_{\varepsilon} : \dot{\mathbf{E}}_{\mathrm{V}}, \quad \mathbf{Str}_{\varepsilon}\left(\mathbf{\Sigma}_{\mathrm{V}}\right) \equiv \mathbf{STR}_{\varepsilon} : \mathbf{\Sigma}_{\mathrm{V}}, \qquad (2.3)$$

где: $\mathbf{RATE}_{\varepsilon}$ и $\mathbf{STR}_{\varepsilon}$ – тензоры четвертого ранга, отображающие множество симметричных тензоров второго ранга в себя, склерономно параметризованные процессом деформации, причем:

$$\mathbf{STR}_{\varepsilon}^{-1\mathrm{T}} \equiv \mathbf{RATE}_{\varepsilon}. \qquad (2.4)$$

Множество пар тензорных мер, определяемых соотношениями (2.2) и теоремой об энергетической сопряженности, называется *полным лагранжевым классом*.

Теорема дает следствие для мер, удовлетворяющих дополнительно аксиомам 5, 6.

2.3. Простой лагранжев класс

Задавая соотношения (2.2) с учетом (2.3), (2.4) в виде:

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} &= \mathbf{RATE}_{\varepsilon} : \dot{\mathbf{E}}_{\mathrm{V}} \equiv \boldsymbol{X}_1^{(1)\mathrm{T}} \cdot \dot{\mathbf{E}}_{\mathrm{V}} \cdot \boldsymbol{X}_2^{(1)}, \\ \boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{STR}_{\varepsilon} : \mathbf{\Sigma}_{\mathrm{V}} \equiv \boldsymbol{X}_1^{(2)-1} \cdot \mathbf{\Sigma}_{\mathrm{V}} \cdot \boldsymbol{X}_2^{(2)-1\mathrm{T}}, \end{aligned} \qquad (2.5)$$

с невырожденными материально ориентированными тензорами $\boldsymbol{X}_k^{(1)}$, $\boldsymbol{X}_k^{(2)}$ ($k = 1, 2$), склерономно определяемыми историей деформации, приходим к равенствам:

$$\boldsymbol{X}_1^{(1)} \equiv \boldsymbol{X}, \ \boldsymbol{X}_2^{(1)} \equiv \alpha \boldsymbol{X}, \ \boldsymbol{X}_1^{(2)} \equiv \gamma \boldsymbol{X}, \ \boldsymbol{X}_2^{(2)} \equiv \frac{\alpha}{\gamma} \boldsymbol{X}, \qquad (2.6)$$

что для произвольного $\gamma \neq 0$ приводит (2.5) к окончательному общему виду:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \alpha \boldsymbol{X}^{\mathrm{T}} \cdot \dot{\mathbf{E}}_{\mathrm{V}} \cdot \boldsymbol{X}, \quad \boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{\alpha} \boldsymbol{X}^{-1} \cdot \mathbf{\Sigma}_{\mathrm{V}} \cdot \boldsymbol{X}^{-1\mathrm{T}}, \qquad (2.7)$$

где: $\boldsymbol{X}$ – произвольный материально ориентированный невырожденный тензор второго ранга, а $\alpha \neq 0$ – произвольный объективный скаляр, склерономно определяемые предысторией чистой деформации (без потери общности можно положить $\alpha = 1$).

Класс тензорных мер $\boldsymbol{\varepsilon}$ и $\boldsymbol{\sigma}$, выделяемых соотношением (2.7), называется *простым лагранжевым классом*.

2.3.1. Семейство голономных мер

В простом лагранжевом классе выделяется семейство *голономных тензорных мер*, характеризующих напряженно-деформированное состояние среды лишь своими текущими значениями вне зависимости от предыстории процесса.

Материально ориентированные голономные меры выражаются формулами [36, 52]:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = f(\mathbf{X}), \quad \boldsymbol{\sigma} = \varphi(\mathbf{X}) \cdot \mathbf{X} \cdot \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{X} \cdot \varphi(\mathbf{X}), \qquad (2.8)$$

где функции от правого тензора растяжений $\mathbf{X}$:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{X}) &\equiv \left(\mathbf{X} - \mathbf{X}^{-1}\right)\left[\left(1+c\right)\mathbf{X} + \left(1-c\right)\mathbf{X}^{-1}\right]^{-1}, \\ \varphi(\mathbf{X}) &\equiv \frac{1}{2}\left[\left(1+c\right)\mathbf{X} + \left(1-c\right)\mathbf{X}^{-1}\right] \end{aligned} \qquad (2.9)$$

параметризованы числовым параметром c, находящимся в пределах $-1 \le c \le 1$ и определяющим тем самым полное семейство голономных мер.

Все голономные меры с любыми $c \in [-1,1]$ удовлетворяют аксиомам 1 – 4 (но не 5 и 6).

2.3.2. Семейство коротационных мер

Точное подмножество материально ориентированных мер простого лагранжева класса, удовлетворяющих всем аксиомам 1 – 6, составляет *семейство простых коротационных мер*, определяемых соотношениями [36, 50]:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathrm{k}\mathbf{R}^{\mathrm{T}} \cdot \dot{\mathbf{E}}_{\mathrm{V}} \cdot \mathbf{R}, \quad \sigma = \frac{1}{\mathrm{k}}\mathbf{R}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{\Sigma}_{\mathrm{V}} \cdot \mathbf{R}, \qquad (2.10)$$

где: k – объективный скаляр-константа (обычно полагают $\mathrm{k}=1$), $\mathbf{R}$ – ортогональный материально ориентированный тензор, определенный предысторией чисто сдвиговой деформации.

3. Сопротивление тел деформированию

Движение тел характеризуется общими законами баланса (массы, количества движения, момента количества движения), заданными внешними условиями движения (начальными и граничными условиями, внешними силами) и специфическими механическими свойствами тела – свойствами *сопротивления деформированию*, выраженными *определяющими соотношениями* этих свойств. Последние накладывают ограничения на внутренний динамический процесс в теле, включающий движение тела и возникающие в этом движении в теле внутренние массовые и поверхностные (контактные) силы. В большинстве задач инженерной механики внутренними массовыми силами можно пренебречь, считая все массовые силы заданными внешними воздействиями. Тем самым определяющие соотношения выражают связи между движением (деформацией) тела и внутренними контактными силами, то есть напряжениями.

Общая теория определяющих соотношений механики сплошной среды зарождалась на заре науки. Основы ее сформировались во второй половине XX века. Ведущую роль в этом сыграли фундаментальные труды А.А. Ильюшина [1, 23, 24, 25, 27] и У. Нолла [6, 7], открывшие путь многочисленным исследованиям в этой области в современной науке.

В основе всех современных подходов лежат постулаты (принципы, аксиомы), которые в наиболее простом случае (пренебрежение внутренними массовыми силами и отсутствие внутренних кинематических связей) сводят определяющие соотношения к *общим приведенным формам* Ильюшина:

$$\boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{x},t) = \boldsymbol{F}_{\mathbf{I}}\left([\mathbf{E}^{t}(\mathbf{x},s)]_{s\ge 0}, \mathbf{x}\right) \qquad (1.11)$$

и Нолла:

$$\mathbf{S}(\mathbf{x},t) = \mathbf{Q}(\mathbf{x},t) \cdot \boldsymbol{F}_{\mathbf{N}}\left([\mathbf{X}^{t}(\mathbf{x},s)]_{s\ge 0}, \mathbf{x}\right) \cdot \mathbf{Q}^{\mathrm{T}}(\mathbf{x},t). \qquad (1.12)$$

Здесь $\mathbf{x},t$ – лагранжевы переменные, $\mathbf{S}$ и $\boldsymbol{\Sigma}$ – тензоры напряжений Коши и Ильюшина, $\mathbf{E}^{t}$ и $\mathbf{X}^{t}$ – предыстории тензора деформаций Грина $\mathbf{E}$ и правого тензора деформаций $\mathbf{X}$ (использовано определение предыстории $\psi^{t}(s)$ процесса $\psi(\tau)$: $\psi^{t}(s) \equiv \psi(t-s)$ и правое полярное разложение аффинора деформации $\mathbf{A} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{X}$).

Было показано [36, 37, 39, 48, 53, 54], что определяющие соотношения Ильюшина

(1.11) и Нолла (1.12) эквивалентны друг другу и выражают свойства сопротивления деформированию любых тел (простых тел – по Ноллу или классических сред – по Ильюшину) в любых движениях.

Другие общие формы определяющих соотношений, равносильные (1.11) и (1.12), строятся заменой предысторий деформации и тензоров напряжений на их выражения через обобщенные тензорные меры (см. п. 2). Получаемые таким образом новые формы соотношений для классов и семейств обобщенных тензорных мер напряжений и деформаций предоставляют широкие возможности для аппроксимации экспериментальных данных о поведении материалов при конечных деформациях и позволяют строить обобщения моделей, известных при малых деформациях, на область конечных деформаций.

На основании таких построений были исследованы новые модели пластичности при конечных деформациях (в рамках семейства коротационных мер) [55 – 58], а также модели тел с памятью формы при конечных деформациях (в рамках семейства голономных мер) [59, 60].

Заключение

Представленные результаты могут быть использованы в теоретических исследованиях по нелинейной механике сплошных сред, а также в формулировках начально-краевых задач и построении методов их решения.

Литература

1. Ильюшин А.А. Механика сплошной среды. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1990.
2. Седов Л.И. Механика сплошной среды. Т.1,2. М.: Наука, 1984.
3. Жермен П. Механика сплошных сред. М.: Высшая школа, 1983.
4. Победря Б.Е., Георгиевский Д.В. Основы механики сплошной среды. Курс лекций. М.: Физматлит, 2006.
5. Эглит М.Э. Лекции по основам механики сплошных сред. М.: Изд-во Моск. ун-та, 2008.
6. Noll W. A mathematical theory of the mechanical behavior of continuous media. Arch. Rat. Mech. Anal. 1958 2:197–226.
7. Truesdell C., Noll W. The non-linear field theories of Mechanics. Handbuch der Physik. III/3. Berlin: Springer Verlag, 1965.
8. Трусделл К. Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. М.: Мир, 1975.
9. Gurtin M.E. An introduction to continuum mechanics. New York, London, Toronto, Sydney, San Francisco: Academic Press, 1981.
10. Mueller I. Thermodynamics. Pitman, Boston, 1984.
11. Rymarz Cz., Mechanika ośrodków ciagłyh. Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN, 1993.
12. Silhavy M. The mechanics and thermodynamics of continuous media. Berlin: Springer, 1997.
13. Wilmanski K. Thermomechanics of continua. Berlin: Springer, 1998.
14. Бровко Г.Л. Основы механики сплошной среды. М.: Изд-во "Попечительский совет механико-математического факультета МГУ имени М.В.Ломоносова". Ч.1. – 2011. Ч.2. – 2013.
15. Проблемы Гильберта. Сборник под редакцией П.С. Александрова, М., Наука, 1969, 240с.
16. Ляв А. Математическая теория упругости. М.: ОНТИ, 1935. 674 с.
17. Новожилов В. В. Основы нелинейной теории упругости. – Л.–М., 1948. 211 с.
18. Новожилов В. В. Теория упругости. – Л., 1958.
19. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. М.: Наука, 1975. 575 с.
20. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
21. Купрадзе В.Д., Гегелиа Т.Г., Башелейшвили М.О., Бурчуладзе Т.В. Трехмерные задачи математической теории упругости и термоупругости. М.: Наука, 1976. 663 с.
22. Лурье А.И. Теория упругости. М.: Наука, 1970. 940 с.
23. Ильюшин А.А. Пластичность. Ч.1. Упругопластические деформации. М.-Л.: ГИТТЛ,

1948. 376 с. (*См. также:* М.: Логос, 2004. 388 с. – *репр. переизд.*)
24. Ильюшин А.А. Пластичность. Основы общей математической теории. М.: Изд-во АН СССР, 1963. 271 с.
25. Ильюшин А.А., Ленский В.С. Сопротивление материалов. М.: Физматгиз, 1959. 371 с.
26. Грин А., Адкинс Дж. Большие упругие деформации и нелинейная механика сплошной среды. М.: Мир, 1965. 456 с.
27. Ильюшин А.А., Победря Б.Е. Основы математической теории термовязкоупругости. М.: Мысль, 1970. 280 с.
28. Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1979. 744 с.
29. Победря Б.Е. Механика композиционных материалов. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1984. 336 с.
30. Лурье А.И. Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.
31. Поздеев А.А., Трусов П.В., Няшин Ю.И. Большие упругопластические деформации. М.: Наука, 1986. 232 с.
32. Левитас В.И. Большие упругопластические деформации материалов при высоком давлении. Киев: Наукова думка. 1987. 231 с.
33. Сьярле Ф. Математическая теория упругости. М.: Мир, 1992. 471 с.
34. Черных К.Ф. Нелинейная упругость (теория и приложения). СПб: Соло, 2004. 420 с.
35. Antman S.S. Nonlinear problems of elasticity. Springer, New York, 2005.
36. Бровко Г.Л. Развитие математического аппарата и основ общей теории определяющих соотношений механики сплошной среды. Автореф. дисс. … д-ра физ.-мат. наук. М.: АО «Диалог МГУ», 1996. 32 с.
37. Brovko G.L. Invariance Types of Tensors, Tensor Processes and Their Transforms in Classical Continuum Mechanics. In: Proc. of the Fifth Int. Seminar on Geometry, Continuum and Microstructures. Sept. 26-28, 2001, Sinaia, Romania. Eds: S.Cleja-Tigoiu, V.Tigoiu. Editura Academiei Romane. Bucuresti, 2002. Pp. 13–24.
38. Бровко Г.Л. Эффективные свойства инвариантности процессов и соотношений в механике сплошных сред. В кн.: Современные проблемы математики и механики. Т. II. Механика. Вып. 1. М.: Изд-во Моск. ун-та, 2009. С. 108–126.
39. Brovko G.L. On general principles of the theory of constitutive relations in classical continuum mechanics. Journ. Eng. Mathematics. Kluwer Academic Publishers. Printed in Netherlands. (2013) 78:37–53. DOI 10.1007/s10665-011-9508-y
40. Cotter B.A., Rivlin R.S. Tensors assotiated with time-dependent stress. Quart. Appl. Math. 1955. V. 13. No 2. Pp. 177–188.
41. Oldroyd J.G. On the formulation of rheological equations of state. Proc. Roy. Soc. London. A. 1950. V. 200. Pp. 523–541.
42. Седов Л.И. Понятие разных скоростей изменения тензоров. ПММ. 1960 Т. 24. Вып. 3. С. 393–398.
43. Dienes J.K. On the analysis of rotation and stress rate in deforming bodies. Acta Mech. 1979. V. 32. No 4. Pp. 217–232.
44. Бровко Г.Л. Свойства и интегрирование некоторых производных по времени от тензорных процессов в механике сплошной среды. Известия АН СССР. Механика твердого тела. 1990. № 1. С. 54–60.
45. Seth B.R. Generalized strain measures with applications to physical problems. In: Second Order Effects in Elasticity, Plasticity and Fluid Dynamics (Edited by M.Reiner and D.Abir). Oxford: Pergamon Press, 1964. Pp. 162–172.
46. Hill R. Aspects of invariance in solid mechanics. Advances in Appl. Mech. N.-Y. - L.: Acad. Press. 1978. V.18. Pp. 1–75.
47. Маркин А.А., Толоконников Л.А. Меры и определяющие соотношения конечного упругопластического деформирования. Прикладные проблемы прочности и пластичности.

Всесоюзный межвуз. сб. Горький: Изд-во Горьковского ун-та, 1987. С. 32–37.

48. Бровко Г.Л. Некоторые подходы к построению определяющих соотношений пластичности при больших деформациях. В кн.: Упругость и неупругость. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1987. С. 68 – 81.
49. Маркин А.А. Вариант определяющих соотношений и постановка граничных задач при конечных упругопластических деформациях. Автореф. дисс. ... д-ра физ.-мат. наук. М.: 1988. 38 с.
50. Бровко Г.Л. Понятия образа процесса и пятимерной изотропии свойств материалов при конечных деформациях. Докл. АН СССР. 1989. Т. 308. № 3. С. 565–570.
51. Lehmann Th., Liang H.Y. The stress conjugate to the logarithmic strain ln V. Z. Angew. Math. Mech. 1993. V. 73. Pp. 357–363.
52. Бровко Г.Л. Об одном семействе голономных тензорных мер деформаций и напряжений. Вестн. Моск. ун-та. Матем., механ. 1992. № 4. с. 86–91.
53. Бровко Г.Л., Ильюшин А.А. Модели и определяющие эксперименты в теории упругопластических процессов при конечных деформациях. В кн.: А.А.Ильюшин. Труды. Т. 4. Моделирование динамических процессов в твердых телах и инженерные приложения. М.: Физматлит, 2009. С. 148–159.
54. Бровко Г.Л. Материальные и пространственные представления определяющих соотношений деформируемых сред // ПММ. 1990. Т. 54. Вып. 5. С. 814–824. 166.
55. Бровко Г.Л., Финошкина А.С. Отображения объективных тензорных процессов и модели пластического течения при конечных деформациях. В кн.: Упругость и неупругость. Материалы Международного научного симпозиума по проблемам механики деформируемых тел, посвященного девяностолетию со дня рождения А.А.Ильюшина. М.: Изд-во Моск. ун-та, 2001. С. 423–424. (Автору принадлежит разработка моделей пластического течения при конечных деформациях, соавтору – описание отображений объективных тензорных процессов и постановка задачи).
56. Финошкина А.С. Использование новых объективных производных в простейших моделях гипоупругости и пластического течения с кинематическим упрочнением // Известия ТулГУ. Серия Математика. Механика. Информатика. 2000. Т. 6. Вып. 2. С. 160–166.
57. Финошкина А.С. Моделирование пластического течения с кинематическим упрочнением при конечных деформациях. В кн.: Всероссийская научная конференция «Современные проблемы математики, механики, информатики» (тезисы докладов). ТулГУ, Тула, 2002. С. 149.
58. Finoshkina A.S. Usage of the new objective derivatives in models of plasticity at finite strain: the theory and numerical experiments. V International Congress on Mathematical Modeling: Book of Abstracts, Vol. 1, JINR, Dubna, 2002. С. 35.
59. Шуткин А.С. Подходы к обобщению определяющих соотношений деформируемых твердых тел на область конечных деформаций. Механика композиционных материалов и конструкций. 2010. Т. 16. № 2. С. 166–180.
60. Бровко Г.Л., Шуткин А.С. Модели материалов с памятью формы при конечных деформациях. Упругость и неупругость. Материалы международного научного симпозиума, посвященного 100-летию со дня рождения А.А. Ильюшина (Москва, 20–21 января 2011 г.). М.: Изд-во Моск. ун-та, 2011. С. 129–133.